PDMI Preprint – 12/2026

Новые сингулярности в сигма-моделях

А. В. Иванов Н. В. Харук

regul1@mail.ru natakharuk@mail.ru

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А.Стеклова РАН,
Фонтанка 27, Санкт-Петербург, 191023, Россия

26 октября 2026 г.

Аннотация. В работе вычисляется однопетлевая сингулярность для бозонной сигма-модели с использованием метода фонового поля, регуляризации обрезанием посредством усреднения и дополнительного разложения метрики. Обсуждаются ренормируемость и построение регуляризованного производящего функционала.

Ключевые слова и фразы: степенная сингулярность, квантовая поправка, обрезание, усреднение, сигма-модель.

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

---

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ
М. А. Всемирнов, А. И. Генералов,
И. А. Ибрагимов, Л. Ю. Колотилина, Ю. В. Матиясевич,
Н. Ю. Нецветаев, С. И. Репин, Г. А. Серегин

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В.А.Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:
ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г.
Выдано Федеральной службой по надзору
в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные:
191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27
телефоны: (812) 312-40-58; (812) 571-57-54
e-mail: admin@pdmi.ras.ru
https://www.pdmi.ras.ru/preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором В. Н. Симонова

1 Введение

Мультипликативная ренормируемость [1, 2] является важным свойством при построении квантово-полевых моделей [3, 4]. Она зависит не только от вида классического действия, но и от промежуточной регуляризации, которая вводится для преобразования «расходимостей» в сингулярности. В данной заметке приводится пример, демонстрирующий, как теория, ренормируемая в рамках размерной регуляризации [5, 6], приобретает новые сингулярности в случае регуляризации обрезанием, которые невозможно в общем случае устранить процедурой домножения. Это приводит к необходимости расширять классическое действие, добавляя новые контрчлены.

Рассмотрим 2D бозонную сигма-модель [7–9]

$$S_{\mathrm{cl}}[\phi] = \frac{1}{2\gamma^2}\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}^2x\, \mathrm{g}_{ab}(\phi)\big(\partial_\mu\phi^a\big)\big(\partial_\mu\phi^b\big), \tag{1}$$

где γ является константой связи, $\mu \in \{1,2\}$, $a \in \{1,\ldots,n \in \mathbb{N}\}$, а по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Поле ϕ принимает значение в n-мерном таргет-пространстве $\mathcal{M}$, которое наделено метрикой посредством вещественной симметричной матрицы $\mathrm{g}(\phi)$ размером $n \times n$, см. [10]. Обратим внимание, что зависимость от компонент $\phi^a(x)$ локальная. Дополнительно потребуем выполнения свойств:

$$\mathrm{g}_{ab}(0) = \delta_{ab}, \;\; \det(\mathrm{g}(\phi)) = 1 \;\text{ для всех }\; \phi \in \mathcal{M}.$$

Здесь ограничением является только второе условие. Далее, используя метод фонового поля [11–14], представим ϕ в виде суммы b, которое решает классическое (или квантовое) уравнение движения, и флуктуации $\gamma\varphi$, которую можно переразложить по геодезическим, см. раздел 4 в [15]. Для удобства далее будем предполагать, что фоновое поле принадлежит пространству Шварца, см. [16]. Тогда коэффициент при степени γ^0 в действии (1) является половиной квадратичной формы с оператором Лапласа

$$\mathrm{A} = \mathrm{g}\mathrm{A}_0 + \mathrm{p}_\mu\partial_\mu + \mathrm{q}, \tag{2}$$

где $\mathrm{g} \equiv \mathrm{g}(b)$, $\mathrm{A}_0 = -\partial_\mu\partial_\mu$, и коэффициенты p_μ и q строятся по метрике и зависят только от фонового поля b. Известно, что регуляризованная первая квантовая поправка W_1 задается формулой

$$\mathrm{W}_1[b] = \frac{1}{2}\ln\det(\mathrm{A}/\mathrm{A}_0)\big|_{\mathrm{reg.}},$$

а ее сингулярная составляющая в случае использования размерной регуляризации равна

$$\frac{1}{16\pi\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}^2x\,\mathrm{tr}\big(4\,\mathrm{g}^{-1}\mathrm{q} + \mathrm{g}^{-1}\mathrm{p}_\mu\mathrm{g}^{-1}\mathrm{p}_\mu\big) \equiv \frac{\mathrm{f}(b)}{\varepsilon}. \tag{3}$$

Здесь ε является регуляризующим параметром. При этом после подстановки явных выражений справедливо равенство

$$\mathrm{f}(b) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}^2x\,\mathrm{Ric}_{ac}\big(\partial_\mu b^a\big)\big(\partial_\mu b^c\big),$$

где Ric является тензором Риччи, вычисленным по метрике g. Этот результат является классическим, см. для справки раздел 5 в [15].

