

Ренормировка, обрезание и склейка для четверной модели с границей

А. В. Иванов

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А.Стеклова РАН,
Фонтанка 27, Санкт-Петербург, 191023, Россия

Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб. 7/9, Санкт-Петербург, 199034, Россия

E-mail: regul1@mail.ru

20 августа 2026 г.

Аннотация. В работе изучается перенормировка трехмерной четверной модели на компактном связном римановом многообразии с границей. Показано, что, помимо стандартного сдвига массового параметра, дополнительно требуется добавление граничных вкладов с сингулярными коэффициентами. В рамках стандартной теории перенормировки это свидетельствует о необходимости расширения классического действия, а требование согласованности относительно склейки многообразий приводит к перенормировке оператора на границе.

Ключевые слова: регуляризация, обрезание, усреднение, функция Грина, оператор Лапласа, сглаживание, скалярное поле, четверная модель, склейка.

ПРЕПРИНТЫ

Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS

of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

М. А. Всемиров, А. И. Генералов,
И. А. Ибрагимов, Л. Ю. Колотилина, Ю. В. Матиясевич,
Н. Ю. Нецветаев, С. И. Репин, Г. А. Серегин

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В.А.Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:
ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г.
Выдано Федеральной службой по надзору
в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные:

191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27
телефоны: (812) 312-40-58; (812) 571-57-54
e-mail: admin@pdmi.ras.ru
<https://www.pdmi.ras.ru/preprint/>

Заведующая информационно-издательским сектором В. Н. Симонова

1 Введение

Пертурбативные разложения для большинства квантово-полевых моделей [1, 2] содержат расходящиеся величины [3], которые после введения регуляризации преобразуются в сингулярные функции (сингулярности), см. [4, 5]. Если задача рассматривается на римановом многообразии без границы и, более того, просто в плоском пространстве, то удастся выделить класс так называемых мультипликативно перенормируемых моделей, см. [6, 7], в которых сингулярности можно устранить подходящим домножением параметров и полей на специальные константы перенормировки.

При добавлении границы задача усложняется, поскольку у функции Грина могут появляться части, см. [8], которые вдали от границы ведут себя гладким образом, а при подходе к границе становятся сингулярными. Такие ситуации возникают, к примеру, в рамках функториальной квантовой теории поля [9–12] и дополнительно усложняются требованием согласованности процесса введения регуляризации и перенормировки относительно склейки многообразий и соответствующих статистических сумм, см. [13, 14]. При такой постановке не работают стандартные варианты регуляризации, например, размерная [15, 16] или высшими ковариантными производными [17, 18]. При этом класс изученных квантово-полевых моделей достаточно узок и фактически ограничен двумерным случаем.

В данной работе рассматривается трехмерная четверная модель [19] на связном римановом многообразии с границей. И хотя в стандартной постановке эта модель является суперперенормируемой [20, 21], в настоящее время продолжается изучение ряда актуальных вопросов, связанных с регуляризацией, перенормировкой и сингулярностями: линеаризованный случай [22], на решетке [23], а также различные аспекты построения вероятностной меры [24, 25].

Особенностью представленной работы является использование новой специальной регуляризации посредством усреднения [26–28] на многообразии с границей. Ранее было показано, что деформация теории при помощи введения такой регуляризации является согласованной с процессом склейки, см. [29]. Тем не менее вопросы ренормируемости моделей для $d > 2$ в предложенном контексте не рассматривались, поэтому в данной работе фактически приводится первый пример. Выбор трехмерного случая обусловлен нетривиальностью с точки зрения набора сингулярностей (степенных и логарифмических), при этом сама модель существенно проще случаев с более высокой размерностью.

Основные результаты содержат явное вычисление новых контрчленов как внутри объема, так и на границе, обсуждение расширения классического действия, а также изучение согласованности с процессом склейки. Работа построена следующим образом. В секции 2 обсуждается постановка задачи с описанием квантового действия и регуляризации. В секции 3 формулируются результаты, обсуждаются вопросы ренормируемости модели и согласованность с процессом склейки. В секциях 4 и 5 представлены доказательства, обсуждения полученных результатов и открытые вопросы.

2 Постановка задачи

Многообразие. Рассмотрим трехмерное гладкое вещественное компактное связное ориентируемое риманово многообразие $(\mathcal{M}, g)$, см. [33]. Его граница $\Sigma \neq \emptyset$ является гладкой, замкнутой и может иметь конечное число компонент связности, расстояние между которыми больше некоторого $t_b > 0$. Далее символами x, y будем обозначать элементы $\mathcal{M}$, подразумевая под ними сразу локальные координаты. Такое упрощение не вносит путаницы. Метрический тензор и его определитель будем обозначать $g^{\mu\nu}(x)$ и $g(x)$, а геодезическое расстояние между точками – функцией $r(\cdot, \cdot)$. Кроме того, будем предполагать наличие структуры произведения около границы: существует такое $\mu > 0$, что

$$\{x \in \mathcal{M} : r(x, \Sigma) \leq 1/\mu\} = \Sigma \times [0, 1/\mu].$$

При этом метрику на границе далее будем помечать индексом Σ , а соответствующие координаты обозначать u, v . Для примера, точка многообразия около границы имеет вид $x = (u, x^3)$, где $u = (u^1, u^2)$. Отметим, что структура произведения гарантирует вид метрики $g = \text{diag}(g_\Sigma, 1)$ в $\Sigma \times [0, 1/\mu]$, где g_Σ не зависит от x^3 . Такое условие является более сильным, чем простой выбор воротниковой

окрестности, см. раздел 9 в [34], при котором блок g_Σ в общем случае может зависеть от координаты x^3 .

Классическое действие. Выберем $n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим две вектор-функции: на границе $\eta \in C^\infty(\Sigma, \mathbb{R}^n)$ и во всем объеме $\phi \in C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R}^n)$. При этом будем считать, что $\phi_a|_\Sigma = \eta_a$, где нижний индекс обозначает отдельную компоненту. Определим ряд функционалов

$$S_0[\phi] = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} d^3x g^{1/2} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi_a) (\partial_\nu \phi_a),$$

$$S_k[\phi] = \frac{1}{k!} \int_{\mathcal{M}} d^3x g^{1/2} t_k^{a_1 \dots a_k} \phi_{a_1} \cdot \dots \cdot \phi_{a_k}.$$

Здесь все коэффициенты являются полностью симметричными, а по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Пусть далее $t_2 = \text{diag}\{m_a^2\}$, где m_a играет роль массового параметра для компоненты ϕ_a , тогда классическим действием трехмерной четверной модели будем называть линейную комбинацию вида

$$S_{\text{cl}}[\phi] = S[\phi] + \hbar S_4[\phi], \quad (1)$$

где квадратичная форма задается равенством

$$S[\phi] = S_0[\phi] + S_2[\phi].$$

Операторы. Рассмотрим матричнозначный диагональный оператор Лапласа

$$A^{ab}(x) = -\delta^{ab} g^{-1/2}(x) \partial_{x^\mu} g^{\mu\nu}(x) g^{1/2}(x) \partial_{x^\nu} + t_2^{ab}.$$

Тогда функция ϕ единственным образом представима в виде суммы фонового поля b и флуктуации φ , удовлетворяющих соотношениям

$$\varphi, b \in C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R}^n), \quad \varphi|_\Sigma = 0, \quad b|_\Sigma = \eta,$$

а также $A^{ab}b_b = 0$ внутри $\mathcal{M}$. Прямой подстановкой проверяется равенство

$$S[\phi] = S[b] + S[\varphi].$$

Далее символом $G_{bc}(x, y)$ будем обозначать функцию Грина в локальных координатах для оператора A^{ab} на $\mathcal{M}$ с нулевыми условиями Дирихле. Ясно, что такая матрица также является диагональной. Соответствующая спектральная задача для такого оператора является корректной и хорошо изученной, см. секцию 8 в [35].

