А. Б. Александров

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ С РЕДКИМ СПЕКТРОМ

1. Введение. В работе приведены новые примеры проявления принципа неопределенности в смысле [1]. Доказательства совершенно элементарны и основаны на простейшем варианте принципа неопределенности: любой ненулевой полином степени не выше n имеет не более n корней. В конце работы обсуждаются некоторые задачи, связанные с принципом неопределенности для конечной циклической группы.

Пусть $\mathbb{T}$ обозначает единичную окружность комплексной плоскости $\mathbb{C}$; m – нормированная мера Лебега на $\mathbb{T}$. С каждым множеством $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ и неотрицательным числом p мы связываем пространство L^p_Λ, определяемое как замыкание в пространстве $L^p = L^p(\mathbb{T}, m)$ линейной оболочки семейства $\{z^n\}_{n\in\Lambda}$. Особенно нас будет интересовать случай $p = 0$. В этом случае $L^0 = L^0(\mathbb{T}, m)$ – это пространство всех измеримых комплексных функций на окружности $\mathbb{T}$; при этом, как обычно, равные почти всюду функции отождествляются. Напомним, что метрика в пространстве L^0 вводится следующим образом: $\rho(f,g) = \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\,dm$. Сходимость в этой метрике означает сходимость по мере. Отметим еще, что если $p \in [1,\infty)$, то $f \in L^p_\Lambda$ в том и только в том случае, когда $\widehat{f}(n) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\mathbb{T}} f(\zeta)\zeta^{-n}\,dm(\zeta) = 0$ при всех $n \in \mathbb{Z}\setminus\Lambda$.

Пусть X – линейное (необязательно замкнутое) подпространство пространства L^0. Будем говорить, что пространство X обладает свойством единственности, если только нулевая функция $f \in X$ может обращаться в нуль на множестве положительной меры. Отметим, что если пространство L^0_Λ обладает свойством единственности, то и все пространства L^p_Λ с $p > 0$ также обладают свойством единственности, поскольку $L^p_\Lambda \subset L^0_\Lambda$ при всех $p > 0$.

---

* Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 96–01–00693).

Пример множества $\Lambda = \mathbb{Z}_+$ показывает, что обратное неверно. В самом деле, легко видеть, что $L^0_{\mathbb{Z}_+} = L^0$. Таким образом, пространство $L^0_{\mathbb{Z}_+}$ не обладает свойством единственности. В то же время, при любом $p \in (0, \infty)$ пространство $L^p_{\mathbb{Z}_+}$ совпадает с классом Харди H^p, для которого свойство единственности хорошо известно.

Основная цель настоящей работы – доказать следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $\Lambda \subset \mathbb{Z}$. Предположим, что для любого положительного числа ε найдутся числа $a, b \in \mathbb{Z}$ и $N \in \mathbb{N}$ такие, что $a \leqslant b$, $\frac{b-a+1}{N} < \varepsilon$ и $\Lambda \subset \bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} [a + Nj, b + Nj]$. Тогда пространство L^0_Λ (а значит, и все пространства L^p_Λ с $p > 0$) обладает свойством единственности.*

Приведем два примера множеств Λ, удовлетворяющих условиям теоремы.

Пример 1. Пусть $\{m_k\}_{k\geqslant 0}$ – строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Предположим, что m_{k+1} делится на m_k при всех $k \geqslant 0$ и $\limsup\limits_{k\to\infty} \frac{m_{k+1}}{m_k} = \infty$. Обозначим через Λ множество всех чисел $n \in \mathbb{Z}$, представимых в виде $n = \sum\limits_{k\geqslant 0} \varepsilon_k m_k$, где $\varepsilon_k \in \mathbb{Z}$, $|\varepsilon_k| \leqslant 1$, причем все числа ε_k кроме конечного числа равны 0. Тогда Λ удовлетворяет условиям Теоремы 1.