При использовании регуляризации обрезанием посредством усреднения в координатном представлении [17–20] или в рамках ренормализационной группы Вильсона, см. для справки [21, 22], ситуация существенно меняется. Дело в том, что в скалярных моделях введение регуляризации происходит при помощи усреднения всех флуктуаций в классическом действии, кроме тех, которые входят с A_0, см. для [23,24]. Однако в случае сигма-модели такой оператор дополняется множителем g, см. (2), который зависит от b, поэтому классическая процедура введения является плохой, так как усредняющий оператор затрагивает фоновые поля и тем самым нарушает важные функциональные связи, см. [25]. В частности, квантовое действие в этом случае перестает быть производящим функционалом сильно связных функций Грина, см. [26].

В качестве решения проблемы в [25] было предложено разложить g в виде $\mathrm{g} = 1+\theta$ и оставить без усреднения только первую часть. В этом случае функциональные связи формально восстанавливаются, однако платой за такой трюк становится появление оператора Лапласа $\theta\mathrm{A}_0$ в пертурбативных разложениях и, как следствие, бесконечный набор слагаемых, который следует дополнительно пересуммировать.

В данной работе показано, что в рамках первой поправки пересуммированные слагаемые приводят к появлению степенной сингулярности Λ^2 с нелинейным относительно метрики g коэффициентом. При этом логарифмическая часть с $L = \ln(\Lambda/\sigma)$, являющаяся аналогом $1/\varepsilon$ для случая размерной регуляризации, остается прежней, что полностью согласуется с инвариантностью первого коэффициента β-функции. Здесь $\sigma > 0$ является вспомогательным фиксированным параметром для обезразмеривания.

Важность данного исследования заключается не только в осуществлении первого шага в рамках исследования новой версии регуляризации обрезанием, предложенной в [25], но и в пополнении множества примеров, в которых удается довести процесс суммирования сингулярностей до некоторого завершенного вида. Для справки отметим, что обычно речь идет о логарифмических сингулярностях, в том числе и инфракрасных: см. для примера [27–30] или, переходя к более абстрактным соображениям, вычисления в [31–37]. Другой пример суммирования степенных особенностей в сигма-моделях приведен в [38].

2 Результаты

Известно, что ультрафиолетовая сингулярность для (1) полностью определяется пертурбативным разложением, которое можно выписать в виде

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k} \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}^2x\, \mathrm{tr}\big(\mathrm{V}^k(x,x)\big)\Big|_{\mathrm{reg.}}, \tag{4}$$

где $\mathrm{V}(x,y)$ является интегральным оператором с ядром

$$\big(\theta(x)\mathrm{A}_0(x) + \mathrm{p}_\mu(x)\partial_{x^\mu} + \mathrm{q}(x)\big)\mathrm{R}_0(x-y),$$

а его степень определяется рекуррентно

$$\mathrm{V}^k(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}^2z\, \mathrm{V}(x,z)\mathrm{V}^{k-1}(z,y).$$

Здесь $\mathrm{R}_0(x) = -\ln(|x|\sigma)/(2\pi)$. Далее, в рамках первой квантовой поправки введение регуляризации эквивалентно деформации $\mathrm{R}_0 \to \mathrm{R}_0^\Lambda$. Напомним необходимые свойства, см. [19],

$$\mathrm{R}_0^\Lambda(\cdot) \in C^2(\mathbb{R}^2), \;\; \mathrm{R}_0^\Lambda(x/\Lambda) = \mathrm{R}_0^1(x) + L/(2\pi), \tag{5}$$

$$\mathrm{R}_0^\Lambda(x) = \mathrm{R}_0(x) \;\; \text{для} \;\; |x| > 1/\Lambda, \tag{6}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}^2x\, \mathrm{A}_0(x)\mathrm{R}_0^\Lambda(x)e^{i(k,x)} = \rho^2(|k|/\Lambda). \tag{7}$$

При этом $1 > \rho(s) \geqslant 0$ для всех $s > 0$ и $\rho(0) = 1$.

