А. В. Васин

ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИЕ ФОРМЫ НА КОМПАКТНЫХ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

1. Введение. В комплексной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ полианалитические функции (n – аналитические для некоторого $n \in \mathbb{N}$) определяются как обобщенные решения дифференциального уравнения

$$\overline{\partial}^n f = (\partial^n / \partial \overline{z}^n) f = 0.$$

Ввиду эллиптичности оператора $\overline{\partial}^n$ функции f имеют представление

$$f(z) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(z) \overline{z}^i$$

с аналитическими в Ω коэффициентами $f_0, \dots, f_{n-1}$. О теоретико-функциональных свойствах n-аналитических функций см. обзор [1]. В РГПУ им. А. И. Герцена в 90-ые годы было предпринято исследование банаховых пространств n-аналитических функций [4, 2, 3]. В западной математической литературе бианалитические функции (в данной терминологии) возникают в связи с проблемой аппроксимации рациональными модулями на компактах [5, 9, 10]. Выделим два основных свойства n-аналитических функций, играющих существенную роль во всех работах:

1) пространство n-аналитических функций обладает структурой алгебраического модуля над кольцом аналитических функций;

2) инвариантность оператора $\overline{\partial}^n$ относительно дробно-линейных преобразований, которая формализуется в следующей лемме.

Лемма Болла [6, 7]. *Пусть $Az = \frac{az+b}{cz+d}$ – дробно-линейное преобразование. Тогда для любой гладкой функции $f \in C^2(\mathbb{C})$ выполняется равенство*

$$\overline{\partial}^n \left(f(Az) \, \overline{A'(z)}^{\,\frac{1-n}{2}} \right) = \overline{\partial}^n f(Az) \cdot \overline{A'(z)}^{\,\frac{1+n}{2}}.$$

В [6, 8, 7] эта лемма применялась к описанию проективных структур на римановых поверхностях, а также в связи с клейновыми группами и интегралами Эйхлера. Нам важно, что лемма Болла позволяет определить n-аналитические функции на римановой поверхности, оснащенной проективной структурой. Проективная структура на римановой поверхности задается координатным покрытием $\{(U_\alpha, z_\alpha)\}_\alpha$ таким, что соответствующие координатные функции перехода $z_\beta = f_{\beta\alpha}(z_\alpha)$ в пересечении координатных окрестностей $U_\alpha \cap U_\beta$ дробно-линейны.

Определим на Ω пучок $\mathcal{C}^{p,q}$ гладких p, q-форм (дифференциалов), т.е. сечения пучка для пересечения координатных окрестностей $U_\alpha \cap U_\beta$, связаны соотношением

$$f_\beta(z_\beta) dz_\beta^p \, d\overline{z}_\beta^q = f_\alpha(z_\alpha) dz_\alpha^p \, d\overline{z}_\alpha^q, \quad 2p, \ 2q \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что дифференциалы полуцелого порядка p, q определяются корректно, ибо определен квадратный корень из линейного кокасательного расслоения $\mu^2 = k$. Для проективного покрытия $\{(U_\alpha, z_\alpha)\}_\alpha$ можно в качестве коцикла в пересечении окрестностей $U_\alpha \cap U_\beta$ взять

$$\mu_{\beta\alpha} = (c_{\beta\alpha} z_\alpha + d_{\beta\alpha})^{-1}, \quad \text{где} \quad z_\beta = \frac{a_{\beta\alpha} z_\alpha + b_{\beta\alpha}}{c_{\beta\alpha} z_\alpha + d_{\beta\alpha}}.$$

По существу, лемма Болла утверждает, что оператор $\overline{\partial}^n$ является гомоморфизмом пучков

$$\mathcal{C}^{p,1-n} \xrightarrow{\overline{\partial}^n} \mathcal{C}^{p,1+n}.$$

Ядро гомоморфзима представляет пучок $\mathcal{P}^{p,1-n}$ p, $1-n$-форм, аннулирующихся оператором $\overline{\partial}^n$. Слой пучка $\mathcal{P}^{p,1-n}$ в проективной координате (U, z) представляется как прямая сумма

$$\mathcal{P}_z^{p,1-n} = \mathcal{O}_z \overline{z}^{n-1} \oplus \mathcal{O}_z \overline{z}^{n-2} \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_z,$$

где $\mathcal{O}_z$ – слой пучка $\mathcal{O}$ голоморфных функций. Заметим, что пучки $\mathcal{O}^p$ и $\mathcal{C}^{p,q}$ определяются инвариантно для общих (голоморфных) замен кординат.