Регуляризация. Выберем $\Lambda > \mu$ и определим урезанное многообразие $\mathcal{M}_\Lambda$ соотношением

$$\mathcal{M}_\Lambda = \{x \in \mathcal{M} : r(x, \Sigma) \geq 1/\Lambda\}.$$

Параметр Λ далее будем называть регуляризующим. Пусть функция $w \in C^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ удовлетворяет двум условиям:

$$\text{supp}(w) \subset [0, 1/2], \quad \int_0^{1/2} ds s^2 w(s) = \frac{1}{4\pi}.$$

Тогда усредняющий оператор H_x^Λ , действующий из $C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ в $C^\infty(\mathcal{M}_\Lambda, \mathbb{R})$ по переменной « x », задается равенством

$$H_x^\Lambda \phi_a(x) = \Lambda^3 \int_{\mathcal{M}} d^3y g^{1/2} w(\Lambda r(x, y)) \phi_a \quad (2)$$

для всех $x \in \mathcal{M}_\Lambda$. Для удобства последнюю функцию будем обозначать $\phi_a^\Lambda(x)$, а символом $\phi^\Lambda(x)$ – соответствующую вектор-функцию. С учетом всего изложенного, регуляризацией классического действия будем называть переход $S_{\text{cl}}[\phi] \rightarrow S_{\text{cl}}^\Lambda[\phi]$, который осуществляется заменой

$$S_4[\phi] \rightarrow S_4^\Lambda[\phi] \equiv S_4[\phi^\Lambda]|_{\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_\Lambda}.$$

Далее будем предполагать, что $\Lambda \gg \mu$, а также $1 < 2t_b\Lambda$, чтобы количество компонент связности границы для $\mathcal{M}_\Lambda$ и $\mathcal{M}$ было одинаковым.

Квантовое действие. Определим вспомогательные функционалы

$$\Gamma_k[\varphi] = (k!)^{-1} \partial_s^k S_4^\Lambda[s\varphi + b] \Big|_{s=0},$$

где $k \in \{1, \dots, 4\}$. По построению Γ_k пропорционален k -й степени флуктуации φ_a , поэтому каждому функционалу можно сопоставить вершину с k внешними линиями, то есть

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &\sim \bullet \text{---} , & \Gamma_2 &\sim \text{---} \bullet , \\ \Gamma_3 &\sim \begin{array}{c} \diagup \bullet \text{---} \\ \diagdown \end{array} , & \Gamma_4 &\sim \begin{array}{c} \diagup \bullet \\ \diagdown \end{array} . \end{aligned}$$

Этим линиям соответствуют поля φ_a . Далее определим оператор $\mathbb{H}_0^{c(sc)}$, который каждому набору вершин Γ с суммарным четным числом внешних линий сопоставляет линейную комбинацию связанных (сильно связанных) диаграмм путем попарных соединений внешних линий всеми возможными способами при помощи замен

$$\varphi_a(x)\varphi_b(y) \rightarrow G_{ab}(x, y)$$

согласно теореме Вика, см. [30]. При этом $\mathbb{H}_0^c(\Gamma) = 0$, если число внешних линий нечетно, а также $\mathbb{H}_0^c(1) = 0$ для удобства. Тогда регуляризованным квантовым действием называется формальный ряд вида

$$W_{\text{reg}}^\Lambda[b] = S_{\text{cl}}^\Lambda[b] - \mathbb{H}_0^c \left[\exp \left(-\hbar \sum_{k=1}^4 \Gamma_k[\varphi] \right) \right]. \quad (3)$$

Второе слагаемое является формальным рядом по степеням малого параметра $\hbar$. При этом в каждом порядке содержится конечное число слагаемых. Символически такое разложение обычно записывают в виде функционального (континуального) «интеграла»

$$e^{-W_{\text{reg}}^\Lambda[b]} = \int \mathcal{D}\varphi e^{-S_{\text{cl}}^\Lambda[b+\varphi]}.$$

Перенормировка. Как известно, см. для справки [3], каждый коэффициент в разложении регуляризованного квантового действия (3) содержит сингулярные слагаемые по параметру Λ . Оказывается, в плоском пространстве без границы такие объекты можно устранить при помощи масштабирования параметров и полей, а также добавлением общего нормировочного множителя. Такой процесс называется мультипликативной перенормировкой.

К примеру, в пространстве $\mathbb{R}^3$ четверная модель является суперперенормируемой [20], так как вспомогательные множители являются рядами (по $\hbar$) с конечным числом ненулевых коэффициентов. В результате процедура сводится к сдвигу массовой коэффициентной функции $t_2^{ab} \rightarrow t_2^{ab} + \Delta^{ab}$ и добавлении к S_{cl}^Λ формальной константы C , которая не зависит от фонового поля и содержит инфракрасные расходимости. В рамках предложенной регуляризации такие величины были вычислены в [21], при этом сдвиг равен

$$\Delta^{ab} = \hbar \Delta_1^{ab} + \hbar^2 \Delta_2^{ab}, \quad (4)$$

где

$$\Delta_1^{ab} = -\frac{1}{2} \Lambda \alpha t_4^{abcc}, \quad (5)$$

$$\Delta_2^{ab} = \frac{L}{96\pi^2} t_4^{ac_1c_2c_3} t_4^{bc_1c_2c_3}. \quad (6)$$

Здесь величина $\sigma > 0$ является фиксированной и необходима для обезразмеривания, $L = \ln(\Lambda/\sigma)$, а вспомогательная константа α равна

$$\alpha = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \int_{\mathbb{R}^3} d^3y \frac{w(|x|)w(|y|)}{4\pi|x+y|}.$$

и является значением в нуле регуляризованной свободной функции Грина в плоском пространстве при $\Lambda = 1$

$$\eta_\Lambda(z) = \int_{\mathbb{R}^{3 \times 2}} \frac{d^3x d^3y w(|x|)w(|y|)}{4\pi|z + (x + y)/\Lambda|}. \quad (7)$$

В теореме 1 секции 3 приводятся результаты по обобщению процесса перенормировки на случай $\mathcal{M}$, включая описание новых граничных контрчленов и коэффициентов, которые фактически являются следствием добавления границы.

Склейка многообразий. Разрежем многообразие $\mathcal{M}$ на два подмногообразия $\mathcal{M}_l$ и $\mathcal{M}_r$ вдоль некоторой поверхности Y коразмерности 1. Будем предполагать, что новые части удовлетворяют всем требованиям, сформулированным в секции 2. При этом граница Σ распадается на две несвязные части: $\Sigma = Y_l \cup Y_r$, где

$$\partial\mathcal{M}_i = Y_i \cup Y \text{ для } i = l, r.$$

Далее, каждому подмногообразию соответствует свое классическое действие

$$S_{\text{cl}}[\phi_i; \mathcal{M}_i], \text{ где } \phi_i \in C^\infty(\mathcal{M}_i, \mathbb{R}^n),$$

удовлетворяющая условиям

$$\phi_i|_{Y_i} = \eta_i \in C^\infty(Y_i, \mathbb{R}^n), \quad \phi_i|_Y = \psi \in C^\infty(Y, \mathbb{R}^n).$$

Здесь вводится дополнительный нижний индекс. Поскольку он из $\{l, r\}$, то путаница с нумерацией отдельных компонент не возникает. При этом $S_{\text{cl}}[\phi; \mathcal{M}] = S_{\text{cl}}[\phi_l; \mathcal{M}_l] + S_{\text{cl}}[\phi_r; \mathcal{M}_r]$, где $\phi = \phi_l + \phi_r$. Отметим, что ϕ_l и ϕ_r в последнем равенстве следует понимать в смысле вложения в $C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R}^n)$ при помощи операции продолжения нулем. Повторяя затем процедуру регуляризации, третьим аргументом будем обозначать урезанное многообразие $\mathcal{M}_\Lambda$ или $\mathcal{M}_{i,\Lambda}$, которое играет роль области интегрирования в слагаемом взаимодействия. Далее строятся регуляризованные квантовые действия

$$W_{\text{reg}}^\Lambda[b_i; \mathcal{M}_i, \mathcal{M}_{i,\Lambda}],$$

где b_i – соответствующее фоновое поле, однозначно построенное по граничным значениям. В теореме 1 работы [29] было показано, что функциональное интегрирование комбинации

$$\exp\left(-\sum_{i=l,r} W_{\text{reg}}^\Lambda[b_i; \mathcal{M}_i, \mathcal{M}_{i,\Lambda}]\right)$$