Теорема 1. *С учетом всего вышеизложенного, сингулярная часть для (1) состоит из двух частей, степенной и логарифмической, и равна*

$$\frac{\Lambda^2}{4\pi} \int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{d}s \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}^2x\, \mathrm{tr}\Big(\ln\big(1+\rho^2(s)\theta(x)\big)\Big) + L\mathrm{f}(b).$$

Доказательство. Для поиска сингулярностей удобно воспользоваться анализом размерностей. Пусть размерность импульса $[\Lambda] = 1$, тогда

$$[\mathrm{A}] = [\mathrm{q}] = 2, \;\; [\mathrm{p}_\mu] = 1, \;\; [\mathrm{g}] = [b] = 0, \;\; [x^\mu] = -1.$$

Учитывая, что $\mathrm{W}_1[b]$ безразмерно, сингулярный вклад могут дать только комбинации, которые символично можно разбить на три части

$$\theta^i \mathrm{q} \theta^j, \;\; \theta^i \mathrm{p}_\mu \theta^j \mathrm{p}_\nu \theta^m, \;\; \theta^i, \tag{8}$$

где $i, j, m \geqslant 0$. Отметим, что $\theta^i \mathrm{p}_\mu \theta^j$ отсутствует из-за сферической симметрии плотностей и ограниченности носителя функции $\mathrm{A}_0(x)\mathrm{R}_0^\Lambda(x)$ шаром радиуса $1/\Lambda$, см. (6). Рассмотрим первый вариант. Если выбрать $i = j = 0$, то такая комбинация содержится в первом слагаемом (4). Учитывая второе свойство из (5), получаем сингулярную часть

$$\frac{L}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}^2 x \, \mathrm{tr}\big(\mathrm{q}(x)\big).$$

Пусть теперь $i + j > 0$. В этом случае все потенциалы необходимо разложить в ряд Тейлора около одной точки. При этом ненулевой вклад дадут только главные члены разложения. Используя (7) для $|k| = 0$, получаем

$$\frac{(-1)^{i+j} L}{4(i+j+1)\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}^2 x \, \mathrm{tr}\big(\mathrm{q}(x)\theta^{i+j}(x)\big).$$

Далее, суммируя по всем возможным комбинациям, учитывая идентичные части ($i + j + 1$ штук) и используя разложение

$$\mathrm{g}^{-1} = (1+\theta)^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \theta^k, \tag{9}$$

получаем первое слагаемое из (3). Повторяя аналогичные вычисления для второй комбинации из (8), получаем второе слагаемое из (3). Таким образом, первые две части (8) приводят к стандартной логарифмической сингулярности $L\mathrm{f}(b)$. Изучим третий вариант. Сразу отметим, что в ответе не появятся производные метрики из-за свойства носителя функции $\mathrm{A}_0(x)\mathrm{R}_0^\Lambda(x)$, отмеченного выше. Таким образом, k-ое слагаемое (4) дает степенную сингулярную часть вида

$$\frac{(-1)^{k-1}\Lambda^2}{4k\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}^2 x \, \mathrm{tr}\big(\theta^k(x)\big) \int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{d}s \, \rho^{2k}(s),$$

где было использовано Фурье-преобразование для (7) и определение δ-функционала, см. [16]. Суммируя по всем комбинациям и используя ряд Тейлора для логарифма, получаем заявленный в теореме ответ. □

3 Заключение

В данной работе был представлен новый пример подсчета однопетлевой сингулярности для двумерной бозонной сигма-модели в случае регуляризации обрезанием посредством усреднения. При этом на процедуру введения регуляризации были наложены дополнительные существенные ограничения, которые, с одной стороны, позволяют сохранить функциональные связи для квантового действия и сильно связных функций Грина, в смысле перехода от одного множества диаграмм к другому, а с другой – приводят к дополнительным пересуммированиям сингулярностей.

В качестве замечания в результат теоремы можно подставить регуляризующую функцию для «sharp»-обрезания, которое изначально возникло в рамках функциональной ренормализационной группы, см. [39–41]. В этом случае $\rho(s) \in \{0, 1\}$ для почти всех $s \in \mathbb{R}^2$. Тогда плотность интегрирования для степенной сингулярности в теореме 1 равна нулю, так как либо $\rho(s) = 0$, и тогда получаем $\ln(1) = 0$, либо $\rho(s) = 1$, и тогда получаем $\mathrm{tr}\ln(\mathrm{g}) = \ln\det(\mathrm{g}) = \ln(1) = 0$. Таким образом, степенная часть отсутствует.

В качестве главного открытого вопроса можно предложить вычисление двухпетлевых сингулярностей или их структуры с учетом дополнительных ограничений. В частности, неясно, достаточно ли расширения классического действия в рамках однопетлевого подсчета, или же на следующем шаге перенормировки могут появиться новые нелинейные части, которые вновь нельзя будет убрать мультипликативной процедурой.

