PDMI Preprint – 07/2026

О фоновых полях и обрезании в сигма-моделях

Н. В. Харук

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А.Стеклова РАН,
Фонтанка 27, Санкт-Петербург, 191023, Россия

E-mail: natakharuk@mail.ru

10 июня 2026 г.

Аннотация. В данной работе на примере двумерной нелинейной сигма-модели с группой Гейзенберга сравниваются два варианта разложения кирального поля на фоновую часть и флуктуацию. Показано, что только один из этих способов согласуется с построением производящего функционала методом введения фонового поля. Кроме этого, проводится однопетлевая перенормировка квантового действия, вычисляются степенные сингулярности в двухпетлевом приближении, рассматривается переход к расширенному классическому действию, а также изучается согласованность обрезания и специальных функциональных соотношений в рамках метода фонового поля.

Ключевые слова: киральное поле, сигма-модель, группа Гейзенберга, фоновое поле, регуляризация, обрезание, усреднение, перенормировка, квантовое действие, сингулярность, расходимость.

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

---

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В.А.Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:
ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г.
Выдано Федеральной службой по надзору
в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные:
191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27
телефоны: (812) 312-40-58; (812) 571-57-54
e-mail: admin@pdmi.ras.ru
https://www.pdmi.ras.ru/preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором В. Н. Симонова

Содержание

1 Введение

Рассмотрим стандартное евклидово пространство $\mathbb{R}^2$, компактную полупростую группу Ли G и ее алгебру Ли $\mathfrak{g}$, см. [1]. Введем поле $C_\mu(x) = \mathrm{U}^{-1}(x)\partial_{x^\mu}\mathrm{U}(x)$, где $\mu = 1, 2$ и $\mathrm{U} \in C(\mathbb{R}^2, \mathrm{G})$. Оно является элементом векторного пространства $\mathfrak{g}$ и может быть разложено по генераторам t^a в виде $C_\mu(x) = C^a_\mu(x)t^a$, где $a \in \{1, \ldots, \dim\mathfrak{g}\}$. Известно, что генераторы образуют базис в $\mathfrak{g}$, не зависят от переменной x и ортонормированы относительно билинейной формы $(t^a, t^b) = -\delta^{ab}$. При этом коэффициенты $C^a_\mu(x)$ являются вещественными. В этом случае классическое действие для модели главного кирального поля, см. [2], задается формулой

$$\mathrm{S}[\mathrm{U}] = \frac{1}{2\gamma^2}\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}^2x\, C^a_\mu(x)C^a_\mu(x),$$

где γ – константа связи. Такая модель играет важную роль в современной науке, см. для справки [6–10], в частности, при изучении некоторых вопросов в теории регуляризации и перенормировки, см. для примера [11–14].

В данной работе вместо G рассматривается группа Гейзенберга $\mathrm{H}_3(\mathbb{R}) \equiv \mathrm{H}_3$, см. [15]. Такая группа не является компактной, поэтому классическое действие отвечает нелинейной сигма-модели из более широкого класса. С другой стороны, H_3 является нильпотентной, поэтому некоторые вопросы, связанные с перенормировкой [3–5] и методом фонового поля [11, 16–19], становятся более прозрачными. Соответствующая алгебра Ли $\mathfrak{h}$ строится по трем генераторам

$$t^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

со стандартным матричным произведением. При этом $\mathrm{H}_3 = \{\exp(c_a t^a) : c_a \in \mathbb{R}\}$.

Данная работа посвящена обсуждению двух пунктов. Во-первых, в секции 2 изучаются варианты разложения $C^a_\mu(x)$ на фоновое поле и флуктуацию. Этот вопрос важен, так как неправильный выбор может существенно исказить и усложнить процедуру перенормировки. В этой связи приводится критическое замечание касательно представлений, используемых в [11, 12, 14]. Во-вторых, в секции 3 выписывается квантовое действие, вычисляется первая поправка, изучаются двухпетлевые степенные сингулярности, а также обсуждается процесс перенормировки в целом. И хотя в случае размерной регуляризации похожие вычисления уже появлялись, см. [20, 21], для модели с обрезанием, в том числе и методом усреднения, вычисления являются новыми. Более того, отметим, что ранее операторы Лапласа с переменными главными коэффициентами не изучались в контексте регуляризации обрезанием в координатном представлении.

2 О фоновых полях

Сравним два варианта разложения коэффициентов C_μ^a на фоновое поле и флуктуацию. Первый подход является прямым продолжением идеи, успешно использованной в скалярных моделях [22, 23] и теории Янга–Миллса [24, 25], на случай нелинейных сигма-моделей [26, 27]. В этом методе предлагается вводить фоновое поле b_a и флуктуацию ϕ_a на «равных правах» в виде суммы. При этом, учитывая взаимооднозначность $\exp(u_a t^a)$ и $u^a t^a$ для рассматриваемой модели, раскладывать будем именно элементы группы

$$\mathrm{H}_3 \ni \mathrm{U} = \begin{pmatrix} 1 & u_1 & u_2 \\ 0 & 1 & u_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 + b_a t^a + \gamma\phi_a t^a, \text{ где } u_a = b_a + \gamma\phi_a. \tag{1}$$

