О. Л. Виноградов

ТОЧНОЕ НЕРАВЕНСТВО ДЛЯ ОТКЛОНЕНИЯ СУММ РОГОЗИНСКОГО И ВТОРОГО МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§1. Введение

1. Обозначения. В дальнейшем C – пространство 2π-периодических непрерывных вещественнозначных функций f с нормой $\|f\| = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$; H_n – множество тригонометрических многочленов порядка не выше n; $f_x(t) = f(x+t)$ – сдвиг функции f на число x; $f_c(t) = \frac{f(t)+f(-t)}{2}$ – четная часть функции f; P – полунорма, заданная на подпространстве $\mathfrak{M}$ пространства C и удовлетворяющая условиям: а) для любых $f \in \mathfrak{M}$ и $x \in \mathbb{R}$ функция $f_x \in \mathfrak{M}$ и $P(f_x) = P(f)$ и б) существует такая постоянная M, что для всех $f \in \mathfrak{M}$ будет $P(f) \leqslant M\|f\|$; $\delta_t^2(f,x) = f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)$ – центральная разность второго порядка функции f с шагом t в точке x; $\omega_2(f,h)_P = \sup\limits_{|t|\leqslant h} P(\delta_t^2(f))$ – второй модуль непрерывности функции $f \in \mathfrak{M}$ с шагом h относительно полунормы P; $E_n(f) = \inf\limits_{T\in H_n} \|f - T\|$ – наилучшее приближение порядка n функции $f \in C$; отсутствие индекса P означает, что $(\mathfrak{M}, P) = (C, \|\cdot\|)$; кроме того, будем употреблять символы $\|f\|$ и $\omega_2(f,h)$ и для разрывных функций f в том же смысле. Далее, $\sum\limits_{k=l}^{m}{}' a_k = \frac{a_l}{2} + \sum\limits_{k=l+1}^{m} a_k$; $\sum\limits_{k=l}^{m}{}'' a_k = \frac{a_l}{2} + \sum\limits_{k=l+1}^{m-1} a_k + \frac{a_m}{2}$; $\sum\limits_{k=l}^{m} \varphi(x) = \sum\limits_{k=l}^{m} \varphi(\frac{k}{n})$; если φ не определена, но имеет предел, скажем в нуле, то под $\varphi(0)$ понимается $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x)$;

$$R_n(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n}{}' \cos\frac{k\pi}{2(n+1)} \cos kt = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\frac{\pi}{2(n+1)} \cos{(n+1)t}}{\cos t - \cos\frac{\pi}{2(n+1)}}$$

– ядро Рогозинского порядка n; $\mathcal{R}_n(f,x) = \int\limits_{\pi}^{\pi} f_x R_n$ – сумма Рогозинского порядка n функции f;

$$S_h(t) = \begin{cases} \frac{1}{h}\left(1 - \frac{|t|}{h}\right), & \text{если } |t| \leqslant h \\ 0, & \text{если } h \leqslant |t| \leqslant \pi \end{cases}$$

– ядро функции Стеклова второго порядка с шагом h; числа Бернулли B_n определяются равенством $\frac{t}{e^t-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$; $B_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k B_k x^{n-k}$ – многочлены Бернулли; $\operatorname{Si} x = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ – интегральный синус; $[x]$ – целая часть числа x; $G = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{x}{\sin x} dx = 0,915965594\ldots$ – постоянная Каталана.

2. Обзор результатов. Величину

$$D(U,h)_P = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \frac{P(U(f)-f)}{\omega_2(f,h)_P}$$

($\frac{0}{0}$ считается равным нулю), где $U : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, $h > 0$, принято называть точной постоянной в неравенстве

$$P(U(f)-f) \leqslant K\omega_2(f,h)_P.$$

Если $U_n : \mathfrak{M} \to H_n$, $\gamma > 0$, то неравенства вида

$$P(U_n(f)-f) \leqslant K\omega_2\Big(f, \frac{\gamma\pi}{n+1}\Big)_P \tag{1}$$

называют неравенствами типа Джексона (для второго модуля непрерывности). В этом случае может ставиться вопрос о нахождении константы в неравенстве (1), точной для всех n одновременно, т.е. величины $\sup\limits_{n \in \mathbb{Z}_+} D(U_n, \frac{\gamma\pi}{n+1})_P$. Ранее автором [1,2] были получены константы $D(U_n,h)$ для некоторых положительных операторов U_n. Что касается нахождения констант, точных для всех n одновременно, то известен лишь единственный такой результат. В 1974 году В. В. Жук [3] получил неравенство

$$\|f - V_n(f)\| \leqslant 1 \cdot \omega_2\Big(f, \frac{\pi}{2(n+1)}\Big) \tag{2}$$

(V_n – некоторый линейный оператор из C в H_n). Позже В. В. Шалаев [4] обнаружил, что константа 1 является точной для всех n одновременно не только в неравенстве (2), но и в неравенстве

$$E_n(f) \leqslant 1 \cdot \omega_2\Big(f, \frac{\pi}{2(n+1)}\Big), \tag{3}$$

а именно:

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\sup_{f\in C}\frac{E_n(f)}{\omega_2(f,\frac{\pi}{2(n+1)})} = \sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\sup_{f\in C}\frac{\|f-V_n(f)\|}{\omega_2(f,\frac{\pi}{2(n+1)})} = 1.$$

Таким образом, точная константа 1 в неравенстве (3) реализуется последовательностью линейных операторов $\{V_n\}$.