по граничной функции ψ , которое необходимо понимать в смысле гауссова усреднения формальных рядов по константе Планка $\hbar$ относительно оператора Дирихле–Неймана (или отображение Пуанкаре–Стеклова, см. [36]) в квадратичной форме для граничного поля ψ , равно

$$\exp\left(-W_{\text{reg}}^\Lambda[b; \mathcal{M}, \mathcal{M}_{l,\Lambda} \cup \mathcal{M}_{r,\Lambda}]\right).$$

А после устранения «шрама» при помощи предельного перехода получается

$$\exp\left(-W_{\text{reg}}^\Lambda[b; \mathcal{M}, \mathcal{M}_\Lambda]\right).$$

Подобный переход от квантового действия (статистической суммы) на подмногообразиях к действию на всем многообразии принято называть склейкой. При этом было доказано, см. [29], что такая процедура склейки выдерживает проведение процесса мультипликативной перенормировки. Ниже, в теореме 2 секции 3, доказано обобщение, и показано, что на многообразии с границей возникают дополнительные граничные контрчлены, которые отсутствуют в рамках стандартной мультипликативной процедуры. Их необходимо вычитать дополнительно, перенормируя таким образом оператор Дирихле–Неймана на границе (или меру интегрирования).

3 Результаты

Ренормированное действие. Определим четыре вспомогательных функционала: «массовые» квадратичные слагаемые

$$\hat{S}_{2,i}^\Lambda[\phi] = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}_\Lambda} d^3x g^{1/2} \Delta_i^{ab} \phi_a^\Lambda \phi_b^\Lambda \quad \text{для } i = 1, 2,$$

см. (4), граничное слагаемое

$$S_\Sigma[\eta] = \frac{L}{32} \int_\Sigma d^2u g_\Sigma^{1/2} \eta_a \eta_b t_4^{abcc},$$

где $L = \ln(\Lambda/\sigma)$, а также

$$\hat{\Gamma}_{k,i}[\varphi] = (k!)^{-1} \partial_s^k \hat{S}_{2,i}^\Lambda[s\varphi + b] \Big|_{s=0},$$

где $k, i \in \{1, 2\}$. Последним функционалам соответствуют вершины с одной и двумя внешними линиями

$$\Gamma_{1,i} \sim \text{---} \times_i \text{---}, \quad \Gamma_{2,i} \sim \text{---} \times_i \text{---}.$$

Дополнительно определим константу

$$C = C_{\text{in}} + C_{\text{b}},$$

разбив ее на объемную (внутреннюю) и граничную части. При этом

$$\begin{aligned} C_{\text{in}} &= \hbar c_{\text{in},1} + \hbar^2 c_{\text{in},2} + \hbar^3 c_{\text{in},3}, \\ C_{\text{b}} &= \hbar c_{\text{b},1} + \hbar^2 c_{\text{b},2}, \end{aligned}$$

где коэффициенты определяются равенствами

$$\begin{aligned} c_{\text{in},1} &= \text{Vol}(\mathcal{M}_\Lambda) \Lambda^2 \alpha^2 t^{aabb}/8, \\ c_{\text{in},2} &= \text{Vol}(\mathcal{M}_\Lambda) t_4^{abce} t_4^{abce} \frac{\Lambda}{2^4 3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} d^3z \eta_1^4(z) - \frac{L\alpha}{4\pi^2} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} c_{\text{in},3} &= \text{Vol}(\mathcal{M}_\Lambda) L t_4^{abce} t_4^{cedg} t_4^{dgab} / (2^{14} 3 \pi^2), \\ c_{\text{b},1} &= \text{Vol}(\Sigma) (-1) \Lambda t_4^{aabb} / (2^9 \pi^2), \\ c_{\text{b},2} &= \text{Vol}(\Sigma) t_4^{abce} t_4^{abce} \frac{L}{2^4 3 \pi} \left(\frac{\theta}{2^7 \pi^2} - \int_{|z|<1} d^3z \eta_1^3(z) \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь число $\theta \approx 0.629615 \pm 10^{-6}$ не зависит ни от чего и является численным результатом для интеграла из секции 4. После добавления к классическому действию новых слагаемых регуляризованное действие (3) приобретает следующий вид

$$S_{\text{cl}}^\Lambda[b] + \hbar \hat{S}_{2,1}^\Lambda[b] + \hbar^2 \hat{S}_{2,2}^\Lambda[b] + \hbar S_\Sigma[\eta] + C - \hbar_0 \left[\exp \left(- \sum_{k,i=1,2} \hbar^i \hat{\Gamma}_{k,i} - \hbar \sum_{k=1}^4 \Gamma_k \right) \right], \quad (10)$$

который далее будем обозначать $W_{\text{ren}}^\Lambda[b]$ и называть ренормированным действием. Отметим, что контрвершины содержат две части, пропорциональные $\hbar$ и $\hbar^2$, поэтому формальный ряд по константе Планка имеет после переразложения конечное число слагаемых в каждом порядке.

Теорема 1. *С учетом всего вышеизложенного, ренормированное действие (10) в каждом порядке по $\hbar$ не содержит сингулярных вкладов, а соответствующие коэффициенты конечны при снятии регуляризации.*

Теорема 2. *Пусть верны обозначения из последнего раздела секции 2. С учетом результата теоремы 1, по аналогии с (10) построим ренормированное действие*

$$W_{\text{ren}}^\Lambda[b_i; \mathcal{M}_i, \mathcal{M}_{i,\Lambda}],$$

на каждом подмногообразии $\mathcal{M}_l$ и $\mathcal{M}_r$. Далее определим константу на границе

$$C_Y = C_b \text{Vol}(Y)/\text{Vol}(\Sigma),$$

а также контрчлен на границе

$$S_Y[\psi] = \frac{L}{8} \int_Y d^2u g_Y^{1/2} \psi_a \psi_b t_4^{abcc}.$$

Тогда функциональное интегрирование величины

$$\exp \left(- \sum_{i=l,r} W_{\text{reg}}^\Lambda [b_i; \mathcal{M}_i, \mathcal{M}_{i,\Lambda}] \right)$$

по полю ψ с весом

$$\exp \left(- 2\hbar S_Y[\psi] - 2C_Y \right) \quad (11)$$

в смысле гауссова усреднения формальных рядов по константе Планка $\hbar$ относительно оператора Дирихле–Неймана на границе Y в квадратичной форме для граничного поля ψ равно

$$\exp \left(- W_{\text{ren}}^\Lambda [b; \mathcal{M}, \mathcal{M}_{l,\Lambda} \cup \mathcal{M}_{r,\Lambda}] \right) \quad (12)$$

и после устранения «шрама» предельным переходом

$$\mathcal{M}_{l,\Lambda} \cup \mathcal{M}_{r,\Lambda} \rightarrow \mathcal{M}_\Lambda$$

преобразуется к действию

$$\exp(-W_{\text{reg}}^\Lambda [b; \mathcal{M}, \mathcal{M}_\Lambda]). \quad (13)$$

Замечание 1. Отметим, что в случае многообразия с границей обычной мультипликативной ренормировки недостаточно, поскольку возникают сингулярности, локализованные на границе. Такие объекты сокращаются добавлением контрвкладов $S_\Sigma[\eta] + C_b$. С точки зрения стандартной парадигмы четверная модель (1) на многообразии с границей является неперенормируемой, а проблема решается расширением классического действия

$$S_{\text{cl}}[\phi] \rightarrow S_{\text{cl}}[\phi] + \int_\Sigma d^2u g_\Sigma^{1/2} \eta_a \eta_b t_b^{ab},$$

где t_b^{ab} является симметричным коэффициентом размерности $[x^{-1}]$. При такой формулировке добавление константы C_b отвечает за сдвиг действия на границе, а добавление $S_\Sigma[\eta]$ следует понимать как сдвиг константы связи

$$t_b^{ab} \rightarrow t_b^{ab} + \hbar L t_4^{abcc}/8.$$

В этом случае процесс ренормировки становится мультипликативным. Тем не менее, расширенное действие не вписывается в условия теоремы из [29], так как «граничное» слагаемое фактически является «объемным» с сингулярной плотностью, локализованной на границе, поэтому дополнительно необходима перенормировка оператора Дирихле–Неймана, сформулированная в теореме 2. Дополнительно обратим внимание, что на каждом несвязном куске границы можно ввести свой отдельный коэффициент.