Тогда получаем

$$\mathrm{C}_\mu = \mathrm{U}^{-1}\partial_\mu \mathrm{U} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_\mu u_1 & \partial_\mu u_2 - u_1\partial_\mu u_3 \\ 0 & 0 & \partial_\mu u_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При реализации такой замены функционал S является конечной суммой слагаемых $\Gamma_i[b,\phi]$, где нижний индекс показывает степень флуктуации. При этом справедливы соотношения

$$\delta_{\phi_a(x)}\Gamma_i[b,\phi] = \delta_{b_a(x)}\Gamma_{i-1}[b,\phi], \text{ где } i \in \{1,2,3,4\}.$$

Они являются ключевыми при построении производящего функционала в рамках метода фонового поля, поскольку на диаграммном языке их можно переформулировать так: дифференцирование по фоновому полю эквивалентно добавлению дополнительного «хвоста» с сохранением имеющейся связности. Известно, что такая процедура справедлива при построении как связных, так и сильно связных диаграмм, см. для справки [28] и секции 4.1 и 4.2 в [29].

Второй подход является аналогом разложения, использованного в работах [11–14]. Он сводится к нелинейной замене вида $\mathrm{U} = g\exp(\gamma\varphi_a t^a)$, где g – матрица, содержащая только фоновые поля. Таким образом, получаем

$$\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 1 & g_1 & g_2 \\ 0 & 1 & g_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \gamma\varphi_1 & \gamma\varphi_2 + \gamma^2\varphi_1\varphi_3/2 \\ 0 & 1 & \gamma\varphi_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 + g_a t^a + \gamma\varphi_a t^a + (\gamma\varphi_1/2 + g_1)\gamma\varphi_3 t^2,$$

$$\mathrm{C}_\mu = \mathrm{U}^{-1}\partial_\mu \mathrm{U} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_\mu v_1 & \partial_\mu v_2 - v_1\partial_\mu v_3 \\ 0 & 0 & \partial_\mu v_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \partial_\mu(\gamma\varphi_1/2 + g_1)\gamma\varphi_3 t^2, \text{ где } v_a = g_a + \gamma\varphi_a.$$

При сравнении двух способов разложения обнаруживается, что во втором случае возникает дополнительное слагаемое, в котором элементы фонового поля и флуктуации входят в разных степенях. Это обстоятельство становится серьезным препятствием при построении производящего функционала, так как дифференцирование по фоновому полю не может воспроизвести все имеющиеся плотности. Например, при таком разложении классическое действие содержит слагаемое, функциональная производная которого по $\varphi_3(x)$ имеет вид

$$\delta_{\varphi_3(x)}\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}^2y\, \varphi_1(y)\varphi_2(y)\varphi_3(y) = \varphi_1(x)\varphi_2(x) \neq 0 = \delta_{g_i(x)}\Big(\text{отсутствует}\Big).$$

Такой вклад не может быть воспроизведен никаким подходящим дифференцированием по фоновому полю, так как такое слагаемое отсутствует. С этой точки зрения рассуждения о выборе фонового поля и построении производящего функционала в работах [11–14] остаются неясными. К сожалению, авторы не обсуждали данный вопрос и не решали задачу о возможности пересчета.

3 Вопросы ренормировки

3.1 Квантовое действие

В рассматриваемом случае классическое действие отвечает евклидовой версии бозонной сигма-модели в двумерном плоском пространстве, см. [30] или секцию 2 в [27]. Кроме того, оно также напоминает функционал для скалярной четверной модели с тремя полями, см. [31]. Перепишем действие в новых терминах. Пусть далее роль малого параметра выполняет константа Планка $\hbar$, а новая константа связи g принимает конечные фиксированные значения. При этом $\gamma = g\sqrt{\hbar}$. Тогда с помощью масштабирования $b_a \to gb_a$ действие можно свести к более привычному виду. Обозначим $\mathrm{B} = 1 + gb_a t^a$, $\phi = \phi_a t^a$ и $u_a = b_a + \sqrt{\hbar}\phi_a$, а также определим новое классическое действие формулой

$$\begin{aligned} \mathrm{S}_{\mathrm{cl}}[b + \sqrt{\hbar}\phi] = \hbar\mathrm{S}[\mathrm{B} + g\sqrt{\hbar}\phi] &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}^2x \, \Big((\partial_\mu u_a)(\partial_\mu u_a) - 2gu_1(\partial_\mu u_2)(\partial_\mu u_3) + g^2 u_1^2(\partial_\mu u_3)(\partial_\mu u_3) \Big) \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}^2x \, \Big(\mathrm{w}^{ab}(u)(\partial_\mu u_a)(\partial_\mu u_b) \Big), \end{aligned} \tag{2}$$

где в последнем переходе было использовано определение

$$\mathrm{w}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -u_1 \\ 0 & -u_1 & 1 + u_1^2 \end{pmatrix}.$$

Также будем использовать обозначение $\mathrm{w} \equiv \mathrm{w}(gb)$. Из последнего представления (2) видно, что матрицу 3×3 можно отождествить с метрикой пространства-мишени. Более того, если вычислить по этой метрике тензор кривизны R_{abcd}, то можно убедиться, что он не является ковариантно-постоянным, то есть $R_{abcd;e} \neq 0$. Это означает, что действие (2) принадлежит более общему классу, чем тот, который был рассмотрен в [27].