Получим точную последовательность пучков на римановой поверхности с проективной структурой

$$0 \to \mathcal{P}^{p,1-n} \xrightarrow{id} \mathcal{C}^{p,1-n} \xrightarrow{\overline{\partial}^n} \mathcal{C}^{p,1+n} \to 0, \tag{1}$$

где точность в последнем члене следует из возможности локального решения $\overline{\partial}^n$-уравнения (итерация $\overline{\partial}$ – леммы Дольбо). С точной последовательностью пучков связана точная последовательность когомологий типа Дольбо

$$0 \to H^0(\mathcal{P}^{p,1-n}) \xrightarrow{id} H^0(\mathcal{C}^{p,1-n}) \xrightarrow{\overline{\partial}^n} H^0(\mathcal{C}^{p,1+n}) \xrightarrow{\delta^s} H^1(\mathcal{P}^{p,1-n}) \to 0, \tag{2}$$

Интерес представляют пространство глобальных сечений $H^0(\mathcal{P}^{p,1-n})$ и пространство $H^1(\mathcal{P}^{p,1-n})$ первых когомологий.

Оказывается, что эти пространства канонически изоморфны некоторым известным пространствам голоморфных дифференциалов, а именно справедлива

Основная Теорема. *Для эллиптической кривой, наделенной проективной структурой, индуцированной накрывающим отображением единичного круга, имеем точные последовательности конечномерных пространств* ($n \geqslant 2$)*:*

$$1)\quad 0 \to H^0(\mathcal{P}^{p+1,2-n}) \to H^0(\mathcal{P}^{p,1-n}) \to 0, \quad p \leqslant n-1;$$

$$2)\quad 0 \to H^0(\mathcal{P}^{p+1,2-n}) \to H^0(\mathcal{P}^{p,1-n}) \to H^0(\mathcal{O}^{p+1-n}) \to 0, \quad p \geqslant n.$$

Последняя теорема вместе с теоремой двойственности типа Серра дает полное описание пространств когомологий точной последовательности типа Дольбо (2).

Теорема двойственности. *Пространство первых когомологий* $H^1(\mathcal{P}^{p,1-n})$ *канонически изоморфно пространству линейных форм на пространстве* $H^0(\mathcal{P}^{2-p,1-n})$ *глобальных сечений пучка* $\mathcal{P}^{2-p,1-n}$.

Неизвестно как обстоит дело в общем случае клейновых групп или в случае проективных структур, не индуцируемых при помощи разрывных групп дробно-линейных преобразований. Случаи рода $g = 0; 1$ технически более просты и не рассматривались в данной работе.

Автор выражает признательность профессору Н. А. Широкову за постановку задачи и постоянный интерес к работе.

2. Предварительные сведения. Пусть Ω – компактная риманова поверхность рода $g > 1$ (эллиптическая кривая) с проективной структурой, индуцированной накрывающим преобразованием единичного круга, например, при помощи фуксовой группы. В этом случае в пересечении локальных проективных координат соответствующие функции перехода не просто дробно-линейны, а удовлетворяют соотношениям

$$z_\beta = \frac{a_{\beta\alpha} z_\alpha + b_{\beta\alpha}}{\overline{b}_{\beta\alpha} z_\alpha + \overline{a}_{\beta\alpha}}, \quad |a_{\beta\alpha}|^2 - |b_{\beta\alpha}|^2 = 1;$$

