

**ОПЕРАТОРНЫЕ ОЦЕНКИ ПРИ УСРЕДНЕНИИ  
ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СВЁРТОЧНОГО ТИПА  
С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

**Е. А. Жижина<sup>1</sup>, А. Л. Пятницкий<sup>1,2</sup>, В. А. Слоущ<sup>3</sup>, Т. А. Суслина<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>Высшая школа современной математики МФТИ,  
Климентовский пер., д.1, стр.1,  
Москва, 115184, Россия

<sup>2</sup> Арктический университет Норвегии, кампус Нарвик,  
Лодве Лангес гате 2,  
Нарвик 8517, Норвегия

<sup>3</sup>Санкт-Петербургский государственный университет,  
Университетская наб., д. 7/9,  
Санкт-Петербург, 199034, Россия

e-mail: elena.jijina@gmail.com

e-mail: apiatnitski@gmail.com

e-mail: v.slouzh@spbu.ru

e-mail: t.suslina@spbu.ru

**АННОТАЦИЯ**

Пусть  $u_\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ ,  $t \in [0, \infty)$ ,  $\varepsilon > 0$ , — решение задачи Коши для параболического уравнения с нелокальным оператором свёрточного типа:

$$\frac{\partial u_\varepsilon(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \varepsilon^{-d-2} \int_{\mathbb{R}^d} a((\mathbf{x} - \mathbf{y})/\varepsilon) \mu(\mathbf{x}/\varepsilon, \mathbf{y}/\varepsilon, t/\varepsilon^2) (u_\varepsilon(\mathbf{y}, t) - u_\varepsilon(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{y}, \quad u_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \varphi(\mathbf{x}).$$

Здесь  $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ . Предполагается, что  $a(\mathbf{x}) = a(-\mathbf{x}) \geq 0$ , причем  $0 < \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\mathbf{x}|^3) a(\mathbf{x}) d\mathbf{x} < \infty$ , а функция  $\mu \in L_\infty(\mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}_+)$  симметрична:  $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \mu(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t)$ , положительно определена и периодична по всем переменным. Мы показываем, что при фиксированном  $t > 0$  и  $\varepsilon \rightarrow 0$  решение  $u_\varepsilon(\cdot, t)$  сходится в  $L_2(\mathbb{R}^d)$  к решению  $u_0(\cdot, t)$  усредненной задачи

$$\frac{\partial u_0(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \operatorname{div} g^0 \nabla u_0(\mathbf{x}, t), \quad u_0(\mathbf{x}, 0) = \varphi(\mathbf{x}).$$

Здесь  $g^0$  — положительная эффективная матрица. Получена оценка погрешности

$$\|u_\varepsilon(\cdot, t) - u_0(\cdot, t)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C\varepsilon}{(t + \varepsilon^2)^{1/2}} \|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad t \geq 0, \varepsilon > 0.$$

**Ключевые слова:** нелокальные операторы свёрточного типа, периодическое усреднение, неавтономное параболическое уравнение, операторные оценки погрешности, эффективный оператор.

Исследования Е. А. Жижиной и А. Л. Пятницкого поддержаны программой “Приоритет 2030” Министерства науки и высшего образования РФ и проектом MASCOT.

Исследование В. А. Слоуща и Т. А. Суслиной выполнено при поддержке РНФ, проект 22-11-00092-П.

**ПРЕПРИНТЫ**

Санкт-Петербургского отделения  
Математического института им. В. А. Стеклова  
РАН

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР**

С. В. Кисляков

**РЕДКОЛЛЕГИЯ**

М. А. Всемиров, А. И. Генералов,  
И. А. Ибрагимов, Л. Ю. Колотилина, Ю. В. Матиясевич,  
Н. Ю. Нецветаев, С. И. Репин, Г. А. Серегин

## ВВЕДЕНИЕ

**0.1. Постановка задачи. Основной результат.** В  $L_2(\mathbb{R}^d)$  рассмотрим нелокальный оператор свёрточного типа, заданный выражением

$$\mathbb{A}_\varepsilon(t)u(\mathbf{x}) = \varepsilon^{-d-2} \int_{\mathbb{R}^d} a\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\varepsilon}\right) \mu\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \frac{\mathbf{y}}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}\right) (u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d), \quad (0.1)$$

где  $t \in \mathbb{R}_+$ , а  $\varepsilon > 0$  — малый параметр. Предполагается, что  $a(\mathbf{x}) = a(-\mathbf{x}) \geq 0$ , причем  $\int_{\mathbb{R}^d} a(\mathbf{x})(1 + |\mathbf{x}|^3) d\mathbf{x} < \infty$ , а  $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$  — ограниченная положительно определенная функция, периодическая по  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  относительно решетки  $\mathbb{Z}^d$  и периодическая по  $t$  с периодом 1. Кроме того, предполагается, что  $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \mu(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t)$  при  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}_+$ . Оператор  $\mathbb{A}_\varepsilon(t)$  ограничен, самосопряжен и неотрицателен.

Пусть  $u_\varepsilon(\mathbf{x}, t)$  — решение задачи Коши для параболического уравнения с оператором  $\mathbb{A}_\varepsilon(t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\varepsilon(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= -\mathbb{A}_\varepsilon(t)u_\varepsilon(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad t \in \mathbb{R}_+; \\ u_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) &= \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \end{aligned} \quad (0.2)$$

где  $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ . Пусть  $\mathbb{S}_\varepsilon(t)$  — разрешающий оператор задачи (0.2):  $\mathbb{S}_\varepsilon(t)\varphi = u_\varepsilon(\cdot, t)$ . В настоящей работе исследуется поведение решения  $u_\varepsilon = \mathbb{S}_\varepsilon(t)\varphi$  при малом  $\varepsilon$ .

Интерес к нелокальным операторам свёрточного типа и к задачам усреднения для таких операторов мотивирован различными приложениями к моделям математической биологии, популяционной динамики, механики пористых сред и химии полимеров; подробнее см. введение к работе [21]. С другой стороны, при изучении таких операторов возникает множество сложных вопросов, привлекающих внимание математиков. В последнее время активно изучаются качественные и асимптотические свойства операторов свёрточного типа.

Ранее задача (0.2) изучалась в статье [20], где было показано, что при каждом  $T > 0$  имеет место

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T]} \|u_\varepsilon(\cdot, t) - u_0(\cdot, t)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0. \quad (0.3)$$

Здесь  $u_0(\mathbf{x}, t)$  — решение усредненной задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= -\mathbb{A}^0 u_0(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad t \in \mathbb{R}_+; \\ u_0(\mathbf{x}, 0) &= \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Усредненный оператор  $\mathbb{A}^0$  — это эллиптический дифференциальный оператор вида  $\mathbb{A}^0 = -\operatorname{div} g^0 \nabla$ , а  $g^0$  — положительно определенная эффективная матрица, которая определяется в терминах решений некоторых вспомогательных задач. Отметим, что сходимость (0.3) имеет место при условии finiteness второго момента функции  $a(\mathbf{x})$ . В операторных терминах (0.3) означает, что  $\mathbb{S}_\varepsilon(t)$  сильно сходится к оператору  $e^{-\mathbb{A}^0 t}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

*Наш основной результат* (теорема 6.1): при сделанных предположениях имеет место сходимость разрешающего оператора по операторной норме в  $L_2(\mathbb{R}^d)$ , и справедлива оценка

$$\left\| \mathbb{S}_\varepsilon(t) - e^{-\mathbb{A}^0 t} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C\varepsilon}{(t + \varepsilon^2)^{1/2}}, \quad \varepsilon > 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (0.4)$$

В терминах решений оценка (0.4) означает, что

$$\|u_\varepsilon(\cdot, t) - u_0(\cdot, t)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C\varepsilon}{(t + \varepsilon^2)^{1/2}} \|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \varepsilon > 0, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Из оценки (0.4) мы также выводим результат об усреднении решения задачи Коши для неоднородного уравнения

$$\begin{aligned}\frac{\partial z_\varepsilon(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= -\mathbb{A}_\varepsilon(t)z_\varepsilon(\mathbf{x}, t) + F(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad t \in (0, T); \\ z_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) &= \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,\end{aligned}$$

где  $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^d)$  и  $F \in L_q((0, T); L_2(\mathbb{R}^d))$ ; см. теоремы 6.2 и 6.3.

**0.2. Операторные оценки погрешности в теории усреднения.** Различные задачи об усреднении дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами активно исследуются в течение последних пятидесяти лет. Упомянем несколько основных монографий [1, 2, 11] в этой области.

Получение оценок для скорости сходимости в различных задачах гомогенизации играет большую роль как в теоретическом, так и в прикладном плане. Первые количественные результаты при усреднении периодических дифференциальных операторов были получены в [2], см. также [1], [17] и библиографию в этих книгах. В дальнейшем этой тематике было посвящено большое число работ. Однако, в этих работах речь шла об оценках погрешности в сильной топологии.

В работах [3], [4], [5] Бирманом и Суслиной был предложен и развит теоретико-операторный подход к задачам усреднения периодических дифференциальных операторов. С помощью этого подхода были получены так называемые операторные оценки погрешности в задачах гомогенизации для широкого класса периодических эллиптических дифференциальных операторов. К усреднению параболических дифференциальных уравнений теоретико-операторный подход применялся в [29, 30]. Проиллюстрируем основные идеи подхода на примере усреднения полугруппы  $e^{-tA_\varepsilon}$  эллиптического оператора  $A_\varepsilon = -\operatorname{div} g(\mathbf{x}/\varepsilon)\nabla$  в  $L_2(\mathbb{R}^d)$ . Здесь  $g(\mathbf{x})$  — ограниченная положительно определенная  $\mathbb{Z}^d$ -периодическая матрица-функция. Как показано в [29, 30], при каждом  $t > 0$  и  $\varepsilon \rightarrow 0$  полугруппа  $e^{-tA_\varepsilon}$  сходится по операторной норме в  $L_2(\mathbb{R}^d)$  к полугруппе эффективного оператора  $A^0 = -\operatorname{div} g_{\text{hom}}\nabla$ . При этом справедлива оценка

$$\|e^{-tA_\varepsilon} - e^{-tA^0}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C\varepsilon}{(t + \varepsilon^2)^{1/2}}, \quad \varepsilon > 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (0.5)$$

В теории усреднения оценки такого типа называют *операторными оценками погрешности*.

Метод доказательства оценки (0.5) основан на масштабном преобразовании, теории Флоке–Блоха и аналитической теории возмущений.

С помощью унитарного масштабного преобразования оценка (0.5) сводится к неравенству

$$\|e^{-tA} - e^{-tA^0}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C}{(t + 1)^{1/2}}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (0.6)$$

где  $A = A_1 = -\operatorname{div} g(\mathbf{x})\nabla$ . Далее, применение унитарного преобразования Гельфанда позволяет разложить оператор  $A$  в прямой интеграл по операторному семейству  $A(\boldsymbol{\xi})$ . Оператор  $A(\boldsymbol{\xi})$  действует в  $L_2(\Omega)$ , где  $\Omega = [0, 1)^d$  — ячейка решетки  $\mathbb{Z}^d$ , и задается выражением  $A(\boldsymbol{\xi}) = (-i\nabla + \boldsymbol{\xi})^* g(\mathbf{x})(-i\nabla + \boldsymbol{\xi})$  с периодическими граничными условиями. Параметр  $\boldsymbol{\xi}$ , называемый квазиимпульсом, принимает значения в ячейке  $\tilde{\Omega} = [-\pi, \pi)^d$  двойственной решетки. Для оправдания неравенства (0.6) достаточно показать, что

$$\|e^{-tA(\boldsymbol{\xi})} - e^{-tA^0(\boldsymbol{\xi})}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \frac{C}{(t + 1)^{1/2}} \quad \text{при всех } \boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}.$$

Основную часть исследования составляет анализ операторного семейства  $A(\boldsymbol{\xi})$ . Поскольку оно является аналитическим семейством операторов с компактной резольventой, применимы методы аналитической теории возмущений. Было показано, что полугруппу  $e^{-tA(\boldsymbol{\xi})}$  можно приблизить в терминах спектральных характеристик оператора на краю спектра. В частности, эффективная матрица выражается через гессиан первого собственного значения  $\lambda_1(\boldsymbol{\xi})$

оператора  $A(\xi)$  при  $\xi = 0$ . Таким образом, усреднение можно изучать как *спектральный пороговый эффект* на краю спектра.

Другой метод получения операторных оценок при усреднении периодических задач был предложен Жиковым и Пастуховой в работах [10, 12, 13], см. также обзор [14] и цитированную там литературу. Этот метод, названный авторами “методом сдвига”, применим также к усреднению дифференциальных операторов с локально периодическими коэффициентами и к усреднению краевых задач в ограниченной области.

В последние годы проблема получения операторных оценок погрешности в различных задачах теории усреднения привлекает внимание многих математиков. В этой области получен ряд глубоких результатов; подробный обзор состояния дел можно найти в [21, пункт 0.2] и во введении к статье [31]. Отдельно отметим работы [8, 9], где получены операторные оценки при усреднении неавтономных параболических уравнений в ограниченной области.

**0.3. Усреднение нелокальных операторов свёрточного типа.** Хотя задачи усреднения для дифференциальных операторов изучались в течение долгого времени, первые результаты об усреднении операторов свёрточного типа нулевого порядка были получены сравнительно недавно. В работе [18] было показано, что семейство самосопряженных операторов  $A_\varepsilon$  вида (0.1) (не зависящих от  $t$ ) допускает усреднение: резольвента  $(A_\varepsilon + I)^{-1}$  сильно сходится к резольвенте эффективного оператора при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . При этом эффективный оператор представляет собой эллиптический дифференциальный оператор второго порядка с постоянной матрицей коэффициентов. Аналогичный результат в перфорированной области был получен в [6] вариационным методом. Отметим, что хотя исходный оператор  $A_\varepsilon$  является нелокальным и ограниченным при каждом  $\varepsilon > 0$ , усредненный оператор оказывается локальным и неограниченным.

Как уже отмечалось выше, усреднение параболического уравнения с оператором (0.1), коэффициенты которого периодически зависят как от пространственных переменных, так и от времени, изучалось в работе [20].

Задача усреднения для параболического уравнения с оператором  $A_\varepsilon$  (не зависящим от  $t$ ) в несамосопряженном случае (без условий симметрии коэффициентов  $a$  и  $\mu$ ) рассматривалась в [19]. Как и для дифференциальных операторов, результат об усреднении решений справедлив в движущихся координатах (имеет место “снос”).

Операторные оценки при усреднении нелокальных самосопряженных операторов  $A_\varepsilon$  вида (0.1) (не зависящих от  $t$ ) были получены в работе авторов [21]: было показано, что при условии конечности третьего момента коэффициента  $a$  резольвента  $(A_\varepsilon + I)^{-1}$  сходится к резольвенте эффективного оператора по операторной норме в  $L_2(\mathbb{R}^d)$ , а погрешность имеет порядок  $O(\varepsilon)$ . Более точное приближение к резольвенте  $(A_\varepsilon + I)^{-1}$  при учете корректора с погрешностью  $O(\varepsilon^2)$  было получено в [22, 23] при условии конечности четвертого момента функции  $a$ . В несамосопряженном случае аппроксимация резольвенты оператора  $A_\varepsilon$  по операторной норме в  $L_2(\mathbb{R}^d)$  с погрешностью  $O(\varepsilon)$  найдена в [24].

Изучалось также усреднение периодических операторов типа Леви (нелокальных операторов дробного порядка  $0 < \alpha < 2$ ); результаты о сильной сходимости были получены в работах [15] и [7]. Операторные оценки для операторов типа Леви получены в недавних работах авторов [25, 26, 27].

В настоящей работе мы изучаем усреднение параболического уравнения с периодическим самосопряженным оператором свёрточного типа вида (0.1), допуская периодическую зависимость коэффициента  $\mu$  от времени. Мы получаем точные по порядку оценки для скорости сходимости разрешающего оператора  $S_\varepsilon(t)$  к полугруппе эффективного оператора по операторной норме в  $L_2(\mathbb{R}^d)$ .

Следует отметить, что до появления работы авторов [21] операторные оценки в задачах усреднения нелокальных операторов свёрточного типа не были известны.

**0.4. Метод.** Мы опираемся на модифицированный вариант теоретико-операторного подхода, который был адаптирован в работах авторов [21]–[24] для изучения нелокальных операторов.

Первые два шага, а именно, применение масштабного преобразования и разложение оператора  $\mathbb{A}(t) = \mathbb{A}_1(t)$  (отвечающего случаю  $\varepsilon = 1$ ) в прямой интеграл по операторам  $\mathbb{A}(t, \xi)$  с помощью преобразования Гельфанда, остаются прежними. Дело сводится к изучению разрешающего оператора  $\mathbb{S}(t, \xi)$  задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\mathbf{x}, t; \xi)}{\partial t} &= -\mathbb{A}(t, \xi)u(\mathbf{x}, t; \xi), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}_+; \\ u(\mathbf{x}, 0; \xi) &= \phi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \end{aligned}$$

где  $\phi \in L_2(\Omega)$ . Требуется найти аппроксимацию оператора  $\mathbb{S}(t, \xi)$  с погрешностью  $O((t+1)^{-1/2})$ . Положим  $\mathbb{S}(\xi) := \mathbb{S}(1, \xi)$ . С учетом периодичности коэффициента  $\mu$  по  $t$ , выясняется, что главное — построить приближение к оператору  $\mathbb{S}(\xi)^N$  при большом целом  $N$ .

Операторы  $\mathbb{A}(t, \xi)$  определены ниже в пункте 1.3; это ограниченные самосопряженные операторы в  $L_2(\Omega)$ , зависящие от параметра  $\xi \in \tilde{\Omega}$ . Однако, в отличие от случая дифференциальных операторов семейство  $\mathbb{A}(t, \xi)$  не является аналитическим по  $\xi$ , а потому методы аналитической теории возмущений к этому семейству неприменимы. Вместо них мы используем  $C^3$ -гладкость семейства  $\mathbb{A}(t, \xi)$  по  $\xi$ , которая гарантируется предположением о конечности первых трех моментов коэффициента  $a(\mathbf{x})$ .