Замечание 2. Заметим, что параметры сдвига

$$C_{\text{in}} \sim \text{Vol}(\mathcal{M}_\Lambda), \quad C_b \sim \text{Vol}(\Sigma).$$

При этом другой зависимости от многообразий они не содержат. Если же рассматривать отдельные коэффициенты, то $c_{\text{in},1}$ и $c_{\text{in},2}$ содержат степенные сингулярности и зависят от ядра усредняющего оператора (2), в свою очередь $c_{\text{in},3}$ пропорционален L и не зависит от свойств регуляризации.

На границе ситуация устроена иначе: степенной коэффициент $c_{b,1}$ не зависит от регуляризации, а логарифмический $c_{b,2}$ – зависит.

Замечание 3. Поскольку коэффициент C_{in} пропорционален объему области интегрирования из функционала взаимодействия, то в квантовых действиях из (12) и (13) стоят разные константы, пропорциональные

$$C_{\text{in}} \frac{\text{Vol}(\mathcal{M}_{l,\Lambda} \cup \mathcal{M}_{r,\Lambda})}{\text{Vol}(\mathcal{M}_\Lambda)} \text{ и } C_{\text{in}},$$

соответственно. Этот факт, в частности, гарантирует конечность коэффициентов формальных рядов не только для конечного случая без «шрама», но и на промежуточных стадиях.

Замечание 4. Дополним классическое действие для четверной модели (1) кубическим слагаемым

$$S_{\text{cl}}[\phi] \rightarrow S_{\text{cl}}[\phi] + \hbar^{1/2} S_3[\phi],$$

регуляризацию которого аналогично будем вводить сглаживанием полей $\phi \rightarrow \phi^\Lambda$ и урезанием области интегрирования $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_\Lambda$. В этом случае для перенормировки квантового действия недостаточно контрслагаемых, описанных в теореме 1. Их необходимо дополнить следующими изменениями. Во-первых, необходимо добавить «объемную» линейную часть

$$\frac{\hbar^{1/2}}{2} \int_{\mathcal{M}_\Lambda} d^3x g^{1/2} \phi_a^\Lambda \left[-\Lambda \alpha t_3^{acc} + \frac{\hbar L}{48\pi^2} t_4^{ac_1 c_2 c_3} t_3^{c_1 c_2 c_3} \right].$$

Во-вторых, необходимо добавить «граничную» линейную часть

$$\frac{\hbar^{1/2} L}{16} \int_{\Sigma} d^2u g_\Sigma^{1/2} \eta_a t_3^{acc},$$

и, в-третьих, дополнительно изменить одну объемную константу

$$c_{\text{in},1} \rightarrow c_{\text{in},1} + \frac{L \text{Vol}(\mathcal{M}_\Lambda)}{192\pi^2} t_3^{c_1 c_2 c_3} t_3^{c_1 c_2 c_3}.$$

Появление линейных слагаемых в действительности влечет некоторые трудности, поскольку в этом случае для стандартного понимания перенормировки требуется расширение классического действия линейным слагаемым $\hbar^{-1/2} S_1[\phi]$, которое содержит отрицательную степень константы Планка и, таким образом, генерирует неограниченное количество слагаемых в каждом порядке. Тем не менее, чисто формально стандартные сингулярности даже в этом случае сокращаются.

Замечание 5. Определение для регуляризованного квантового действия (3) основано на разложении функционала (1) около классического решения свободного уравнения. Именно по этой причине возникли дополнительные трудности с добавлением линейного слагаемого, описанные в замечании 4. Стоит обратить внимание, что раскладывать можно и около решения классического уравнения с взаимодействием. В этом случае результаты теоремы 1, касающиеся вопросов перенормировки, остаются верны, а линейное слагаемое может быть добавлено без каких-либо трудностей. Более того, фоновое поле тогда не обязательно должно быть «мало», а классическое действие принимает более привычный вид

$$S[b + \varphi] + \hbar S_4[b + \varphi] \rightarrow \frac{S[\hat{b} + \sqrt{\hbar}\varphi] + S_4[\hat{b} + \sqrt{\hbar}\varphi]}{\hbar^2}.$$

Здесь $\hat{b} = \sqrt{\hbar}b$ и $\hat{b} + \sqrt{\hbar}\varphi$ показывает отклонение от классического решения на малую флуктуацию. Однако важно отметить, что в этом случае доказательство теоремы 2 теряет актуальность, так как в процессе склейки многообразий был важен выбор свободного решения, см. [29]. Дело в том, что не вполне понятно, является ли для нелинейного случая выбранная экстремальная траектория на всем многообразии склейкой экстремальных траекторий на подмногообразиях, также остается открытым вопрос об их количестве.

4 Доказательство

Функции Грина. Пусть далее $\sigma > 0$ такое, что $\mu < \sigma\sigma_1/(\sigma_1 + \sigma)$, где $\sigma_1 = \sigma\Lambda/(\sigma + \Lambda)$, а также для всех $c > 0$ и $x \in \mathcal{M}$ определим геодезический шар

$$B_c(y) = \{x \in \mathcal{M} : r(x, y) \leq c\}.$$

Из общей теории известно, см. для справки секцию 8 в [35], что функция Грина $G_{ab}(x, y)$ является симметричной функцией, при этом разложение около диагонали ($x \sim y$) для нее можно выписать двумя способами. Во-первых, если $y \in \mathcal{M}_{\sigma_1}$ и $x \in B_{1/\sigma}(y)$, то

$$G_{ab}(x, y) = \frac{\delta^{ab}}{4\pi r(x, y)} + p_{0ab}(x, y), \quad (14)$$

см. разложение около диагонали в [37, 38]. При этом второе слагаемое является непрерывной ограниченной функцией. Пусть теперь $y \in \Sigma \times [0, 1/\sigma_1]$, тогда $y = (v, s)$, где $v \in \Sigma$. Пусть дополнительно

$$(u, t) = x \in B_{1/\sigma}(y) \subset \Sigma \times [0, 1/\mu],$$

тогда $r^2(x, y) = r_\Sigma^2(u, v) + (s - t)^2$. Определим вдобавок функцию $\hat{r}^2(x, y) = r_\Sigma^2(u, v) + (s + t)^2$, тогда асимптотическое разложение имеет вид

$$G_{ab}(x, y) = \frac{\delta^{ab}}{4\pi r(x, y)} - \frac{\delta^{ab}}{4\pi \hat{r}(x, y)} + p_{1ab}(x, y). \quad (15)$$

При этом третье слагаемое является непрерывным и ограниченным и обращается в нуль при $s = 0$ и/или $t = 0$ для $x \neq y$.