В той же работе [3] тем же способом (путем добавления и вычитания второй функции Стеклова) В. В. Жук получил неравенство

$$\|\mathcal{R}_n(f) - f\| \leqslant \frac{5}{8}\,\omega_2\Big(f, \frac{\pi}{n+1}\Big) \tag{4}$$

и впоследствии перенес оценки на случай произвольного пространства $(\mathfrak{M}, P)$. (Упомянутые результаты содержатся также в монографии [5].) Положим $D_n = D(\mathcal{R}_n, \frac{\pi}{n+1})$. Очевидно, что $D_0 = 1/2$. В настоящей работе показано, что константа 5/8 не является точной в неравенстве (4). Для величин D_n при $n \geqslant 2$ установлены оценки вида $C'_n \leqslant D_n \leqslant C_n$, такие что $\lim\limits_{n\to\infty} C'_n = \lim\limits_{n\to\infty} C_n = \sup\limits_{n\geqslant 2} C_n = D$ и вычислено D. Приведено (без доказательства) найденное значение D_1. Константа D является точной для всех n одновременно в неравенстве (4). Оценки для $D(\mathcal{R}_n, \frac{\pi}{n+1})_P$ сверху верны для любого пространства $(\mathfrak{M}, P)$ с описанными свойствами.

§2. Вспомогательные результаты

В этом параграфе приводятся все соотношения, необходимые в дальнейшем для доказательства неравенств.

1. Пусть $n \geqslant 3$; везде в дальнейшем полагаем $h = \pi/n$. Нам понадобится четная 2π-периодическая функция q_n, определенная на $[0, \pi]$ равенством

$$q_n(t) = \frac{n^2}{\pi}\left(\left(\frac{t}{2\pi}\right)^2 - \frac{t}{2\pi} + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{48\pi} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\cos\frac{k\pi}{2n}}{4\sin^2\frac{k\pi}{2n}}\cos kt.$$

Перечислим некоторые известные свойства функции q_n.

1.1. Функция q_n представляет собой разность между периодически продолженным с отрезка $[0, 2\pi]$ на $\mathbb{R}$ вторым многочленом Бернулли $B_2(\frac{t}{2\pi})$ и интерполирующим его в узлах $(k+1/2)h$ ($k = \overline{0, n-1}$) четным тригонометрическим многочленом порядка $n-1$, так что $\operatorname{sign} q_n(t) = \operatorname{sign} \cos nt$. На отрезке $[0, h/2]$ функция q_n убывает; на $[h/2, 3h/2]$ – имеет единственную точку минимума и не имеет точек максимума, а на $[3h/2, 5h/2]$ – единственную точку максимума и не имеет точек минимума. Последнее легко доказывается с помощью теоремы Ролля; подробности см. в [5], с. 78–80.

1.2. $\delta_h^2(q_n) = R_{n-1} - S_h$

1.3. $\int\limits_{\pi}^{\pi} |q_n| = \frac{1}{8}$

Доказательства этих свойств можно найти, например, в [5], с. 144–149, 80–85, где функция q_n использовалась при оценке отклонения оператора Ахиезера–Крейна–Фавара с номером 2.

2. Обозначим $g_n(u) = \frac{4\pi}{n} q_n(\frac{u}{n})$. Установим некоторые свойства функции g_n.

2.1. $\operatorname{sign} g_n(u) = \operatorname{sign} \cos u$; на отрезке $[0, \pi/2]$ функция g_n убывает; на $[\pi/2, 3\pi/2]$ – имеет единственную точку минимума и не имеет точек максимума, а на $[3\pi/2, 5\pi/2]$ – единственную точку максимума и не имеет точек минимума.

2.2. $\delta_\pi^2(g_n, u) = \frac{4\pi}{n} R_{n-1}(\frac{u}{n}) - \frac{4\pi}{n} S_h(\frac{u}{n})$

Эти свойства являются простой переформулировкой свойств 1.1 и 1.2. Следующие равенства получаются непосредственными вычислениями.

2.3. При $u \in [0, \pi n]$

$$g_n(u) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n}{}'' \frac{1 - \cos \frac{\pi x}{2} \cos ux}{\sin^2 \frac{\pi x}{2}} - \frac{2u}{\pi}.$$

2.3.1. При $u \in [0, \pi/2]$

$$g_n(u) = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n}{}'' \frac{1 - \cos(\frac{\pi}{2} + u)x}{\sin^2 \frac{\pi x}{2}} + \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n}{}'' \frac{1 - \cos(\frac{\pi}{2} - u)x}{\sin^2 \frac{\pi x}{2}} - \frac{2u}{\pi}.$$

2.3.2. При $\varepsilon \in [0, \pi/2]$

$$g_n(\pi \mp \varepsilon) =$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}{}'' \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2} \mp \varepsilon\right)x}{\sin^2 \frac{\pi x}{2}} \mp \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}{}'' \frac{\sin \varepsilon x}{\sin \frac{\pi x}{2}} + \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n}{}'' \cos\left(\tfrac{\pi}{2} \mp \varepsilon\right)x - 2 \pm \frac{2\varepsilon}{\pi}.$$

2.3.3. При $\tau \in [0, \pi/2]$

$$g_n(2\pi - \tau) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}{}'' \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right)x}{\sin^2 \frac{\pi x}{2}} - \frac{3}{n}\sum_{k=0}^{n}{}'' \frac{\sin \tau x}{\sin \frac{\pi x}{2}} +$$
$$+ \frac{6}{n}\sum_{k=0}^{n}{}'' \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \tau\right)x + \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n}{}'' \cos\left(\tfrac{3\pi}{2} - \tau\right)x - 4 + \frac{2\tau}{\pi}.$$

3.1. Соотношения п.2.3 позволяют написать для g_n приближенные формулы с аккуратной оценкой остатка. Обозначим $\varphi_1(x) = \frac{\sin \varepsilon x}{\sin \frac{\pi x}{2}}$ ($\varepsilon \in [0, \pi/2]$), $\varphi_2(x) = \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)x}{\sin^2 \frac{\pi x}{2}}$ ($\varepsilon \in [-\pi/2, \pi/2]$). С помощью разложения в ряд Тейлора несложно установить, что при $x \in [0, 1]$ все производные функций φ_1 и φ_2 неотрицательны. Воспользуемся формулой Эйлера–Маклорена (см.[6], с.215, 218):