Оператор  $\mathbb{A}(t, \xi)$  неотрицателен при всех  $\xi \in \tilde{\Omega}$ . Точка  $\lambda = 0$  является простым собственным значением “невозмущенного” оператора  $\mathbb{A}(t, \mathbf{0})$ ; при этом  $\text{Ker } \mathbb{A}(t, \mathbf{0})$  состоит из постоянных функций. “Возмущенный” оператор  $\mathbb{A}(t, \xi)$  подчинен оценке

$$\mathbb{A}(t, \xi) \geq C|\xi|^2 I, \quad \xi \in \tilde{\Omega},$$

а на подпространстве  $L_2(\Omega) \ominus \mathcal{L}\{\mathbf{1}_\Omega\}$  этот оператор положительно определен. Отсюда легко выводятся следующие свойства оператора  $\mathbb{S}(\xi)$ . Точка  $\lambda_0 = 1$  является простым собственным значением “невозмущенного” оператора  $\mathbb{S}(\mathbf{0})$ ; при этом  $\text{Ker}(\mathbb{S}(\mathbf{0}) - I) = \mathcal{L}\{\mathbf{1}_\Omega\}$ . Подпространство  $L_2(\Omega) \ominus \mathcal{L}\{\mathbf{1}_\Omega\}$  инвариантно относительно оператора  $\mathbb{S}(\mathbf{0})$ , причем норма оператора  $\mathbb{S}(\mathbf{0})$  на этом подпространстве не превосходит величины  $1 - \rho < 1$ . При всех  $\xi \in \tilde{\Omega}$  выполнена оценка

$$\|\mathbb{S}(\xi)\| \leq e^{-C|\xi|^2}.$$

Поэтому при  $|\xi| > \delta > 0$  оценки тривиальны. Достаточно приблизить оператор  $\mathbb{S}(\xi)^N$  при  $|\xi| \leq \delta$ , где  $\delta$  достаточно мало. При подходящем выборе числа  $\delta$  и при  $|\xi| \leq \delta$  возмущенный оператор  $\mathbb{S}(\xi)$  имеет простое собственное значение  $\lambda_0(\xi)$  вблизи точки 1:  $|\lambda_0(\xi) - 1| \leq \rho/3$ , а остальной спектр этого оператора содержится в круге  $|\lambda| \leq 1 - 2\rho/3$ . Для наших целей важно только собственное значение  $\lambda_0(\xi)$ .

Важной технической частью исследования является получение “пороговых аппроксимаций” при  $|\xi| \leq \delta$ : это приближения для проектора Рисса  $F(\xi)$  оператора  $\mathbb{S}(\xi) - I$ , отвечающего собственному значению  $\lambda_0(\xi) - 1$ , а также приближение для оператора  $(\mathbb{S}(\xi) - I)F(\xi)$ . Такие аппроксимации устанавливаются с помощью формул Рисса, выражающих эти операторы через интегралы от резольвенты по контуру  $\gamma \subset \mathbb{C}$ , охватывающему собственное значение  $\lambda_0(\xi) - 1$  и отделенному от остального спектра оператора  $\mathbb{S}(\xi) - I$ . Мы получаем приближение к  $F(\xi)$  с погрешностью  $O(|\xi|)$  и приближение к  $(\mathbb{S}(\xi) - I)F(\xi)$  с погрешностью  $O(|\xi|^3)$ .

Для оператора  $\mathbb{S}(\xi)^N(I - F(\xi))$  оценки тривиальны. Остается вычислить аппроксимацию для оператора  $\mathbb{S}(\xi)^N F(\xi)$ . Это несложно сделать с помощью полученных пороговых аппроксимаций.

**0.5. План статьи.** Работа состоит из введения и семи параграфов. В §1 вводится оператор  $\mathbb{A}(t)$ , обсуждается разложение этого оператора в прямой интеграл по семейству операторов  $\mathbb{A}(t, \xi)$ , изучаются спектральные характеристики оператора  $\mathbb{A}(t, \mathbf{0})$  вблизи нуля и устанавливаются оценки снизу для квадратичной формы оператора  $\mathbb{A}(t, \xi)$ . В §2 рассматривается задача Коши для параболического уравнения с оператором  $\mathbb{A}(t)$ .

Разрешающий оператор  $\mathbb{S}(t)$  раскладывается в прямой интеграл по операторам  $\mathbb{S}(t, \xi)$ . В §3 изучаются свойства оператора  $\mathbb{S}(\xi)$ . §4 посвящен получению пороговых аппроксимаций для операторов  $F(\xi)$  и  $(\mathbb{S}(\xi) - I)F(\xi)$  при малом  $|\xi|$ . В §5 мы находим приближение к оператору  $\mathbb{S}^N$  при большом целом  $N$  с помощью пороговых аппроксимаций; из него вытекает и искомое приближение для оператора  $\mathbb{S}(t)$ . §6 посвящен усреднению решения задачи Коши (0.2). Здесь основные результаты работы выводятся из результатов §5 масштабным преобразованием. В Приложение (§7) вынесен вспомогательный материал.

**0.6. Обозначения.** Норма в нормированном пространстве  $X$  обозначается через  $\|\cdot\|_X$  (либо без индекса, если это не ведет к недоразумениям); если пространства  $X, Y$  нормированы, то стандартная норма линейного ограниченного оператора  $T : X \rightarrow Y$  обозначается через  $\|T\|_{X \rightarrow Y}$  либо  $\|T\|$  (без индекса). Линейная оболочка системы векторов  $F \subset X$  обозначается через  $\mathcal{L}\{F\}$ . Открытый шар в нормированном пространстве с центром в точке  $x_0$  и радиуса  $r > 0$  обозначается через  $B_r(x_0)$ . Пространство ограниченных линейных операторов в нормированном пространстве  $X$  обозначается через  $\mathcal{B}(X)$ .

Для самосопряженного оператора  $\mathbb{A}$  в гильбертовом пространстве  $\mathfrak{H}$  через  $\sigma(\mathbb{A})$  и  $\sigma_e(\mathbb{A})$  обозначаются спектр и существенный спектр оператора  $\mathbb{A}$ .

Если  $\mathcal{O}$  — измеримое (по Лебегу) множество в  $\mathbb{R}^d$ , то через  $L_p(\mathcal{O})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , обозначаются стандартные  $L_p$ -классы. Стандартное скалярное произведение в пространстве  $L_2(\mathcal{O})$  обозначается через  $(\cdot, \cdot)_{L_2(\mathcal{O})}$  либо без индекса. Если  $f \in L_\infty(\mathcal{O})$ , то символ  $[f]$  означает оператор умножения на функцию  $f(\mathbf{x})$  в пространстве  $L_2(\mathcal{O})$ . Стандартные классы Соболева порядка  $s > 0$  в области  $\mathcal{O}$  обозначаются через  $H^s(\mathcal{O})$ .

Стандартное скалярное произведение в  $\mathbb{R}^d$  и  $\mathbb{C}^d$  обозначается через  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Далее, используем обозначения  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)^t \in \mathbb{R}^d$ ,  $iD_j = \partial_j = \partial/\partial x_j$ ,  $j = 1, \dots, d$ . Через  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  обозначим класс Шварца в  $\mathbb{R}^d$ . Характеристическая функция множества  $E \subset \mathbb{R}^d$  обозначается через  $\mathbf{1}_E$ . Используем обозначение  $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ . Если  $a$  —  $(n \times n)$ -матрица, то через  $|a|$  обозначается норма матрицы  $a$  как линейного оператора в  $\mathbb{C}^n$ .

## § 1. НЕЛОКАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР СВЁРТОЧНОГО ТИПА: РАЗЛОЖЕНИЕ В ПРЯМОЙ ИНТЕГРАЛ И ОЦЕНКИ

**1.1. Оператор  $\mathbb{A}(t; a, \mu)$ .** Пусть  $a \in L_1(\mathbb{R}^d)$ ,  $\mu \in L_\infty(\mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}_+)$ . В пространстве  $L_2(\mathbb{R}^d)$  определим *нелокальный оператор свёрточного типа*  $\mathbb{A}(t) = \mathbb{A}(t; a, \mu)$ , зависящий от параметра  $t \in \mathbb{R}_+$ , соотношением

$$\mathbb{A}(t; a, \mu)u(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^d} a(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)(u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \quad (1.1)$$

Оператор  $\mathbb{A}(t; a, \mu)$  можно записать в виде  $\mathbb{A}(t; a, \mu) = [p(\cdot, t; a, \mu)] - \mathbb{B}(t; a, \mu)$ , где

$$p(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x}, t; a, \mu) := \int_{\mathbb{R}^d} a(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,$$

$$\mathbb{B}(t; a, \mu)u(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^d} a(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Оператор  $\mathbb{A}(t; a, \mu)$  в случае, когда  $\mu$  не зависит от  $t$ , подробно изучался в [21, §1]. Все полученные там утверждения автоматически переносятся на случай, когда  $\mu$  зависит от параметра  $t$ ; соответствующие оценки равномерны по  $t$ .

Согласно лемме Шура (см. лемму 7.1) оператор  $\mathbb{B}(t) = \mathbb{B}(t; a, \mu)$  ограничен, и справедлива оценка  $\|\mathbb{B}(t)\| \leq \|\mu\|_{L_\infty} \|a\|_{L_1}$ . Кроме того, потенциал  $p(\mathbf{x}, t)$  удовлетворяет оценке  $\|p\|_{L_\infty} \leq \|\mu\|_{L_\infty} \|a\|_{L_1}$ . Следовательно, оператор  $\mathbb{A}(t; a, \mu)$  ограничен. Введем обозначения  $\mathbb{A}_0(a) := \mathbb{A}(t; a, \mu_0)$ , где  $\mu_0 \equiv 1$ ;  $p_0(\mathbf{x}, t; a) := p(\mathbf{x}, t; a, \mu_0)$ ;  $\mathbb{B}_0(a) := \mathbb{B}(t; a, \mu_0)$ . Очевидно, оператор  $\mathbb{B}_0(a)$  — это оператор свертки с функцией  $a$ , а потенциал  $p_0(\mathbf{x}, t; a) = \int_{\mathbb{R}^d} a(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$  — постоянный.

Далее предполагаются выполненными более жесткие ограничения на функции  $a$  и  $\mu$ :

$$a \in L_1(\mathbb{R}^d), \quad \text{mes}\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : a(\mathbf{x}) \neq 0\} > 0, \quad a(\mathbf{x}) \geq 0, \quad a(-\mathbf{x}) = a(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d; \quad (1.2)$$

$$0 < \mu_- \leq \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \leq \mu_+ < +\infty, \quad \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \mu(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d, \quad t \in \mathbb{R}_+; \quad (1.3)$$

$$\mu(\mathbf{x} + \mathbf{m}, \mathbf{y} + \mathbf{n}, t + j) = \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d, \quad j \in \mathbb{Z}_+. \quad (1.4)$$

Введем обозначения для моментов функции  $a(\mathbf{x})$ :

$$M_k(a) := \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^k a(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

С учетом условия  $0 < \int_{\mathbb{R}^d} a(\mathbf{x}) d\mathbf{x} < \infty$  из конечности момента  $M_k(a)$  автоматически вытекает конечность моментов  $M_1(a), \dots, M_{k-1}(a)$ . Ниже в различных утверждениях мы будем предполагать конечность момента  $M_k(a)$  при различных значениях  $k \leq 3$ . В частности, основной результат (теорема 6.1) справедлив при условии  $M_3(a) < \infty$ .

Очевидно, при условиях (1.2), (1.3) потенциал  $p(\mathbf{x}, t)$  вещественен, а оператор  $\mathbb{B}(t; a, \mu)$  самосопряжен. Следовательно, оператор  $\mathbb{A}(t; a, \mu)$  самосопряжен. Нетрудно видеть, что потенциал  $p(\mathbf{x}, t; a, \mu)$  удовлетворяет оценкам

$$\mu_- \|a\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} \leq p(\mathbf{x}, t; a, \mu) \leq \mu_+ \|a\|_{L_1(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (1.5)$$

**1.2. Оценки квадратичной формы оператора  $\mathbb{A}(t; a, \mu)$ .** При условиях (1.2), (1.3) квадратичная форма оператора  $\mathbb{A}(t; a, \mu)$  допускает следующее представление (см., например, [16] или [21, п. 1.2])

$$(\mathbb{A}(t; a, \mu)u, u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) |u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|^2, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d), \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (1.6)$$

В силу (1.6) оператор  $\mathbb{A}(t; a, \mu)$  неотрицателен и выполнены оценки

$$\mu_- (\mathbb{A}_0(a)u, u) \leq (\mathbb{A}(t; a, \mu)u, u) \leq \mu_+ (\mathbb{A}_0(a)u, u), \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d). \quad (1.7)$$

Поскольку  $\mathbb{B}_0(a)$  — оператор свертки, преобразование Фурье переводит  $\mathbb{B}_0(a)$  в оператор умножения на функцию  $\widehat{a}(\boldsymbol{\xi})$ ,  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$ , где

$$\widehat{a}(\boldsymbol{\xi}) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{z} \rangle} a(\mathbf{z}) d\mathbf{z}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d.$$

Отсюда следует, что оператор  $\mathbb{A}_0(a)$  унитарно эквивалентен оператору умножения на функцию  $\widehat{a}(\mathbf{0}) - \widehat{a}(\boldsymbol{\xi})$ . Следовательно,  $\lambda_0 = 0$  является точкой спектра оператора  $\mathbb{A}_0(a)$ . Поскольку оператор  $\mathbb{A}_0(a)$  неотрицателен, то  $\lambda_0$  — это край спектра. В силу оценок (1.7) точка  $\lambda_0 = 0$  является также нижним краем спектра оператора  $\mathbb{A}(t; a, \mu)$ .

**1.3. Разложение оператора  $\mathbb{A}(t; a, \mu)$  в прямой интеграл.** Нетрудно видеть, что при условиях (1.2)–(1.4) оператор умножения на потенциал  $p(\mathbf{x}, t)$  и оператор  $\mathbb{B}(t; a, \mu)$  (а значит, и оператор  $\mathbb{A}(t; a, \mu)$ ) коммутируют с операторами  $S_{\mathbf{n}}$  целочисленного сдвига, определенными по правилу

$$S_{\mathbf{n}}u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x} + \mathbf{n}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d.$$

Это означает, что  $\mathbb{A}(t; a, \mu)$  и  $\mathbb{B}(t; a, \mu)$  — периодические операторы в  $L_2(\mathbb{R}^d)$  с решеткой периодов  $\mathbb{Z}^d$ . Обозначим через  $\Omega := [0, 1)^d$  ячейку решетки  $\mathbb{Z}^d$  и через  $\widetilde{\Omega} := [-\pi, \pi)^d$  — ячейку двойственной решетки  $(2\pi\mathbb{Z})^d$ .

Определим преобразование Гельфанда  $\mathcal{G}$  (см., например, [28] или [3, глава 2]). Первоначально  $\mathcal{G}$  задается на классе Шварца  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  равенством

$$\mathcal{G}u(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) := (2\pi)^{-d/2} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} u(\mathbf{x} + \mathbf{n}) e^{-i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} + \mathbf{n} \rangle}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$



Затем  $\mathcal{G}$  распространяется по непрерывности до унитарного отображения

$$L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow \int_{\tilde{\Omega}} \oplus L_2(\Omega) d\xi = L_2(\tilde{\Omega} \times \Omega).$$

Как и все периодические операторы,  $\mathbb{A}(t; a, \mu)$  и  $\mathbb{B}(t; a, \mu)$  раскладываются в прямой интеграл с помощью преобразования Гельфанда (т. е. частично диагонализуются):

$$\mathbb{A}(t; a, \mu) = \mathcal{G}^* \left( \int_{\tilde{\Omega}} \oplus \mathbb{A}(t, \xi; a, \mu) d\xi \right) \mathcal{G}, \quad \mathbb{B}(t; a, \mu) = \mathcal{G}^* \left( \int_{\tilde{\Omega}} \oplus \mathbb{B}(t, \xi; a, \mu) d\xi \right) \mathcal{G}. \quad (1.8)$$

Здесь операторы  $\mathbb{A}(t, \xi) = \mathbb{A}(t, \xi; a, \mu)$  и  $\mathbb{B}(t, \xi) = \mathbb{B}(t, \xi; a, \mu)$  — самосопряженные ограниченные операторы в  $L_2(\Omega)$ , заданные соотношениями:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(t, \xi; a, \mu)u(\mathbf{x}) &= p(\mathbf{x}, t; a, \mu)u(\mathbf{x}) - \mathbb{B}(t, \xi; a, \mu)u(\mathbf{x}), \quad u \in L_2(\Omega), \\ \mathbb{B}(t, \xi; a, \mu)u(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} \tilde{a}(\xi, \mathbf{x} - \mathbf{y})\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad u \in L_2(\Omega), \end{aligned}$$

где

$$\tilde{a}(\xi, \mathbf{z}) := \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} a(\mathbf{z} + \mathbf{n})e^{-i\langle \xi, \mathbf{z} + \mathbf{n} \rangle}, \quad \xi \in \tilde{\Omega}, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d.$$

Отметим равенство

$$p(\mathbf{x}, t) = \int_{\Omega} \tilde{a}(\mathbf{0}, \mathbf{x} - \mathbf{y})\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) d\mathbf{y}.$$

Оператор  $\mathbb{B}(t, \xi; a, \mu)$  компактен (см. лемму 7.2); в силу леммы Шура его норма допускает оценку

$$\|\mathbb{B}(t, \xi; a, \mu)\| \leq \mu_+ \|a\|_{L_1(\mathbb{R}^d)}, \quad \xi \in \tilde{\Omega}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Отсюда и из (1.5) следует равномерная оценка

$$\|\mathbb{A}(t, \xi; a, \mu)\| \leq 2\mu_+ \|a\|_{L_1(\mathbb{R}^d)}, \quad \xi \in \tilde{\Omega}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Оператор  $\mathbb{A}(t, \xi; a, \mu)$ ,  $\xi \in \tilde{\Omega}$ , обладает существенным спектром

$$\sigma_e(\mathbb{A}(t, \xi; a, \mu)) = \text{ess-Ran } p(\cdot, t; a, \mu).$$

В силу компактности оператора  $\mathbb{B}(t, \xi; a, \mu)$  и нижней оценки (1.5) при всех  $t \in \mathbb{R}_+$  и  $\xi \in \tilde{\Omega}$  спектр оператора  $\mathbb{A}(t, \xi; a, \mu)$  левее точки  $\mu_- \|a\|_{L_1}$  дискретен.

В [21, лемма 1.1] получено удобное представление для квадратичной формы оператора  $\mathbb{A}(t, \xi; a, \mu)$ .

**Лемма 1.1** ([21]). Пусть выполнены условия (1.2)–(1.4). Тогда при  $t \in \mathbb{R}_+$  и  $\xi \in \tilde{\Omega}$  справедливо представление

$$(\mathbb{A}(t, \xi; a, \mu)u, u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) |e^{i\langle \xi, \mathbf{x} \rangle} u(\mathbf{x}) - e^{i\langle \xi, \mathbf{y} \rangle} u(\mathbf{y})|^2, \quad u \in L_2(\Omega). \quad (1.9)$$

Здесь подразумевается, что функция  $u \in L_2(\Omega)$  периодически продолжена на все  $\mathbb{R}^d$ .