иными словами, матрица $A_{\beta\alpha} = \begin{pmatrix} a_{\beta\alpha} & b_{\beta\alpha} \\ \overline{b}_{\beta\alpha} & \overline{a}_{\beta\alpha} \end{pmatrix}$ принадлежит группе $SU(1,1)/\{-1,1\}$. Росток n-аналитического дифференциала из пучка $\mathcal{P}^{p,1-n}$, заданный в локально проективной координате как

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(z)\overline{z}^i$$

принадлежит кольцу многочленов $\mathcal{O}_z[\overline{z}]$. Функция $\overline{z}$ трансцедентна над $\mathcal{O}_z$, поэтому кольцо $\mathcal{O}_z[\overline{z}]$ изоморфно кольцу $\mathcal{O}_z[w]$ многочленов от независимой переменной w. Разложим на множители многочлен $\mathcal{F}$ над полем частных кольца $\mathcal{O}_z$ (это поле совпадает с полем ростков $\mathcal{M}_z$ мероморфных функций):

$$\mathcal{F} = \prod_{i=1}^{n-1} (\varphi_i \overline{z} + \psi_i),$$

где элементы φ_i, ψ_i, $i = 1, \dots, n-1$, алгебраические над $\mathcal{M}_z$ и определяются с точностью до обратимого элемента кольца $\mathcal{O}_z$.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{F}$ – сечение пучка $\mathcal{P}^{p,1-n}$ над окрестностью U. Тогда выражение, заданное в проективных координатах формулой*

$$*\mathcal{F}(z) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(z)\overline{z}^{n-1-i} \tag{3}$$

есть голоморфный $p+1-n$-дифференциал (сечение пучка $\mathcal{O}^{p+1-n}$ над U).

Доказательство. Ввиду очевидной голоморфности, надо проверить закон преобразования при переходе от одной координатной окрестности к другой. Обозначим через $\mu_{\beta\alpha} = (\overline{b}_{\beta\alpha} z_\alpha + \overline{a}_{\beta\alpha})^{-1}$ коцикл в пересечении $U_\beta \cap U_\alpha$ проективных окрестностей, определяющий квадратный корень из линейного кокасательного расслоения $\mu^2 = k$; тогда в новых обозначениях в пересечении проективных координат для сечения $\mathcal{F}$ получим

$$\mathcal{F}_\beta(z_\beta)\mu^p_{\beta\alpha}\bar{\mu}^{1-n}_{\beta\alpha} = \mathcal{F}_\alpha(z_\alpha).$$

Раскладывая на множители, получаем:

$$\mu_{\beta\alpha}^{p}\bar{\mu}_{\beta\alpha}^{1-n}\prod_{i=1}^{n-1}(\varphi_{i\beta}\overline{z}_{\beta}+\psi_{i\beta})=\prod_{i=1}^{n-1}(\varphi_{i\alpha}\overline{z}_{\alpha}+\psi_{i\alpha}),$$

далее

$$\mu_{\beta\alpha}^{p}\prod_{i=1}^{n-1}\left(\varphi_{i\beta}(\overline{a_{\beta\alpha}z_{\alpha}+b_{\beta\alpha}})+\psi_{i\beta}(b_{\beta\alpha}\overline{z}_{\alpha}+a_{\beta\alpha})\right)=\prod_{i=1}^{n-1}(\varphi_{i\alpha}\overline{z}_{\alpha}+\psi_{i\alpha}).$$

Ввиду единственности разложения на множители, можно приравнять соответствущие сомножители произведений, причем равенство имеет место с точностью до обратимого элемента кольца $\mathcal{O}(U_\alpha\cap U_\beta)$. Получим:

$$l_{i\beta\alpha}\left(\varphi_{i\beta}(\overline{a_{\beta\alpha}z_{\alpha}+b_{\beta\alpha}})+\psi_{i\beta}(b_{\beta\alpha}\overline{z}_{\alpha}+a_{\beta\alpha})\right)=\varphi_{i\alpha}\overline{z}_{\alpha}+\psi_{i\alpha},$$