Таким образом, работая с искривленным пространством, флуктуацию ϕ_a следует раскладывать по геодезическим, как это было сделано в секции 4 в [27]. Тем не менее, далее мы будем понимать набор $\{\phi_a(x)\}_{a=1}^3$ как элемент плоского пространства $\mathbb{R}^3$ для каждого $x \in \mathbb{R}^2$. Такое желание связано с особенностью группы $\mathrm{H}_3(\mathbb{R})$, см. формулу (1). Действительно, изменяя значения поля ϕ_a при фиксированном фоне b_a, можно получить все элементы группы. Для нового действия справедливо следующее разложение

$$\mathrm{S}_{\mathrm{cl}}[b + \sqrt{\hbar}\phi] = \mathrm{S}_{\mathrm{cl}}[b] + \frac{\Gamma_1[\phi]}{g\sqrt{\hbar}} + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}^2x \, \phi^a(x)\mathrm{A}_2^{ab}(x)\phi^b(x) + g\sqrt{\hbar}\Gamma_3[\phi] + \frac{g^2\hbar}{2}\Gamma_4[\phi].$$

Здесь вспомогательные функционалы Γ_i пропорциональны i-й степени флуктуации ϕ_a. При этом явный вид Γ_1 не важен, так как он не появляется в дальнейших вычислениях, а Γ_3 и Γ_4 определяются равенствами

$$\begin{aligned} \Gamma_3[\phi] &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}^2x \, \Big(b_1\partial_\mu\phi_3 + \phi_1\partial_\mu b_3 - \partial_\mu\phi_2 \Big)\phi_1\partial_\mu\phi_3, \\ \Gamma_4[\phi] &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}^2x \, \Big(\phi_1\partial_\mu\phi_3 \Big)\Big(\phi_1\partial_\mu\phi_3 \Big). \end{aligned}$$

Оператор в квадратичной форме задается соотношением $\mathrm{A}_2 = \mathrm{A}_1 + \mathrm{p}_\mu\partial_\mu + \mathrm{q}$, где $\mathrm{A}_1 = -\partial_\mu \mathrm{w}\,\partial_\mu$, а также

$$\frac{\mathrm{p}_\mu}{g} = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_\mu b_3 & 2gb_1\partial_\mu b_3 - \partial_\mu b_2 \\ \partial_\mu b_3 & 0 & 0 \\ \partial_\mu b_2 - 2gb_1\partial_\mu b_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathrm{q}}{g} = \begin{pmatrix} g(\partial_\mu b_3)(\partial_\mu b_3) & 0 & 0 \\ -(\mathrm{A}b_3) & 0 & 0 \\ 2g(\mathrm{A}b_3)b_1 - 2g(\partial_\mu b_3)(\partial_\mu b_1) - (Ab_2) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathrm{A} = -\partial_\mu\partial_\mu$. Можно проверить, что A_1 и A_2 являются симметричными. Символами $\mathrm{R}_1(\cdot,\cdot)$ и $\mathrm{R}_2(\cdot,\cdot)$ обозначим соответствующие фундаментальные решения. По построению они удовлетворяют равенствам

$$\mathrm{A}_i^{ac}(x)\mathrm{R}_i^{cb}(x,y) = \delta^{ab}\delta(x-y)$$

в смысле обобщенных функций на классе Шварца, см. [32]. Предполагается, что функция R_1 является симметричной и может быть однозначно фиксирована подходящими граничными условиями. При этом около диагонали, когда $x \sim y$, она имеет стандартное поведение вида $\mathrm{R}(x-y)\mathrm{w}^{-1}(y)$, где $\mathrm{R}(x) = -\ln(|x|\mu)/(2\pi)$, и $\mu > 0$ – вспомогательный фиксированный параметр для обезразмеривания, см. для справки [33,34]. Вторую функцию R_1 зададим пертурбативным разложением

$$\mathrm{R}_2(x,y)=\mathrm{R}_1(x,y)+\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}^2x_1\ldots\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}^2x_k\,\mathrm{R}_1(x,x_1)\Big(\mathrm{p}_\mu(x_1)\partial_{x_1^\mu}+\mathrm{q}(x_1)\Big)\mathrm{R}_1(x_1,x_2)\times \\ \ldots\times\Big(\mathrm{p}_\mu(x_k)\partial_{x_k^\mu}+\mathrm{q}(x_k)\Big)\mathrm{R}_1(x_k,y). \quad (3)$$

По построению она также симметрична. Поскольку R_i являются сингулярными при $x\sim y$, для дальнейшего введем регуляризацию путем деформации $\mathrm{R}_1\to\mathrm{R}_1^\Lambda$, где параметр $\Lambda\gg1$ является регуляризующим. При этом в главном порядке около диагонали происходит соответствующая замена $\mathrm{R}\to\mathrm{R}^\Lambda$. Для деформации, например, можно использовать метод усреднения [35,36]. Однозначно фиксировать вид регуляризации не будем, потребуем лишь несколько стандартных условий, касающихся главного порядка:

$$\mathrm{R}^\Lambda(0)=\frac{\ln(\Lambda/\mu)}{2\pi}+\mathcal{O}(1),\ \ \partial_\mu\mathrm{R}^\Lambda(0)=\mathcal{O}(1),\ \ \Lambda^{-2}\mathrm{A}\mathrm{R}^\Lambda(0)=\mathcal{O}(1), \quad (4)$$