Регуляризованные функции. После введения регуляризации в классическом действии поля ϕ заменяются на сглаженные функции ϕ^Λ , см. (2). При такой замене использование теоремы Вика при построении ряда (3) эквивалентно замене функций Грина

$$G_{ab}(x, y) \rightarrow G_{ab}^\Lambda(x, y) \equiv H_x^\Lambda H_y^\Lambda G_{ab}(x, y)$$

для аналогичного ряда, в котором флуктуации φ без усреднения. Таким образом, задача вычисления сингулярных вкладов сводится к работе с деформированными функциями Грина. Определим две вспомогательные функции

$$\begin{aligned} \rho_\Lambda(x, y) &= H_x^\Lambda H_y^\Lambda (4\pi r(x, y))^{-1}, \\ \hat{\rho}_\Lambda(x, y) &= H_x^\Lambda H_y^\Lambda (4\pi \hat{r}(x, y))^{-1}, \end{aligned} \quad (16)$$

тогда, обозначая сглаженные версии p_0 и p_1 верхним индексом Λ , имеем похожие равенства

$$G^\Lambda = \rho_\Lambda + p_0^\Lambda \quad \text{и} \quad G^\Lambda = \rho_\Lambda - \hat{\rho}_\Lambda + p_1^\Lambda, \quad (17)$$

см. для сравнения (14) и (15). Далее напомним определение (7) для $\eta_\Lambda(\cdot)$. Такая функция является главным приближением $\rho_\Lambda(x, y)$ при больших Λ , если понимать z как величину $x - y$ в плоском пространстве. Пусть в дополнение $z_1 = (u, s)$ и $z_2 = (v, t)$, где $s, t \geq 0$ и $u, v \in \mathbb{R}^2$, а также $r = |u - v|$, тогда определим

$$g_\Lambda(r, s - t) = \eta_\Lambda(z_1 - z_2). \quad (18)$$

В этом случае функция $g_\Lambda(r, s + t)$ является главным приближением $\hat{\rho}_\Lambda(x, y)$ при $\Lambda \rightarrow +\infty$, если понимать z_1, z_2 как локальные координаты x, y в плоском пространстве. Ежели выбрать $z = ((0, 0), 2s)$, где $s \geq 0$, то можно определить функцию

$$\eta(s) = \eta_1(z), \quad (19)$$

которая в комбинации $\Lambda\eta(s\Lambda)$ доставляет главное приближение для $\hat{\rho}_\Lambda(x, x)$ около границы при $(u, s) = x \in \Sigma \times [1/\Lambda, 1/\sigma_1]$.

Ренормировка для частей $\sim \hbar$. Проверим, что функционал (10) не содержит сингулярностей по параметру Λ в коэффициенте при $\hbar^1$. Выпишем все слагаемые

$$\hat{S}_{2,1}^\Lambda[b] + S_\Sigma[\eta] + H_0^c(\hat{\Gamma}_{2,1} + \Gamma_2 + \Gamma_4) + c_{\text{in},1} + c_{\text{b},1}.$$

Их удобно разбить на две группы. Сперва рассмотрим сумму

$$H_0^c(\Gamma_2) + \hat{S}_{2,1}^\Lambda[b] + S_\Sigma[\eta], \quad (20)$$

первые два слагаемых в которой являются интегралами по $\mathcal{M}_\Lambda$ с общей плотностью вида

$$H_0^c(\Gamma_2) + \hat{S}_{2,1}^\Lambda \sim \frac{1}{4} b_a^\Lambda b_b^\Lambda \left(t_4^{abce} G_{ce}^\Lambda(x, x) + 2\Delta_1^{ab} \right).$$

В данном случае удобно разделить область интегрирования на две части: $\mathcal{M}_{\sigma_1}$ и $\Sigma \times [1/\Lambda, 1/\sigma_1]$. При этом функция $\rho_\Lambda(x, x)$ присутствует в обеих областях, см. (17). Пользуясь определением (16) и переходом к нормальным координатам, см. секцию II.8 в [39], убеждаемся, что

$$\rho_\Lambda(x, x) = \Lambda\alpha + \mathcal{O}(1/\Lambda) \text{ при } \Lambda \rightarrow +\infty \quad (21)$$

равномерно по $x \in \mathcal{M}_\Lambda$. Таким образом, сингулярная часть функции $t_4^{abce}\rho_\Lambda$ вычитает коэффициент Δ_1^{ab} полностью. Учитывая ограниченность p_0^Λ и p_1^Λ , видим, что сингулярная составляющая комбинации $H_0^c(\Gamma_2) + \hat{S}_{2,1}^\Lambda$ может быть только около границы в интеграле вида

$$-\frac{1}{4} \int_{1/\Lambda}^{1/\sigma_1} ds \int_\Sigma d^2u g_\Sigma^{1/2} b_a^\Lambda b_b^\Lambda t_4^{abce} \hat{\rho}_\Lambda(x, x).$$

Здесь $x = (u, s)$. Далее упростим интеграл, заменив поле b^Λ на главную часть $\eta(u)$, а вместо функции $\hat{\rho}_\Lambda(x, x)$ выбрав $\hat{\rho}(x, x)$. Последняя замена возможна, поскольку первый интеграл отделен от нуля и начинается с $1/\Lambda$. Учитывая, что $\hat{\rho}(x, x) = 1/(8\pi s)$, получаем сингулярную часть в виде

$$-\frac{\ln(\Lambda/\sigma)}{32} \int_\Sigma d^2u g_\Sigma^{1/2} \eta_a \eta_b t_4^{abce} = -S_\Sigma[\eta].$$

Таким образом, сингулярная часть $H_0^c(\Gamma_2) + \hat{S}_{2,1}^\Lambda$ во второй области около границы компенсирует сингулярность от слагаемого $S_\Sigma[\eta]$. Следовательно, комбинация (20) является конечной при снятии регуляризации.

Второй комбинацией является сумма диаграмм

$$H_0^c(\hat{\Gamma}_{2,1} + \Gamma_4) + c_{\text{in},1} + c_{\text{b},1}.$$

Первые два слагаемых являются интегралами по $\mathcal{M}_\Lambda$. Воспользуемся (5), тогда после перегруппировки плотность записывается в виде

$$\frac{1}{8} t_4^{abce} G_{ab}^\Lambda G_{ce}^\Lambda + \frac{1}{2} G_{ab}^\Lambda \Delta_1^{ab} = -\frac{\Lambda^2 \alpha^2}{8} t^{aabb} + \frac{1}{8} t_4^{abce} (G_{ab}^\Lambda - \Lambda\alpha\delta_{ab}) (G_{ce}^\Lambda - \Lambda\alpha\delta_{ce}).$$

Здесь все функции Грина взяты на диагонали. Ясно, что после добавления интеграла первое слагаемое сокращается константой $c_{\text{in},1}$. Рассмотрим вторую строку и разобьем интеграл на две части: $\mathcal{M}_{\sigma_1}$ и $\Sigma \times [1/\Lambda, 1/\sigma_1]$. В первом случае, с учетом (21), сингулярность $\Lambda\alpha$ полностью вычитает аналогичный вклад в первом разложении из (17). Оставшаяся плотность не содержит других сингулярностей, поэтому интеграл по $\mathcal{M}_{\sigma_1}$ конечен. Во втором случае дополнительно имеется функция

$\hat{\rho}_\Lambda$, которая сингулярна вблизи границы. Учитывая стремление к нулю функции p_1^Λ при подходе к границе, остается только часть вида

$$\frac{t_4^{aabb}}{8} \int_{1/\Lambda}^{1/\sigma_1} ds \int_\Sigma d^2u g_\Sigma^{1/2} \left(\hat{\rho}_\Lambda(x, x) \right)^2,$$

где $x = (u, s)$. С учетом определения (7), при $\Lambda \rightarrow +\infty$ получаем сингулярность

$$\frac{t_4^{aabb}}{8} \int_{1/\Lambda}^{1/\sigma_1} ds \int_\Sigma d^2u g_\Sigma^{1/2} \left(\Lambda \eta(s\Lambda) \right)^2, \quad (22)$$

поскольку для функции $\hat{\rho}_\Lambda$ на диагонали в области $\Sigma \times [1/\Lambda, 1/\sigma_1)$ справедливо разложение вида

$$\hat{\rho}_\Lambda(x, x) = \Lambda \eta(s\Lambda) + \mathcal{O}(1/\Lambda), \quad (23)$$

см. формулы (7) и (19). Далее отметим, см. [27, 28], что функция $\eta_1(z) = (4\pi|z|)^{-1}$ в регионе $|z| \geq 1$, поэтому $\eta(s) = 1/(8\pi s)$ для всех $s \geq 1/2$. Переходя к пределу, видим, что константа в главном порядке (22) сокращает $c_{b,1}$.