**1.4. Оценки квадратичной формы оператора  $\mathbb{A}(t, \xi; a, \mu)$ .** Как и выше, полезно отдельно рассмотреть случай  $\mu = \mu_0 \equiv 1$ . Введем обозначения  $\mathbb{A}_0(\xi; a) := \mathbb{A}(t, \xi; a, \mu_0)$ ,  $\mathbb{B}_0(\xi; a) := \mathbb{B}(t, \xi; a, \mu_0)$ . Из соотношений (1.3) и (1.9) вытекают двусторонние оценки

$$\mu_- (\mathbb{A}_0(\xi; a)u, u) \leq (\mathbb{A}(t, \xi; a, \mu)u, u) \leq \mu_+ (\mathbb{A}_0(\xi; a)u, u), \quad u \in L_2(\Omega), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \xi \in \tilde{\Omega}. \quad (1.10)$$

Операторы  $\mathbb{A}_0(\boldsymbol{\xi}; a)$ ,  $\boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}$ , диагонализуются унитарным дискретным преобразованием Фурье  $\mathcal{F} : L_2(\Omega) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z}^d)$ , заданным соотношениями:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}u(\mathbf{n}) &= \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle} d\mathbf{x}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d, \quad u \in L_2(\Omega); \\ \mathcal{F}^*v(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} v_{\mathbf{n}} e^{2\pi i \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad v = \{v_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} \in \ell_2(\mathbb{Z}^d).\end{aligned}$$

Имеем:

$$\mathbb{A}_0(\boldsymbol{\xi}; a) = \mathcal{F}^* [\hat{a}(\mathbf{0}) - \hat{a}(2\pi\mathbf{n} + \boldsymbol{\xi})] \mathcal{F}, \quad \hat{a}(\mathbf{k}) := \int_{\mathbb{R}^d} a(\mathbf{x}) e^{-i \langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle} d\mathbf{x}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d. \quad (1.11)$$

Здесь через  $[\hat{a}(\mathbf{0}) - \hat{a}(2\pi\mathbf{n} + \boldsymbol{\xi})]$  обозначается оператор умножения на функцию  $\hat{a}(\mathbf{0}) - \hat{a}(2\pi\mathbf{n} + \boldsymbol{\xi})$  в пространстве  $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$ . Таким образом, символом оператора  $\mathbb{A}_0(\boldsymbol{\xi}; a)$  является последовательность  $\{\hat{A}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi})\}_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d}$ , где

$$\hat{A}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi}) = \hat{A}(\boldsymbol{\xi} + 2\pi\mathbf{n}) = \hat{a}(\mathbf{0}) - \hat{a}(2\pi\mathbf{n} + \boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^d} (1 - \cos(\langle \mathbf{z}, \boldsymbol{\xi} + 2\pi\mathbf{n} \rangle)) a(\mathbf{z}) d\mathbf{z}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d, \quad \boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}.$$

Мы учли, что интеграл  $\int_{\mathbb{R}^d} \sin(\langle \mathbf{z}, \boldsymbol{\xi} + 2\pi\mathbf{n} \rangle) a(\mathbf{z}) d\mathbf{z}$  обращается в нуль, поскольку  $a(\mathbf{z}) = a(-\mathbf{z})$ .

Из описанной диагонализации легко следует, что  $\text{Ker } \mathbb{A}_0(\mathbf{0}; a) = \mathcal{L}\{\mathbf{1}_{\Omega}\}$ . Следовательно, в силу (1.10) имеет место  $\text{Ker } \mathbb{A}(t, \mathbf{0}; a, \mu) = \mathcal{L}\{\mathbf{1}_{\Omega}\}$ . Мы приходим к следующему утверждению (см. [21, лемма 1.2]).

**Лемма 1.2** ([21]). *При условиях (1.2)–(1.4) число  $\lambda = 0$  является простым собственным значением оператора  $\mathbb{A}(t, \mathbf{0}; a, \mu)$ . При этом  $\text{Ker } \mathbb{A}(t, \mathbf{0}; a, \mu) = \mathcal{L}\{\mathbf{1}_{\Omega}\}$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ .*

Исследуем подробнее символ оператора  $\mathbb{A}_0(\boldsymbol{\xi}; a)$ ,  $\boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}$ , и получим некоторые оценки для квадратичной формы оператора  $\mathbb{A}(t, \boldsymbol{\xi}; a, \mu)$ . Величина

$$\hat{A}(\mathbf{y}) := \int_{\mathbb{R}^d} (1 - \cos(\langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle)) a(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = 2 \int_{\mathbb{R}^d} \sin^2 \left( \frac{\langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle}{2} \right) a(\mathbf{z}) d\mathbf{z}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d, \quad (1.12)$$

при условии (1.2) непрерывно зависит от  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$  и (согласно лемме Римана–Лебега) стремится к  $\|a\|_{L_1} > 0$  при  $|\mathbf{y}| \rightarrow \infty$ . Кроме того, нетрудно видеть, что  $\hat{A}(\mathbf{y}) > 0$  при  $\mathbf{y} \neq 0$ . Следовательно,

$$\min_{|\mathbf{y}| \geq r} \hat{A}(\mathbf{y}) =: C_r(a) > 0, \quad r > 0. \quad (1.13)$$

Поскольку при  $\boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}$  и  $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$  выполнено  $|\boldsymbol{\xi} + 2\pi\mathbf{n}| \geq \pi$ , то

$$\hat{A}(\boldsymbol{\xi} + 2\pi\mathbf{n}) \geq C_{\pi}(a), \quad \boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}. \quad (1.14)$$

Далее, при условии  $M_2(a) < \infty$  величина

$$\int_{\mathbb{R}^d} a(\mathbf{z}) \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle^2 d\mathbf{z} =: M_a(\mathbf{y}) \quad (1.15)$$

непрерывно зависит от  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$  и при ненулевых  $\mathbf{y}$  не обращается в нуль. Следовательно,

$$\min_{|\boldsymbol{\theta}|=1} M_a(\boldsymbol{\theta}) =: \mathcal{M}(a) > 0. \quad (1.16)$$

Следующее утверждение получено в [21, лемма 1.3].

**Лемма 1.3** ([21]). *При условиях (1.2)–(1.4) и условии  $M_3(a) < \infty$  справедлива оценка*

$$\hat{A}(\boldsymbol{\xi} + 2\pi\mathbf{n}) \geq C(a) |\boldsymbol{\xi}|^2, \quad \boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d. \quad (1.17)$$

Здесь

$$C(a) := \min \left\{ \frac{1}{4} \mathcal{M}(a), \mathcal{C}_r(a) \pi^{-2} d^{-1}, \mathcal{C}_\pi(a) \pi^{-2} d^{-1} \right\} > 0, \quad (1.18)$$

величина  $\mathcal{C}_r(a)$ ,  $r > 0$ , определена в (1.13), постоянная  $\mathcal{M}(a)$  определена в (1.16),

$$r(a) := \frac{3\mathcal{M}(a)}{2M_3(a)}.$$

**Замечание 1.4.** Неравенство вида (1.17) справедливо при конечности только второго момента  $M_2(a)$ , но константа в оценке вычисляется сложнее. Действительно, введем функцию  $\check{a}(\mathbf{x}) := a(\mathbf{x}) \min\{1, |\mathbf{x}|^{-1}\}$ . Очевидно, что при условии  $M_2(a) < \infty$  выполнено  $M_3(\check{a}) < \infty$ , а потому  $\check{a}$  удовлетворяет условиям леммы 1.3. Очевидно, величина  $\hat{A}(\mathbf{y})$ , определенная в (1.12), при замене  $a$  на  $\check{a}$  разве лишь уменьшится. В итоге получаем

$$\hat{A}(\boldsymbol{\xi} + 2\pi \mathbf{n}) \geq \int_{\mathbb{R}^d} (1 - \cos(\langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle)) \check{a}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \geq C(\check{a}) |\boldsymbol{\xi}|^2, \quad \boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d.$$

При условиях (1.2)–(1.4) из (1.10), (1.11) и (1.14) следует оценка

$$(\mathbb{A}(t, \boldsymbol{\xi}; a, \mu)u, u) \geq \mu_- \mathcal{C}_\pi(a) \|u\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad u \in L_2(\Omega) \ominus \mathcal{L}\{\mathbf{1}_\Omega\}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}. \quad (1.19)$$

Из соотношений (1.10), (1.11) и леммы 1.3 вытекает следующее утверждение; см. [21, предложение 1.4].

**Предложение 1.5** ([21]). При условиях (1.2)–(1.4) и условии  $M_3(a) < \infty$  справедлива оценка

$$(\mathbb{A}(t, \boldsymbol{\xi}; a, \mu)u, u) \geq \mu_- C(a) |\boldsymbol{\xi}|^2 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad u \in L_2(\Omega), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}. \quad (1.20)$$

**Замечание 1.6.** Оценка (1.20) остается в силе при условии  $M_2(a) < \infty$  с заменой  $C(a)$  на  $C(\check{a})$ .

Нам потребуется также следующая оценка, которая проверяется применением леммы Шура при условиях (1.2)–(1.4) и условии  $M_1(a) < \infty$ :

$$\|\mathbb{A}(t, \boldsymbol{\xi}; a, \mu) - \mathbb{A}(t, \boldsymbol{\eta}; a, \mu)\| \leq \mu_+ M_1(a) |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \tilde{\Omega}. \quad (1.21)$$

## § 2. Задача Коши для параболического уравнения с оператором $\mathbb{A}(t)$

**2.1. Постановка задачи. Оператор  $\mathbb{S}(t)$ .** Пусть оператор  $\mathbb{A}(t) = \mathbb{A}(t; a, \mu)$  определен в (1.1), причем выполнены условия (1.2)–(1.4). Пусть  $u(\mathbf{x}, t)$  — решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= -\mathbb{A}(t)u(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad t \in \mathbb{R}_+; \\ u(\mathbf{x}, 0) &= \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ . В силу теоремы 7.10 и замечания 7.12 при любом  $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^d)$  существует единственное решение  $u(\mathbf{x}, t)$ , являющееся липшицевой функцией от  $t \in \mathbb{R}_+$  со значениями в  $L_2(\mathbb{R}^d)$ . Уравнение в (2.1) выполнено почти всюду в  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ . Согласно лемме 7.11 справедлива оценка

$$\|u(\cdot, t)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (2.2)$$

Пусть  $t \in \mathbb{R}_+$ . Введем разрешающий оператор задачи (2.1). Оператор  $\mathbb{S}(t)$  действует в  $L_2(\mathbb{R}^d)$  и переводит функцию  $\varphi(\mathbf{x})$  в  $u(\mathbf{x}, t)$ , где  $u(\mathbf{x}, t)$  — решение задачи (2.1):  $\mathbb{S}(t)\varphi = u(\cdot, t)$ . Очевидно,  $\mathbb{S}(0) = I$ . В силу (2.2) выполнена оценка

$$\|\mathbb{S}(t)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 1, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (2.3)$$

Положим  $\mathbb{S} := \mathbb{S}(1)$ , т. е.  $\mathbb{S}\varphi = u(\cdot, 1)$ . В силу периодичности коэффициента  $\mu$  по  $t$  (см. (1.4)) выполнены свойства

$$\begin{aligned}\mathbb{S}(N) &= \mathbb{S}^N, \quad N \in \mathbb{Z}_+, \\ \mathbb{S}(t) &= \mathbb{S}(\sigma)\mathbb{S}^N, \quad N = [t], \quad \sigma = \{t\}.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Наша цель — получить аппроксимацию оператора  $\mathbb{S}(t)$  по операторной норме в  $L_2(\mathbb{R}^d)$  при  $t \rightarrow \infty$ . Для этого мы вначале получим приближение к оператору  $\mathbb{S}^N$  при большом целом  $N$ .

**2.2. Задача Коши для параболического уравнения с оператором  $\mathbb{A}(t, \xi)$ . Оператор  $\mathbb{S}(t, \xi)$ .** Пусть  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\xi \in \tilde{\Omega}$  и  $\mathbb{A}(t, \xi) = \mathbb{A}(t, \xi; a, \mu)$  — оператор в  $L_2(\Omega)$ , определенный в п. 1.3. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(\mathbf{x}, t; \xi)}{\partial t} &= -\mathbb{A}(t, \xi)u(\mathbf{x}, t; \xi), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}_+; \\ u(\mathbf{x}, 0; \xi) &= \phi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega,\end{aligned}\tag{2.5}$$

где  $\phi \in L_2(\Omega)$ . В силу теоремы 7.10 и замечания 7.12 при любом  $\phi \in L_2(\Omega)$  существует единственное решение  $u(\mathbf{x}, t; \xi)$ , являющееся липшицевой функцией от  $t \in \mathbb{R}_+$  со значениями в  $L_2(\Omega)$ . Уравнение в (2.5) выполнено почти всюду в  $\Omega \times \mathbb{R}_+$ . Согласно лемме 7.11 справедлива оценка

$$\|u(\cdot, t; \xi)\|_{L_2(\Omega)} \leq \|\phi\|_{L_2(\Omega)}, \quad t \in \mathbb{R}_+.\tag{2.6}$$

Пусть  $t \in \mathbb{R}_+$ . Введем разрешающий оператор задачи (2.5). Оператор  $\mathbb{S}(t, \xi)$  действует в  $L_2(\Omega)$  и переводит функцию  $\phi(\mathbf{x})$  в  $u(\mathbf{x}, t; \xi)$ , где  $u(\mathbf{x}, t; \xi)$  — решение задачи (2.5):

$$\mathbb{S}(t, \xi)\phi = u(\cdot, t; \xi).$$

Очевидно,  $\mathbb{S}(0, \xi) = I$ . В силу (2.6) выполнена оценка

$$\|\mathbb{S}(t, \xi)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq 1.\tag{2.7}$$

Положим  $\mathbb{S}(\xi) := \mathbb{S}(1, \xi)$ .

**2.3. Разложение оператора  $\mathbb{S}(t)$  в прямой интеграл.** Применяя преобразование Гельфанда к задаче (2.1) и используя разложение оператора  $\mathbb{A}(t)$  в прямой интеграл (см. (1.8)), приходим к задаче вида (2.5) для функции  $\mathcal{G}u(\xi, \mathbf{x}, t)$  с начальным данным  $\mathcal{G}\varphi(\xi, \mathbf{x})$ . Отсюда следует разложение в прямой интеграл для оператора  $\mathbb{S}(t)$ :

$$\mathbb{S}(t) = \mathcal{G}^* \left( \int_{\tilde{\Omega}} \oplus \mathbb{S}(t, \xi) d\xi \right) \mathcal{G}, \quad t \in \mathbb{R}_+.\tag{2.8}$$

В частности,

$$\mathbb{S} = \mathcal{G}^* \left( \int_{\tilde{\Omega}} \oplus \mathbb{S}(\xi) d\xi \right) \mathcal{G}.\tag{2.9}$$

Поэтому вопрос об аппроксимации оператора  $\mathbb{S}^N$  при большом  $N$  по операторной норме в  $L_2(\mathbb{R}^d)$  сводится к вопросу об аппроксимации операторов  $\mathbb{S}(\xi)^N$  по операторной норме в  $L_2(\Omega)$  с оценкой погрешности, равномерной по параметру  $\xi \in \tilde{\Omega}$ .

### § 3. СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА $\mathbb{S}(\xi)$

#### 3.1. Свойства оператора $\mathbb{S}(0)$ .

**Лемма 3.1.** При условиях (1.2)–(1.4) число  $\lambda_0 = 1$  является простым собственным значением оператора  $\mathbb{S}(0)$ , при этом  $\text{Ker}(\mathbb{S}(0) - I) = \mathcal{L}\{\mathbf{1}_\Omega\}$ . Подпространство

$$L_2^0(\Omega) := L_2(\Omega) \ominus \mathcal{L}\{\mathbf{1}_\Omega\}$$

инвариантно относительно действия оператора  $\mathbb{S}(0)$ . Пусть  $P$  — ортопроектор пространства  $L_2(\Omega)$  на  $\mathcal{L}\{\mathbf{1}_\Omega\}$ . Выполнена оценка

$$\|\mathbb{S}(0)(I - P)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq e^{-\mu - C_\pi(a)},\tag{3.1}$$

где константа  $C_\pi(a)$  определена в (1.13).

*Доказательство.* Рассмотрим задачу (2.5) при  $\xi = \mathbf{0}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\mathbf{x}, t; \mathbf{0})}{\partial t} &= -\mathbb{A}(t, \mathbf{0})u(\mathbf{x}, t; \mathbf{0}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}_+; \\ u(\mathbf{x}, 0; \mathbf{0}) &= \phi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Поскольку  $A(t, \mathbf{0})\mathbf{1}_\Omega = 0$  (см. лемму 1.2), функция  $u(\mathbf{x}, t; \mathbf{0}) = \mathbf{1}_\Omega$  является решением задачи (3.2) с начальным данным  $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{1}_\Omega$ . Следовательно,

$$\mathbb{S}(\mathbf{0})\mathbf{1}_\Omega = \mathbf{1}_\Omega.$$

Тем самым, число  $\lambda_0 = 1$  является собственным значением оператора  $\mathbb{S}(\mathbf{0})$ .

Покажем, что это собственное значение является простым. Для этого убедимся, что подпространство  $L_2^0(\Omega)$  инвариантно относительно действия оператора  $\mathbb{S}(\mathbf{0})$ . Интегрируя уравнение в (3.2) по  $\Omega$  и учитывая равенство  $A(t, \mathbf{0})\mathbf{1}_\Omega = 0$ , получаем

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega u(\mathbf{x}, t; \mathbf{0}) d\mathbf{x} = -(\mathbb{A}(t, \mathbf{0})u(\cdot, t; \mathbf{0}), \mathbf{1}_\Omega)_{L_2(\Omega)} = -(u(\cdot, t; \mathbf{0}), \mathbb{A}(t, \mathbf{0})\mathbf{1}_\Omega)_{L_2(\Omega)} = 0.$$

Следовательно,

$$\int_\Omega u(\mathbf{x}, t; \mathbf{0}) d\mathbf{x} = \int_\Omega u(\mathbf{x}, 0; \mathbf{0}) d\mathbf{x} = \int_\Omega \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (3.3)$$

В частности, если  $\phi \in L_2^0(\Omega)$ , то и  $u(\cdot, t; \mathbf{0}) \in L_2^0(\Omega)$  при всех  $t \in \mathbb{R}_+$ . Поэтому оператор  $\mathbb{S}(\mathbf{0})$  переводит подпространство  $L_2^0(\Omega)$  в себя.