где равенства следует понимать в смысле асимптотического разложения по Λ. Функцию R_2 после деформации обозначим R_2^Λ. С учетом последних определений регуляризованное связное квантовое действие $\mathrm{W}_{\mathrm{reg}}^{\mathrm{c}}$ имеет вид функционального интеграла, см. [28],

$$\mathrm{W}_{\mathrm{reg}}^{\mathrm{c}}[b]=-\hbar\ln\bigg(\int\mathcal{D}\phi\,e^{-\mathrm{S}_{\mathrm{cl}}[b+\sqrt{\hbar}\phi]/\hbar}\bigg)\bigg|_{\mathrm{reg.}},$$

который необходимо понимать в смысле формального ряда по константе Планка

$$\mathrm{W}_{\mathrm{reg}}^{\mathrm{c}}[b]=\mathrm{S}_{\mathrm{cl}}[b]-\frac{\hbar}{2}\Big(\ln\det\big(\mathrm{R}_1^\Lambda\big)-\kappa_0\Big)-\hbar\bigg[\mathbb{H}_0^{\mathrm{c}}\exp\Big(-\Gamma_1/(g\sqrt{\hbar})-g\sqrt{\hbar}\Gamma_3-g^2\hbar\Gamma_4/2\Big)-\sum_{k=1}^{+\infty}(g^2\hbar)^k\kappa_k\bigg].$$

Здесь функционалам Γ_1, Γ_3 и Γ_4 сопоставлены вершины с одной, тремя и четырьмя линиями, а оператор $\mathbb{H}_0^{\mathrm{c}}$ соединяет попарно все свободные концы посредством R_2^Λ всеми возможными способами, оставляя только связную часть без внешних линий. Константы κ_k вычитают сингулярности, не зависящие от фонового поля b_a. При этом, выбирая фоновое поле решением квантового уравнения движения, в сумме остаются только сильно связные части, вершина Γ_1 исчезает, а верхний индекс в операторе и действии меняется $\mathrm{c}\to\mathrm{sc}$. Поскольку вопросы ренормировки можно изучать на примере сильно связной части, далее будем работать именно с ней, оставляя фоновое поле нефиксированным. Справедливо разложение

$$\mathrm{W}_{\mathrm{reg}}^{\mathrm{sc}}[b]=\mathrm{S}_{\mathrm{cl}}[b]+\hbar\mathrm{W}_1[b]+g^2\hbar^2\mathrm{W}_2[b]+\mathcal{O}(\hbar^3),$$

где

$$\mathrm{W}_1[b]=-\frac{1}{2}\Big(\ln\det\big(\mathrm{R}_1^\Lambda\big)-\kappa_0\Big)-\frac{1}{2}\ln\det\big(\mathrm{R}_2^\Lambda/\mathrm{R}_1^\Lambda\big). \quad (5)$$

При этом во второй поправке

$$\mathrm{W}_2[b]=\frac{1}{2}\Big(\mathbb{H}_0^{\mathrm{sc}}\big(\Gamma_4\big)-\mathbb{H}_0^{\mathrm{sc}}\big(\Gamma_3^2\big)\Big)+\hat{\kappa}_1 \quad (6)$$

изучается только та часть, которая содержит степенные ($\sim\Lambda^2$) особенности. Явное выражение соответствующего функционала с учетом контрдиаграмм приведено в секции 3.3.

Замечание о регуляризации. Возможность выбора фонового поля в виде решения квантового уравнения движения зависит, в частности, от возможности ввести регуляризацию специальным согласованным образом, см. секцию 4.1 в [22], чтобы сохранялась связь плотности квантового уравнения движения и действия

$$\frac{\delta\mathrm{W}_{\mathrm{reg}}^{\mathrm{sc}}[b]}{\delta b_a(x)}=Q_{\mathrm{reg}}^a[b](x).$$

В этом случае перенормировка также будет согласована. Иначе же возникают серьезные проблемы, связанные с корректировкой перенормировочного процесса, см. схожую ситуацию в теории Янга–Миллса [29]. Если рассматривать в качестве регуляризации обрезение, в частности, посредством усреднения, то в случае сигма-моделей основная трудность заключается в выполнимости «цепного» соотношения для регуляризованных функций Грина

$$\frac{\delta \mathrm{R}_i^{\Lambda ab}(x,y)}{\delta b_a(z)} = -\mathrm{R}_i^{\Lambda ab}(x,z)\Big(\partial_{b_a(z)}\mathrm{A}_i(z)\Big)\mathrm{R}_i^{\Lambda ab}(z,y). \tag{7}$$