Второй важной проблемой является отказ от дополнительных условий на собственные значения матрицы θ. Они были нужны для справедливости разложения (9), которое является важным шагом при пересуммировании. Вероятно, отказ от него приведет к некоторому альтернативному методу вычисления. К сожалению, на данный момент вопрос остается открытым. Также не вполне ясна ситуация с $\det(\mathrm{g}(\phi)) \neq 1$, которая влечет дополнительные не связанные с регуляризацией проблемы на этапе построения пертурбативного разложения в рамках применения метода фонового поля.

4 Список литературы

[1] J. C. Collins, *Renormalization: An Introduction to Renormalization, the Renormalization Group and the Operator-Product Expansion*, Cambridge University Press, 1–380 (1984)

[2] O. I. Zavialov, *Renormalized quantum field theory*, Kluwer Academic Publishers, Dodrecht, Boston, 1–524 (1990)

[3] L. D. Faddeev, A. A. Slavnov, *Gauge Fields: An Introduction to Quantum Theory*, Frontiers in Physics **83**, Addison-Wesley, 1–236 (1991)

[4] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley, 1–868 (1995)

[5] C. G. Bollini, J. J. Giambiagi, *Dimensional Renormalization: The Number of Dimensions as a Regularizing Parameter*, Nuovo Cim. B, **12**, 20–26 (1972) doi:10.1007/BF02895558

[6] G. 't Hooft, M. Veltman, *Regularization and renormalization of gauge fields*, Nucl. Phys. B **44**, 189–213 (1972) doi:10.1016/0550-3213(72)90279-9

[7] A. M. Polyakov, *Gauge Fields and Strings*, London, Taylor and Francis Group, 1–312 (1987)

[8] R. R. Metsaev, A. A. Tseytlin, *Two-loop β-function for the generalized bosonic sigma model*, Phys. Lett. B, **191**, 354–362 (1987) doi:10.1016/0370-2693(87)90622-8

[9] D. R. T. Jones, *Two-loop renormalisation of $d = 2$ σ-models with torsion*, Phys. Lett. B, **192**, 391–394 (1987) doi:10.1016/0370-2693(87)90125-0

[10] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*, Second Edition, CRC Press, 1–573 (2003)

[11] B. S. DeWitt, *Quantum Theory of Gravity. 2. The Manifestly Covariant Theory*, Phys. Rev. **162**, 1195–1239 (1967) doi:10.1103/PhysRev.162.1195

[12] G. 't Hooft, *The background field method in gauge field theories*, (Karpacz, 1975), Proceedings, Acta Universitatis Wratislaviensis, **1**, Wroclaw, 345–369 (1976)

[13] L. F. Abbott, *Introduction to the background field method*, Acta Phys. Polon. B, **13**:1–2, 33–50 (1982)

[14] I. Ya. Aref'eva, A. A. Slavnov, L. D. Faddeev, *Generating functional for the S-matrix in gauge-invariant theories*, TMF, **21**:3, 311–321 (1974)

[15] V. V. Belokurov, D. I. Kazakov, *Divergences in Two-Dimensional Non-Linear Sigma-Models*, Physics of Elementary Particles and Atomic Nuclei (PEPAN), Volume **23**, part 5, 65 pages (1992)

[16] I. M. Gel'fand, G. E. Shilov, *Generalized Functions, Volume 1: Properties and Operations*, AMS Chelsea Publishing **377**, 1–423 (1964)

[17] A. V. Ivanov, *Explicit Cutoff Regularization in Coordinate Representation*, 2022 J. Phys. A: Math. Theor. **55**, 495401, arXiv:2209.01783, doi:10.1088/1751-8121/aca8dc

[18] A. V. Ivanov, *An applicability condition of a cutoff regularization in the coordinate representation*, Funct Anal Its Appl **59**, 1–10 (2025) arXiv:2403.09218, doi:10.1134/S123456782501001X

[19] A. V. Ivanov, I. V. Korenev, *Quasi-local probability averaging in the context of cutoff regularization*, (2026) arXiv:2603.28235

[20] A. V. Ivanov, *Effective actions, cutoff regularization, quasi-locality, and gluing of partition functions*, J. Phys. A: Math. Theor., **58**, 135401 (2025) arXiv:2411.13857, doi:10.1088/1751-8121/adc3de

[21] M. Bonini, E. Tricarico, *Background field method in the Wilson formulation*, Nucl. Phys. B, **606**, 231–244 (2001) doi:10.1016/S0550-3213(01)00222-X