Считая, что  $\phi \in L_2^0(\Omega)$ , домножим уравнение в (3.2) на  $\overline{u(\mathbf{x}, t; \mathbf{0})}$ , затем сложим полученное равенство с сопряженным и проинтегрируем по  $\Omega$ . Получаем

$$\frac{d}{dt} \|u(\cdot, t; \mathbf{0})\|_{L_2(\Omega)}^2 = -2(\mathbb{A}(t, \mathbf{0})u(\cdot, t; \mathbf{0}), u(\cdot, t; \mathbf{0}))_{L_2(\Omega)}. \quad (3.4)$$

В силу неравенства (1.19) при  $\xi = \mathbf{0}$  отсюда следует, что

$$\frac{d}{dt} \|u(\cdot, t; \mathbf{0})\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq -2\mu - C_\pi(a) \|u(\cdot, t; \mathbf{0})\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Применяя лемму 7.4, имеем

$$\|u(\cdot, 1; \mathbf{0})\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq e^{-2\mu - C_\pi(a)} \|\phi\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Иначе говоря,

$$\|\mathbb{S}(\mathbf{0})\phi\|_{L_2(\Omega)} \leq e^{-\mu - C_\pi(a)} \|\phi\|_{L_2(\Omega)}, \quad \phi \in L_2^0(\Omega),$$

т. е. выполнена оценка (3.1). Поскольку  $e^{-\mu - C_\pi(a)} < 1$ , оператор  $\mathbb{S}(\mathbf{0}) - I$ , суженный на  $L_2^0(\Omega)$ , обратим. Отсюда следует, что  $\lambda_0 = 1$  является простым собственным значением оператора  $\mathbb{S}(\mathbf{0})$ , причем  $\text{Ker}(\mathbb{S}(\mathbf{0}) - I) = \mathcal{L}\{\mathbf{1}_\Omega\}$ , а остальной спектр лежит в круге  $|\lambda| \leq e^{-\mu - C_\pi(a)}$ .  $\square$

### 3.2. Спектральные свойства оператора $\mathbb{S}(\xi)$ .

**Лемма 3.2.** При условиях (1.2)–(1.4) и условии  $M_3(a) < \infty$  выполнена оценка

$$\|\mathbb{S}(t, \xi)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq e^{-\mu - C(a)t|\xi|^2}, \quad \xi \in \tilde{\Omega}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (3.5)$$

где константа  $C(a)$  определена в (1.18). В частности,

$$\|\mathbb{S}(\xi)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq e^{-\mu - C(a)|\xi|^2}, \quad \xi \in \tilde{\Omega}. \quad (3.6)$$

*Доказательство.* По аналогии с (3.4) из (2.5) выводим соотношение

$$\frac{d}{dt} \|u(\cdot, t; \xi)\|_{L_2(\Omega)}^2 = -2 (\mathbb{A}(t, \xi)u(\cdot, t; \xi), u(\cdot, t; \xi))_{L_2(\Omega)}.$$

В силу (1.20) отсюда следует, что

$$\frac{d}{dt} \|u(\cdot, t; \xi)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq -2\mu_- C(a) |\xi|^2 \|u(\cdot, t; \xi)\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Применяя лемму 7.4, имеем

$$\|u(\cdot, t; \xi)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq e^{-2\mu_- C(a)t|\xi|^2} \|\phi\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

что равносильно искомой оценке (3.5).  $\square$

**Замечание 3.3.** Неравенства (3.5) и (3.6) сохраняют силу при условии  $M_2(a) < \infty$  с заменой  $C(a)$  на  $C(\tilde{a})$ . См. замечания 1.4, 1.6.

**Лемма 3.4.** При условиях (1.2)–(1.4) и условии  $M_1(a) < \infty$  оператор-функция  $\mathbb{S}(t, \xi)$  непрерывно зависит от  $\xi \in \tilde{\Omega}$ , причем при любом  $T > 0$  выполнено неравенство

$$\|\mathbb{S}(t, \xi) - \mathbb{S}(t, \eta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mu_+ M_1(a) \sqrt{T} e^{t/2} |\xi - \eta|, \quad \xi, \eta \in \tilde{\Omega}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.7)$$

В частности,

$$\|\mathbb{S}(\xi) - \mathbb{S}(\eta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_1 |\xi - \eta|, \quad \xi, \eta \in \tilde{\Omega},$$

где

$$C_1 = \sqrt{\epsilon} \mu_+ M_1(a). \quad (3.8)$$

*Доказательство.* Пусть  $u(\mathbf{x}, t; \xi)$  — решение задачи (2.5). Положим

$$v(\mathbf{x}, t) = v(\mathbf{x}, t; \xi, \eta) := u(\mathbf{x}, t; \xi) - u(\mathbf{x}, t; \eta).$$

Тогда функция  $v(\mathbf{x}, t)$  удовлетворяет соотношениям

$$\frac{\partial v(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\mathbb{A}(t, \eta)v(\mathbf{x}, t) + f(\mathbf{x}, t), \quad v(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad (3.9)$$

где

$$f(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t; \xi, \eta) := (\mathbb{A}(t, \eta) - \mathbb{A}(t, \xi)) u(\mathbf{x}, t; \xi). \quad (3.10)$$

Домножая уравнение в (3.9) на  $\overline{v(\mathbf{x}, t)}$ , складывая полученное равенство с сопряженным и интегрируя по  $\Omega$ , имеем

$$\frac{d}{dt} \|v(\cdot, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 = -2(\mathbb{A}(t, \eta)v(\cdot, t), v(\cdot, t))_{L_2(\Omega)} + 2\operatorname{Re}(f(\cdot, t), v(\cdot, t))_{L_2(\Omega)}.$$

Интегрируя полученное равенство по  $t \in (0, \tau)$  и учитывая условие  $v(\mathbf{x}, 0) = 0$ , приходим к соотношению

$$\|v(\cdot, \tau)\|_{L_2(\Omega)}^2 + 2 \int_0^\tau (\mathbb{A}(t, \eta)v(\cdot, t), v(\cdot, t))_{L_2(\Omega)} dt = 2 \int_0^\tau \operatorname{Re}(f(\cdot, t), v(\cdot, t))_{L_2(\Omega)} dt, \quad \tau \in \mathbb{R}_+.$$

Поскольку в левой части оба слагаемых неотрицательны, то каждое из них не превосходит правой части. Следовательно,

$$\|v(\cdot, \tau)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq 2 \int_0^\tau \operatorname{Re}(f(\cdot, t), v(\cdot, t))_{L_2(\Omega)} dt \leq \int_0^\tau \|v(\cdot, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 dt + \int_0^\tau \|f(\cdot, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 dt \quad (3.11)$$

при  $\tau \in \mathbb{R}_+$ . Из (1.21) и (3.10) с учетом (2.6) следует, что

$$\|f(\cdot, t)\|_{L_2(\Omega)} \leq \mu_+ M_1(a) |\xi - \eta| \|u(\cdot, t; \xi)\|_{L_2(\Omega)} \leq \mu_+ M_1(a) |\xi - \eta| \|\phi\|_{L_2(\Omega)}. \quad (3.12)$$

В итоге из (3.11), (3.12) получаем:

$$\|v(\cdot, \tau)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \int_0^\tau \|v(\cdot, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 dt + \tau (\mu_+ M_1(a))^2 |\xi - \eta|^2 \|\phi\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad \tau \in \mathbb{R}_+.$$

Следовательно,

$$\|v(\cdot, \tau)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \int_0^\tau \|v(\cdot, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 dt + T(\mu_+ M_1(a))^2 |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|^2 \|\phi\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad 0 \leq \tau \leq T.$$

Применяя лемму 7.5, приходим к неравенству

$$\|v(\cdot, \tau; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq e^\tau T(\mu_+ M_1(a))^2 |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|^2 \|\phi\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad 0 \leq \tau \leq T. \quad (3.13)$$

Поскольку

$$v(\cdot, t; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = u(\cdot, t; \boldsymbol{\xi}) - u(\cdot, t; \boldsymbol{\eta}) = (\mathbb{S}(t, \boldsymbol{\xi}) - \mathbb{S}(t, \boldsymbol{\eta}))\phi,$$

из (3.13) вытекает искомое неравенство (3.7).  $\square$

Из леммы 3.1 и леммы 3.4 вытекает следующее утверждение.

**Следствие 3.5.** Пусть выполнены условия (1.2)–(1.4) и условие  $M_1(a) < \infty$ . Положим

$$\rho := 1 - e^{-\mu - C_\pi(a)} \quad (3.14)$$

и

$$\delta_0 := (3C_1)^{-1} \rho = (3\sqrt{e}\mu_+ M_1(a))^{-1} (1 - e^{-\mu - C_\pi(a)}). \quad (3.15)$$

Обозначим  $\mathcal{D}_\rho := \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq \rho/3, |z| \leq 1\}$ . Тогда при  $|\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0$  оператор  $\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})$  имеет простое собственное значение  $\lambda_0(\boldsymbol{\xi})$  такое, что  $\lambda_0(\boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{D}_\rho$ , а остальной спектр оператора  $\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})$  расположен в круге  $|\lambda| \leq 1 - 2\rho/3$ .

**3.3. Производные оператор-функции  $\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})$  по  $\boldsymbol{\xi}$ .** При условиях (1.2)–(1.4) и условии  $M_k(a) < \infty$  оператор-функция  $\mathbb{A}(t, \boldsymbol{\xi})$   $k$  раз непрерывно дифференцируема по параметру  $\boldsymbol{\xi}$  по операторной норме в  $L_2(\Omega)$  (см. [21, п. 2.1]). При этом производные  $\partial_{\boldsymbol{\xi}}^\alpha \mathbb{A}(t, \boldsymbol{\xi}) =: \partial^\alpha \mathbb{A}(t, \boldsymbol{\xi})$  задаются соотношениями

$$\begin{aligned} \partial^\alpha \mathbb{A}(t, \boldsymbol{\xi}) u(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} \tilde{a}_\alpha(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad u \in L_2(\Omega); \\ \tilde{a}_\alpha(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{z}) &= (-1)(-i)^{|\alpha|} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} (\mathbf{z} + \mathbf{n})^\alpha a(\mathbf{z} + \mathbf{n}) e^{-i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{z} + \mathbf{n} \rangle}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^d, \quad |\alpha| \leq k. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Применяя лемму Шура к интегральному оператору  $\partial^\alpha \mathbb{A}(t, \boldsymbol{\xi})$ , легко получить оценку

$$\|\partial^\alpha \mathbb{A}(t, \boldsymbol{\xi})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mu_+ \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{z}^\alpha| a(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \leq \mu_+ M_j(a), \quad |\alpha| = j, \quad j \leq k. \quad (3.17)$$

Наконец, применяя лемму Шура к оператору  $\partial^\alpha \mathbb{A}(t, \boldsymbol{\xi}) - \partial^\alpha \mathbb{A}(t, \boldsymbol{\eta})$  при  $|\alpha| = k$ , получаем оценку

$$\|\partial^\alpha \mathbb{A}(t, \boldsymbol{\xi}) - \partial^\alpha \mathbb{A}(t, \boldsymbol{\eta})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mu_+ \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{z}^\alpha| a(\mathbf{z}) |e^{-i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{z} \rangle} - e^{-i\langle \boldsymbol{\eta}, \mathbf{z} \rangle}| d\mathbf{z}, \quad |\alpha| = k. \quad (3.18)$$

Правая часть не зависит от  $t$  и стремится к нулю при  $|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}| \rightarrow 0$  в силу теоремы Лебега. Это рассуждение показывает, что оператор  $\partial^\alpha \mathbb{A}(t, \boldsymbol{\xi})$  при  $|\alpha| = k$  непрерывен по  $\boldsymbol{\xi}$  равномерно по параметру  $t$ .

Покажем, что при тех же условиях оператор-функция  $\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})$  является  $k$  раз непрерывно дифференцируемой по операторной норме в  $L_2(\Omega)$ . Для наших целей достаточно считать  $k \leq 3$ .

**Лемма 3.6.** При условиях (1.2)–(1.4) и условии  $M_1(a) < \infty$  оператор-функция  $\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})$  непрерывно дифференцируема по параметру  $\boldsymbol{\xi}$  по операторной норме в  $L_2(\Omega)$ . Справедливы оценки

$$\|\partial_j \mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_1, \quad j = 1, \dots, d. \quad (3.19)$$

Постоянная  $C_1$  определена в (3.8).

*Доказательство.* Пусть  $u(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi})$  — решение задачи (2.5). Продифференцируем уравнение и начальное условие в (2.5) по  $\xi_j$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \partial_j u(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}) &= -\mathbb{A}(t, \boldsymbol{\xi}) \partial_j u(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}) - \partial_j \mathbb{A}(t, \boldsymbol{\xi}) u(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}_+; \\ \partial_j u(\mathbf{x}, 0; \boldsymbol{\xi}) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Здесь  $\partial_j u(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}) := \frac{\partial u(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_j}$ . Домножим уравнение в (3.20) на  $\overline{\partial_j u(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi})}$ , сложим полученное равенство с сопряженным и проинтегрируем по  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\partial_j u(\cdot, t; \boldsymbol{\xi})\|_{L_2(\Omega)}^2 &= -2(\mathbb{A}(t, \boldsymbol{\xi}) \partial_j u(\cdot, t; \boldsymbol{\xi}), \partial_j u(\cdot, t; \boldsymbol{\xi}))_{L_2(\Omega)} \\ &\quad - 2 \operatorname{Re}(\partial_j \mathbb{A}(t, \boldsymbol{\xi}) u(\cdot, t; \boldsymbol{\xi}), \partial_j u(\cdot, t; \boldsymbol{\xi}))_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Интегрируя последнее равенство по  $t \in (0, \tau)$  и учитывая начальное условие в (3.20), получаем:

$$\begin{aligned} \|\partial_j u(\cdot, \tau; \boldsymbol{\xi})\|_{L_2(\Omega)}^2 + 2 \int_0^\tau (\mathbb{A}(t, \boldsymbol{\xi}) \partial_j u(\cdot, t; \boldsymbol{\xi}), \partial_j u(\cdot, t; \boldsymbol{\xi}))_{L_2(\Omega)} dt \\ = -2 \operatorname{Re} \int_0^\tau (\partial_j \mathbb{A}(t, \boldsymbol{\xi}) u(\cdot, t; \boldsymbol{\xi}), \partial_j u(\cdot, t; \boldsymbol{\xi}))_{L_2(\Omega)} dt. \end{aligned}$$

Поскольку оба слагаемых слева неотрицательны, то каждое из них не превосходит правой части. Следовательно,

$$\|\partial_j u(\cdot, \tau; \boldsymbol{\xi})\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \int_0^\tau (\|\partial_j \mathbb{A}(t, \boldsymbol{\xi}) u(\cdot, t; \boldsymbol{\xi})\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\partial_j u(\cdot, t; \boldsymbol{\xi})\|_{L_2(\Omega)}^2) dt. \quad (3.21)$$

Согласно (3.17) имеем

$$\|\partial_j \mathbb{A}(t, \boldsymbol{\xi})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mu_+ M_1(a). \quad (3.22)$$

Учитывая (2.6), из (3.21) и (3.22) выводим неравенство

$$\|\partial_j u(\cdot, \tau; \boldsymbol{\xi})\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq (\mu_+ M_1(a))^2 \|\phi\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^\tau \|\partial_j u(\cdot, t; \boldsymbol{\xi})\|_{L_2(\Omega)}^2 dt, \quad 0 \leq \tau \leq 1.$$

Применяя лемму 7.5, приходим к неравенству

$$\|\partial_j u(\cdot, \tau; \boldsymbol{\xi})\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq e^\tau (\mu_+ M_1(a))^2 \|\phi\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad 0 \leq \tau \leq 1. \quad (3.23)$$

Поскольку

$$\partial_j u(\cdot, 1; \boldsymbol{\xi}) = \partial_j \mathbb{S}(\boldsymbol{\xi}) \phi,$$

из (3.23) следует искомая оценка (3.19).

Чтобы показать, что оператор  $\partial_j \mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})$  непрерывен по  $\boldsymbol{\xi}$ , рассмотрим функцию

$$w_j(\mathbf{x}, t) = w_j(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) := \partial_j u(\cdot, t; \boldsymbol{\xi}) - \partial_j u(\cdot, t; \boldsymbol{\eta}).$$

Эта функция является решением задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_j(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= -\mathbb{A}(t, \boldsymbol{\eta}) w_j(\mathbf{x}, t) + f_j(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}_+; \\ w_j(\mathbf{x}, 0) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f_j(\mathbf{x}, t) &= f_j(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = (\mathbb{A}(t, \boldsymbol{\eta}) - \mathbb{A}(t, \boldsymbol{\xi})) \partial_j u(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}) + \partial_j \mathbb{A}(t, \boldsymbol{\eta}) (u(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\eta}) - u(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi})) \\ &\quad + (\partial_j \mathbb{A}(t, \boldsymbol{\eta}) - \partial_j \mathbb{A}(t, \boldsymbol{\xi})) u(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}). \end{aligned} \quad (3.24)$$

По аналогии с выводом оценки (3.21) получаем

$$\|w_j(\cdot, \tau; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \int_0^\tau (\|f_j(\cdot, t; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|w_j(\cdot, t; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})\|_{L_2(\Omega)}^2) dt. \quad (3.25)$$



Из (1.21), (2.6), (3.13), (3.18), (3.22), (3.23) и (3.24) следует оценка

$$\|f_j(\cdot, t; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})\|_{L_2(\Omega)} \leq b_j(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}) \|\phi\|_{L_2(\Omega)}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

где

$$b_j(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}) = 2\sqrt{e}(\mu_+ M_1(a))^2 |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}| + \mu_+ \int_{\mathbb{R}^d} |z_j| a(\mathbf{z}) |1 - e^{i(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}, \mathbf{z})}| d\mathbf{z}.$$

Отсюда и из (3.25) вытекает оценка

$$\|w_j(\cdot, \tau; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq b_j(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta})^2 \|\phi\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^\tau \|w_j(\cdot, t; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})\|_{L_2(\Omega)}^2 dt, \quad 0 \leq \tau \leq 1.$$

Применяя лемму 7.5, приходим к неравенству

$$\|w_j(\cdot, \tau; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq e^\tau b_j(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta})^2 \|\phi\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad 0 \leq \tau \leq 1. \quad (3.26)$$

Поскольку

$$w_j(\cdot, 1; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = (\partial_j \mathbb{S}(\boldsymbol{\xi}) - \partial_j \mathbb{S}(\boldsymbol{\eta})) \phi,$$

из (3.26) следует, что

$$\|\partial_j \mathbb{S}(\boldsymbol{\xi}) - \partial_j \mathbb{S}(\boldsymbol{\eta})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \sqrt{e} b_j(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}).$$

Из условия  $M_1(a) < \infty$  в силу теоремы Лебега вытекает, что  $b_j(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}) \rightarrow 0$  при  $|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}| \rightarrow 0$ . Таким образом, оператор  $\partial_j \mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})$  непрерывен по  $\boldsymbol{\xi}$ .  $\square$

По аналогии с доказательством леммы 3.6 устанавливаются следующие утверждения.