При этом, учитывая разложение (3), справедливость условия при $i=1$ гарантирует его наличие при $i=2$. Введем несколько вспомогательных объектов

$$\mathrm{w}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+g^2b_1^2 & gb_1 \\ 0 & gb_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -gb_1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{v}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & gb_1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что $\mathrm{w} = \mathrm{v}\mathrm{v}$. Такое разложение можно понимать как переход к тетрадному (реперному) формализму. Определим оператор $\mathrm{A}_0 = \mathrm{v}\mathrm{A}\mathrm{v}$, где $\mathrm{A} = -\partial_\mu\partial_\mu$, а его стандартную функцию Грина обозначим $\mathrm{R}_0(x,y) = \mathrm{v}^{-1}(x)\mathrm{R}(x-y)\mathrm{v}^{-1}(y)$. Далее переразложим R_1 по степеням оператора первого порядка $\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_0 = \mathrm{v}(\hat{\mathrm{p}}_\mu\partial_\mu + \hat{\mathrm{q}})\mathrm{v}$, где

$$\frac{\hat{\mathrm{p}}_\mu}{g} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_\mu b_1 \\ 0 & -\partial_\mu b_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\hat{\mathrm{q}}}{g} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & g(\partial_\mu b_1)(\partial_\mu b_1) & 0 \\ 0 & \mathrm{A}b_1 & 0 \end{pmatrix}$$

с использованием R_0, как это было сделано в (3). Тогда вопрос справедливости соотношения (7) для $i=1$ сводится к выполнимости при $i=0$. Именно на этом этапе возникают основные трудности, потому что прямое использование регуляризации обрезанием приводит к переходу к деформированной функции

$$\mathrm{R}_0(x,y) \to \mathrm{R}_0^\Lambda(x,y) = \mathrm{v}^{-1}(x)\mathrm{R}^\Lambda(x-y)\mathrm{v}^{-1}(y). \tag{8}$$

Однако она не удовлетворяет соотношению (7). Вопрос о других возможных деформациях остается открытым. К примеру, в случае малого фонового поля, в качестве функции Грина R_0 можно выписать формальный ряд по степеням разности $\mathrm{A}_0 - \mathbf{1}\cdot\mathrm{A}$. Проблема заключается в том, что такая разность является оператором второго порядка, поэтому вопрос о сходимости в этом случае также остается открытым. Далее мы будем пользоваться регуляризацией именно в виде (8). Это приемлемо, поскольку далее рассматриваются главные сингулярности, которые либо не зависят от вида регуляризации (первая поправка), либо диктуются главным приближением функции Грина (степенные части во второй поправке).

3.2 Первая поправка

Рассмотрим вначале первую часть (5). Учитывая $\det(\mathrm{w}) = 1$, в качестве κ_0 выберем $\ln\det\big(\mathrm{R}_0^\Lambda\big)$, который в действительности не зависит от фонового поля и равен $\ln\det\big(\mathrm{R}^\Lambda\big)$. Далее, используя рассуждения из секции 3.1, применим соотношение $\ln\det(\cdot) = \mathrm{tr}\ln(\cdot)$, тогда получим пертурбативное разложение для первой части в виде

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k}\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}^2x_1\ldots\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}^2x_k\,\mathrm{tr}\Big(\big[\hat{\mathrm{p}}_\mu(x_1)\partial_{x_1^\mu} + \hat{\mathrm{q}}(x_1)\big]\mathrm{R}^\Lambda(x_1-x_2)\times\ldots$$
$$\times\big[\hat{\mathrm{p}}_\mu(x_k)\partial_{x_k^\mu} + \hat{\mathrm{q}}(x_k)\big]\mathrm{R}^\Lambda(x_k-x_1)\Big),$$

где операция tr обозначает стандартный матричный след. Из разложения следует, что в двумерном случае сингулярный вклад могут дать только первые два слагаемых. Выполняя сдвиг переменных, используя равенства (4) и отбрасывая конечные части, получаем

$$\frac{L}{16\pi^2}\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}^2x\,\mathrm{tr}\Big(4\hat{\mathrm{q}} + \hat{\mathrm{p}}_\mu\hat{\mathrm{p}}_\mu\Big) = \frac{Lg^2}{8\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}^2x\,(\partial_\mu b_1)(\partial_\mu b_1),$$

где $L = \ln(\Lambda/\sigma)$. Здесь $\sigma > 0$ – вспомогательный параметр для обезразмеривания, от него теория не зависит. Для второй части квантовой поправки $\mathrm{W}_1[b]$ справедливо пертурбативное разложение

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k}\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}^2x_1\ldots\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}^2x_k\,\mathrm{tr}\Big(\big[\mathrm{p}_\mu(x_1)\partial_{x_1^\mu}+\mathrm{q}(x_1)\big]\mathrm{R}_1^\Lambda(x_1,x_2)\times\ldots$$
$$\times\big[\mathrm{p}_\mu(x_k)\partial_{x_k^\mu}+\mathrm{q}(x_k)\big]\mathrm{R}_1^\Lambda(x_k,x_1)\Big).$$

Из построения видно, что ультрафиолетовые сингулярности вновь могут содержаться только в первых двух слагаемых. Повторяя аналогичные шаги, получаем

$$\frac{L}{16\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}^2x\,\mathrm{tr}\big(4\,\mathrm{w}^{-1}\mathrm{q}+\mathrm{w}^{-1}\mathrm{p}_\mu\mathrm{w}^{-1}\mathrm{p}_\mu\big)=\frac{Lg^2}{8\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}^2x\,\Big((\partial_\mu b_3)(\partial_\mu b_3)-(\partial_\mu b_2-gb_1\partial_\mu b_3)(\partial_\mu b_2-gb_1\partial_\mu b_3)\Big).$$