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}{}'' \varphi(x) = \int_0^1 \varphi + \frac{\varphi'(1) - \varphi'(0)}{12n^2} - r(\varphi),$$

причем, если $\varphi \in C^{(6)}[0, 1]$ и $\varphi^{(4)}, \varphi^{(6)} \geqslant 0$, то для остаточного члена $r(\varphi)$ верна оценка

$$0 \leqslant r(\varphi) \leqslant \frac{\varphi'''(1) - \varphi'''(0)}{720n^4}.$$

Для функций φ_1 и φ_2 имеем:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}{}'' \varphi_1(x) = I(\varepsilon) + \frac{\varepsilon \cos \varepsilon}{12n^2} - \rho_1(\varepsilon),$$

где $\quad I(\varepsilon) = \int\limits_0^1 \frac{\sin \varepsilon x}{\sin \frac{\pi x}{2}}\, dx; \qquad 0 \leqslant \rho_1(\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon \cos \varepsilon \left(\frac{3\pi^2}{4} - \varepsilon^2\right)}{720n^4};$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}{}'' \varphi_2(x) = \frac{2}{\pi}\cos \varepsilon - \left(1 - \frac{2\varepsilon}{\pi}\right) I(\varepsilon) + \frac{1}{12n^2}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\cos \varepsilon - \rho_2(\varepsilon),$$

где $0 \leqslant \rho_2(\varepsilon) \leqslant \frac{\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)\cos\varepsilon(3\pi^2-2(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)^2)}{720n^4}$.

3.2. Приведем ряд соотношений для функции $I(\varepsilon)$ $(\varepsilon \in [0, \pi/2])$.

$$I(0) = 0; \quad I(\frac{\pi}{2}) = 1; \quad I(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\pi}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1};$$
$$I(\frac{\pi}{8}) = \frac{1}{\pi}\left(\sqrt{2}\ln\frac{1+\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}}{1-\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}} - \ln\frac{1+\sin\frac{\pi}{8}}{1-\sin\frac{\pi}{8}}\right).$$

Функция I неотрицательна, возрастает и выпукла вверх. По неравенству Чебышёва

$$I(\varepsilon) = \int_0^1 \frac{\sin\varepsilon x}{x}\frac{x}{\sin\frac{\pi x}{2}}\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{\sin\varepsilon x}{x}\,dx \int_0^1 \frac{x}{\sin\frac{\pi x}{2}}\,dx = \frac{8}{\pi^2}G\,\mathrm{Si}\,\varepsilon.$$

3.3. Как известно,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}{}'' \cos zx = \frac{\sin z}{2n}\operatorname{ctg}\frac{z}{2n}.$$

Воспользуемся тейлоровским разложением котангенса:

$$\frac{1}{2n}\operatorname{ctg}\frac{z}{2n} = \frac{1}{z} - \frac{z}{12n^2} - \frac{z^3}{720n^4} - \frac{1}{2n}\rho\Big(\frac{z}{2n}\Big),$$

где $\rho(s) = \frac{1}{s} - \operatorname{ctg}s - \frac{s}{3} - \frac{s^3}{45} \geqslant 0$ и возрастает при $s \in [0, \pi)$ (это следует из неотрицательности тейлоровских коэффициентов функции $1/s - \operatorname{ctg}s$). Значит, при $\varepsilon \in [0, \pi/2]$, $n \geqslant 3$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}{}'' \cos(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)x =$$
$$= \frac{\cos\varepsilon}{\pi/2-\varepsilon} - \frac{1}{12n^2}(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)\cos\varepsilon - \frac{1}{720n^4}(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)^3\cos\varepsilon - \rho_3(\varepsilon),$$

где $0 \leqslant \rho_3(\varepsilon) = \frac{\cos\varepsilon}{2n}\rho\big(\frac{\pi/2-\varepsilon}{2n}\big)$;

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}{}'' \cos(\frac{3\pi}{2}-\varepsilon)x =$$
$$= -\frac{\cos\varepsilon}{3\pi/2-\varepsilon} + \frac{1}{12n^2}(\frac{3\pi}{2}-\varepsilon)\cos\varepsilon + \frac{1}{720n^4}(\frac{3\pi}{2}-\varepsilon)^3\cos\varepsilon + \rho_4(\varepsilon),$$

где $0 \leqslant \rho_4(\varepsilon) = \frac{\cos\varepsilon}{2n}\rho\big(\frac{3\pi/2-\varepsilon}{2n}\big)$;

$$\frac{2\pi}{n}R_{n-1}\Big(\frac{\pi-u}{n}\Big) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}{}'' \cos\big(\tfrac{\pi}{2}-u\big)x + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}{}'' \cos\big(\tfrac{3\pi}{2}-u\big)x =$$
$$= \frac{\cos u}{\pi/2-u} - \frac{\cos u}{3\pi/2-u} + \frac{\pi\cos u}{12n^2} + \rho_5(u),$$

где $u \in [0,\pi/2]$, $\rho_5(u) = \frac{\cos u}{720n^4}\big((\frac{3\pi}{2}-u)^3 - (\frac{\pi}{2}-u)^3\big) + \rho_4(u) - \rho_3(u) \geqslant 0$, $\rho_5(u) = O(1/n^4)$.

3.4. Подставим полученные результаты в формулы п.2.3.