Доказательство. Достаточно заметить, что при всех $k \in \mathbb{N}$ имеет место включение $\Lambda \subset \bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} [-2m_{k-1} + jm_k, 2m_{k-1} + jm_k]$ и $\inf\limits_{k\geqslant 1} \frac{4m_{k-1}+1}{m_k} = 0$. $\bullet$

Заметим, что произведение Рисса $\prod\limits_{k\geqslant 0} (1 + \operatorname{Re} z^{m_{2k+1}})$ задает сингулярную меру μ, спектр которой содержится в Λ, т. е. $\widehat{\mu}(n) = 0$, если $n \notin \Lambda$. Таким образом, Пример 1 показывает, что спектр сингулярной положительной меры может удовлетворять условиям Теоремы 1.

Следующий пример показывает, что условиям Теоремы 1 может удовлетворять множество Λ, содержащее как угодно длинные конечные арифметические прогрессии.

Пример 2. Множества $\Lambda = \{j2^{k^2} : 0 \leqslant j \leqslant k\}$ удовлетворяет условиям Теоремы 1.

Доказательство. Достаточно заметить, что при всех $k \geqslant 1$ имеет место включение $\Lambda \subset \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}} [j2^{k^2}, (k-1)2^{(k-1)^2} + j2^{k^2}]$. •

На самом деле в условиях Теоремы 1 пространство L^0_Λ обладает свойством единственности в следующем более сильном смысле: если последовательность $\{f_n\}_{n \geqslant 1}$ функций пространства L^0_Λ стремится к нулю на множестве положительной меры, то она стремится к нулю почти всюду. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $\{f_n\}_{n \geqslant 1}$ *– последовательность измеримых функций на единичной окружности* $\mathbb{T}$. *Предположим, что выполнены условия Теоремы 1 и* $f_n \in L^0_\Lambda$ *при всех* $n \geqslant 1$. *Положим* $E_0 = \{\zeta \in \mathbb{T} : \lim\limits_{n \to \infty} f_n(\zeta) = 0\}$. *Тогда либо* $m(E_0) = 0$, *либо* $m(E_0) = 1$.

Следствие 1. *Пусть* E *– измеримое подмножество единичной окружности* $\mathbb{T}$, *причем* $m(E) > 0$. *Предположим, что множество* Λ *удовлетворяет условиям Теоремы 1. Тогда в пространстве* L^0_Λ *сходимость по мере на* E *равносильна сходимости по мере на* $\mathbb{T}$. *Другими словами, метрика* $\rho(f,g) = \int\limits_E \frac{|f-g|}{1+|f-g|} dm$ *на пространстве* L^0_Λ *задает ту же топологию, что и метрика* $\rho(f,g) = \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{|f-g|}{1+|f-g|} dm$.

Доказательство. Достаточно доказать, что если $f_n \to 0$ по мере на E, то $f_n \to 0$ по мере на $\mathbb{T}$. Это легко вытекает из Теоремы 2, поскольку сходимость по мере может быть определена в терминах сходимости почти всюду: $f_n \to 0$ по мере в том и только в том случае, когда из любой подпоследовательности $\{f_{n_k}\}$ можно выделить подпоследовательность $\{f_{n_{k_j}}\}$, стремящуюся к нулю почти всюду. •

Следствие 2. *Пусть выполнены условия Теоремы 2 и Следствия 1. Предположим, что последовательность* f_n *сходится по мере на множестве* E *к некоторой функции* $g \in L^0(E,m)$. *Тогда существует функция* $f \in L^0_\Lambda$ *такая, что* $f|_E = g$ *и* $f_n \to f$ *по мере на* $\mathbb{T}$.

Доказательство. Последовательность $\{f_n\}$ сходится в себе в пространстве $L^0(E,m)$. Следовательно, в силу Следствия 1 она сходится в себе и в пространстве $L^0(\mathbb{T},m)$. Осталось воспользоваться полнотой пространства L^0. $\bullet$

Имеет место также следующий вариант Теоремы 2.