При выводе также использовался факт, что след произведения матрицы p_μ на любую конечную степень матрицы w равен нулю. Суммируя результаты, получаем, что сингулярная часть $\hbar\mathrm{W}_1[b]$ равна

$$-\frac{Lg^2\hbar}{4\pi}\bigg(\mathrm{S}_{\mathrm{cl}}[b]-\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}^2x\,\Big[(\partial_\mu b_1)(\partial_\mu b_1)+(\partial_\mu b_3)(\partial_\mu b_3)\Big]\bigg). \tag{9}$$

Она не пропорциональна классическому действию. Следовательно, отдельные части классического действия должны иметь собственные константы перенормировки. Такая ситуация вписывается в общую теорию, для этого необходимо ввести четыре константы перенормировки

$$b_i\to b_i\sqrt{Z_i},\;\;\phi_i\to\phi_i\sqrt{Z_i},\;\;g\to gZ_4/\sqrt{Z_1Z_2Z_3},$$

которые являются рядами по степеням $g^2\hbar$ с сингулярными коэффициентами $Z_i = 1+g^2\hbar z_i+\mathcal{O}(\hbar^2)$. Тогда, принимая во внимание результат (9), получаем следующие ответы

$$z_i = (-1)^i L/(4\pi). \tag{10}$$

Такой результат полностью согласуется со случаем размерной регуляризации, см. [20, 21]. При работе с сигма-моделями перенормируется метрика и первая поправка приводит к сдвигу на тензор Риччи. Действительно, если по метрике w вычислить тензор Риччи, то получим

$$\mathrm{Ric}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&-gb_1\\0&-gb_1&g^2b_1^2-1\end{pmatrix}.$$

Таким образом, сдвиг на константы (10) эквивалентен сдвигу $\mathrm{w}\to\mathrm{w}+\hbar g^2L\mathrm{Ric}/(2\pi)$.

3.3 Степенные сингулярности

Рассмотрим степенные сингулярности во второй квантовой поправке. После однопетлевой ренормировки двухпетлевой функционал равен сумме $\mathrm{W}_2[b]$ из (6) и набору контрдиаграмм

$$\mathrm{D}_{\mathrm{c}}=\frac{g^2\hbar^2}{2}\mathbb{H}_0^{\mathrm{sc}}\Bigg(\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}^2x\,\bigg(z_1(\partial_\mu\phi_1)(\partial_\mu\phi_1)+2z_1(\partial_\mu\phi_3)(\partial_\mu\phi_3)+z_2\sum_{a,b=2,3}\phi_a\mathrm{A}_1^{ab}\phi_b\bigg)\Bigg).$$

Сразу отметим, благодаря второму свойству из (4) и сферической симметрии следует, что степенные расходимости могут быть только вида $\sim\Lambda^2$. Для их поиска необходимо отслеживать только те слагаемые в диаграммах, в которых все производные действуют на сингулярную функцию $\mathrm{R}^\Lambda(x-y)$ из главного порядка разложения функции Грина

$$\mathrm{R}_2^\Lambda(x,y)=\mathrm{R}^\Lambda(x-y)\mathrm{w}^{-1}(y)+\ldots, \tag{11}$$

Здесь многоточие обозначает менее сингулярные вклады, которые конечны до и после введения регуляризации для всех значений аргумента. Из факта, что w имеет блочно диагональный вид, следует отсутствие слагаемых $\sim \Lambda^2$ в контрдиаграммах $\mathrm{D_c}$. Для изучения остальных вкладов введем вспомогательные функции

$$\Big(\mathrm{R}_2^{\Lambda ab}(x,x)\Big)\Big|_{a=b=1} = \mathrm{R}^{\Lambda}(0) + f(x), \;\; \frac{\alpha_1}{2\pi} = -\partial_\mu\partial_\mu \mathrm{R}^1(0), \;\; \frac{\alpha_2}{2\pi} = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}^2x \left(\partial_\mu\partial_\mu \mathrm{R}^1(x)\right)^2.$$

Тогда, подставляя выражение (11), с учетом явного вида вершин, имеем

$$\mathbb{H}_0^{\mathrm{sc}}(\Gamma_4) \longrightarrow \frac{\Lambda^2\alpha_1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}^2x\, f(x) + (\ln\text{-часть}),$$
$$\mathbb{H}_0^{\mathrm{sc}}(\Gamma_3^2) \longrightarrow \frac{\Lambda^2\alpha_2}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}^2x\, f(x) + (\ln\text{-часть}).$$

Следовательно, вспоминая явный вид диаграмм (6), получаем во второй квантовой поправке степенную сингулярность вида

$$\Lambda^2 g^2\hbar^2\frac{\alpha_1-\alpha_2}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}^2x\, f(x).$$

Чтобы ее сократить, в квантовое действие необходимо добавить контрдиаграмму вида

$$-\Lambda^2 g^2\hbar\frac{\alpha_1-\alpha_2}{4\pi}\mathbb{H}_0^{\mathrm{sc}}\big(\mathrm{S}_2[\phi]\big), \;\; \text{где} \;\; \mathrm{S}_2[\phi] = \int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}^2x\,\phi_1^2. \tag{12}$$