[22] Y. Igarashi, K. Itoh, H. Sonoda, *Realization of Symmetry in the ERG Approach to Quantum Field Theory*, Progress of Theoretical Physics Supplement, **181**, May 2009, Pages 1–166, https://doi.org/10.1143/PTPS.181.1

[23] A. V. Ivanov, *Three-loop renormalization of the quantum action for a four-dimensional scalar model with quartic interaction with the usage of the background field method and a cutoff regularization*, Nucl. Phys. B, **1006**, 116647 (2024) arXiv:2402.14549, doi:10.1016/j.nuclphysb.2024.116647

[24] N. V. Kharuk, *Four-loop renormalization with a cutoff in a sextic model*, 2025 J. Phys. A: Math. Theor. **58**, 395401 (2025) arXiv:2504.07688, doi:10.1088/1751-8121/ae0798

[25] N. V. Kharuk, *On background fields and a cutoff in sigma models*, Zeitschrift für Naturforschung A, 2026. arXiv:2606.23088 doi:10.1515/zna-2026-0220

[26] A. N. Vasil'ev, *The field theoretic renormalization group in critical behavior theory and stochastic dynamics*, Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 1–681 (2004)

[27] D. G. C. Mckeon, *Summing Logarithms in Quantum Field Theory: The Renormalization Group*, Int. J. Theor. Phys. **37**, 817–826 (1998) doi:10.1023/A:1026620630263

[28] J. Linzen, M. V. Polyakov, K. M. Semenov-Tian-Shansky, N. S. Sokolova, *Exact summation of leading infrared logarithms in 2D effective field theories*, J. High Energy Phys., **2019**(4) (2019) doi:10.1007/jhep04(2019)007

[29] S. P. Miao, N. C. Tsamis, R. P. Woodard, *Summing inflationary logarithms in nonlinear sigma models* J. High Energ. Phys., **2022**(69) (2022) doi:10.1007/JHEP03(2022)069

[30] M. Honda, R. Jinno, L. Pinol, K. Tokeshi, *Borel resummation of secular divergences in stochastic inflation*, J. High Energ. Phys., **2023**(60) (2023) doi:10.1007/JHEP08(2023)060

[31] L. D. Faddeev, *Scenario for the renormalization in the 4D Yang–Mills theory*, Int. J. Mod. Phys. A, **31**, 1630001 (2016) doi:10.1142/S0217751X16300015

[32] C. E. Derkachev, A. V. Ivanov, L. D. Faddeev, *Renormalization scenario for the quantum Yang–Mills theory in four-dimensional space-time*, Theoret. and Math. Phys., **192**:2 (2017), 1134–1140 doi:10.1134/S0040577917080049

[33] A. V. Ivanov, *About renormalized effective action for the Yang–Mills theory in four-dimensional space-time*, EPJ Web of Conferences **191**, 06001 (2018) doi:10.1051/epjconf/201819106001

[34] A. V. Ivanov, *About dimensional regularization in the Yang–Mills theory*, J. Math. Sci. (N. Y.), **238**:6 (2019), 862–869 doi:10.1007/s10958-019-04281-2

[35] N. P. Meshcheriakov, V. V. Shatalova, K. V. Stepanyantz, *Higher logarithms and ε-poles for the MS-like renormalization prescriptions*, J. High Energ. Phys. **2023**, 97 (2023) doi:10.1007/JHEP12(2023)097

[36] A. L. Kataev, K. V. Stepanyantz, *Algebraic structure of the renormalization group in the renormalizable QFT theories*, Int. J. Mod. Phys. A, **39**(34), 2445001 (2024) doi:10.1142/S0217751X24450015

[37] K. Stepanyantz, *Exact expressions for the renormalization constants in the MS-like schemes*, 27th Workshop on What Comes Beyond the Standard Models? (2025) arXiv:2502.12573

[38] A. V. Ivanov, *Summation of Power Singularities*, Moscow Univ. Phys., **80** (Suppl 2), S803–S808 (2025) arXiv:2508.17289 doi:10.3103/S0027134925702637

[39] J. Polchinski, *Renormalization and effective lagrangians*, Nucl. Phys. B, **231**(2), 269–295 (1984) doi:10.1016/0550-3213(84)90287-6

[40] J. Polonyi, *Lectures on the functional renormalization group method*, Central Eur. J. Phys. 1, 1–71 (2003) doi:10.2478/BF02475552

[41] P. Kopietz, L. Bartosch, F. Schütz, *Introduction to the Functional Renormalization Group*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1–382 (2010)