**Лемма 3.7.** При условиях (1.2)–(1.4) и условии  $M_2(a) < \infty$  оператор-функция  $\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})$  дважды непрерывно дифференцируема по параметру  $\boldsymbol{\xi}$  по операторной норме в  $L_2(\Omega)$ . Справедливы оценки

$$\|\partial_j \partial_l \mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \sqrt{e} \mu_+ M_2(a) + 2e(\mu_+ M_1(a))^2, \quad j, l = 1, \dots, d.$$

**Лемма 3.8.** При условиях (1.2)–(1.4) и условии  $M_3(a) < \infty$  оператор-функция  $\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})$  трижды непрерывно дифференцируема по параметру  $\boldsymbol{\xi}$  по операторной норме в  $L_2(\Omega)$ . Справедливы оценки

$$\|\partial_j \partial_l \partial_k \mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \sqrt{e} \mu_+ M_3(a) + 6e \mu_+^2 M_1(a) M_2(a) + 6e^{3/2} (\mu_+ M_1(a))^3, \\ j, l, k = 1, \dots, d.$$

С помощью леммы Адамара выводим следующее утверждение.

**Лемма 3.9.** Пусть выполнены условия (1.2)–(1.4) и условие  $M_2(a) < \infty$ . Тогда для оператор-функции  $\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})$  справедливо представление

$$\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{S}(\mathbf{0}) + \Delta_1 \mathbb{S}(\boldsymbol{\xi}) + \mathbb{K}_1(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}, \quad (3.27)$$

где

$$\Delta_1 \mathbb{S}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^d \xi_j \partial_j \mathbb{S}(\mathbf{0}), \quad (3.28)$$

$$\mathbb{K}_1(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j,l=1}^d \xi_j \xi_l \int_0^1 ds_2 s_2 \int_0^1 ds_1 \partial_j \partial_l \mathbb{S}(s_1 s_2 \boldsymbol{\xi}). \quad (3.29)$$

При  $\boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}$  справедливы оценки

$$\|\Delta_1 \mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_1 |\boldsymbol{\xi}|, \quad (3.30)$$

$$\|\mathbb{K}_1(\boldsymbol{\xi})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_2 |\boldsymbol{\xi}|^2. \quad (3.31)$$

Постоянная  $C_1$  определена в (3.8), а постоянная  $C_2$  задана выражением

$$C_2 = \frac{1}{2} \sqrt{e} \mu_+ M_2(a) + e(\mu_+ M_1(a))^2. \quad (3.32)$$

*Доказательство.* В силу леммы Адамара (лемма 7.3), оператор-функция  $\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})$  допускает разложение (3.27), где операторы  $\Delta_1 \mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})$  и  $\mathbb{K}_1(\boldsymbol{\xi})$  определены в (3.28) и (3.29).

Для доказательства оценки (3.30) введем обозначение

$$U(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}) := \sum_{j=1}^d \xi_j \partial_j u(\mathbf{x}, t; \mathbf{0}).$$

Из (3.20) при  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$  следует, что функция  $U(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi})$  является решением задачи Коши

$$\frac{\partial U(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi})}{\partial t} = -\mathbb{A}(t, \mathbf{0})U(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}) - \Delta_1 \mathbb{A}(t, \boldsymbol{\xi})u(\mathbf{x}, t; \mathbf{0}), \quad U(\mathbf{x}, 0; \boldsymbol{\xi}) = 0,$$

где

$$\Delta_1 \mathbb{A}(t, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^d \xi_j \partial_j \mathbb{A}(t, \mathbf{0}).$$

Рассуждая по аналогии с доказательством оценки (3.19), выводим неравенство

$$\|U(\cdot, \tau; \boldsymbol{\xi})\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \int_0^\tau dt \|U(\cdot, t; \boldsymbol{\xi})\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^\tau dt \|\Delta_1 \mathbb{A}(t, \boldsymbol{\xi})u(\cdot, t; \mathbf{0})\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Применяя оценку

$$\|\Delta_1 \mathbb{A}(t, \boldsymbol{\xi})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mu_+ M_1(a) |\boldsymbol{\xi}|$$

(см. [21, (2.4)]) и неравенство (2.6), получаем

$$\|U(\cdot, \tau; \boldsymbol{\xi})\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \int_0^\tau dt \|U(\cdot, t; \boldsymbol{\xi})\|_{L_2(\Omega)}^2 + (\mu_+ M_1(a))^2 |\boldsymbol{\xi}|^2 \|\phi\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad 0 \leq \tau \leq 1.$$

В силу леммы 7.5 отсюда следует, что

$$\|U(\cdot, \tau; \boldsymbol{\xi})\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq e^\tau (\mu_+ M_1(a))^2 |\boldsymbol{\xi}|^2 \|\phi\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad 0 \leq \tau \leq 1.$$

Поскольку  $U(\cdot, 1; \boldsymbol{\xi}) = \Delta_1 \mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})\phi$ , из последней оценки вытекает (3.30).

Аналогичным образом проверяется и оценка (3.31).  $\square$

По аналогии с доказательством леммы 3.9 выводится следующее утверждение.

**Лемма 3.10.** Пусть выполнены условия (1.2)–(1.4) и условие  $M_3(a) < \infty$ . Тогда для оператор-функции  $\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})$  справедливо представление

$$\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{S}(\mathbf{0}) + \Delta_1 \mathbb{S}(\boldsymbol{\xi}) + \Delta_2 \mathbb{S}(\boldsymbol{\xi}) + \mathbb{K}_2(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega},$$

где оператор  $\Delta_1 \mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})$  определен в (3.28), а операторы  $\Delta_2 \mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})$  и  $\mathbb{K}_2(\boldsymbol{\xi})$  заданы выражениями

$$\Delta_2 \mathbb{S}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^d \xi_j \xi_l \partial_j \partial_l \mathbb{S}(\mathbf{0}), \tag{3.33}$$

$$\mathbb{K}_2(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j,l,k=1}^d \xi_j \xi_l \xi_k \int_0^1 ds_3 s_3^2 \int_0^1 ds_2 s_2 \int_0^1 ds_1 \partial_j \partial_l \partial_k \mathbb{S}(s_1 s_2 s_3 \boldsymbol{\xi}).$$

При  $\boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}$  справедливы оценки

$$\|\Delta_2 \mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_2 |\boldsymbol{\xi}|^2, \tag{3.34}$$

$$\|\mathbb{K}_2(\boldsymbol{\xi})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_3 |\boldsymbol{\xi}|^3. \tag{3.35}$$

Постоянная  $C_2$  определена в (3.32), а постоянная  $C_3$  определена выражением

$$C_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{6} \sqrt{e} \mu_+ M_3(a) + e \mu_+^2 M_1(a) M_2(a) + e^{3/2} (\mu_+ M_1(a))^3 \right).$$

**Лемма 3.11.** Справедливы равенства

$$P \partial_j \mathbb{S}(\mathbf{0}) P = 0, \quad j = 1, \dots, d.$$

*Доказательство.* Пусть  $u(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi})$  — решение задачи (2.5) при  $\phi = \mathbf{1}_\Omega$ . Тогда  $u(\mathbf{x}, t; \mathbf{0}) = \mathbf{1}_\Omega$ , поскольку  $\mathbb{A}(t, \mathbf{0})\mathbf{1}_\Omega = 0$ . Положим

$$U_j(\mathbf{x}, t) := \partial_j u(\mathbf{x}, t; \mathbf{0}).$$

Имеем

$$U_j(\cdot, 1) = \partial_j \mathbb{S}(\mathbf{0})\mathbf{1}_\Omega. \quad (3.36)$$

Требуется доказать, что

$$\int_\Omega U_j(\mathbf{x}, 1) d\mathbf{x} = 0. \quad (3.37)$$

Функция  $U_j(\mathbf{x}, t)$  является решением задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_j(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= -\mathbb{A}(t, \mathbf{0})U_j(\mathbf{x}, t) - \partial_j \mathbb{A}(t, \mathbf{0})\mathbf{1}_\Omega, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}_+; \\ U_j(\mathbf{x}, 0) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \end{aligned} \quad (3.38)$$

ср. (3.20). Проинтегрируем уравнение в (3.38) по  $\Omega$ :

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega U_j(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = -(\mathbb{A}(t, \mathbf{0})U_j(\cdot, t), \mathbf{1}_\Omega)_{L_2(\Omega)} - (\partial_j \mathbb{A}(t, \mathbf{0})\mathbf{1}_\Omega, \mathbf{1}_\Omega)_{L_2(\Omega)}.$$

Первое слагаемое справа равно нулю, поскольку  $\mathbb{A}(t, \mathbf{0})\mathbf{1}_\Omega = 0$ . Второе слагаемое также обращается в ноль. Действительно, согласно (3.16) имеем

$$(\partial_j \mathbb{A}(t, \mathbf{0})\mathbf{1}_\Omega, \mathbf{1}_\Omega)_{L_2(\Omega)} = i \int_\Omega d\mathbf{x} \int_\Omega d\mathbf{y} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} (x_j - y_j + n_j) a(\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{n}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t). \quad (3.39)$$

С одной стороны, используя периодичность коэффициента  $\mu$ , это выражение можно записать в виде

$$(\partial_j \mathbb{A}(t, \mathbf{0})\mathbf{1}_\Omega, \mathbf{1}_\Omega)_{L_2(\Omega)} = i \int_\Omega d\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} (x_j - y_j) a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t). \quad (3.40)$$

С другой стороны, меняя ролями  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  в (3.39), а затем учитывая симметрию коэффициентов, имеем

$$\begin{aligned} (\partial_j \mathbb{A}(t, \mathbf{0})\mathbf{1}_\Omega, \mathbf{1}_\Omega)_{L_2(\Omega)} &= i \int_\Omega d\mathbf{x} \int_\Omega d\mathbf{y} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} (y_j - x_j + n_j) a(\mathbf{y} - \mathbf{x} + \mathbf{n}) \mu(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t) \\ &= i \int_\Omega d\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} (y_j - x_j) a(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \mu(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t) = i \int_\Omega d\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} (y_j - x_j) a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t). \end{aligned}$$

Последнее выражение отличается знаком от правой части (3.40). Следовательно,

$$(\partial_j \mathbb{A}(t, \mathbf{0})\mathbf{1}_\Omega, \mathbf{1}_\Omega)_{L_2(\Omega)} = 0.$$

Таким образом,  $\frac{d}{dt} \int_\Omega U_j(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 0$ . С учетом начального условия  $U_j(\mathbf{x}, 0) = 0$  это означает, что

$$\int_\Omega U_j(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (3.41)$$

В частности, это доказывает равенство (3.37), которое равносильно утверждению леммы.  $\square$

#### § 4. ПОРОГОВЫЕ АППРОКСИМАЦИИ

Пусть выполнены условия (1.2)–(1.4) и условие  $M_1(a) < \infty$ . Обозначим через  $\gamma$  контур в комплексной плоскости:

$$\gamma := \left\{ \zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = \frac{\rho}{2} \right\},$$

где число  $\rho$  определено в (3.14). Пусть  $|\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0$ , где  $\delta_0$  определено в (3.15). В силу следствия 3.5 выполнено

$$\text{dist}\{\zeta, \sigma(\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi}) - I)\} \geq \frac{\rho}{6}, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0, \quad \zeta \in \gamma.$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} R(\boldsymbol{\xi}, \zeta) &:= (\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi}) - I - \zeta I)^{-1}, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0, \quad \zeta \in \gamma; \\ R_0(\zeta) &:= R(\mathbf{0}, \zeta) = (\mathbb{S}(\mathbf{0}) - I - \zeta I)^{-1}. \end{aligned}$$

**Лемма 4.1.** *Справедлива оценка*

$$\|R_0(\zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq K, \quad \zeta \in \gamma, \quad (4.1)$$

где константа  $K$  задана выражением  $K := 2\rho^{-1} = 2(1 - e^{-\mu - C_\pi(a)})^{-1}$ .

*Доказательство.* В силу леммы 3.1 ортогональное разложение  $L_2(\Omega) = \mathcal{L}\{\mathbf{1}_\Omega\} \oplus L_2^0(\Omega)$  приводит оператор  $\mathbb{S}(\mathbf{0})$ . Следовательно,

$$\|R_0(\zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} = \max\{\|R_0(\zeta)P\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)}, \|R_0(\zeta)(I - P)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)}\}, \quad \zeta \in \gamma. \quad (4.2)$$

Поскольку  $\mathbb{S}(\mathbf{0})P = P$ , имеем  $R_0(\zeta)P = -\frac{1}{\zeta}P$  и

$$\|R_0(\zeta)P\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} = \frac{1}{|\zeta|} = \frac{2}{\rho}, \quad \zeta \in \gamma. \quad (4.3)$$

С учетом оценки (3.1) при  $u \in L_2^0(\Omega)$  выполнено

$$\begin{aligned} |((\mathbb{S}(\mathbf{0}) - I - \zeta I)u, u)| &\geq |1 + \zeta| \|u\|^2 - |(\mathbb{S}(\mathbf{0})u, u)| \\ &\geq (1 - \rho/2) \|u\|^2 - (1 - \rho) \|u\|^2 = \frac{\rho}{2} \|u\|^2, \quad u \in L_2^0(\Omega), \quad \zeta \in \gamma. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\|R_0(\zeta)(I - P)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \frac{2}{\rho}, \quad \zeta \in \gamma. \quad (4.4)$$

Из (4.2)–(4.4) следует искомая оценка (4.1).  $\square$

Обозначим через  $F(\boldsymbol{\xi})$  проектор Рисса оператора  $\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})$ , отвечающий собственному значению  $\lambda_0(\boldsymbol{\xi})$  (иначе говоря, проектор Рисса оператора  $\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi}) - I$ , отвечающий собственному значению  $\lambda_0(\boldsymbol{\xi}) - 1$ ):

$$F(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi}) - I - \zeta I)^{-1} d\zeta. \quad (4.5)$$

Здесь в интеграле направление обхода контура идет против часовой стрелки.

#### 4.1. Приближение проектора Рисса $F(\boldsymbol{\xi})$ .

**Лемма 4.2.** *Пусть выполнены условия (1.2)–(1.4) и условие  $M_1(a) < \infty$ . Пусть  $F(\boldsymbol{\xi})$  — проектор Рисса (4.5). Пусть  $P$  — ортопроектор пространства  $L_2(\Omega)$  на  $\mathcal{L}(\mathbf{1}_\Omega)$ . Справедлива оценка*

$$\|F(\boldsymbol{\xi}) - P\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_4 |\boldsymbol{\xi}|, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0. \quad (4.6)$$

Постоянная  $C_4$  определена ниже в (4.13) и контролируется в терминах величин  $\mu_-$ ,  $\mu_+$ ,  $M_1(a)$ ,  $C_\pi(a)$ .

*Доказательство.* Имеем

$$F(\mathbf{0}) = P = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} R_0(\zeta) d\zeta. \quad (4.7)$$

Из (4.5) и (4.7) следует, что

$$F(\boldsymbol{\xi}) - P = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (R(\boldsymbol{\xi}, \zeta) - R_0(\zeta)) d\zeta. \quad (4.8)$$

Воспользуемся резольвентным тождеством

$$R(\boldsymbol{\xi}, \zeta) - R_0(\zeta) = -R(\boldsymbol{\xi}, \zeta) \Delta \mathbb{S}(\boldsymbol{\xi}) R_0(\zeta), \quad (4.9)$$

где  $\Delta S(\xi) := S(\xi) - S(0)$ . Резольвента  $R(\xi, \zeta)$  на контуре  $\gamma$  представима рядом

$$R(\xi, \zeta) = R_0(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} (-\Delta S(\xi) R_0(\zeta))^n,$$

который сходится по операторной норме в  $L_2(\Omega)$  при  $|\xi| \leq \delta_0$ . Мы учли, что в силу леммы 3.4

$$\|\Delta S(\xi)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_1 |\xi|, \quad \xi \in \tilde{\Omega}. \quad (4.10)$$

Отсюда и из (3.15), (4.1) следует, что

$$\|\Delta S(\xi) R_0(\zeta)\| \leq C_1 K |\xi| \leq C_1 K \delta_0 = \frac{2}{3}, \quad |\xi| \leq \delta_0, \quad \zeta \in \gamma.$$

Тогда

$$\|R(\xi, \zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq 3K, \quad |\xi| \leq \delta_0, \quad \zeta \in \gamma. \quad (4.11)$$

Из соотношений (4.9)–(4.11) вытекает оценка

$$\|R(\xi, \zeta) - R_0(\zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq 3K^2 C_1 |\xi|, \quad |\xi| \leq \delta_0, \quad \zeta \in \gamma. \quad (4.12)$$

В итоге, (4.8) и (4.12) влекут искомую оценку (4.6) с постоянной

$$C_4 = \frac{3}{2} K^2 C_1 \rho = 6 C_1 \rho^{-1} = 6 \sqrt{e} \mu_+ M_1(a) \left(1 - e^{-\mu - C_\pi(a)}\right)^{-1}. \quad (4.13)$$

□

**4.2. Приближение оператора  $(S(\xi) - I)F(\xi)$ .** Получим теперь приближение к оператору  $(S(\xi) - I)F(\xi)$  с помощью формулы Рисса

$$(S(\xi) - I)F(\xi) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} R(\xi, \zeta) \zeta d\zeta. \quad (4.14)$$

**Лемма 4.3.** Пусть выполнены условия (1.2)–(1.4) и условие  $M_3(a) < \infty$ . Пусть  $F(\xi)$  — проектор Рисса (4.5). Пусть  $P$  — ортопроектор пространства  $L_2(\Omega)$  на  $\mathcal{L}(\mathbf{1}_\Omega)$ . Тогда справедливо представление

$$(S(\xi) - I)F(\xi) = G_2(\xi) + \Psi(\xi), \quad G_2(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^d G_{jl} \xi_j \xi_l, \quad (4.15)$$

и оценка

$$\|\Psi(\xi)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_5 |\xi|^3, \quad |\xi| \leq \delta_0. \quad (4.16)$$

Операторы  $G_{jl}$  имеют вид

$$G_{jl} = P \partial_j \partial_l S(0) P - P \partial_j S(0) R_0^\perp(0) \partial_l S(0) P - P \partial_l S(0) R_0^\perp(0) \partial_j S(0) P. \quad (4.17)$$

Здесь  $R_0^\perp(0) = P^\perp (S(0) - I)^{-1} P^\perp$ ; под  $(S(0) - I)^{-1}$  подразумевается оператор, обратный к  $(S(0) - I)|_{L_2^0(\Omega)} : L_2^0(\Omega) \rightarrow L_2^0(\Omega)$ . Оператор  $G_2(\xi)$  подчинен оценке

$$\|G_2(\xi)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_6 |\xi|^2, \quad \xi \in \tilde{\Omega}. \quad (4.18)$$

Постоянная  $C_5$  определена ниже в (4.35) и контролируется в терминах величин  $\mu_-$ ,  $\mu_+$ ,  $M_1(a)$ ,  $M_2(a)$ ,  $M_3(a)$ ,  $C_\pi(a)$ . Постоянная  $C_6$  определена ниже в (4.36) и контролируется в терминах величин  $\mu_-$ ,  $\mu_+$ ,  $M_1(a)$ ,  $M_2(a)$ ,  $C_\pi(a)$ .