В качестве вспомогательного следствия данного раздела отметим, что комбинации вида

$$H_1^c(\Gamma_3) + \hat{\Gamma}_{1,1} \text{ и } H_2^c(\Gamma_4) + \hat{\Gamma}_{2,1} \quad (24)$$

не содержат сингулярностей. На диаграммном языке соотношения можно записать в виде

$$0 \stackrel{\text{s.p.}}{=} 3 \text{ (diagram)} + \text{X}_1, \quad (25)$$

$$0 \stackrel{\text{s.p.}}{=} 6 \text{ (diagram)} + \text{X}_1, \quad (26)$$

где символ $\stackrel{\text{s.p.}}{=}$ показывает равенство для сингулярных составляющих. Отметим, что при доказательстве было важно равенство нулю полей флуктуации на границе.

Ренормировка для $\sim \hbar^2$. Выпишем все части функционала (10), пропорциональные $\hbar^2$,

$$\hat{S}_{2,2}^\Lambda[b] + c_{\text{in},2} + c_{b,2} + H_0^c(\hat{\Gamma}_{2,2}) - 2^{-1} H_0^c(\hat{\Gamma}_{1,1} + \hat{\Gamma}_{2,1} + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4)^2.$$

Раскроем скобки и удалим части с нечетным числом внешних линий. Далее заметим, что комбинации

$$\begin{aligned} & H_0^c(\Gamma_1^2), \quad H_0^c(\Gamma_1\Gamma_3 + \Gamma_1\hat{\Gamma}_{1,1}), \\ & H_0^c(\hat{\Gamma}_{1,1}^2 + 2\hat{\Gamma}_{1,1}\Gamma_3 + [H_1^c(\Gamma_3)]^2), \\ & H_0^c(\Gamma_2^2), \quad H_0^c(\Gamma_2[\hat{\Gamma}_{2,1} + H_2^c(\Gamma_4)]), \\ & H_0^c(\hat{\Gamma}_{2,1}^2 + 2\hat{\Gamma}_{2,1}[H_2^c(\Gamma_4)] + [H_2^c(\Gamma_4)]^2), \end{aligned}$$

не содержат сингулярностей благодаря выполненной ранее перенормировке частей $\sim \hbar$, так как соответствующие плотности включают комбинации (24). Таким образом, учитывая соотношения

$$H_0^c(\Gamma_3^2 - [H_1^c(\Gamma_3)]^2) = 3! \text{ (diagram)},$$

$$H_0^c(\Gamma_4^2 - [H_1^c(\Gamma_4)]^2) = 4! \text{ (diagram)},$$

только следующие две диаграммные комбинации

$$-3 \text{ (diagram)} + \hat{S}_{2,2}^\Lambda[b], \quad (27)$$

$$-12 \text{ (diagram)} + c_{\text{in},2} + c_{b,2} + \text{X}_2 \quad (28)$$

могут содержать сингулярные вклады, которые нужно сократить подходящим подбором свободных коэффициентов Δ_2^{ab} , $c_{\text{in},2}$ и $c_{\text{b},2}$. Рассматривая диаграмму из (27), замечаем, что сингулярный вклад может дать только комбинация, в которой все функции Грина G_{ab}^Λ заменены на главное приближение $\delta_{ab}\rho_\Lambda$, причем как внутри объема, так и около границы. Переходя в нормальные координаты, замечаем, что функции ρ_Λ в свою очередь могут быть заменены на главное приближение η_Λ из (7). Тогда, используя асимптотическое поведение для интеграла

$$\int_{B_{1/\sigma}(0)} d^3z \eta_\Lambda^3(z) = \frac{\ln(\Lambda/\sigma)}{16\pi^2} + \mathcal{O}(1),$$

убеждаемся, что Δ_2^{ab} равно (6). В дополнение отметим, что подбор такого коэффициента приводит к двум следствиям

$$0 \stackrel{\text{s.p.}}{=} -2^3 3 \text{ (diagram) } + \text{ (diagram) }, \quad (29)$$

$$0 \stackrel{\text{s.p.}}{=} -2^5 3 \text{ (diagram) } + \text{ (diagram) }, \quad (30)$$

в которых вновь следует учитывать равенство нулю флуктуаций на границе. Переходя к диаграммам из (28), разобьем вычисление на несколько шагов.

1) Разобьем область интегрирования в обеих диаграммах на две части

$$\begin{aligned} \text{(diagram)} & : \mathcal{M}_\Lambda \times \mathcal{M}_{\sigma_1} \text{ и } \mathcal{M}_\Lambda \times (\Sigma \times [1/\Lambda, 1/\sigma_1]), \\ \text{(diagram)} & : \mathcal{M}_{\sigma_1} \text{ и } (\Sigma \times [1/\Lambda, 1/\sigma_1]). \end{aligned}$$

2) Рассмотрим первые области. Подставляя первое разложение из (17), убеждаемся, что сингулярная часть с p_0^Λ сокращается за счет Δ_2^{ab} . Далее, переходя в нормальные координаты, заменяя главные части ρ_Λ на η_Λ и используя асимптотическое разложение для интеграла

$$\int_{B_{1/\sigma}(0)} d^3z \eta_\Lambda^4(z) = \Lambda \int_{\mathbb{R}^3} d^3z \eta_1^4(z) + \mathcal{O}(1),$$

с учетом (21), видим, что сингулярные части для суммы первого и четвертого слагаемых из (28) имеют вид

$$\Lambda \text{Vol}(\mathcal{M}_{\sigma_1}) \frac{t_4^{abce} t_4^{abce}}{2^4 3} \left(\frac{L\alpha}{4\pi^2} - \int_{\mathbb{R}^3} d^3z \eta_1^4(z) \right).$$

Такая величина сокращается частью коэффициента $c_{\text{in},2}$ из (8) после разбиения $\text{Vol}(\mathcal{M}_\Lambda)$ на сумму $\text{Vol}(\mathcal{M}_{\sigma_1})$ и $\text{Vol}(\Sigma)/\sigma$.

3) Рассмотрим вторые области. Используя разложение около границы из (17), замечаем, что части с p_1^Λ вновь сокращаются. Далее заметим, что после перехода в нормальные координаты функции ρ_Λ и $\hat{\rho}_\Lambda$ можно заменить на главные части в плоских локальных координатах. Таким образом, оставшаяся сингулярная часть для четвертого слагаемого из (28) имеет вид

$$\text{Vol}(\Sigma) \frac{\Delta_2^{aa}}{2} \left(\frac{L\alpha}{\sigma} - \frac{L}{8\pi} \right), \quad (31)$$

где были использованы (21) и (23), соотношение $\eta(s) = 1/(8\pi s)$ для всех $s \geq 1/2$, а также обозначение $L = \ln(\Lambda/\sigma)$. В свою очередь, сингулярный вклад первой части из (28) содержится в интеграле

$$-\frac{t_4^{abce} t_4^{abce}}{2^3 3} \text{Vol}(\Sigma) \text{I}(\Lambda, \sigma) \pi, \quad (32)$$

где

$$\text{I}(\Lambda, \sigma) = \int_{1/\Lambda}^{1/\sigma_1} dt \int_{1/\Lambda}^{t+1/\sigma} ds \int_0^1 dr r \left(g_\Lambda(r, s-t) - g_\Lambda(r, s+t) \right)^4.$$

Здесь для удобства использовалось интегрирование по цилиндру, а не по шару. Выполним несколько преобразований. Во-первых, заметим, что область $[0, 1]$ можно заменить на $\mathbb{R}_+$. Во-вторых, σ_1 можно заменить на σ . Тогда после масштабирования переменных получаем

$$I(\Lambda, \sigma) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \int_1^{\Lambda/\sigma} dt \int_1^{t+\Lambda/\sigma} ds \int_{\mathbb{R}_+} dr r \left(g_1(r, s-t) - g_1(r, s+t) \right)^4.$$