3.4.1. При $u \in [0,\pi/2]$

$$g_n(u) = \frac{2}{\pi}\cos u + \frac{2u}{\pi}I(u) - \frac{2u}{\pi} + \frac{1}{12n^2}\frac{\pi}{2}\cos u - \frac{1}{2}(\rho_2(u)+\rho_2(-u)).$$

3.4.2. При $\varepsilon \in [0,\pi/2]$

$$g_n(\pi\mp\varepsilon) = \frac{2}{\pi}\cos\varepsilon \mp 2\big(1\mp\frac{\varepsilon}{\pi}\big)I(\varepsilon) + \frac{2\cos\varepsilon}{\pi/2\mp\varepsilon} - 2 \pm \frac{2\varepsilon}{\pi} -$$
$$-\frac{1}{12n^2}\frac{\pi}{2}\cos\varepsilon - \frac{2}{720n^4}\big(\frac{\pi}{2}\mp\varepsilon\big)^3\cos\varepsilon - \rho_2(\pm\varepsilon) \pm \rho_1(\varepsilon) - 2\rho_3(\pm\varepsilon).$$

3.4.3. При $\tau \in [0,\pi/2]$

$$g_n(2\pi-\tau) = \frac{2}{\pi}\cos\tau - 2\big(2-\frac{\tau}{\pi}\big)I(\tau) + 6\frac{\cos\tau}{\pi/2-\tau} - 2\frac{\cos\tau}{3\pi/2-\tau} -$$
$$-4 + \frac{2\tau}{\pi} + \frac{1}{12n^2}\frac{\pi}{2}\cos\tau + \frac{1}{720n^4}\Big(-6\big(\frac{\pi}{2}-\tau\big)^3 + 2\big(\frac{3\pi}{2}-\tau\big)^3\Big)\cos\tau -$$
$$-\rho_2(\tau) + 3\rho_1(\tau) - 6\rho_3(\tau) + 2\rho_4(\tau).$$

§3. Формула для отклонения сумм Рогозинского

Цель этого параграфа состоит в том, чтобы подходящим образом представить разность $\mathcal{R}_n(f) - f$ в виде суммы интегралов, содержащих вторые разности функции f с шагом, не превосходящим h, и установить некоторые свойства такого представления.

1. Пользуясь формулой п.1.2 §2, запишем тождество:

$$A_1 = 2\int_{2h}^{\pi} \delta_h^2(f_c)q_n = 2\int_{3h}^{\pi} f_c\delta_h^2(q_n) + 2\int_{2h}^{3h} f_c(t)(\delta_h^2(q_n,t) -$$

$$-q_n(t-h))\,dt + 2\int\limits_h^{2h} f_c(t)(\delta_h^2(q_n,t) + 2q_n(t) - q_n(t-h))\,dt =$$

$$= 2\int\limits_{3h}^{\pi} f_c R_{n-1} + 2\int\limits_{2h}^{3h} f_c(t)(R_{n-1}(t) - q_n(t-h))\,dt +$$

$$+2\int\limits_h^{2h} f_c(t)(R_{n-1}(t) + 2q_n(t) - q_n(t-h))\,dt.$$

Значит,

$$\int\limits_{\pi}^{\pi} f R_{n-1} = A_1 + 2\int\limits_0^{3h} f_c Q_1, \qquad (5)$$

где функция Q_1 определяется формулами:

$$Q_1(t) = \begin{cases} R_{n-1}(t), & \text{если } t \in [0,h] \\ -2q_n(t) + q_n(t-h), & \text{если } t \in (h,2h) \\ q_n(t-h), & \text{если } t \in (2h,3h). \end{cases}$$

Отметим, что $Q_1(t) \geqslant 0$ при $t \in [0, 3h/2)$ и при $t \in (5h/2, 3h)$ и $Q_1(t) \leqslant 0$ при $t \in (3h/2, 5h/2)$.

2. Займемся вторым слагаемым в (5). Следующие три равенства легко проверяются заменой переменной в интеграле.

$$\begin{aligned}
A_2 =&\frac{4}{3}\int\limits_{2h}^{35h/16} \delta^2_{5h/3-h/8-t/3}(f_c,t)Q_1(\frac{2t}{3}+\frac{5h}{3}-\frac{h}{8})\,dt=\\
=&2\int\limits_{23h/8}^{3h} f_cQ_1-\frac{8}{3}\int\limits_{2h}^{35h/16} f_c(t)Q_1(\frac{2t}{3}+\frac{5h}{3}-\frac{h}{8})\,dt+\\
&+\int\limits_{9h/8}^{11h/8} f_c(t)Q_1(\frac{t}{2}+\frac{5h}{2}-\frac{3h}{16})\,dt;\\
A_3 =&2\int\limits_{15h/8}^{2h} \delta^2_{7h/8}(f_c,t)Q_1(t+\frac{7h}{8})\,dt=\\
=&2\int\limits_{11h/4}^{23h/8} f_cQ_1-4\int\limits_{15h/8}^{2h} f_c(t)Q_1(t+\frac{7h}{8})\,dt+2\int\limits_{h}^{9h/8} f_c(t)Q_1(t+\frac{7h}{4})\,dt;\\
A_4 =&2\int\limits_{7h/4}^{2h} \delta^2_{3h/4}(f_c,t)Q_1(t+\frac{3h}{4})\,dt=\\
=&2\int\limits_{5h/2}^{11h/4} f_cQ_1-4\int\limits_{7h/4}^{2h} f_c(t)Q_1(t+\frac{3h}{4})\,dt+2\int\limits_{h}^{5h/4} f_c(t)Q_1(t+\frac{3h}{2})\,dt.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$2\int\limits_0^{3h} f_cQ_1=A_2+A_3+A_4+2\int\limits_0^{5h/2} f_cQ_2,$$