*Доказательство.* В силу леммы 3.1 имеем  $(S(0) - I)P = 0$ . Поэтому формула (4.14) при  $\xi = 0$  дает

$$0 = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} R_0(\zeta) \zeta d\zeta. \quad (4.19)$$

Вычитая (4.19) из (4.14), получаем

$$(\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi}) - I)F(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (R(\boldsymbol{\xi}, \zeta) - R_0(\zeta))\zeta d\zeta. \quad (4.20)$$

Проитерируем резольвентное тождество (4.9) дважды:

$$\begin{aligned} R(\boldsymbol{\xi}, \zeta) &= R_0(\zeta) - R(\boldsymbol{\xi}, \zeta)\Delta\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta) \\ &= R_0(\zeta) - R_0(\zeta)\Delta\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta) + R(\boldsymbol{\xi}, \zeta)\Delta\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\Delta\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta) \\ &= R_0(\zeta) - R_0(\zeta)\Delta\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta) + R_0(\zeta)\Delta\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\Delta\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta) + Z_1(\boldsymbol{\xi}, \zeta), \end{aligned} \quad (4.21)$$

где

$$Z_1(\boldsymbol{\xi}, \zeta) = -R(\boldsymbol{\xi}, \zeta)\Delta\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\Delta\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\Delta\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta). \quad (4.22)$$

Из (4.1), (4.10) и (4.11) вытекает оценка оператора (4.22):

$$\|Z_1(\boldsymbol{\xi}, \zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq 3K^4 C_1^3 |\boldsymbol{\xi}|^3, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0, \quad \zeta \in \gamma. \quad (4.23)$$

Далее, в силу леммы 3.10 имеем:

$$R_0(\zeta)\Delta\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta) = R_0(\zeta)(\Delta_1\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi}) + \Delta_2\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi}))R_0(\zeta) + Z_2(\boldsymbol{\xi}, \zeta), \quad (4.24)$$

где

$$Z_2(\boldsymbol{\xi}, \zeta) = R_0(\zeta)\mathbb{K}_2(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta).$$

Из (3.35) и (4.1) вытекает оценка

$$\|Z_2(\boldsymbol{\xi}, \zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq K^2 C_3 |\boldsymbol{\xi}|^3, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0, \quad \zeta \in \gamma. \quad (4.25)$$

Наконец, из леммы 3.9 следует представление

$$R_0(\zeta)\Delta\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\Delta\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta) = R_0(\zeta)\Delta_1\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\Delta_1\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta) + Z_3(\boldsymbol{\xi}, \zeta), \quad (4.26)$$

где

$$Z_3(\boldsymbol{\xi}, \zeta) = R_0(\zeta)\mathbb{K}_1(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\Delta\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta) + R_0(\zeta)\Delta_1\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\mathbb{K}_1(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta).$$

Используя (3.30), (3.31), (4.1) и (4.10), получаем оценку

$$\|Z_3(\boldsymbol{\xi}, \zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq 2K^3 C_1 C_2 |\boldsymbol{\xi}|^3, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0, \quad \zeta \in \gamma. \quad (4.27)$$

Комбинируя (4.21), (4.24) и (4.26), приходим к представлению

$$R(\boldsymbol{\xi}, \zeta) = R_0(\zeta) - R_0(\zeta)(\Delta_1\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi}) + \Delta_2\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi}))R_0(\zeta) + R_0(\zeta)\Delta_1\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\Delta_1\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta) + Z(\boldsymbol{\xi}, \zeta), \quad (4.28)$$

где  $Z(\boldsymbol{\xi}, \zeta) = Z_1(\boldsymbol{\xi}, \zeta) - Z_2(\boldsymbol{\xi}, \zeta) + Z_3(\boldsymbol{\xi}, \zeta)$ . В силу (4.23), (4.25) и (4.27) выполнена оценка

$$\|Z(\boldsymbol{\xi}, \zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq (3K^4 C_1^3 + K^2 C_3 + 2K^3 C_1 C_2) |\boldsymbol{\xi}|^3, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0, \quad \zeta \in \gamma. \quad (4.29)$$

Теперь из (4.20) и (4.28) вытекает представление

$$(\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi}) - I)F(\boldsymbol{\xi}) = G_1(\boldsymbol{\xi}) + G_2(\boldsymbol{\xi}) + \Psi(\boldsymbol{\xi}), \quad (4.30)$$

где

$$G_1(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} R_0(\zeta)\Delta_1\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\zeta d\zeta, \quad (4.31)$$

$$G_2(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (R_0(\zeta)\Delta_2\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta) - R_0(\zeta)\Delta_1\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\Delta_1\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta))\zeta d\zeta, \quad (4.32)$$

$$\Psi(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} Z(\boldsymbol{\xi}, \zeta)\zeta d\zeta. \quad (4.33)$$

Из (4.29) и (4.33) следует оценка

$$\|\Psi(\boldsymbol{\xi})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_5 |\boldsymbol{\xi}|^3, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0, \quad (4.34)$$

где

$$C_5 = \frac{1}{4}\rho^2(3K^4C_1^3 + K^2C_3 + 2K^3C_1C_2). \quad (4.35)$$

В силу (3.30), (3.34), (4.1) и (4.32) справедлива оценка (4.18) с постоянной

$$C_6 = \frac{1}{4}\rho^2(K^3C_1^2 + K^2C_2). \quad (4.36)$$

Для вычисления интегралов в (4.31), (4.32) используем разложение резольвенты оператора  $\mathbb{S}(\mathbf{0}) - I$ :

$$R_0(\zeta) = R_0(\zeta)P + R_0(\zeta)P^\perp = -\frac{1}{\zeta}P + R_0^\perp(\zeta), \quad \zeta \in \gamma, \quad (4.37)$$

где  $R_0^\perp(\zeta) := R_0(\zeta)P^\perp$ . С учетом (3.28) из (4.31) и (4.37) следует, что

$$G_1(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^d \xi_j \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left( -\frac{1}{\zeta}P + R_0^\perp(\zeta) \right) \partial_j \mathbb{S}(\mathbf{0}) \left( -\frac{1}{\zeta}P + R_0^\perp(\zeta) \right) \zeta d\zeta.$$

Поскольку оператор-функция  $R_0^\perp(\zeta)$  голоморфна внутри контура  $\gamma$ , получаем

$$G_1(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^d \xi_j \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} P \partial_j \mathbb{S}(\mathbf{0}) P \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Отсюда в силу леммы 3.11 следует равенство

$$G_1(\boldsymbol{\xi}) = 0. \quad (4.38)$$

Вычислим теперь член

$$G_2^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} R_0(\zeta) \Delta_2 \mathbb{S}(\boldsymbol{\xi}) R_0(\zeta) \zeta d\zeta. \quad (4.39)$$

Используя (3.33) и (4.37), получаем

$$\begin{aligned} G_2^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) &:= \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^d \xi_j \xi_l \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left( -\frac{1}{\zeta}P + R_0^\perp(\zeta) \right) \partial_j \partial_l \mathbb{S}(\mathbf{0}) \left( -\frac{1}{\zeta}P + R_0^\perp(\zeta) \right) \zeta d\zeta \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^d \xi_j \xi_l \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} P \partial_j \partial_l \mathbb{S}(\mathbf{0}) P \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^d \xi_j \xi_l P \partial_j \partial_l \mathbb{S}(\mathbf{0}) P. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Остается вычислить член

$$G_2^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) := -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} R_0(\zeta) \Delta_1 \mathbb{S}(\boldsymbol{\xi}) R_0(\zeta) \Delta_1 \mathbb{S}(\boldsymbol{\xi}) R_0(\zeta) \zeta d\zeta. \quad (4.41)$$

Используя (3.28) и (4.37), получаем

$$\begin{aligned} G_2^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) &= -\frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^d \xi_j \xi_l \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left( \left( -\frac{1}{\zeta}P + R_0^\perp(\zeta) \right) \partial_j \mathbb{S}(\mathbf{0}) \left( -\frac{1}{\zeta}P + R_0^\perp(\zeta) \right) \partial_l \mathbb{S}(\mathbf{0}) \left( -\frac{1}{\zeta}P + R_0^\perp(\zeta) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( -\frac{1}{\zeta}P + R_0^\perp(\zeta) \right) \partial_l \mathbb{S}(\mathbf{0}) \left( -\frac{1}{\zeta}P + R_0^\perp(\zeta) \right) \partial_j \mathbb{S}(\mathbf{0}) \left( -\frac{1}{\zeta}P + R_0^\perp(\zeta) \right) \right) \zeta d\zeta. \end{aligned}$$

Учитывая равенство  $P \partial_j \mathbb{S}(\mathbf{0}) P = 0$  (см. лемму 3.11) и голоморфность оператор-функции  $R_0^\perp(\zeta)$  внутри контура  $\gamma$ , имеем

$$G_2^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^d \xi_j \xi_l \left( P \partial_j \mathbb{S}(\mathbf{0}) R_0^\perp(0) \partial_l \mathbb{S}(\mathbf{0}) P + P \partial_l \mathbb{S}(\mathbf{0}) R_0^\perp(0) \partial_j \mathbb{S}(\mathbf{0}) P \right). \quad (4.42)$$

Здесь  $R_0^\perp(0) = P^\perp(\mathbb{S}(\mathbf{0}) - I)^{-1}P^\perp$ , под  $(\mathbb{S}(\mathbf{0}) - I)^{-1}$  подразумевается оператор, обратный к  $(\mathbb{S}(\mathbf{0}) - I)|_{L_2^0(\Omega)} : L_2^0(\Omega) \rightarrow L_2^0(\Omega)$ ; этот оператор корректно определен и ограничен.

Из (4.30), (4.32), (4.34), (4.38)–(4.42) вытекают все утверждения леммы.  $\square$

#### 4.3. Представление оператора $G_2(\boldsymbol{\xi})$ в терминах решений вспомогательных задач.

В этом пункте предполагаем, что выполнены условия (1.2)–(1.4) и условие  $M_2(a) < \infty$ . Оператор  $G_2(\boldsymbol{\xi}) = G_2^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) + G_2^{(2)}(\boldsymbol{\xi})$  (см. (4.15), (4.17)) можно представить в терминах решений вспомогательных задач.

**Лемма 4.4.** Пусть  $v_j(\mathbf{x}, t)$  — решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_j(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= -\mathbb{A}(t, \mathbf{0})v_j(\mathbf{x}, t) - \int_{\mathbb{R}^d} (x_j - y_j)a(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}_+; \\ v_j(\mathbf{x}, 0) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Тогда оператор

$$G_2^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^d \xi_j \xi_l P \partial_j \partial_l \mathbb{S}(\mathbf{0}) P$$

представляется в виде

$$G_2^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) = - \sum_{j,l=1}^d g_{jl}^{(1)} \xi_j \xi_l P,$$

$$g_{jl}^{(1)} = \frac{1}{2} \int_0^1 dt \int_{\Omega} d\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) ((x_j - y_j)(x_l - y_l) - (x_j - y_j)v_l(\mathbf{y}, t) - (x_l - y_l)v_j(\mathbf{y}, t)). \quad (4.44)$$

Здесь  $v_j(\mathbf{y}, t)$  при  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$  определено как периодическое продолжение решения задачи (4.43).

*Доказательство.* Пусть  $U_j(\mathbf{x}, t)$  — решение задачи (3.38). С учетом (3.16) имеем  $U_j(\mathbf{x}, t) = iv_j(\mathbf{x}, t)$ , где  $v_j(\mathbf{x}, t)$  — решение задачи (4.43). В силу теоремы 7.10 решение  $v_j(\mathbf{x}, t)$  существует, единственно и является липшицевой функцией от  $t$  со значениями в  $L_2(\Omega)$ . Отметим, что функция  $v_j(\mathbf{x}, t)$  вещественна и  $\int_{\Omega} v_j(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 0$  (см. (3.41)).

Пусть  $U_{jl}(\mathbf{x}, t)$  — решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{jl}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= -\mathbb{A}(t, \mathbf{0})U_{jl}(\mathbf{x}, t) - \partial_j \mathbb{A}(t, \mathbf{0})U_l(\mathbf{x}, t) - \partial_l \mathbb{A}(t, \mathbf{0})U_j(\mathbf{x}, t) - \partial_j \partial_l \mathbb{A}(t, \mathbf{0})\mathbf{1}_{\Omega}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}_+; \\ U_{jl}(\mathbf{x}, 0) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Очевидно,

$$\partial_j \partial_l \mathbb{S}(\mathbf{0})\mathbf{1}_{\Omega} = U_{jl}(\cdot, 1).$$

Чтобы найти оператор

$$P \partial_j \partial_l \mathbb{S}(\mathbf{0}) P = (U_{jl}(\cdot, 1), \mathbf{1}_{\Omega})_{L_2(\Omega)} P, \quad (4.46)$$

проинтегрируем уравнение в (4.45) по  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (U_{jl}(\cdot, t), \mathbf{1}_{\Omega})_{L_2(\Omega)} &= -(\mathbb{A}(t, \mathbf{0})U_{jl}(\cdot, t), \mathbf{1}_{\Omega})_{L_2(\Omega)} - (\partial_j \mathbb{A}(t, \mathbf{0})U_l(\cdot, t), \mathbf{1}_{\Omega})_{L_2(\Omega)} \\ &\quad - (\partial_l \mathbb{A}(t, \mathbf{0})U_j(\cdot, t), \mathbf{1}_{\Omega})_{L_2(\Omega)} - (\partial_j \partial_l \mathbb{A}(t, \mathbf{0})\mathbf{1}_{\Omega}, \mathbf{1}_{\Omega})_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$



Первое слагаемое справа равно нулю, поскольку  $\mathbb{A}(t, \mathbf{0})\mathbf{1}_\Omega = 0$ . Вычисляя остальные слагаемые с учетом (3.16) и равенства  $U_j(\mathbf{x}, t) = iv_j(\mathbf{x}, t)$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(U_{jl}(\cdot, t), \mathbf{1}_\Omega)_{L_2(\Omega)} &= - \int_\Omega d\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \\ &\quad \times ((x_j - y_j)(x_l - y_l) - (x_j - y_j)v_l(\mathbf{y}, t) - (x_l - y_l)v_j(\mathbf{y}, t)). \end{aligned}$$

Интегрируя это соотношение по  $t \in (0, 1)$  с учетом начального условия  $U_{jl}(\mathbf{x}, 0) = 0$ , приходим к равенству

$$(U_{jl}(\cdot, 1), \mathbf{1}_\Omega)_{L_2(\Omega)} = -2g_{jl}^{(1)}, \quad j, l = 1, \dots, d,$$

где  $g_{jl}^{(1)}$  определено в (4.44). Отсюда и из (4.46) следует утверждение леммы.  $\square$

**Лемма 4.5.** Пусть  $v_j(\mathbf{x}, t)$  — решение задачи Коши (4.43). Пусть  $w_j(\mathbf{x})$  — решение задачи

$$(\mathbb{S}(\mathbf{0}) - I)w_j(\mathbf{x}) = v_j(\mathbf{x}, 1), \quad \int_\Omega w_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \quad (4.47)$$

Пусть  $\eta_j(\mathbf{x}, t)$  — решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_j(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= -\mathbb{A}(t, \mathbf{0})\eta_j(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}_+; \\ \eta_j(\mathbf{x}, 0) &= w_j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Тогда оператор  $G_2^{(2)}(\boldsymbol{\xi})$ , определенный в (4.42), представляется в виде

$$\begin{aligned} G_2^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) &= - \sum_{j,l=1}^d g_{jl}^{(2)} \xi_j \xi_l P, \\ g_{jl}^{(2)} &= \frac{1}{2} \int_0^1 dt \int_\Omega d\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) ((x_j - y_j)\eta_l(\mathbf{y}, t) + (x_l - y_l)\eta_j(\mathbf{y}, t)). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Здесь  $\eta_j(\mathbf{y}, t)$  при  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$  определено как периодическое продолжение решения задачи (4.48).