Теорема 3. *Предположим, что выполнены условия Теоремы 2. Положим $E_\infty = \{\zeta \in \mathbb{T} : \sup\limits_{n\geqslant 1} |f_n(\zeta)| < \infty\}$. Тогда либо $m(E_\infty) = 0$, либо $m(E_\infty) = 1$.*

2. Доказательства Теорем 1, 2 и 3. Нам понадобятся две простые леммы.

Лемма 1. *Пусть M – множество целых чисел, содержащее ровно по одному элементу из каждого класса вычетов по модулю n, где $n \in \mathbb{N}$. Тогда любую функцию $f \in L^0$ можно единственным образом представить в виде*

$$f(z) = \sum_{j\in M} z^j f_j(z^n), \tag{1}$$

где $f_j \in L^0$.

Доказательство. Достаточно заметить, что равенство (1) равносильно следующей системе равенств:

$$f_j(z^n) = \frac{1}{n} \sum_{\zeta^n=1} z^{-j}\zeta^{-j} f(z\zeta) \qquad (j \in M). \quad \bullet$$

Следствие. *Пусть M_0 – множество целых чисел, содержащее не более одного элемента из каждого класса вычетов по модулю n, где $n \in \mathbb{N}$. Тогда любую функцию $f \in L^0_{M_0+n\mathbb{Z}}$ можно единственным образом представить в виде $f(z) = \sum\limits_{j\in M_0} z^j f_j(z^n)$, где $f_j \in L^0$.*

Доказательство. Возьмем множество $M \supset M_0$, удовлетворяющее условиям Леммы 1. В силу Леммы 1 функцию f можно представить в виде (1). Осталось доказать, что $f_j = 0$, если $j \in M\setminus M_0$. Для этого достаточно проверить, что

$$\sum_{\zeta^n=1} z^{-j}\zeta^{-j} f(z\zeta) = 0 \qquad (j \in M \setminus M_0) \tag{2}$$

при всех $f \in L^0_{M_0+n\mathbb{Z}}$. Равенства (2) очевидны для $f = z^k$ при $k \in M_0 + n\mathbb{Z}$. Осталось заметить, что линейная оболочка этих функций плотна в пространстве $L^0_{M_0+n\mathbb{Z}}$. •

Лемма 2. *Пусть f – суммируемая функция на единичной окружности $\mathbb{T}$. Тогда для любого натурального n имеет место равенство*

$$\int_{\mathbb{T}} f dm = \frac{1}{n}\int_{\mathbb{T}}(\sum_{\zeta^n=\xi} f(\zeta))dm(\xi).$$

Мы опускаем элементарное доказательство этой леммы.

Доказательство Теоремы 1. Пусть $f \in L^0_\Lambda$. Положим $E = \{\zeta \in \mathbb{T} : f(\zeta) = 0\}$. Нам нужно доказать, что $m(E) = 0$ или $m(E) = 1$. Чтобы убедиться в этом, мы докажем, что все коэффициенты Фурье кроме нулевого функции $\mathbb{1}_E$ равны 0. Зафиксируем ненулевое целое число n и положительное число ε. Выберем числа $a, b \in \mathbb{Z}$ и $N \in \mathbb{N}$ так, чтобы $a \leqslant b$, $(b-a+1)/N < \varepsilon$, $N > |n|$ и $\Lambda \subset \bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}}[a+Nj, b+Nj]$. В силу следствия Леммы 1 функцию f можно представить в виде $f(z) = \sum\limits_{j=a}^{b} z^j f_j(z^N)$, где $f_j \in L^0$ при $j \in [a,b]\cap\mathbb{Z}$. Использую Лемму 2, получим

$$\widehat{\mathbb{1}_E}(n) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{T}} \mathbb{1}_E(z)z^{-n}dm(z) = \frac{1}{N}\int_{\mathbb{T}}(\sum_{\zeta^N=\xi}\mathbb{1}_E(\zeta)\zeta^{-n})dm(\xi). \tag{3}$$