где

$$Q_2(t) =$$

$$\begin{cases} Q_1(t), \quad \text{если } t \in [0,h] \cup (11h/8, 7h/4) \cup (35h/16, 5h/2) \\ Q_1(t) - Q_1(t + \frac{7h}{4}) - Q_1(t + \frac{3h}{2}), \quad \text{если } t \in (h, 9h/8) \\ Q_1(t) - \frac{1}{2}Q_1(\frac{t}{2} + \frac{5h}{2} - \frac{3h}{16}) - Q_1(t + \frac{3h}{2}), \quad \text{если } t \in (9h/8, 5h/4) \\ Q_1(t) - \frac{1}{2}Q_1(\frac{t}{2} + \frac{5h}{2} - \frac{3h}{16}), \quad \text{если } t \in (5h/4, 11h/8) \\ Q_1(t) + 2Q_1(t + \frac{3h}{4}), \quad \text{если } t \in (7h/4, 15h/8) \\ Q_1(t) + 2Q_1(t + \frac{3h}{4}) + 2Q_1(t + \frac{7h}{8}), \quad \text{если } t \in (15h/8, 2h) \\ Q_1(t) + \frac{4}{3}Q_1(\frac{2t}{3} + \frac{5h}{3} - \frac{h}{8}), \quad \text{если } t \in (2h, 35h/16). \end{cases}$$

Функция Q_2 неположительна на промежутке $(3h/2, 5h/2)$. На промежутках $(3h/2, 7h/4)$ и $(35h/16, 5h/2)$ Q_2 совпадает с Q_1 и, следовательно, неположительна. Для установления знака Q_2 на оставшихся промежутках и доказательства формулируемых далее неравенств используется следующий метод. Исследуемая величина выражается через функции g_n, R_{n-1} и S_h, к которым затем применяются приближенные формулы §2. Далее подобные члены (с 1, $1/n^2$, $1/n^4$ и остатки) группируются, каждое слагаемое оценивается отдельно, и полученные оценки складываются. Установление подобных неравенств представляет собой технически самую трудную и громоздкую часть доказательства. В связи с последним обстоятельством они приводятся без доказательства.

3. Поскольку

$$A_5 = 2 \int\limits_h^{3h/2} \delta_h^2(f_c, t) Q_2(t+h)\, dt =$$

$$= 2 \int\limits_{2h}^{5h/2} f_c Q_2 - 4 \int\limits_h^{3h/2} f_c(t) Q_2(t+h)\, dt + 2 \int\limits_0^{h/2} f_c(t) Q_2(t+2h)\, dt,$$

то

$$2\int\limits_0^{5h/2} f_c Q_2 = A_5 + 2\int\limits_0^{2h} f_c Q_3,$$

где

$$Q_3(t) = \begin{cases} Q_2(t) - Q_2(t+2h), & \text{если } t \in [0, h/2) \\ Q_2(t), & \text{если } t \in (h/2, h) \cup (3h/2, 2h) \\ Q_2(t) + 2Q_2(t+h), & \text{если } t \in (h, 3h/2). \end{cases}$$

Ядро Q_3 обладает следующими свойствами.

3.1. $Q_3(t) \geqslant 0$ при $t \in (0, 3h/2)$; $Q_3(t) \leqslant 0$ при $t \in (3h/2, 2h)$.

3.2. $\int\limits_h^{5h/4} Q_3 + 2\int\limits_{3h/2}^{2h} Q_3 \geqslant 0.$

4. Положим при $t \in [h, 5h/4]$, $s \in [3h/2 - t, 2h - t]$

$$K(s,t) = -\frac{Q_3(s+t)Q_3(t)}{\int\limits_h^{5h/4} Q_3}.$$

Очевидно, что $K(s,t) \geqslant 0$. Делая замену переменной в интеграле и меняя порядок интегрирования, получим:

$$A_6 = -2\int\limits_h^{5h/4}\int\limits_{3h/2-t}^{2h-t} \delta_s^2(f_c, t)K(s,t)\,ds\,dt =$$

$$= 2\int\limits_h^{5h/4}\Bigg(-\int\limits_{2t-2h}^{2t-3h/2} f_c(s)K(t-s,t)\,ds +$$

$$+2\int\limits_{3h/2-t}^{2h-t} f_c(t)K(s,t)\,ds - \int\limits_{3h/2}^{2h} f_c(s)K(s-t,t)\,ds\Bigg)dt =$$

$$= -2\int\limits_0^{h/2} f_c(s)\int\limits_h^{h+s/2} K(t-s,t)\,dt\,ds -$$

$$-2\int\limits_{h/2}^{h} f_c(s)\int\limits_{3h/4+s/2}^{5h/4} K(t-s,t)\,dt\,ds+$$

$$+4\int\limits_{h}^{5h/4} f_c(t)\int\limits_{3h/2-t}^{2h-t} K(s,t)\,ds\,dt+2\int\limits_{3h/2}^{2h} f_cQ_3.$$

Таким образом,

$$2\int\limits_{0}^{2h} f_cQ_3=A_6+2\int\limits_{0}^{3h/2} f_cQ_4,$$

где

$$Q_4(t)=Q_3(t)+\begin{cases}\int\limits_{h}^{h+t/2} K(s-t,s)\,ds, & \text{если } t\in(0,h/2)\\ \int\limits_{3h/4+t/2}^{5h/4} K(s-t,s)\,ds, & \text{если } t\in(h/2,h)\\ -2\int\limits_{3h/2-t}^{2h-t} K(s,t)\,ds, & \text{если } t\in(h,5h/4)\\ 0, & \text{если } t\in(5h/4,3h/2).\end{cases}$$

Проверим, что $Q_4(t)\geqslant 0$. При $t\notin(h,5h/4)$ это очевидно в силу неотрицательности Q_3 и K. При $t\in(h,5h/4)$ имеем:

$$Q_4(t)=Q_3(t)+2\int\limits_{3h/2-t}^{2h-t} Q_3(s+t)\frac{Q_3(t)}{\int\limits_{h}^{5h/4} Q_3}\,ds=$$

$$=Q_3(t)\left(1+\frac{2\int\limits_{3h/2}^{2h} Q_3}{\int\limits_{h}^{5h/4} Q_3}\right)\geqslant 0$$

в силу свойства 3.2 функции Q_3.