Изучать асимптотику для такого интеграла можно дифференцированием. Применяя оператор $\Lambda \partial_\Lambda$ и выполняя «обратное» масштабирование, получаем два слагаемых

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \int_{1/\gamma}^1 dt \int_{\mathbb{R}_+} dr r \left(g_\gamma(r, 1) - g_\gamma(r, 2t+1) \right)^4, \\ \dot{I}_2 &= \int_{1/\gamma}^2 ds \int_{\mathbb{R}_+} dr r \left(g_\gamma(r, s-1) - g_\gamma(r, s+1) \right)^4, \end{aligned}$$

где $\gamma = \Lambda/\sigma$. Искать разложения для таких интегралов при $\gamma \rightarrow +\infty$ необходимо с точностью до константы включительно. Рассмотрим сперва $\dot{I}_1$. Заметим, что можно перейти к $\gamma \rightarrow +\infty$ в нижнем пределе интегрирования. Далее аргументы для функций $g_\gamma(a, b)$ устроены так, что $a^2 + b^2 \geq 1 > 1/\gamma$, поэтому, учитывая результаты [28, 29], в указанном регионе справедливо равенство

$$g_\gamma(a, b) = \frac{1}{4\pi(a^2 + b^2)^{1/2}}. \quad (33)$$

Подставляя и вычисляя явно четыре двумерных интеграла, получаем $\dot{I}_1 = \theta_1/(4\pi)^4 + o(1)$, где

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{2}{3} - 2\ln(3) - \frac{3\pi^2}{8} - \frac{3}{2}\ln(2)\ln(3) \\ &\quad + \frac{3}{2}\left(\text{Li}_2(3) - \text{Li}_2(-3) + i\pi\ln(3)\right) \\ &\approx 0.015424 \pm 10^{-6}. \end{aligned}$$

В случае $\dot{I}_2$ можно действовать аналогично: выбираем $\gamma \rightarrow +\infty$ в пределе интегрирования и в функции

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} g_\gamma(r, s+1) = \frac{1}{4\pi(r^2 + (s+1)^2)^{1/2}}.$$

В случае $g_\gamma(r, s-1)$ переход к пределу возможен только в том случае, если степень функции не превосходит двух. Далее заметим, что

$$\dot{I}_2 = j_1 - \frac{j_2}{2\pi} + \frac{\theta_2 + 5}{(4\pi)^4} + o(1). \quad (34)$$

При этом специальные функции и их асимптотические разложения определяются соотношениями

$$j_1 = \int_0^2 ds \int_{\mathbb{R}_+} dr r g_\gamma^4(r, s-1) = 2 \int_0^1 ds \int_{\mathbb{R}_+} dr r g_\gamma^4(r, s) = \frac{\gamma}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3z \eta_1^4(z) - \frac{1}{(4\pi)^4},$$

где были использованы равенства (18) и (33),

$$j_2 = \int_0^2 ds \int_{\mathbb{R}_+} dr r g_\gamma^3(r, s-1) = \frac{2}{(4\pi)^3} + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{B}_1} d^3z \eta_\gamma^3(z) = \frac{4\ln(\gamma) + 2}{(4\pi)^3} + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{B}_1} d^3z \eta_1^3(z).$$

Число θ_2 определяется соотношением (34) и представимо в виде интеграла по $[0, 2] \times \mathbb{R}_+$ с плотностью в виде разности левой части и правой, в которых был взят предел $\gamma \rightarrow +\infty$. Такой интеграл ни от чего не зависит и может быть получен численно

$$\theta_2 \approx 0.61419 \pm 10^{-6}.$$

Таким образом, суммируя все части и интегрируя по параметру $L = \ln(\Lambda/\sigma)$, видим, что справедливо следующее разложение

$$I(\Lambda, \sigma) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{\Lambda}{2\pi\sigma} \int_{\mathbb{R}^3} d^3z \eta_1^4(z) - \frac{4L^2}{(4\pi)^4} - \frac{L}{2\pi^2} \int_{B_1} d^3z \eta_1^3(z) + \frac{L\theta}{(4\pi)^4},$$

где

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 \approx 0.629615 \pm 10^{-6}.$$

Подставляя полученное асимптотическое разложение в (32) и суммируя с остальными частями из (28) с учетом ответа (31), видим, что выбор коэффициента $c_{b,2}$ согласно (9) сокращает все оставшиеся сингулярности. Таким образом, конечность всех слагаемых $\sim \hbar^2$ была явно проверена.

Ренормировка для $\sim \hbar^k$ при $k > 2$. Вклады в более высокие квантовые поправки состоят из связанных диаграмм, которые строятся при помощи четырех вершин Γ_i , где $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, и четырех контрвершин $\hat{\Gamma}_{k,n}$, где $k, n \in \{1, 2\}$. При этом сингулярности могут появляться по трем причинам, что является следствием применимости стандартной $\mathcal{R}$ -операции [31]. Во-первых, из-за появления функции Грина на диагонали, так называемого «головастика». Однако такие комбинации сокращаются соответствующими контрдиаграммами с коэффициентом Δ_1^{ab} , что является прямым следствием соотношений (25) и (26). Во-вторых, сингулярности могут появляться из-за наличия «тройных» линий, то есть трех одинаковых функций Грина. Однако и такие комбинации сокращаются контрдиаграммами с коэффициентом Δ_2^{ab} , что является прямым следствием соотношений (29) и (30). Третья и последняя возможность появления сингулярности заключается в получении «тройной» линии при помощи интегрирования «двойных». Такой вариант осуществим только в диаграмме вида



которая получается из соединений трех четверных вершин и содержится в поправке $\sim \hbar^3$. Выписывая соответствующий коэффициент из (10), видим, что необходимо так подобрать $c_{in,3}$, чтобы выполнялось равенство

$$c_{in,3} - 2^5 3^2 D \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0.$$

Учитывая тот факт, что сингулярность является логарифмической, можно воспользоваться уже известным результатом для плоского пространства из [32]. Таким образом, получаем

$$D \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{\text{Vol}(\mathcal{M}_\Lambda) \pi^2 L}{2^{11} 3^3 (4\pi)^4} t_4^{abce} t_4^{cdg} t_4^{dgab},$$

откуда и следует заявленный в теореме ответ для коэффициента. Таким образом, теорема 1 доказана. В свою очередь, доказательство теоремы 2 следует из результата работы [29] после вычитаний лишних граничных слагаемых (11).

5 Заключение

В работе была произведена перенормировка трехмерной четверной модели на римановом связном многообразии с границей, вычислены все константы перенормировки, а также найдены новые граничные слагаемые, которые отсутствуют в рамках обычной модели без границы. Результаты сформулированы в теореме 1. Затем было расширено соотношение склейки многообразий и статистических сумм (квантовых действий) на перенормированные действия путем добавления в функциональный интеграл весовой функции, которая фактически перенормирует граничный оператор Дирихле–Неймана. Результаты приведены в теореме 2. Дополнительно в замечаниях после теорем обсуждаются особенности полученных коэффициентов, варианты выбора классического решения, добавление «нечетных» слагаемых в классическое действие и процесс перенормировки в целом.

Одним из интересных вопросов является обобщение свойств многообразия $\mathcal{M}$. В секции 2 было сформулировано предположение о структуре произведения около границы. Такой факт значительно упростил вычисление граничных сингулярностей. Аккуратного отказа от этого условия автору найти не удалось. Также не вполне ясна ситуация с ограниченной гладкостью границы.

Другой важной задачей является подсчет сингулярностей для четырехмерного случая. Из-за более высокой размерности вычисления значительно усложнятся. Более того, возможно появление новой зависимости от свойств многообразия, как внутри объема, так и около границы. Для плоского случая без границы ранее уже были выполнены трехпетлевые вычисления, см. [40], поэтому ожидается, что в лидирующих сингулярностях они должны сохраняться.