где при каждом $i=1,\dots,n-1$, голоморфные функции $\ell_{i\beta\alpha}$ в $U_\alpha\cap U_\beta$ представляют коциклы линейных голоморфных расслоений ℓ_i над U, причем

$$\prod_{i=1}^{n-1}\ell_{i\beta\alpha}=\mu_{\beta\alpha}^{p}.$$

Тривиальность мероморфных линейных расслоений влечет существование для каждого $i=1,\dots,n-1$ коцепи $\{\ell_{i\alpha}\}_\alpha$ мероморфных функций такой, что

$$\ell_{i\beta\alpha}=\ell_{i\beta}/\ell_{i\alpha},\quad \ell_{i\alpha}\in\mathcal{M}(U_\alpha).$$

Поэтому, приравнивая коэффициенты при $\overline{z}_\alpha$, получим

$$\begin{pmatrix}\ell_{i\beta}\,\varphi_{i\beta}\\ -\ell_{i\beta}\,\psi_{i\beta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{\beta\alpha} & b_{\beta\alpha}\\ \overline{b}_{\beta\alpha} & \overline{a}_{\beta\alpha}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ell_{i\alpha}\,\varphi_{i\alpha}\\ -\ell_{i\alpha}\,\psi_{i\alpha}\end{pmatrix}$$

и, таким образом, семейство $(\ell_{i\beta}\,\varphi_{i\beta},-\ell_{i\beta}\,\psi_{i\beta})^T$ является мероморфным сечением двумерного векторного расслоения с коциклической матрицей перехода $A_{\beta\alpha}$. Точно такую же матрицу перехода имеет семейство $(d_\alpha z_\alpha, d_\alpha)^T$, где d – голоморфный 1-дифференцил над U. Поэтому

$$\begin{pmatrix}\ell_{i\beta}\,\varphi_{i\beta} & d_\beta z_\beta\\ -\ell_{i\beta}\,\psi_{i\beta} & d_\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{\beta\alpha} & b_{\beta\alpha}\\ \overline{b}_{\beta\alpha} & \overline{a}_{\beta\alpha}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ell_{i\alpha}\,\varphi_{i\alpha} & d_\alpha z_\alpha\\ -\ell_{i\alpha}\,\psi_{i\alpha} & d_\alpha\end{pmatrix};$$

переходя к определителям, имеем

$$d_\beta \ell_{i\beta}(\varphi_{i\beta} + z_\beta \psi_{i\beta}) = d_\alpha \ell_{i\alpha}(\varphi_{i\alpha} + z_\alpha \psi_{i\alpha}).$$

Перемножим по $i = 1, \dots, n-1$:

$$d_\beta^{n-1} \mu_{\beta\alpha}^p \prod_{i=1}^{n-1} (\varphi_{i\beta} + z_\beta \psi_{i\beta}) = d_\alpha^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (\varphi_{i\alpha} + z_\alpha \psi_{i\alpha}),$$

откуда

$$\mu_{\beta\alpha}^{p+n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (\varphi_{i\beta} + z_\beta \psi_{i\beta}) = \prod_{i=1}^{n-1} (\varphi_{i\alpha} + z_\alpha \psi_{i\alpha}),$$

и окончательно

$$\mu_{\beta\alpha}^{p+n-1} \sum_{i=0}^{n-1} f_{i\beta} z_\beta^{n-1-i} = \sum_{i=0}^{n-1} f_{i\alpha} z_\alpha^{n-1-i},$$

что и означает, что элемент $*\mathcal{F} = \sum_{i=0}^{n-1} f_i z^{n-1-i}$ представляет голоморфный $p+1-n$-дифференциал над U.

Пусть λ^{-1} – метрика Пуанкаре на Ω, заданная в проективной координате выражения $\lambda^{-1} = (1-|z|^2)^{-1}$. метрика Пуанкаре является глобальным сечением пучка $\mathcal{C}^{1,1}$. Если $H(z)$ – представитель ростка дифференциала из пучка $\mathcal{P}^{p+1,2-n}$, то $\lambda H(z)$ – представитель ростка дифференциала из пучка $\mathcal{P}^{p,1-n}$. Определим в проективных координатах оператор Λ умножения на λ и оператор $*$, заданный формулой (3) из леммы 1.