5. Сложив равенства

$$A_7 = 6\int\limits_{h/3}^{h/2} \delta_{2t}^2(f_c,t)Q_4(3t)\,dt = 2\int\limits_{h}^{3h/2} f_cQ_4 - 6\int\limits_{h/3}^{h/2} f_c(t)Q_4(3t)\,dt;$$

$$A_8 = 3\int\limits_{h/3}^{h/2} \delta_t^2(f,0)Q_4(3t)\,dt = 6\int\limits_{h/3}^{h/2} f_c(t)Q_4(3t)\,dt - 2\int\limits_{h}^{3h/2} Q_4\,f(0);$$

$$A_9 = \int\limits_0^h \delta_t^2(f,0)Q_4(t)\,dt = 2\int\limits_0^h f_cQ_4 - 2\int\limits_0^h Q_4\,f(0),$$

получим, что

$$2\int\limits_0^{3h/2} f_cQ_4 - f(0) = A_7 + A_8 + A_9.$$

При этом используется тот факт, что $2\int\limits_0^{3h/2} Q_4 = 1$, в чем можно убедиться, применив равенство

$$\int\limits_{\pi}^{\pi} fR_{n-1} = \sum_{k=1}^{6} A_k + 2\int\limits_0^{3h/2} f_cQ_4$$

к функции $f \equiv 1$.

Итак, нами доказана

Лемма. *Для всех $n \geqslant 3$, $f \in C$ справедливо равенство*

$$\mathcal{R}_{n-1}(f,0) - f(0) = 2\int\limits_{2h}^{\pi} \delta_h^2(f_c)q_n +$$

$$+\frac{4}{3}\int\limits_{2h}^{35h/16} \delta_{5h/3-h/8-t/3}^2(f_c,t)Q_1\left(\tfrac{2t}{3} + \tfrac{5h}{3} - \tfrac{h}{8}\right)dt +$$

$$+2\int\limits_{15h/8}^{2h} \delta_{7h/8}^2(f_c,t)Q_1\left(t + \tfrac{7h}{8}\right)dt + 2\int\limits_{7h/4}^{2h} \delta_{3h/4}^2(f_c,t)Q_1\left(t + \tfrac{3h}{4}\right)dt +$$

$$+2\int\limits_{h}^{3h/2}\delta_h^2(f_c,t)Q_2(t+h)\,dt-2\int\limits_{h}^{5h/4}\int\limits_{3h/2-t}^{2h-t}\delta_s^2(f_c,t)K(s,t)\,ds\,dt+$$

$$+6\int\limits_{h/3}^{h/2}\delta_{2t}^2(f_c,t)Q_4(3t)\,dt+3\int\limits_{h/3}^{h/2}\delta_t^2(f,0)Q_4(3t)\,dt+\int\limits_{0}^{h}\delta_t^2(f,0)Q_4(t)\,dt.$$

При этом функции, стоящие под знаком интеграла рядом со вторыми разностями в правой части равенства, имеют на промежутках интегрирования следующие знаки: $\operatorname{sign} q_n(t) = \operatorname{sign}\cos nt$, $Q_2(t+h)\leqslant 0$, *а все остальные неотрицательны.*

§4. Оценки для констант $D(\mathcal{R}_{n-1},\frac{\pi}{n})_P$

1. Оценка сверху. Заметим, что правая часть леммы содержит под знаком интеграла вторые разности функции f с шагом, не превосходящим h. Возьмем $f\in\mathfrak{M}$ и применим лемму к функции f_x, учитывая равенство $\mathcal{R}_{n-1}(f_x,0)-f_x(0)=\mathcal{R}_{n-1}(f,x)-f(x)$. Для дальнейшей оценки нам понадобится следующий факт (см.[5], с. 59): если $\varphi\in\mathfrak{M}$, F суммируема на $[a,b]$, $\psi(x)=\int\limits_a^b\varphi_x F$, то $\psi\in\mathfrak{M}$ и для любой полунормы P из п.1 §1 будет

$$P(\psi)\leqslant\int\limits_a^b|F|\,P(\varphi).$$

Пользуясь им, неравенством треугольника для полунормы P и определением модуля непрерывности, получаем неравенство

$$P(\mathcal{R}_{n-1}(f)-f)\leqslant C_{n-1}\omega_2(f,h)_P, \tag{6}$$

где

$$C_{n-1}=2\int\limits_{2h}^{\pi}|q_n|+\frac{4}{3}\int\limits_{2h}^{35h/16}Q_1\Big(\frac{2t}{3}+\frac{5h}{3}-\frac{h}{8}\Big)\,dt+$$

$$+2\int\limits_{15h/8}^{2h}Q_1\Big(t+\frac{7h}{8}\Big)\,dt+2\int\limits_{7h/4}^{2h}Q_1\Big(t+\frac{3h}{4}\Big)\,dt-$$

$$-2\int\limits_{h}^{3h/2} Q_2(t+h)\,dt + 2\int\limits_{h}^{5h/4}\int\limits_{3h/2-t}^{2h-t} K(s,t)\,ds\,dt+$$

$$+9\int\limits_{h/3}^{h/2} Q_4(3t)\,dt + \int\limits_{0}^{h} Q_4$$

(мы учли знаки функций Q_i и K). Упростим выражение для C_{n-1}, последовательно выражая Q_4 и K через Q_3, Q_3 через Q_2, Q_2 через Q_1 и, наконец, Q_1 через R_{n-1} и q_n (некоторые промежуточные преобразования, носящие элементарный характер, опущены).