Докажем, что модуль суммы, стоящей под знаком интеграла, не превосходит $b-a$. Для этого заметим, что если $f_j(\xi) = 0$ при всех $j \in [a,b]\cap\mathbb{Z}$, то $\sum\limits_{\zeta^N=\xi}\mathbb{1}_E(\zeta)\zeta^{-n} = \sum\limits_{\zeta^N=\xi}\zeta^{-n} = 0$, поскольку $0 < |n| < N$. Если же $f_j(\xi) \neq 0$ при некотором $j \in [a,b]\cap\mathbb{Z}$, то полином $Q(z) = \sum\limits_{j=0}^{b-a} z^j f_j(\xi)$ может иметь самое большее $b-a$ корней. Следовательно, $|\sum\limits_{\zeta^N=\xi}\mathbb{1}_E(\zeta)\zeta^{-n}| \leqslant \sum\limits_{\zeta^N=\xi}|\mathbb{1}_E(\zeta)| \leqslant b-a$. Таким образом, равенство (3) влечет: $|\widehat{\mathbb{1}_E}(n)| \leqslant (b-a)/N < \varepsilon$. Теперь ясно, что $\widehat{\mathbb{1}_E}(n) = 0$ при всех $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. •

Теоремы 2 и 3 можно доказать совершенно аналогично, если принять во внимание следующую очевидную лемму.

Лемма 3. *Пусть $\{Q_k\}_{k\geqslant 1}$ – последовательность полиномов степени не выше m. Положим $Z_0 = \{z \in \mathbb{C} : \lim\limits_{k\to\infty} Q_k(z) = 0\}$, $Z_\infty = \{z \in \mathbb{C} : \sup\limits_{k\to\infty} |Q_k(z)| < \infty\}$. Тогда если $Z_0 \neq \mathbb{C}$ (соответственно $Z_\infty \neq \mathbb{C}$), то множество Z_0 (соответственно Z_∞) содержит самое большое m элементов.*

3. Нерешенные задачи. Множество $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ называется множеством периодической плотности 0, если для любого положительного числа ε найдутся конечное множество $M \subset \mathbb{Z}$ и натуральное число n такие, что $\Lambda \subset M + n\mathbb{Z}$ и $|M|/n < \varepsilon$, где $|M|$ обозначает количество элементов в множестве M. Ясно, что если множество Λ удовлетворяет условиям Теоремы 1, то оно имеет периодическую плотность 0. Обратное неверно. Например, множество Λ из примера 1 с $m_k = 4^k$ имеет нулевую периодическую плотность (см.[2]), но не удовлетворяет условиям Теоремы 1. В [2] можно найти также целый ряд других примеров множеств, имеющих нулевую периодическую плотность.

1. *Остается ли Теорема 1 в силе для множеств Λ периодической плотности 0?*

Попытка распространить приведенное здесь доказательство на случай множества Λ периодической плотности 0 упирается в один вопрос, имеющий отношение к принципу неопределенности в смысле [1] для конечной циклической группы. Пусть $\{a_k\}_{0\leqslant k<n}$ – конечная последовательность комплексных чисел. Ее можно рассматривать как функцию на группе $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Преобразование Фурье $\widehat{a}$ этой функции нам удобно рассматривать на мультипликативной группе $\mathbb{T}_n$ всех корней n-ой степени из единицы, $\widehat{a}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{j=0}^{n-1} a_j z^j \quad (z \in \mathbb{T}_n)$. Обозначим через $\#(a)$ количество ненулевых членов последовательности $\{a_k\}_{0\leqslant k<n}$. Положим $\lambda(m,n) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{|\sum\limits_{\widehat{a}(z)=0} z| : \#(a) \leqslant m\}$

Задача. Вычислить или оценить $\lambda(m,n)$.