Лемма 2. *Имеет место точная последовательность гомоморфизмов пучков*

$$0 \to \mathcal{P}^{p+1,2-n} \xrightarrow{\Lambda} \mathcal{P}^{p,1-n} \xrightarrow{*} \mathcal{O}^{p+1-n} \to 0. \tag{4}$$

Доказательство. Инъективность Λ следует из того, что метрика Пуанкаре нигде на Ω не обращается в нуль, а сюръективность $*$ получается ввиду того, что для любого ростка $\mathcal{F} \in \mathcal{O}_z^{p+1-n}$, можно взять росток $\bar{z}^{n-1}\ \mathcal{F} \in \mathcal{P}_z^{p,1-n}$, такой что $*(\bar{z}^{n-1}\mathcal{F}) = \mathcal{F}$. Таким образом осталось проверить, что $\operatorname{Im}\Lambda = \operatorname{Ker} *$.

1) $\operatorname{Im}\Lambda \subset \operatorname{Ker} *$.

Пусть $H(z) \in \mathcal{P}_z^{p+1,2-n}$, $H(z) = \sum_{i=0}^{n-2} f_i \bar{z}^i$, тогда

$$*\Lambda\, H(z) = *\left((1-|z|^2)\sum_{i=0}^{n-2} f_i \bar{z}^i\right) = *\left(\sum_{i=0}^{n-2} f_i \bar{z}^i - \sum_{i=0}^{n-2} f_i z \bar{z}^{i+1}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2} f_i z^{n-1-i} - \sum_{i=0}^{n-2} f_i z z^{n-1-(i+1)} = 0.$$

2) $\operatorname{Ker} * \subset \operatorname{Im}\Lambda$.

Если росток $\mathcal{F} = \sum_{i=0}^{n-2} f_i \bar{z}^i \in \mathcal{P}_z^{p,1-n}$ таков, что $*\mathcal{F} = 0$, то раскладывая на множители многочлен $\mathcal{F}$, получим

$$*\mathcal{F} = *\prod_{i=1}^{n-1}(\varphi_i \overline{z} + \psi_i) = \prod_{i=1}^{n-1}(\varphi_i + z\psi_i) = 0.$$

Для некоторого $i = 1, \ldots, n-1$ имеем $\varphi_i + z\psi_i = 0$, откуда

$$\mathcal{F}(z) = \psi_i(1-|z|^2)\prod_{j\neq i}(\varphi_j \overline{z} + \psi_j) = (1-|z|^2)\sum_{i=0}^{n-2} f'_i \bar{z}^i = (1-|z|^2)H(z),$$

где коэффициенты f'_i, $i = 0, \ldots, n-2$ – целые комбинации над $\mathcal{O}_z$ от f_i, $i = 0, \ldots, n-1$ и поэтому голоморфны. Таким образом получаем, что $H(z) \in \mathcal{P}^{p+1,2-n}$, что и требовалось.

3. Доказательство основной теоремы. Чтобы описать пространство глобальных сечений пучка $\mathcal{P}^{p,1-n}$, нам нужно знать описание пространства первых когомологий $H^1(\mathcal{P}^{p,1-n})$. Для пучков голоморфных дифференциалов для этих целей служит теорема двойственности Серра [6], в доказательстве которой используются некоторые факты о двойственности в линейных топологических пространствах. Определяется пучок линейных непрерывных функционалов (распределений) $\mathcal{D}^{2-p,2-q}$ над пучком гладких дифференциалов $\mathcal{C}^{p,q}$. Гомоморфизм пучков

$$\mathcal{D}^{2-p,1-n} \overset{(-\overline{\partial})^n}{\longrightarrow} \mathcal{D}^{2-p,1+n}$$