$$C_{n-1} = 2\int\limits_{2h}^{\pi} |q_n| + 2\int\limits_{5h/2}^{3h} Q_1 - 2\int\limits_{2h}^{5h/2} Q_2 + 2\int\limits_{0}^{h} Q_3 + 3\int\limits_{h}^{2h} Q_3 =$$

$$= 2\int\limits_{2h}^{\pi} |q_n| + 2\int\limits_{5h/2}^{3h} Q_1 + \int\limits_{0}^{h} Q_2 + 3\int\limits_{h}^{5h/2} Q_2 =$$

$$= 2\int\limits_{2h}^{\pi} |q_n| + \int\limits_{0}^{h} Q_1 + 3\int\limits_{h}^{5h/2} Q_1 + 5\int\limits_{5h/2}^{3h} Q_1 =$$

$$= 2\int\limits_{2h}^{\pi} |q_n| + \int\limits_{0}^{h} R_{n-1} + 3\int\limits_{0}^{h} q_n - 3\int\limits_{h}^{3h/2} q_n - \int\limits_{3h/2}^{2h} q_n$$

Далее воспользуемся знаком q_n, свойством 1.2§2 и равенствами

$$\int\limits_{0}^{h} S_h = \frac{1}{2}, \quad 2\int\limits_{h/2}^{h} S_h = \frac{2}{h}\int\limits_{h/2}^{h} \left(1-\frac{t}{h}\right) dt = \frac{1}{4}, \quad 2\int\limits_{0}^{\pi} |q_n| = \frac{1}{8}.$$

Получим:

$$C_{n-1} = 2\int\limits_{0}^{\pi} |q_n| - 2\int\limits_{0}^{h/2} q_n + 2\int\limits_{h/2}^{3h/2} q_n - 2\int\limits_{3h/2}^{2h} q_n + \int\limits_{0}^{h} S_h +$$

$$+\int\limits_0^h (q_n(t-h)-2q_n(t)+q_n(t+h))\,dt+3\int\limits_0^h q_n-3\int\limits_h^{3h/2} q_n-\int\limits_{3h/2}^{2h} q_n=$$

$$=\frac{5}{8}+4\int\limits_{h/2}^{h} q_n-2\int\limits_{3h/2}^{2h} q_n; \tag{7}$$

$$C_{n-1}=\frac{5}{8}+4\int\limits_{h/2}^{h} q_n-2\int\limits_{3h/2}^{2h} q_n-2\int\limits_{h/2}^{h} R_{n-1}+2\int\limits_{h/2}^{h} S_h+$$

$$+2\int\limits_{h/2}^{h} (q_n(t-h)-2q_n(t)+q_n(t+h))\,dt=\frac{7}{8}-2\int\limits_{h/2}^{h} R_{n-1}+2\int\limits_0^{h/2} q_n.$$

Неравенство (6) можно записать и в таком виде:

$$D\Big(\mathcal{R}_{n-1},\frac{\pi}{n}\Big)_P\leqslant C_{n-1}. \tag{8}$$

Исследуем поведение последовательности $\{C_n\}$, а именно: докажем, что

$$\sup_{n\geqslant 2} C_n=\lim_{n\to\infty} C_n=D$$

и найдем D. Делая замену переменной в интеграле, получаем:

$$C_{n-1}=\frac{7}{8}-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{2\pi}{n}R_{n-1}\Big(\frac{\pi-u}{n}\Big)\,du+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi/2} g_n.$$

Воспользуемся формулами п.3 §2:

$$C_{n-1}=D+\frac{a}{12n^2}+b,$$

где $D=\lim\limits_{n\to\infty} C_n$;

$$D=\frac{7}{8}-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{\cos u}{\pi/2-u}-\frac{\cos u}{3\pi/2-u}\right)du+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{2}{\pi}\cos u+\frac{2u}{\pi}I(u)-\frac{2u}{\pi}\right)du=$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{Si}\frac{\pi}{2}-\operatorname{Si}\pi+\operatorname{Si}\frac{3\pi}{2}\right)+\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\operatorname{ctg}x}{x}\right)dx;$$

$$a=-\int\limits_0^{\pi/2}\cos u\,du+\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/2}\cos u\,du=-\frac{3}{4};$$

$$b=-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\rho_5-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\rho_2.$$

Из отрицательности a и b следует, что $\sup\limits_{n\geqslant 2}C_n=D$. Подсчет показывает, что $D=0,581\dots$

2. Оценка снизу для констант D_n. В этом пункте мы установим точность полученных оценок для всех n одновременно в случае равномерной нормы. Положим

$$\nu=\left[\frac{n}{2}+\frac{1}{4}\right]=\begin{cases}\dfrac{n}{2}-1, & \text{если } n \text{ четно}\\ \dfrac{n-1}{2}, & \text{если } n \text{ нечетно.}\end{cases}$$

Определим четную 2π-периодическую функцию f^*_{n-1} на отрезке $[0,\pi]$ равенствами:

$$f^*_{n-1}(0)=0;\quad f^*_{n-1}(t)=1/2 \text{ при } t\in(0,h];$$

$$f^*_{n-1}(t)=3/2 \text{ при } t\in(h,5h/2];$$

$$f^*_{n-1}(t)=k+3/2 \text{ при } t\in((2k+1/2)h,(2k+5/2)h],$$

$$k=\overline{1,\nu-1};$$

$$\text{а при } t\in((2\nu+1/2)h,\pi]\ f^*_{n-1}(t)=\begin{cases}\nu+3/2, & \text{если } n \text{ четно}\\ \nu+1, & \text{если } n \text{ нечетно.}\end{cases}$$