В частности нас интересует следующий вопрос.

2. Верно ли, что

$$\lim_{m/n\to 0} \lambda(m,n)/n = 0? \tag{4}$$

Положительный ответ на этот вопрос позволил бы получить равенство $\widehat{1\!\!1_E}(1) = 0$ для любого множества Λ периодической плотности 0, где E и Λ обозначают то же, что в доказательстве Теоремы 1.

Пусть $\sigma(a)$ обозначает количество корней преобразования Фурье $\widehat{a} : \mathbb{T}_n \to \mathbb{C}$ последовательности $\{a_k\}_{0\leqslant k<n}$. Ясно, что $\lambda(m,n) \leqslant \lambda_+(m,n) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{\sigma(a) : \#(a) \leqslant m, a \neq 0\}$.

Если число n четно, то пример последовательности $\{a_k\}_{0\leqslant k<n}$ с $a_0 = a_{n/2} = 1$ и $a_k = 0$ при остальных k показывает, что $\lambda_+(2,n) = n/2$. Таким образом, для функции λ_+ равенство (4) не имеет места. С другой стороны, если потребовать, чтобы n пробегало только простые числа, то равенства (4) имеет место даже для функции λ_+. Дело в том, что для простых n имеет место равенство: $\lambda_+(m,n) = m-1$, если $1 \leqslant m \leqslant n$. Это равенство следует из того, что для любого простого n и любого $\zeta \in \mathbb{T}_n \setminus \{1\}$ матрица $\{\zeta^{ls}\}_{0\leqslant l,s<n}$ не имеет нулевых миноров. Последнее утверждение было доказано Н. Г. Чеботаревым, см.[3].

В заключение остановимся на вопросе о количественном уточнении Теоремы 1.

3. Пусть выполнены условия Теоремы 1. Существует ли неограниченная убывающая функция $\varphi : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ такая, что $\int\limits_{\mathbb{T}} \varphi(|f|)dm < +\infty$ для любой ненулевой функции $f \in L^0_\Lambda$ (или хотя бы $f \in L^1_\Lambda$)?

Если такая функция существует, то следующее замечание показывает, что, вообще говоря, функционал $f \to \int\limits_{\mathbb{T}} \varphi(|f|)dm$ должен обладать довольно плохим поведением.

Замечание. Пусть Λ обозначает то же, что в Примере 1. Тогда для любой неограниченной убывающей функции $\varphi : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ имеет место следующее равенство:

$$\sup\{\int\limits_{\mathbb{T}} \varphi(f)dm : f \in L^1_\Lambda, \|f\|_{L^1} = 1, f \geqslant 0\} = +\infty.$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что $\sup\{\int\limits_{\mathbb{T}} \varphi(\mu_r)dm : 0 < r < 1\} = +\infty$, где μ – вероятностная сингулярная мера (см. замечание после Примера 1), а μ_r – усреднение Пуассона меры μ.

Литература

1. V. Havin, B. Jöricke, *The uncertainty principle in harmonic analysis.* Springer-Verlag (1994).
2. А. Б. Александров, *Лакунарные ряды и псевдопродолжения. Арифметический подход.* — Алгебра и анализ **9**, вып. 1 (1997), 3–31.
3. A. Ostrowski, *Über Singularitäten gewisser mit Lücken behafteten Potenzreihen.* — Jber. dtsch. Math. Ver. **35** (1926), 269–280.

Aleksandrov A. B. On a uniqueness theorem for functions with a sparse spectrum.

We present an example of a set $\Lambda \in \mathbb{Z}$ satisfying the following two conditions:

1) there exists a nonzero positive singular measure on the unit circle $\mathbb{T}$ with spectrum in Λ,

2) if the spectrum of $f \in L^1(\mathbb{T})$ is contained in Λ and f vanishes on a set of positive measure, then $f = 0$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 27 января 1997 г.