является сопряженным к гомоморфизму пучков $\mathcal{C}^{p,1-n} \overset{\overline{\partial}^n}{\longrightarrow} \mathcal{C}^{p,1+n}$. Напомним, что оператор $\overline{\partial}^n$ эллиптичен, и поэтому ядро оператора $(-\overline{\partial})^n$ – знакомый нам пучок $\mathcal{P}^{2-p,1-p}$-аналитических дифференциалов. Копируя доказательство теоремы Серра, получим, что пространство первых когомологий $H^1(\mathcal{P}^{p,1-n}) = H^0(\mathcal{C}^{p,1+n})\ /\overline{\partial}^n H^0(\mathcal{C}^{p,1-n})$ будет сопряженным для пространства $H^0(\mathcal{P}^{2-p,1-n})$, как только убедимся, что оба исследуемых пространства конечномерны. Последнее вытекает из следующих соображений.

С точной последовательностью пучков (4) связана точная последовательность когомологий

$$\begin{aligned} &0 \to H^0(\mathcal{P}^{p+1,2-n}) \xrightarrow{\Lambda} H^0(\mathcal{P}^{p,1-n}) \xrightarrow{*} H^0(\mathcal{O}^{p+1-n}) \xrightarrow{\delta^*} \\ &\xrightarrow{\delta^*} H^1(\mathcal{P}^{p+1,2-n}) \xrightarrow{\Lambda} H^1(\mathcal{P}^{p,1-n}) \xrightarrow{*} H^1(\mathcal{O}^{p+1-n}) \to 0 \end{aligned} \tag{5}$$

(т.к. H^2-когомологии тривиальны). При $n = 2$ данная последовательность сводится к следующей:

$$\begin{aligned} &0 \to H^0(\mathcal{O}^{p+1}) \xrightarrow{\Lambda} H^0(\mathcal{P}^{p,-1}) \xrightarrow{*} H^0(\mathcal{O}^{p-1}) \xrightarrow{\delta^*} \\ &\xrightarrow{\delta^*} H^1(\mathcal{O}^{p+1}) \xrightarrow{\Lambda} H^1(\mathcal{P}^{p,-1}) \xrightarrow{*} H^1(\mathcal{O}^{p-1}) \to 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Так как когомологии с коэффициентами в голоморфных пучках конечномерны, то индукцией по порядку оператора $\overline{\partial}^n$, получим требуемую конечномерность когомологий с коэффициентами в полианалитических пучках. С точностью до изложенных замечаний доказана

Теорема двойственности. *Пространство первых когомологий $H^1(\mathcal{P}^{p,1-n})$ канонически изоморфно пространству линейных форм на пространстве $H^0(\mathcal{P}^{2-p,1-n})$ глобальных $2-p$, $1-n$-дифференциалов.*

Как обычно, от теоремы двойственности нам потребуется лишь равенство размерностей соответствующих пространств.

Теперь все готово для доказательства основной теоремы, которое проведем индукцией по порядку оператора $\overline{\partial}^n$.

1) $n = 2$. Рассмотрим точную последовательность (6). При $p < 1$ не существует глобальных голоморфных дифференциалов на компактной римановой поверхности Ω, т.е. $H^0(\mathcal{O}^{p-1}) = 0$, и имеем точную последовательность первого типа

$$0 \to H^0(\mathcal{O}^{p+1}) \xrightarrow{\Lambda} H^0(\mathcal{P}^{p,-1}) \to 0.$$

При $p > 1$ пространство $H^1(\mathcal{O}^{p+1})$ изоморфно пространству $H^0(\mathcal{O}^{1-p}) = 0$ (по теореме Серра), поэтому имеем точную последовательность второго типа

$$0 \to H^0(\mathcal{O}^{p+1}) \xrightarrow{\Lambda} H^0(P^{p,-1}) \xrightarrow{*} H^0(\mathcal{O}^{p-1}) \to 0.$$

Наконец, при $p = 1$ соответствующая точная последовательность будет

$$0 \to H^0(\mathcal{O}^2) \xrightarrow{\Lambda} H^0(P^{1,-1}) \xrightarrow{*} \mathbb{C} \to \dots$$