*Доказательство.* В силу (3.36) имеем  $\partial_j \mathbb{S}(\mathbf{0})\mathbf{1}_\Omega = U_j(\cdot, 1) = iv_j(\cdot, 1)$ . Тогда

$$R_0^\perp(0)\partial_j \mathbb{S}(\mathbf{0})\mathbf{1}_\Omega = iw_j,$$

где  $w_j(\mathbf{x})$  — решение задачи (4.47). Чтобы найти  $\partial_l \mathbb{S}(\mathbf{0})R_0^\perp(0)\partial_j \mathbb{S}(\mathbf{0})\mathbf{1}_\Omega = i\partial_l \mathbb{S}(\mathbf{0})w_j$ , введем решение  $\eta_j(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi})$  задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_j(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi})}{\partial t} &= -\mathbb{A}(t, \boldsymbol{\xi})\eta_j(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}_+; \\ \eta_j(\mathbf{x}, 0; \boldsymbol{\xi}) &= w_j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Тогда

$$\partial_l \mathbb{S}(\mathbf{0})R_0^\perp(0)\partial_j \mathbb{S}(\mathbf{0})\mathbf{1}_\Omega = i\partial_l \eta_j(\cdot, 1; \mathbf{0}).$$

Дифференцируя уравнение в (4.50) по  $\xi_l$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \partial_l \eta_j(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}) &= -\mathbb{A}(t, \boldsymbol{\xi})\partial_l \eta_j(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}) - \partial_l \mathbb{A}(t, \boldsymbol{\xi})\eta_j(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}_+; \\ \partial_l \eta_j(\mathbf{x}, 0; \boldsymbol{\xi}) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Чтобы найти оператор

$$P\partial_l \mathbb{S}(\mathbf{0})R_0^\perp(0)\partial_j \mathbb{S}(\mathbf{0})P = i(\partial_l \eta_j(\cdot, 1; \mathbf{0}), \mathbf{1}_\Omega)_{L_2(\Omega)} P, \quad (4.52)$$

проинтегрируем уравнение в (4.51) при  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$  по  $\Omega$ :

$$\frac{d}{dt}(\partial_l \eta_j(\cdot, t; \mathbf{0}), \mathbf{1}_\Omega)_{L_2(\Omega)} = -(\mathbb{A}(t, \mathbf{0})\partial_l \eta_j(\cdot, t; \mathbf{0}), \mathbf{1}_\Omega)_{L_2(\Omega)} - (\partial_l \mathbb{A}(t, \mathbf{0})\eta_j(\cdot, t; \mathbf{0}), \mathbf{1}_\Omega)_{L_2(\Omega)}.$$

Первое слагаемое справа равно нулю, поскольку  $\mathbb{A}(t, \mathbf{0})\mathbf{1}_\Omega = 0$ . Вычисляя второе слагаемое с учетом (3.16), получаем

$$\frac{d}{dt}(\partial_l \eta_j(\cdot, t; \mathbf{0}), \mathbf{1}_\Omega)_{L_2(\Omega)} = -i \int_\Omega d\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} (x_l - y_l) a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \eta_j(\mathbf{y}, t; \mathbf{0}).$$

Интегрируя полученное равенство по  $t \in (0, 1)$  с учетом начального условия в (4.51), имеем

$$(\partial_l \eta_j(\cdot, 1; \mathbf{0}), \mathbf{1}_\Omega)_{L_2(\Omega)} = -i \int_0^1 dt \int_\Omega d\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} (x_l - y_l) a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \eta_j(\mathbf{y}, t; \mathbf{0}).$$

Отсюда и из (4.52) следует, что

$$P \partial_l \mathbb{S}(\mathbf{0}) R_0^\perp(0) \partial_j \mathbb{S}(\mathbf{0}) P + P \partial_j \mathbb{S}(\mathbf{0}) R_0^\perp(0) \partial_l \mathbb{S}(\mathbf{0}) P = 2g_{jl}^{(2)} P, \quad (4.53)$$

где  $g_{jl}^{(2)}$  определено в (4.49). Для краткости обозначаем  $\eta_j(\mathbf{x}, t; \mathbf{0}) =: \eta_j(\mathbf{x}, t)$ ; тогда  $\eta_j(\mathbf{x}, t)$  является решением задачи (4.48).

Из (4.42) и (4.53) следует утверждение леммы.  $\square$

Леммы 4.4 и 4.5 дают следующее утверждение.

**Следствие 4.6.** *Оператор  $G_2(\boldsymbol{\xi})$ , определенный в (4.15), (4.17), допускает представление*

$$G_2(\boldsymbol{\xi}) = - \sum_{j,l=1}^d g_{jl}^0 \xi_j \xi_l P, \quad (4.54)$$

$$g_{jl}^0 = \frac{1}{2} \int_0^1 dt \int_\Omega d\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \times ((x_j - y_j)(x_l - y_l) - (x_j - y_j)(v_l(\mathbf{y}, t) - \eta_l(\mathbf{y}, t)) - (x_l - y_l)(v_j(\mathbf{y}, t) - \eta_j(\mathbf{y}, t))).$$

Здесь  $v_j(\mathbf{x}, t)$  — решение задачи (4.43), а  $\eta_j(\mathbf{x}, t)$  — решение задачи (4.48).

Покажем теперь, что функция  $v_j - \eta_j$  является решением следующей задачи с периодическим условием по времени:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_j(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= -\mathbb{A}(t, \mathbf{0}) \chi_j(\mathbf{x}, t) - \int_{\mathbb{R}^d} (x_j - y_j) a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}_+; \\ \chi_j(\mathbf{x}, 1) &= \chi_j(\mathbf{x}, 0), \quad \mathbf{x} \in \Omega; \quad \int_\Omega \chi_j(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \quad (4.55)$$

**Лемма 4.7.** *Существует единственное решение  $\chi_j$  задачи (4.55). Это решение липшицево по  $t \in \mathbb{R}_+$  со значениями в  $L_2(\Omega)$ , уравнение выполнено почти всюду. При этом справедливо равенство*

$$\chi_j(\mathbf{x}, t) = v_j(\mathbf{x}, t) - \eta_j(\mathbf{x}, t),$$

где  $v_j$  — решение задачи (4.43), а  $\eta_j(\mathbf{x}, t)$  — решение задачи (4.48).

*Доказательство.* Убедимся, что функция  $v_j - \eta_j$  является решением задачи (4.55). Действительно, в силу уравнений в (4.43) и (4.48) функция  $v_j - \eta_j$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial (v_j(\mathbf{x}, t) - \eta_j(\mathbf{x}, t))}{\partial t} = -\mathbb{A}(t, \mathbf{0})(v_j(\mathbf{x}, t) - \eta_j(\mathbf{x}, t)) - \int_{\mathbb{R}^d} (x_j - y_j) a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (4.56)$$

Далее, из начальных условий в (4.43) и (4.48) следует, что

$$v_j(\mathbf{x}, 0) - \eta_j(\mathbf{x}, 0) = -w_j(\mathbf{x}),$$

где  $w_j$  — решение задачи (4.47). Тогда  $\mathbb{S}(\mathbf{0})w_j = w_j(\cdot) + v_j(\cdot, 1)$ . Поскольку  $\eta_j(\cdot, 1) = \mathbb{S}(\mathbf{0})w_j$ , отсюда получаем

$$v_j(\mathbf{x}, 1) - \eta_j(\mathbf{x}, 1) = -w_j(\mathbf{x}).$$

Следовательно, выполнено условие

$$v_j(\mathbf{x}, 1) - \eta_j(\mathbf{x}, 1) = v_j(\mathbf{x}, 0) - \eta_j(\mathbf{x}, 0). \quad (4.57)$$

Наконец, справедливо равенство  $\int_{\Omega} v_j(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 0$  (см. (3.41)). Задача (4.48) совпадает с (3.2) при  $\phi = w_j$ . Поскольку  $\int_{\Omega} w_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$ , из (3.3) следует, что  $\int_{\Omega} \eta_j(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 0$ . Таким образом, выполнено условие

$$\int_{\Omega} (v_j(\mathbf{x}, t) - \eta_j(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} = 0. \quad (4.58)$$

Из (4.56)–(4.58) следует, что функция  $v_j - \eta_j$  является решением задачи (4.55). Этим доказано существование решения этой задачи. Липшицевость этого решения по  $t$  со значениями в  $L_2(\Omega)$  следует из аналогичных свойств функций  $v_j$  и  $\eta_j$ .

Проверим единственность решения. Пусть  $\chi_j$  и  $\tilde{\chi}_j$  — решения задачи (4.55). Тогда функция  $\Delta\chi_j = \chi_j - \tilde{\chi}_j$  является решением задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta\chi_j(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= -\mathbb{A}(t, \mathbf{0})\Delta\chi_j(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}_+; \\ \Delta\chi_j(\mathbf{x}, 1) &= \Delta\chi_j(\mathbf{x}, 0), \quad \mathbf{x} \in \Omega; \quad \int_{\Omega} \Delta\chi_j(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Тогда  $\mathbb{S}(\mathbf{0})\Delta\chi_j(\cdot, 0) = \Delta\chi_j(\cdot, 0)$ . Поскольку  $\text{Ker}(\mathbb{S}(\mathbf{0}) - I) = \mathcal{L}\{\mathbf{1}_{\Omega}\}$ , получаем  $\Delta\chi_j(\mathbf{x}, 0) = c \cdot \mathbf{1}_{\Omega}$ . Из последнего условия в (4.59) следует, что  $c = 0$ , т.е.  $\Delta\chi_j(\mathbf{x}, 0) = 0$ . Тогда функция  $\Delta\chi_j(\mathbf{x}, t)$  является решением задачи Коши с начальным данным  $\Delta\chi_j(\mathbf{x}, 0) = 0$ . В силу единственности решения задачи Коши, получаем  $\Delta\chi_j(\mathbf{x}, t) = 0$  при  $\mathbf{x} \in \Omega$  и  $t \in \mathbb{R}_+$ .  $\square$

**Лемма 4.8.** Оператор  $G_2(\boldsymbol{\xi})$ , определенный в (4.15), (4.17), допускает представление (4.54), где

$$g_{jl}^0 = \frac{1}{2} \int_0^1 dt \int_{\Omega} d\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) ((x_j - y_j)(x_l - y_l) - (x_j - y_j)\chi_l(\mathbf{y}, t) - (x_l - y_l)\chi_j(\mathbf{y}, t)). \quad (4.60)$$

Здесь  $\chi_j(\mathbf{x}, t)$  — решение задачи (4.55). Матрица  $g^0 = \{g_{jl}^0\}$  симметрична, имеет вещественные элементы и положительно определена:

$$\sum_{j,l=1}^d g_{jl}^0 \xi_j \xi_l \geq c_0 |\boldsymbol{\xi}|^2, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d, \quad c_0 = \frac{1}{2} \mu_- \mathcal{M}(a), \quad (4.61)$$

где константа  $\mathcal{M}(a)$  определена в (1.16). Справедлива оценка

$$\sum_{j,l=1}^d g_{jl}^0 \xi_j \xi_l \leq C_6 |\boldsymbol{\xi}|^2, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d, \quad (4.62)$$

где постоянная  $C_6$  определена в (4.36).

*Доказательство.* Искомое представление вытекает из следствия 4.6 и леммы 4.7. Оценка (4.62) следует из (4.18) и (4.54).

Покажем, что выполнено равенство

$$\begin{aligned} \langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^d \xi_j \xi_l \int_0^1 dt \int_{\Omega} d\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \\ &\quad \times (x_j - y_j + \chi_j(\mathbf{x}, t) - \chi_j(\mathbf{y}, t))(x_l - y_l + \chi_l(\mathbf{x}, t) - \chi_l(\mathbf{y}, t)). \end{aligned} \quad (4.63)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} & (x_j - y_j + \chi_j(\mathbf{x}, t) - \chi_j(\mathbf{y}, t))(x_l - y_l + \chi_l(\mathbf{x}, t) - \chi_l(\mathbf{y}, t)) \\ &= (x_j - y_j)(x_l - y_l) - (x_j - y_j)\chi_l(\mathbf{y}, t) - (x_l - y_l)\chi_j(\mathbf{y}, t) \\ &+ (x_j - y_j)\chi_l(\mathbf{x}, t) + (x_l - y_l)\chi_j(\mathbf{x}, t) + (\chi_j(\mathbf{x}, t) - \chi_j(\mathbf{y}, t))(\chi_l(\mathbf{x}, t) - \chi_l(\mathbf{y}, t)), \end{aligned}$$

(4.63) будет вытекать из (4.60), если показать, что

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dt \int_{\Omega} d\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \\ & \times ((x_j - y_j)\chi_l(\mathbf{x}, t) + (x_l - y_l)\chi_j(\mathbf{x}, t) + (\chi_j(\mathbf{x}, t) - \chi_j(\mathbf{y}, t))(\chi_l(\mathbf{x}, t) - \chi_l(\mathbf{y}, t))) = 0. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Заметим, что из условия периодичности функций  $\chi_j(\mathbf{x}, t)$  по  $t$  следует тождество

$$\int_0^1 \left( \frac{\partial \chi_j(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \chi_l(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \chi_l(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \chi_j(\mathbf{x}, t) \right) dt = \chi_j(\mathbf{x}, 1)\chi_l(\mathbf{x}, 1) - \chi_j(\mathbf{x}, 0)\chi_l(\mathbf{x}, 0) = 0.$$

Домножая уравнение для  $\chi_j$  на  $\chi_l$ , а уравнение для  $\chi_l$  на  $\chi_j$ , затем складывая полученные равенства и интегрируя по  $t \in (0, 1)$ , получаем:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 (\mathbb{A}(t, \mathbf{0})\chi_j(\mathbf{x}, t) \cdot \chi_l(\mathbf{x}, t) + \mathbb{A}(t, \mathbf{0})\chi_l(\mathbf{x}, t) \cdot \chi_j(\mathbf{x}, t)) dt \\ &+ \int_0^1 dt \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} ((x_j - y_j)\chi_l(\mathbf{x}, t) + (x_l - y_l)\chi_j(\mathbf{x}, t)) a(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t). \end{aligned}$$

Используя определение оператора  $\mathbb{A}(t, \mathbf{0})$ , перепишем это равенство в виде

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 dt \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \\ &\times ((\chi_j(\mathbf{x}, t) - \chi_j(\mathbf{y}, t))\chi_l(\mathbf{x}, t) + (\chi_l(\mathbf{x}, t) - \chi_l(\mathbf{y}, t))\chi_j(\mathbf{x}, t) + (x_j - y_j)\chi_l(\mathbf{x}, t) + (x_l - y_l)\chi_j(\mathbf{x}, t)). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} & (\chi_j(\mathbf{x}, t) - \chi_j(\mathbf{y}, t))(\chi_l(\mathbf{x}, t) - \chi_l(\mathbf{y}, t)) \\ &= (\chi_j(\mathbf{x}, t) - \chi_j(\mathbf{y}, t))\chi_l(\mathbf{x}, t) + (\chi_l(\mathbf{x}, t) - \chi_l(\mathbf{y}, t))\chi_j(\mathbf{x}, t) \\ &+ \chi_j(\mathbf{y}, t)\chi_l(\mathbf{y}, t) - \chi_j(\mathbf{x}, t)\chi_l(\mathbf{x}, t), \end{aligned}$$

для доказательства равенства (4.64) остается показать, что

$$0 = \int_0^1 dt \int_{\Omega} d\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) (\chi_j(\mathbf{y}, t)\chi_l(\mathbf{y}, t) - \chi_j(\mathbf{x}, t)\chi_l(\mathbf{x}, t)). \quad (4.65)$$

Справедливость (4.65) вытекает из следующей выкладки:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dt \int_{\Omega} d\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)\chi_j(\mathbf{y}, t)\chi_l(\mathbf{y}, t) \\ &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} \int_0^1 dt \int_{\Omega} d\mathbf{x} \int_{\Omega} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y} - \mathbf{n})\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)\chi_j(\mathbf{y}, t)\chi_l(\mathbf{y}, t) \\ &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} \int_0^1 dt \int_{\Omega} d\mathbf{x} \int_{\Omega} d\mathbf{y} a(\mathbf{y} - \mathbf{x} - \mathbf{n})\mu(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t)\chi_j(\mathbf{x}, t)\chi_l(\mathbf{x}, t) \\ &= \int_0^1 dt \int_{\Omega} d\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} a(\mathbf{y} - \mathbf{x})\mu(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t)\chi_j(\mathbf{x}, t)\chi_l(\mathbf{x}, t) \\ &= \int_0^1 dt \int_{\Omega} d\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)\chi_j(\mathbf{x}, t)\chi_l(\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$

Мы учли периодичность функций  $\mu$  и  $\chi_j$  по пространственным переменным, затем поменяли ролями переменные  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$  и, наконец, учли условия симметрии коэффициентов  $a$  и  $\mu$ . Это завершает доказательство тождества (4.64), а тогда и (4.63).

Из (4.63) следует, что

$$\langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle = \frac{1}{2} \int_0^1 dt \int_{\Omega} d\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \left| \sum_{j=1}^d \xi_j (x_j - y_j + \chi_j(\mathbf{x}, t) - \chi_j(\mathbf{y}, t)) \right|^2 \geq 0. \quad (4.66)$$

Покажем теперь, что матрица  $g^0$  положительно определена. Из (4.66) с учетом неравенства  $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \geq \mu_-$  следует, что

$$\begin{aligned} \langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle &\geq \frac{1}{2} \mu_- \int_0^1 dt \int_{\Omega} d\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \left| \sum_{j=1}^d \xi_j (x_j - y_j + \chi_j(\mathbf{x}, t) - \chi_j(\mathbf{y}, t)) \right|^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \mu_- \inf J_{\boldsymbol{\xi}}[\mathbf{v}], \end{aligned} \quad (4.67)$$

где

$$J_{\boldsymbol{\xi}}[\mathbf{v}] := \int_{\Omega} d\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) |\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{y}) \rangle|^2, \quad (4.68)$$

а инфимум в правой части (4.67) берется по всем вектор-функциям  $\mathbf{v} \in L_2(\Omega; \mathbb{R}^d)$ , периодически продолженным на  $\mathbb{R}^d$ . Представим функционал (4.68) в виде

$$J_{\boldsymbol{\xi}}[\mathbf{v}] = J_{\boldsymbol{\xi}}^{(1)} + J_{\boldsymbol{\xi}}^{(2)}[\mathbf{v}] + J_{\boldsymbol{\xi}}^{(3)}[\mathbf{v}], \quad (4.69)$$

где

$$\begin{aligned} J_{\boldsymbol{\xi}}^{(1)} &:= \int_{\Omega} d\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) |\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle|^2, \\ J_{\boldsymbol{\xi}}^{(2)}[\mathbf{v}] &:= 2 \int_{\Omega} d\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{y}) \rangle, \\ J_{\boldsymbol{\xi}}^{(3)}[\mathbf{v}] &:= \int_{\Omega} d\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) |\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{y}) \rangle|^2. \end{aligned}$$

Справедливо равенство

$$J_{\boldsymbol{\xi}}^{(2)}[\mathbf{v}] = 4 \int_{\Omega} d\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rangle, \quad (4.70)$$

которое вытекает из выкладки

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}(\mathbf{y}) \rangle &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \int_{\Omega} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y} - \mathbf{n}) \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} - \mathbf{y} - \mathbf{n} \rangle \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}(\mathbf{y}) \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} \int_{\Omega} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}(\mathbf{y}) \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int_{\Omega} d\mathbf{x} a(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rangle \\ &= - \int_{\Omega} d\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rangle. \end{aligned}$$

Мы учли периодичность функции  $\mathbf{v}$  и условие  $a(\mathbf{z}) = a(-\mathbf{z})$ . Далее, из (4.70) следует, что

$$J_{\boldsymbol{\xi}}^{(2)}[\mathbf{v}] = 4 \int_{\Omega} d\mathbf{x} \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rangle \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{z} a(\mathbf{z}) \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{z} \rangle = 0 \quad (4.71)$$

опять в силу условия  $a(\mathbf{z}) = a(-\mathbf{z})$ . Очевидно,  $J_{\boldsymbol{\xi}}^{(3)}[\mathbf{v}] \geq 0$ . Вместе с (4.69) и (4.71) это влечет

$$J_{\boldsymbol{\xi}}[\mathbf{v}] \geq J_{\boldsymbol{\xi}}^{(1)} = \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{z} a(\mathbf{z}) |\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{z} \rangle|^2 = M_a(\boldsymbol{\xi}) \geq \mathcal{M}(a) |\boldsymbol{\xi}|^2, \quad (4.72)$$

где использовано обозначение (1.15), а затем учтено (1.16). В итоге, из (4.67) и (4.72) вытекает искомая оценка (4.61).  $\square$

## § 5. ПРИБЛИЖЕНИЕ К ОПЕРАТОРУ $\mathbb{S}^N$

На протяжении этого параграфа предполагаем, что выполнены условия (1.2)–(1.4) и условие  $M_3(a) < \infty$ .