Благодарности. Данное исследование поддержано Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение номер 075-15-2025-013. Автор выражает признательность Н.В.Харук и И.В.Кореневу за полезные комментарии, а также Л. и К. за создание благоприятной обстановки для работы.

6 Список литературы

- [1] L. D. Faddeev, A. A. Slavnov, *Gauge Fields: An Introduction to Quantum Theory*, Frontiers in Physics **83**, Addison-Wesley, 1–236 (1991)
- [2] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley, 1–868 (1995)
- [3] J. C. Collins, *Renormalization: An Introduction to Renormalization, the Renormalization Group and the Operator-Product Expansion*, Cambridge University Press, 1–380 (1984)
- [4] I. M. Gel'fand, G. E. Shilov, *Generalized Functions, Volume 1: Properties and Operations*, AMS Chelsea Publishing **377**, 1–423 (1964)
- [5] V. S. Vladimirov, *Methods of the theory of generalized functions*, London, CRC Press, 1–328 (2002)
- [6] O. I. Zavialov, *Renormalized quantum field theory*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, 1–524 (1990)
- [7] D. I. Kazakov, *Radiative Corrections, Divergences, Regularization, Renormalization, Renormalization Group and All That in Examples in Quantum Field Theory*, JINR, UC-2008-34, 1–91 (2009) arXiv:0901.2208
- [8] V. S. Vladimirov, V. V. Zharinov, *Equations of mathematical physics*, Moscow, Fizmatlit, 1–400 (2004)
- [9] M. Atiyah, *Topological quantum field theories*, Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Scientifiques **68**, 175–186 (1988) doi:10.1007/BF02698547
- [10] G. Segal, *The definition of conformal field theory*, Topology, geometry and quantum field theory, London Math. Soc. Lect. Note Ser. **308**, Cambridge University Press, 421–577 (2004) doi:10.1017/CBO9780511526398.019
- [11] N. Reshetikhin, *Lectures on Quantization of Gauge Systems*, New Paths Towards Quantum Gravity, Springer Berlin Heidelberg, 125–190 (2010) doi:10.1007/978-3-642-11897-5_3
- [12] A. S. Cattaneo, P. Mnev, N. Reshetikhin, *Perturbative Quantum Gauge Theories on Manifolds with Boundary*, Commun. Math. Phys. **357**, 631–730 (2018) doi:10.1007/s00220-017-3031-6
- [13] S. Kandel, *Functorial quantum field theory in the Riemannian setting*, Adv. Theor. Math. Phys. **20**(6), 1443–1471 (2016) doi:10.4310/ATMP.2016.v20.n6.a5
- [14] S. Kandel, P. Mnev, K. Wernli, *Two-dimensional perturbative scalar QFT and Atiyah-Segal gluing*, Adv. Theor. Math. Phys. **25**(7), 1847–1952 (2021) doi:10.4310/ATMP.2021.v25.n7.a5

- [15] C. G. Bollini, J. J. Giambiagi, *Dimensional Renormalization: The Number of Dimensions as a Regularizing Parameter*, Nuovo Cim. B, **12**, 20–26 (1972) doi:10.1007/BF02895558
- [16] G. 't Hooft, M. Veltman, *Regularization and renormalization of gauge fields*, Nucl. Phys. B **44**, 189–213 (1972) doi:10.1016/0550-3213(72)90279-9
- [17] T. Bakeyev, A. Slavnov, *Higher covariant derivative regularization revisited*, Mod. Phys. Lett. A **11**(19), 1539–1554 (1996) doi:10.1142/S0217732396001533
- [18] K. V. Stepanyantz, *The Higher Covariant Derivative Regularization as a Tool for Revealing the Structure of Quantum Corrections in Supersymmetric Gauge Theories*, Proc. Steklov Inst. Math. **309**, 284–298 (2020) doi:10.1134/S0081543820030219
- [19] J. Glimm, A. Jaffe, *Quantum Physics: A Functional Integral Point of View*, Springer, Berlin, 1–535 (1987) doi:10.1007/978-1-4612-4728-9
- [20] A. N. Vasil'ev, *The field theoretic renormalization group in critical behavior theory and stochastic dynamics*, Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 1–681 (2004)
- [21] N. V. Kharuk, *Three-loop renormalization with a cutoff in a sextic model*, J Math Sci **299**, 878–887 (2026) doi:10.1007/s10958-026-08479-z
- [22] L. L. Salcedo, *Linearized renormalization* Eur. Phys. J. C, **85**, 945 (2025) doi:10.1140/epjc/s10052-025-14658-0
- [23] Rongchan Zhu, Xiangchan Zhu, *Lattice approximation to the dynamical Φ_3^4 -model*, Ann. Probab, **46**, 397–455 (2018) doi:10.1214/17-AOP1188
- [24] S. Albeverio, S. Kusuoka, *The invariant measure and the flow associated to the Φ_3^4 -quantum field model*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci., **20**, 1359–1427 (2020) doi:/10.2422/2036-2145.201809_008
- [25] I. Bailleul, N. V. Dang, L. Ferdinand, T. D. Tô, *Φ_3^4 -measures on compact Riemannian 3-manifolds*, (2025) arXiv:2304.10185
- [26] A. V. Ivanov, *Explicit Cutoff Regularization in Coordinate Representation*, 2022 J. Phys. A: Math. Theor. **55**, 495401, arXiv:2209.01783, doi:10.1088/1751-8121/aca8dc
- [27] A. V. Ivanov, *An applicability condition of a cutoff regularization in the coordinate representation*, Funct Anal Its Appl **59**, 1–10 (2025) arXiv:2403.09218, doi:10.1134/S123456782501001X
- [28] A. V. Ivanov, I. V. Korenev, *Quasi-local probability averaging in the context of cutoff regularization*, (2026) arXiv:2603.28235
- [29] A. V. Ivanov, *Effective actions, cutoff regularization, quasi-locality, and gluing of partition functions*, J. Phys. A: Math. Theor., **58**, 135401 (2025) arXiv:2411.13857, doi:10.1088/1751-8121/adc3de
- [30] N. N. Bogolyubov, D. V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, Wiley, New York, 1–620 (1980)
- [31] O. I. Zavialov, *Bogolyubov's $\mathcal{R}$ -operation and the Bogolyubov–Parasyuk theorem*, Russian Math. Surveys, **49**:5, 67–76 (1994) doi:10.1070/RM1994v049n05ABEH002426
- [32] N. V. Kharuk, *Four-loop renormalization with a cutoff in a sextic model*, 2025 J. Phys. A: Math. Theor. **58**, 395401 (2025) arXiv:2504.07688, doi:10.1088/1751-8121/ae0798
- [33] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*, IoP, Bristol, 1–573 (2003)
- [34] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 218, Springer, New York, 1–708 (2012)

- [35] M. E. Taylor, *Partial Differential Equations II: Qualitative Studies of Linear Equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer, 2nd ed., 1–637 (2011)
- [36] V. I. Lebedev, V. I. Agoshkov, *Poincaré-Steklov operators and their applications in analysis*, Academy of Sciences, Moskva, USSR, 1–184 (1983).
- [37] M. Lüscher, *Dimensional regularisation in the presence of large background fields*, Ann. Phys., **142**(2), 359–392 (1982) doi:10.1016/0003-4916(82)90076-8
- [38] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Special Functions for Heat Kernel Expansion*, Eur. Phys. J. Plus **137**, 1060 (2022), arXiv:2106.00294, doi:10.1140/epjp/s13360-022-03176-7
- [39] I. Chavel, *Riemannian Geometry: A Modern Introduction*, Cambridge University Press, 1–471 (2006)
- [40] A. V. Ivanov, *Three-loop renormalization of the quantum action for a four-dimensional scalar model with quartic interaction with the usage of the background field method and a cutoff regularization*, Nucl. Phys. B, **1006**, 116647 (2024) arXiv:2402.14549, doi:10.1016/j.nuclphysb.2024.116647