В данном случае понять процесс перенормировки можно двумя способами: либо расширяя условие ренормируемости, и тогда добавление вспомогательной вершины $\mathrm{S}_2[\phi]$ является конечным этапом, либо расширяя классическое действие путем добавления «массового» слагаемого, то есть

$$\mathrm{S_{cl}}[b+\sqrt{\hbar}\phi] \to \mathrm{S_{cl}}[b+\sqrt{\hbar}\phi] + \mu^2\hbar\mathrm{S}_2[\phi].$$

Во втором случае перенормировка заключается в поиске константы $Z_\mu = 1 + g^2\hbar z_\mu + \mathcal{O}(\hbar^2)$. При этом коэффициент z_μ имеет степенную часть z_μ^Λ, которая с учетом (12) равна $-\Lambda^2(\alpha_1-\alpha_2)/(4\pi\mu^2)$, а также может иметь логарифмическую z_μ^L, которая определяется исходя из анализа двухпетлевых логарифмических сингулярностей. Отметим, что в первой поправке новых расходимостей, связанных с параметром μ^2, не возникает, что говорит о согласованности. Таким образом, во втором подходе степенные сингулярности приводят к сдвигу «массы».

4 Заключение

В работе представлено сравнение двух подходов к разложению кирального поля на фоновую часть и флуктуацию. Было показано, что стандартная линейная замена является более аргументированной, поскольку согласована с процессом построения производящих функционалов путем введения фонового поля. Дополнительно был представлен явный вид квантового действия и вычислен сингулярный вклад для первой поправки. Оказалось, что отдельные части классического действия имеют различные константы перенормировки. Это привело к переформулированию модели как скалярной с тремя полями и новой константой взаимодействия, в рамках которого процесс ренормировки имеет стандартный вид. При этом была показана согласованность с перенормировкой метрики, которая принята в рамках работы с сигма-моделями. Также были изучены двухпетлевые степенные особенности, варианты расширения классического действия и вопросы согласованности регуляризации со специальными функциональными соотношениями.

Отметим, что при поиске констант ренормировки для $\mathrm{S_{cl}}$ был использован факт равенства первых поправочных коэффициентов для Z_2 и Z_4. Это необходимо, так как пятое слагаемое классического действия пропорционально g^2. Соответственно, предполагается, что в старших поправках должны выполняться аналогичные дополнительные соотношения. Это необходимо для ренормируемости модели. Другой возможностью при расширении действия было введение новой константы λ вместо g^2. Однако в этом случае возникают трудности, связанные с нелинейностью, так как определитель новой матрицы w зависит от полей, поэтому знаменатель в w^{-1} также содержит поля.

Дополнительно ситуацию усложняет наличие степенных сингулярностей. Таким образом, открытый вопрос связан с ренормируемостью модели в целом.

В секции 3 обсуждалась проблема разложений на фоновое поле и флуктуацию, использованных в работах [11–14]. В качестве открытой задачи можно выделить описание связи двух подходов введения фонового поля, см. секцию 2, а также явной процедуры пересчета. Основная трудность заключается в том, что в общем случае отсутствует равенство $\exp(\mathfrak{a})\exp(\psi) = \exp(\mathfrak{a}+\psi)$, где $\mathfrak{a}, \psi \in \mathfrak{g}$, и $\exp(\mathfrak{a})$ описывает фоновое поле из G.

Благодарности. Автор благодарит А.В.Иванова за критику и редакторскую работу.

5 Список литературы

[1] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*, Second Edition, CRC Press, 1–573 (2003)

[2] A. M. Polyakov, *Gauge Fields and Strings*, London, Taylor and Francis Group, 1–312 (1987)

[3] J. C. Collins, *Renormalization: An Introduction to Renormalization, the Renormalization Group and the Operator-Product Expansion*, Cambridge University Press, 1–392 (1984)

[4] O. I. Zavialov, *Renormalized quantum field theory*, Kluwer Academic Publishers, Dodrecht, Boston, 1–524 (1990)

[5] D. I. Kazakov, *Radiative Corrections, Divergences, Regularization, Renormalization, Renormalization Group and All That in Examples in Quantum Field Theory*, arXiv:0901.2208 [hep-ph] (2009)

[6] A. A. Slavnov, L. D. Faddeev, *Invariant perturbation theory for nonlinear chiral Lagrangians*, Theor Math Phys **8**, 843–850 (1971) doi:10.1007/BF01029338

[7] L. D Faddeev, N. Yu Reshetikhin, *Integrability of the principal chiral field model in 1+1 dimension*, Ann. Phys. **167**(2), 227–256 (1986) doi:10.1016/0003-4916(86)90201-0

[8] T. Nguyen, *Quantization of the nonlinear sigma model revisited*, J. Math. Phys. **57**, 082301 (2016) doi:10.1063/1.4961153

[9] J. Evslin, B. Zhang, *Mass-gap in the compactified principal chiral model*, Phys. Rev. D **98**, 085016 (2018) doi:10.1103/PhysRevD.98.085016

[10] F. Bascone, F. Pezzella, *Principal Chiral Model without and with WZ term: Symmetries and Poisson-Lie T-Duality*, PoS, **376**, CORFU2019 134 (2020) doi:10.22323/1.376.0134

[11] A. A. Bagaev, *Two-loop calculations of the matrix σ-model effective action in the background field formalism*, Theor Math Phys, **154**:2, 303–310 (2008) doi:10.1007/s11232-008-0028-5