т.к. $H^0(\mathcal{O}^0) = \mathbb{C}$. В действительности, образ гомоморфизма $*$ равен нулю, ибо в противном случае, когда гомоморфизм $*$ сюръективен, найдется бианалитический дифференциал, имеющий в локальной координате z_α представление $\mathcal{F}_\alpha = f_\alpha \overline{z}_\alpha + g_\alpha$, и такой, что $f_\alpha + z_\alpha g_\alpha = 1$. В пересечении координатных окрестностей (U_α, z_α) и (U_β, z_β) получим $\mathcal{F}_\beta \mu_{\beta\alpha} \bar{\mu}_{\beta\alpha}^{-1} = \mathcal{F}_\alpha$ и поэтому

$$g_\beta(z_\beta) \cdot \frac{1}{(\overline{b}_{\beta\alpha} z_\alpha + a_{\beta\alpha})^2} - g_\alpha(z_\alpha) = -\frac{\overline{b}_{\beta\alpha}}{\overline{b}_{\beta\alpha} z_\alpha + \overline{a}_{\beta\alpha}},$$

или в другой записи

$$\frac{1}{2} g_\beta(z_\beta) \cdot \frac{\partial z_\beta}{\partial z_\alpha} - \frac{1}{2} g_\alpha(z_\alpha) = \frac{\partial^2 z_\beta}{\partial z_\alpha^2} \Big/ \frac{\partial z_\beta}{\partial z_\alpha}.$$

Поэтому семейство $\{\frac{1}{2} g_\alpha\}_\alpha$ представляет некоторую аффинную связность на Ω, но на поверхности рода $g \neq 1$ не существуют глобальные голоморфные аффинные связности [6]. Таким образом $f_\alpha + z_\alpha g_\alpha \neq 1$, и следовательно, случай $p = 1$ относится к первому типу.

2) Пусть при $i = 2, \dots, n-1$ утверждение теоремы доказано. Рассмотрим точную последовательность (5). Как в 1), при $p < n-1$ имеем $H^0(\mathcal{O}^{p+1-n}) = 0$, и получаем точную последовательность первого типа

$$0 \to H^0(\mathcal{P}^{p+1,2-n}) \xrightarrow{\Lambda} H^0(\mathcal{P}^{p,1-n}) \to 0,$$

а при $p \geqslant n$, по двойственности

$$H^1(\mathcal{P}^{p+1,2-n}) \approx H^0(\mathcal{P}^{1-p,2-n}),$$

а затем по индукции

$$H^0(\mathcal{P}^{1-p,2-n}) \approx \dots \approx H^0(\mathcal{O}^{n-p-1}) = 0,$$

и получим точную последовательность второго типа

$$0 \to H^0(\mathcal{P}^{p+1,2-n}) \xrightarrow{\Lambda} H^0(\mathcal{P}^{p,1-n}) \xrightarrow{*} H^0(\mathcal{O}^{p+1-n}) \to 0.$$

Пусть $p = n-1$, соответствующая точная последовательность будет

$$0 \to H^0(\mathcal{P}^{n,2-n}) \xrightarrow{\Lambda} H^0(\mathcal{P}^{n-1,1-n}) \xrightarrow{*} H^0(\mathcal{O}^0) \xrightarrow{\delta^*}$$

$$\begin{array}{ccccc} \xrightarrow{\delta^*} H^1(\mathcal{P}^{n,2-n}) & \xrightarrow{\Lambda} & H^1(\mathcal{P}^{n-1,1-n}) & \xrightarrow{\ *\ } & H^0(\mathcal{O}^0) \to 0 \\ \wr\wr & & \wr\wr & & \wr\wr \\ H^0(\mathcal{P}^{2-n,2-n}) & \to & H^0(\mathcal{P}^{3-n,1-n}) & \to & H^0(\mathcal{O}^2) \end{array}$$