Легко видеть, что $\omega_2(f^*_{n-1},h)=1$. Обозначим $C'_{n-1}=\mathcal{R}_{n-1}(f^*_{n-1},0)$. Для любого $\varepsilon>0$ функцию f^*_{n-1} можно приблизить непрерывными (кусочно-линейными) функциями f_ε так, чтобы выполнялись соотношения $\omega_2(f_\varepsilon, h)=1$, $f_\varepsilon(0)=0$ и $\mathcal{R}_{n-1}(f_\varepsilon, 0) \geqslant C'_{n-1}-\varepsilon$. Поэтому

$$D_{n-1} \geqslant C'_{n-1}. \tag{9}$$

Оценим разность $C_{n-1} - C'_{n-1}$. Имеем:

$$C'_{n-1} = \int\limits_{\pi}^{\pi} f^*_{n-1} R_{n-1} =$$

$$= \int\limits_{-h}^{h} f^*_{n-1} S_h + \int\limits_{\pi}^{\pi} f^*_{n-1}(R_{n-1} - S_h) = \frac{1}{2} + \int\limits_{\pi}^{\pi} \delta_h^2(f^*_{n-1}) q_n.$$

Теперь подставим значения $\delta_h^2(f^*_{n-1})$ и сравним полученную формулу с формулой (7) для C_{n-1}. Если n четно, то

$$C'_{n-1} = \frac{1}{2} + 2\int\limits_{0}^{\pi} |q_n| - 2\int\limits_{\pi-h/2}^{\pi} |q_n| - 4\int\limits_{h/2}^{h} |q_n| -$$

$$-2\int\limits_{3h/2}^{2h} |q_n| = C_{n-1} - 2\int\limits_{\pi-h/2}^{\pi} q_n,$$

а если n нечетно, то

$$C'_{n-1} = \frac{1}{2} + 2\int\limits_{0}^{\pi} |q_n| - \int\limits_{\pi-3h/2}^{\pi-h/2} |q_n| - 4\int\limits_{h/2}^{h} |q_n| -$$

$$-2\int\limits_{3h/2}^{2h} |q_n| = C_{n-1} - \int\limits_{\pi-3h/2}^{\pi-h/2} |q_n|.$$

Функция $\frac{1}{n^2} q''_n$ с точностью до постоянного множителя совпадает с ядром Ахиезера–Крейна–Фавара порядка $n-1$ с номером 2. Значит, для любого $\delta > 0$ $\max\limits_{t\in[\delta,\pi]} |q''_n(t)| = O(n)$. Пользуясь равенствами $q'_n(\pi) = q_n(\pi - h/2) = 0$, выводим, что $C_{n-1} - C'_{n-1} = O(1/n^2)$ и, значит,

$$\sup_{n\geqslant 2} D_n = \lim_{n\to\infty} D_n = D. \tag{10}$$

Тем же способом доказывается

Теорема 1. *Пусть* $C_1 = \frac{5}{8} - \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right) = 0,559\ldots$ *Тогда*

$$D\Big(\mathcal{R}_1, \frac{\pi}{2}\Big)_P \leqslant C_1, \qquad D_1 = C_1.$$

Из соотношений (8), (9), (10) и найденных значений D_0 и D_1 следует

Теорема 2. *Пусть* $n-2 \in \mathbb{N}$, $h = \dfrac{\pi}{n}$, $C_{n-1} = \dfrac{7}{8} - 2\displaystyle\int_{h/2}^{h} R_{n-1} + 2\int_0^{h/2} q_n$,

$$C'_{n-1} = \begin{cases} C_{n-1} - 2\displaystyle\int_{\pi-h/2}^{\pi} q_n, & \text{\textit{если} } n \text{ \textit{четно}},\\ C_{n-1} - \displaystyle\int_{\pi-3h/2}^{\pi-h/2} q_n, & \text{\textit{если} } n \text{ \textit{нечетно}}, \end{cases}$$

$$D = \frac{3}{4} - \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{Si}\frac{\pi}{2} - \operatorname{Si}\pi + \operatorname{Si}\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{ctg} x}{x}\right)dx.$$

Тогда справедливы соотношения:

1. $D(\mathcal{R}_{n-1}, h)_P \leqslant C_{n-1}$; $\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} D(\mathcal{R}_{n-1}, h)_P \leqslant D$.
2. $C'_{n-1} \leqslant D_{n-1} \leqslant C_{n-1}$; $\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} D_n = \lim\limits_{n\to\infty} D_n = D$.

Замечание. Попутно получено, что $D_n = C_n + O(1/n^2)$.

В заключение отметим, что остаются открытыми вопросы о том, является ли константа D точной при всех n одновременно в неравенстве

$$E_n(f) \leqslant D\,\omega_2\Big(f, \frac{\pi}{n+1}\Big)$$

и является ли последовательность операторов Рогозинского экстремальной (в том же смысле, что и последовательность $\{V_n\}$ из неравенства (2)).

Литература

1. О. Л. Виноградов, *Некоторые точные неравенства со вторым модулем непрерывности.* — Международная конференция “Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ”, посвященная

90-летию академика С. М. Никольского, тезисы докладов, М (1995), 79–80.
2. О. Л. Виноградов, *Некоторые точные неравенства для второго модуля непрерывности периодических функций и функций, продолженных с отрезка.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **232** (1996), стр 33–49.
3. В. В. Жук, *О некоторых точных неравенствах между наилучшими приближениями и модулями непрерывности.* — Вест. ЛГУ, сер. мат., мех., астр., No. 1 (1974), 21–26.
4. В. В. Шалаев, *К вопросу о приближении непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами.* — В кн.: Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. Вып. 8, Днепропетровск, 1977, с. 39–43.
5. В. В. Жук, *Аппроксимация периодических функций.* Изд. ЛГУ, Л., 1982.
6. В. И. Крылов, *Приближенное вычисление интегралов.* Гос. изд. физ.-мат. лит., М., 1959.

Vinogradov O. L. The sharp constant in the estimate of the Rogozinski sums deviation in terms of the second modulus of continuity in the space of continuous periodic functions.

The sharp constant (uniformly in n) is found in a Jackson-type inequality involving the Rogozinski sums of order n and the second modulus of continuity with the step $\pi/(n+1)$.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 28 ноября 1996 г.