[12] P. V. Akacevich, A. V. Ivanov, *On Two-Loop Effective Action of 2D Sigma Model*, Eur. Phys. J. C **83**, 653 (2023), arXiv:2304.02374, doi:10.1140/epjc/s10052-023-11797-0

[13] A. V. Ivanov, *Applicability condition of a cutoff in two-dimensional models*, Questions of quantum field theory and statistical physics. Part 30, Zap. Nauchn. Sem. POMI, **532**, POMI, St. Petersburg, 153–168, J. Math. Sci. (2026) doi:10.1007/s10958-026-08474-4

[14] P. V. Akacevich, A. V. Ivanov, I. V. Korenev, *Three-loop singularity structure for a non-linear sigma model*, (2025) arXiv:2507.05923

[15] B. C. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*, Graduate Texts in Mathematics (second ed.), Springer, Switzerland, Vol. **222**, 1–449 (2015)

[16] B. S. DeWitt, *Quantum Theory of Gravity. 2. The Manifestly Covariant Theory*, Phys. Rev. **162**, 1195–1239 (1967) doi:10.1103/PhysRev.162.1195

[17] G. 't Hooft, *The background field method in gauge field theories*, (Karpacz, 1975), Proceedings, Acta Universitatis Wratislaviensis, **1**, Wroclaw, 345–369 (1976)

[18] L. F. Abbott, *Introduction to the background field method*, Acta Phys. Polon. B, **13**:1–2, 33–50 (1982)

[19] I. Ya. Aref'eva, A. A. Slavnov, L. D. Faddeev, *Generating functional for the S-matrix in gauge-invariant theories*, TMF, **21**:3, 311–321 (1974)

[20] R. R. Metsaev, A. A. Tseytlin, *Two-loop β-function for the generalized bosonic sigma model*, Phys. Lett. B, **191**, 354–362 (1987) doi:10.1016/0370-2693(87)90622-8

[21] D. R. T. Jones, *Two-loop renormalisation of $d = 2$ σ-models with torsion*, Phys. Lett. B, **192**, 391–394 (1987) doi:10.1016/0370-2693(87)90125-0

[22] A. V. Ivanov, *Three-loop renormalization of the quantum action for a four-dimensional scalar model with quartic interaction with the usage of the background field method and a cutoff regularization*, Nucl. Phys. B, **1006**, 116647 (2024), doi:10.1016/j.nuclphysb.2024.116647, arXiv:2402.14549

[23] N. V. Kharuk, *Four-loop renormalization with a cutoff in a sextic model*, 2025 J. Phys. A: Math. Theor. **58**, 395401 (2025) arXiv:2504.07688, doi:10.1088/1751-8121/ae0798

[24] L. D. Faddeev, *A couple of methodological comments on the quantum Yang-Mills theory*, Theor Math Phys, **181**, 1638–1642 (2014) doi:10.1007/s11232-014-0240-4

[25] L. D. Faddeev, *Mass in Quantum Yang–Mills theory (comment on a Clay millenium problem)*, Bull. Braz. Math. Soc. (N. S.), **33**:2, 201–212 (2002) arXiv:0911.1013

[26] J. Honerkamp, *Chiral multi-loops*, Nucl. Phys. B, **36**, 130–140 (1972) doi:10.1016/0550-3213(72)90299-4

[27] V. V. Belokurov, D. I. Kazakov, *Divergences in Two-Dimensional Non-Linear Sigma-Models*, Physics of Elementary Particles and Atomic Nuclei (PEPAN), Volume **23**, part 5, 65 pages (1992)

[28] A. N. Vasil'iev, *Functional Methods in Quantum Field Theory and Statistical Physics*, CRC Press, 1–320 (1998)

[29] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Renormalization aspects of the Yang–Mills theory with a cutoff*, PDMI RAS Preprint, **05/2026** (2026) https://www.pdmi.ras.ru/preprint/2026/26-05.html

[30] C. Lovelace, *Strings in curved space*, Phys. Lett. B, **135**, 75–77 (1987) doi:10.1016/0370-2693(84)90456-8

[31] A. N. Vasil'ev, *The field theoretic renormalization group in critical behavior theory and stochastic dynamics*, Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 1–681 (2004)

[32] V. S. Vladimirov, *Methods of the theory of generalized functions*, London, CRC Press, 1–328 (2002)

[33] M. Lüscher, *Dimensional regularisation in the presence of large background fields*, Annals of Physics **142**, 359–392 (1982) doi:10.1016/0003-4916(82)90076-8

[34] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Special Functions for Heat Kernel Expansion*, Eur. Phys. J. Plus **137**, 1060 (2022), arXiv:2106.00294v2, 10.1140/epjp/s13360-022-03176-7

[35] A. V. Ivanov, *Explicit Cutoff Regularization in Coordinate Representation*, 2022 J. Phys. A: Math. Theor. **55**, 495401, arXiv:2209.01783, doi:10.1088/1751-8121/aca8dc

[36] A. V. Ivanov, *An applicability condition of a cutoff regularization in the coordinate representation*, Funct Anal Its Appl **59**, 1–10 (2025) arXiv:2403.09218, doi:10.1134/S123456782501001X