(изоморфизмы имеем по теореме двойственности). По предположению индукции, получим

$$H^0(\mathcal{P}^{2-p,2-n}) \approx \ldots \approx H^0(\mathcal{P}^{-1,-1}) \approx H^0(\mathcal{O}^0) = \mathbb{C},$$

$$H^0(\mathcal{P}^{3-p,1-n}) \approx \ldots \approx H^0(\mathcal{O}^2).$$

Точная последовательность имеет следующий вид

$$0 \to H^0(\mathcal{P}^{n,2-n}) \xrightarrow{\Lambda} H^0(\mathcal{P}^{n-1,1-n}) \xrightarrow{*} \mathbb{C} \xrightarrow{\delta^*}$$

$$\xrightarrow{\delta^*} \mathbb{C} \xrightarrow{\alpha} H^0(\mathcal{O}^2) \xrightarrow{\beta} H^0(\mathcal{O}^2) \to 0.$$

Гомоморфизм β сюръективен, и поскольку он действует между изоморфными пространствами, то имеет нулевое ядро; по точности гомоморфзим α нулевой, а гомоморфизм δ^* сюръективен, и так как δ^* действует между изоморфными пространствами, то имеет нулевое ядро; еще раз по точности получим окончательно, что гомоморфизм $*$ нулевой. Таким образом, при $p = n-1$ получаем точную последовательность первого типа, что и требовалось.

В частности, имеем следующие представления для пространств глобальных сечений пучка $\mathcal{P}^{p,1-n}$:

1) при $p < 1-n$, $H^0(\mathcal{P}^{p,1-n}) = 0$,

2) при $1-n \leqslant p \leqslant n-1$, $H^0(\mathcal{P}^{p,1-n}) = \Lambda^{n-1} H^0(\mathcal{O}^{p+n-1})$,

3) при $p \geqslant n$,
$H^0(\mathcal{P}^{p,1-n}) \approx H^0(\mathcal{O}^{p+n-1}) \oplus H^0(\mathcal{O}^{p+n-3}) \oplus \ldots \oplus H^0(\mathcal{O}^{p+1-n})$.

Литература

1. М. Б. Балк, *Полианалитические функции и их обобщения.* — В кн.: Современ. проблемы математики. Фунд. напр., 85, 188–240 (1991).
2. А. В. Васин, *Проекторы на L^p-пространства полианалитических функций.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **190** (1991), 15–33.
3. А. В. Васин, *Об изометриях L^p-пространств полианалитических функций.* — Функц. анализ. Межв. сб. научн. тр. Ульяновск, 1983, 62–67.
4. В. А. Лопачев, А. И. Плоткин, *Изометрические отображения в L^p-пространствах полианалитических функций.* — Функц. анализ. Межв. сб. научн. тр. Ульяновск, 1983, 122–129.
5. O. Farrel, *Rational modules.* — J. Funct. Anal. **19** (1975), 373–389.
6. R. Ganning, *Lectures on Riemann surfaces.* Princeton Univ. Press, 1966.
7. B. Gustafson, J. Peetre, *Projective structures.* — Nagoya Math. J. **116** (1989), 63–88.
8. I. Kra, *Authomorphic forms and Kleinean groups.* Reading, 1972.
9. J. Verdera, *On the uniform approximation problem for the square of Cauchy–Riemann operator.* — Pacific J. Math. **159** (1993, No. 2), 379–396.
10. T. Trent, J. Wang, *Uniform approximation by rational modules on nonwhere dense sets.* — Proc. Amer. Math. Soc. **81(1)** (1981), 62–64.

Vasin A. V. Polyanalytic forms on compact Riemann surfaces.

A sheaf of differentials on a compact Riemann surface supplied with a projective structure is said to be n-analytic if in a local projective coordinate the sections of the sheaf satisfy the differential equation $\partial^n f/\partial\overline{z}^n = 0$. For the projective structure induced by a covering mapping from the disk, an explicit characterization of the space of cross-sections and of the space of first cohomologies of the n-analytic sheaf is given in terms of known spaces of sections of certain holomorphic sheaves.

С.-Петербургский государственный
университет водных коммуникаций

Поступило 11 ноября 1996 г.