**5.1. Приближение к оператору  $\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})^N F(\boldsymbol{\xi})$ .** Наша следующая цель — найти аппроксимацию оператора  $\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})^N F(\boldsymbol{\xi})$  при большом  $N \in \mathbb{N}$ .

В силу леммы 4.3 и леммы 4.8 имеем

$$\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})F(\boldsymbol{\xi}) = F(\boldsymbol{\xi}) - \langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle P + \Psi(\boldsymbol{\xi}),$$

где оператор  $\Psi(\boldsymbol{\xi})$  подчинен оценке (4.16). Следовательно,

$$\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})F(\boldsymbol{\xi}) = (1 - \langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle)F(\boldsymbol{\xi}) + \tilde{\Psi}(\boldsymbol{\xi}), \quad (5.1)$$

где  $\tilde{\Psi}(\boldsymbol{\xi}) = \Psi(\boldsymbol{\xi}) + \langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle(F(\boldsymbol{\xi}) - P)$ . Из леммы 4.2, (4.16) и (4.62) следует оценка

$$\|\tilde{\Psi}(\boldsymbol{\xi})\| \leq \tilde{C}_5 |\boldsymbol{\xi}|^3, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0, \quad (5.2)$$

где  $\tilde{C}_5 = C_5 + C_4 C_6$ . В силу (5.1) выполнено равенство

$$\tilde{\Psi}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})F(\boldsymbol{\xi}) - (1 - \langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle)F(\boldsymbol{\xi}),$$

а потому оператор  $\tilde{\Psi}(\boldsymbol{\xi})$  коммутирует с проектором  $F(\boldsymbol{\xi})$ . Справедливо равенство

$$\tilde{\Psi}(\boldsymbol{\xi}) = \tilde{\Psi}(\boldsymbol{\xi})F(\boldsymbol{\xi}) = F(\boldsymbol{\xi})\tilde{\Psi}(\boldsymbol{\xi}).$$

Отсюда и из (5.1) получаем

$$\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})^N F(\boldsymbol{\xi}) = (\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})F(\boldsymbol{\xi}))^N = \left( (1 - \langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle)I + \tilde{\Psi}(\boldsymbol{\xi}) \right)^N F(\boldsymbol{\xi}). \quad (5.3)$$

**Лемма 5.1.** *Положим*

$$\delta_1 := \min \left\{ \delta_0; (2C_6)^{-1/2}; c_0(2\tilde{C}_5)^{-1} \right\}. \quad (5.4)$$

*Справедлива оценка*

$$\left\| \left( (1 - \langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle)I + \tilde{\Psi}(\boldsymbol{\xi}) \right)^N - e^{-N\langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle} I \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \frac{C_7}{\sqrt{N}}, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_1, \quad N \in \mathbb{N}. \quad (5.5)$$

Постоянная  $C_7$  контролируется в терминах величин  $\mu_-$ ,  $\mu_+$ ,  $M_1(a)$ ,  $M_2(a)$ ,  $M_3(a)$ ,  $C_\pi(a)$ ,  $\mathcal{M}(a)$ .

*Доказательство.* Очевидно,

$$\left\| \left( (1 - \langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle)I + \tilde{\Psi}(\boldsymbol{\xi}) \right)^N - e^{-N\langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle} I \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq J'_N(\boldsymbol{\xi}) + J''_N(\boldsymbol{\xi}), \quad (5.6)$$

где

$$J'_N(\boldsymbol{\xi}) := \left\| \left( (1 - \langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle)I + \tilde{\Psi}(\boldsymbol{\xi}) \right)^N - (1 - \langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle)^N I \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)}, \quad (5.7)$$

$$J''_N(\boldsymbol{\xi}) := \left| e^{-N\langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - (1 - \langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle)^N \right|. \quad (5.8)$$

Начнем с оценки члена  $J'_N(\boldsymbol{\xi})$ . В силу (4.62) и (5.4) выполнено

$$\langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle \leq \frac{1}{2}, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_1. \quad (5.9)$$

Очевидно,

$$\left( (1 - \langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle)I + \tilde{\Psi}(\boldsymbol{\xi}) \right)^N - (1 - \langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle)^N I = (1 - \langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle)^N \left( (I + \hat{\Psi}(\boldsymbol{\xi}))^N - I \right), \quad (5.10)$$

где

$$\widehat{\Psi}(\xi) = \frac{\widetilde{\Psi}(\xi)}{1 - \langle g^0 \xi, \xi \rangle}.$$

Из (5.2) и (5.9) следует оценка

$$\|\widehat{\Psi}(\xi)\| \leq 2\widetilde{C}_5 |\xi|^3, \quad |\xi| \leq \delta_1. \quad (5.11)$$

Далее, имеем

$$(I + \widehat{\Psi}(\xi))^N - I = \sum_{j=1}^N C_N^j \widehat{\Psi}(\xi)^j,$$

где  $C_N^j$  — биномиальные коэффициенты, а потому

$$\|(I + \widehat{\Psi}(\xi))^N - I\| \leq \sum_{j=1}^N C_N^j \|\widehat{\Psi}(\xi)\|^j = (1 + \|\widehat{\Psi}(\xi)\|)^N - 1 \leq (1 + 2\widetilde{C}_5 |\xi|^3)^N - 1, \quad |\xi| \leq \delta_1.$$

В последнем переходе мы использовали неравенство (5.11). Отсюда и из (5.10) с учетом (4.61) получаем

$$J'_N(\xi) \leq (1 - c_0 |\xi|^2)^N \left( (1 + 2\widetilde{C}_5 |\xi|^3)^N - 1 \right) = e^{N \log(1 - c_0 |\xi|^2)} \left( e^{N \log(1 + 2\widetilde{C}_5 |\xi|^3)} - 1 \right), \quad |\xi| \leq \delta_1. \quad (5.12)$$

Учитывая элементарные неравенства

$$\log(1 - t) \leq -t, \quad 0 \leq t < 1; \quad \log(1 + t) \leq t, \quad t \geq 0,$$

приходим к оценке

$$J'_N(\xi) \leq e^{-c_0 N |\xi|^2} \left( e^{2\widetilde{C}_5 N |\xi|^3} - 1 \right), \quad |\xi| \leq \delta_1. \quad (5.13)$$

Рассмотрим сначала случай, когда  $|\xi| \leq N^{-1/3}$ . Тогда  $2\widetilde{C}_5 N |\xi|^3 \leq 2\widetilde{C}_5$ . Используя неравенство

$$e^t - 1 \leq \frac{(e^c - 1)}{c} t, \quad 0 \leq t \leq c,$$

получаем

$$J'_N(\xi) \leq (e^{2\widetilde{C}_5} - 1) N |\xi|^3 e^{-c_0 N |\xi|^2}, \quad |\xi| \leq \min\{N^{-1/3}; \delta_1\}. \quad (5.14)$$

Отсюда вытекает оценка

$$J'_N(\xi) \leq C_7^{(1)} N^{-1/2}, \quad |\xi| \leq \min\{N^{-1/3}; \delta_1\}, \quad (5.15)$$

с постоянной

$$C_7^{(1)} = (e^{2\widetilde{C}_5} - 1) \max_{s \geq 0} s^3 e^{-c_0 s^2} = (e^{2\widetilde{C}_5} - 1) \left( \frac{3}{2ec_0} \right)^{3/2}.$$

В случае, когда  $|\xi| > N^{-1/3}$ ,  $|\xi| \leq \delta_1$ , оценки тривиальны: каждый член под знаком нормы в (5.7) оценивается по-отдельности. Имеем

$$(1 - \langle g^0 \xi, \xi \rangle)^N \leq (1 - c_0 |\xi|^2)^N = e^{N \log(1 - c_0 |\xi|^2)} \leq e^{-c_0 N |\xi|^2} \leq e^{-c_0 N^{1/3}} \leq C_7^{(2)} N^{-1/2}, \quad (5.16)$$

$$|\xi| > N^{-1/3}, \quad |\xi| \leq \delta_1,$$

где

$$C_7^{(2)} = \max_{s \geq 0} s^3 e^{-c_0 s^2} = \left( \frac{3}{2ec_0} \right)^{3/2}.$$

Далее, учитывая, что  $\widetilde{C}_5 |\xi|^3 \leq \frac{c_0}{2} |\xi|^2$  при  $|\xi| \leq \delta_1$  (см. (5.4)), имеем

$$\begin{aligned} \left\| \left( (1 - \langle g^0 \xi, \xi \rangle) I + \widetilde{\Psi}(\xi) \right)^N \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq (1 - c_0 |\xi|^2 + \widetilde{C}_5 |\xi|^3)^N \leq \left( 1 - \frac{c_0}{2} |\xi|^2 \right)^N \\ &\leq e^{-\frac{c_0}{2} N |\xi|^2} \leq e^{-\frac{c_0}{2} N^{1/3}} \leq C_7^{(3)} N^{-1/2}, \quad |\xi| > N^{-1/3}, \quad |\xi| \leq \delta_1, \end{aligned} \quad (5.17)$$

где

$$C_7^{(3)} = \max_{s \geq 0} s^3 e^{-\frac{c_0}{2}s^2} = \left( \frac{3}{ec_0} \right)^{3/2}.$$

Из (5.16) и (5.17) вытекает оценка

$$J'_N(\xi) \leq (C_7^{(2)} + C_7^{(3)})N^{-1/2}, \quad |\xi| > N^{-1/3}, \quad |\xi| \leq \delta_1. \quad (5.18)$$

В итоге, неравенства (5.15) и (5.18) приводят к оценке

$$J'_N(\xi) \leq C'_7 N^{-1/2}, \quad |\xi| \leq \delta_1, \quad (5.19)$$

с постоянной  $C'_7 = \max\{C_7^{(1)}; C_7^{(2)} + C_7^{(3)}\}$ .

Член  $J''_N(\xi)$  оценивается аналогичным образом. Поскольку

$$0 \leq e^{-t} - 1 + t \leq \frac{t^2}{2}, \quad t \geq 0,$$

имеем

$$\begin{aligned} J''_N(\xi) &\leq \left(1 - \langle g^0 \xi, \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle g^0 \xi, \xi \rangle^2\right)^N - (1 - \langle g^0 \xi, \xi \rangle)^N \\ &\leq (1 - \langle g^0 \xi, \xi \rangle)^N ((1 + C_6^2 |\xi|^4)^N - 1), \quad |\xi| \leq \delta_1. \end{aligned}$$

Мы учли (4.62) и (5.9). По аналогии с (5.12), (5.13) отсюда получаем

$$J''_N(\xi) \leq e^{-c_0 N |\xi|^2} (e^{C_6^2 N |\xi|^4} - 1), \quad |\xi| \leq \delta_1.$$

Сначала рассмотрим случай, когда  $|\xi| \leq N^{-1/4}$ . Тогда  $C_6^2 N |\xi|^4 \leq C_6^2$ . По аналогии с (5.14), (5.15) приходим к оценке

$$J''_N(\xi) \leq (e^{C_6^2} - 1) N |\xi|^4 e^{-c_0 N |\xi|^2} \leq C_7^{(4)} N^{-1} \leq C_7^{(4)} N^{-1/2}, \quad |\xi| \leq \min\{N^{-1/4}; \delta_1\}. \quad (5.20)$$

с постоянной

$$C_7^{(4)} = (e^{C_6^2} - 1) \max_{s \geq 0} s^2 e^{-c_0 s} = (e^{C_6^2} - 1) \left( \frac{2}{ec_0} \right)^2.$$

В случае, когда  $|\xi| > N^{-1/4}$ ,  $|\xi| \leq \delta_1$ , оценки тривиальны: каждый член под знаком нормы в (5.8) оценивается по-отдельности. Имеем

$$\begin{aligned} (1 - \langle g^0 \xi, \xi \rangle)^N &\leq (1 - c_0 |\xi|^2)^N = e^{N \log(1 - c_0 |\xi|^2)} \leq e^{-c_0 N |\xi|^2} \leq e^{-c_0 N^{1/2}} \leq C_7^{(5)} N^{-1/2}, \\ &|\xi| > N^{-1/4}, \quad |\xi| \leq \delta_1, \end{aligned} \quad (5.21)$$

где

$$C_7^{(5)} = \max_{s \geq 0} s e^{-c_0 s} = \frac{1}{ec_0}.$$

Аналогично,

$$e^{-N \langle g^0 \xi, \xi \rangle} \leq e^{-c_0 N |\xi|^2} \leq e^{-c_0 N^{1/2}} \leq C_7^{(5)} N^{-1/2}, \quad |\xi| > N^{-1/4}, \quad |\xi| \leq \delta_1. \quad (5.22)$$

Из (5.21) и (5.22) вытекает оценка

$$J''_N(\xi) \leq 2C_7^{(5)} N^{-1/2}, \quad |\xi| > N^{-1/4}, \quad |\xi| \leq \delta_1. \quad (5.23)$$

Неравенства (5.20) и (5.23) приводят к оценке

$$J''_N(\xi) \leq C''_7 N^{-1/2}, \quad |\xi| \leq \delta_1, \quad (5.24)$$

с постоянной  $C''_7 = \max\{C_7^{(4)}; 2C_7^{(5)}\}$ .

Комбинируя (5.6), (5.19) и (5.24), получаем искомое неравенство (5.5) с постоянной  $C_7 = C'_7 + C''_7$ .  $\square$



Теперь из (5.3) и леммы 5.1 следует неравенство

$$\left\| \mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})^N F(\boldsymbol{\xi}) - e^{-N\langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle} F(\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_7 N^{-1/2}, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_1, \quad N \in \mathbb{N}. \quad (5.25)$$

Далее, из леммы 4.2 и (4.61) вытекает, что

$$\left\| e^{-N\langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle} (F(\boldsymbol{\xi}) - P) \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_4 |\boldsymbol{\xi}| e^{-c_0 N |\boldsymbol{\xi}|^2} \leq C_8 N^{-1/2}, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_1, \quad N \in \mathbb{N}, \quad (5.26)$$

где

$$C_8 = C_4 \max_{s \geq 0} s e^{-c_0 s^2} = C_4 (2ec_0)^{-1/2}.$$

Неравенства (5.25) и (5.26) дают следующий результат.

**Лемма 5.2.** *Справедлива оценка*

$$\left\| \mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})^N F(\boldsymbol{\xi}) - e^{-N\langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle} P \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq (C_7 + C_8) N^{-1/2}, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_1, \quad N \in \mathbb{N}. \quad (5.27)$$

Постоянная  $(C_7 + C_8)$  контролируется в терминах величин  $\mu_-$ ,  $\mu_+$ ,  $M_1(a)$ ,  $M_2(a)$ ,  $M_3(a)$ ,  $C_\pi(a)$ ,  $\mathcal{M}(a)$ .

## 5.2. Приближение к оператору $\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})^N$ .

**Лемма 5.3.** *Положим*

$$\delta_2 := \min \left\{ \delta_1; \frac{\rho}{2(C_4 + C_1(1 + C_4\delta_1))} \right\}. \quad (5.28)$$

*Справедлива оценка*

$$\|\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})(I - F(\boldsymbol{\xi}))\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq 1 - \frac{\rho}{2}, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_2. \quad (5.29)$$

*Доказательство.* Очевидно,

$$\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})(I - F(\boldsymbol{\xi})) = \mathbb{S}(\mathbf{0})(I - P) + \mathbb{S}(\mathbf{0})(P - F(\boldsymbol{\xi})) + (\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi}) - \mathbb{S}(\mathbf{0}))(I - F(\boldsymbol{\xi})).$$

Пусть  $|\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_1$ . В силу (3.1) норма первого слагаемого справа не превосходит  $1 - \rho$ . Из леммы 4.2 и оценки  $\|\mathbb{S}(\mathbf{0})\| \leq 1$  следует, что норма второго слагаемого оценивается через  $C_4 |\boldsymbol{\xi}|$ . Применяя леммы 3.4 и 4.2, получаем оценку третьего слагаемого:

$$\|(\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi}) - \mathbb{S}(\mathbf{0}))(I - F(\boldsymbol{\xi}))\| \leq C_1 |\boldsymbol{\xi}| \|I - P + P - F(\boldsymbol{\xi})\| \leq C_1 |\boldsymbol{\xi}| (1 + C_4 |\boldsymbol{\xi}|) \leq C_1 (1 + C_4 \delta_1) |\boldsymbol{\xi}|, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_1.$$

В итоге приходим к оценке

$$\|\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})(I - F(\boldsymbol{\xi}))\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq 1 - \rho + (C_4 + C_1(1 + C_4\delta_1)) |\boldsymbol{\xi}|, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_1.$$

За счет (5.28) при  $|\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_2$  последнее слагаемое справа не превосходит  $\rho/2$ , а потому выполнена оценка (5.29).  $\square$

Из (5.29) следует оценка

$$\|\mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})^N (I - F(\boldsymbol{\xi}))\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \left(1 - \frac{\rho}{2}\right)^N \leq e^{-N\rho/2} \leq C_9 N^{-1/2}, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_2, \quad N \in \mathbb{N}, \quad (5.30)$$

где

$$C_9 = \max_{s \geq 0} s e^{-\rho s^2/2} = (e\rho)^{-1/2}.$$

В итоге, из (5.27) и (5.30) вытекает следующий результат.

**Лемма 5.4.** *Справедлива оценка*

$$\left\| \mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})^N - e^{-N\langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle} P \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq (C_7 + C_8 + C_9) N^{-1/2}, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_2, \quad N \in \mathbb{N}. \quad (5.31)$$

Постоянная  $(C_7 + C_8 + C_9)$  контролируется в терминах величин  $\mu_-$ ,  $\mu_+$ ,  $M_1(a)$ ,  $M_2(a)$ ,  $M_3(a)$ ,  $C_\pi(a)$ ,  $\mathcal{M}(a)$ .

При  $|\xi| > \delta_2$  оценки тривиальны: каждый член под знаком нормы в (5.31) оценивается по-отдельности. В силу (3.6) имеем

$$\|\mathbb{S}(\xi)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq e^{-\mu - C(a)\delta_2^2}, \quad \xi \in \tilde{\Omega}, \quad |\xi| > \delta_2.$$

Следовательно,

$$\|\mathbb{S}(\xi)^N\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq e^{-\mu - C(a)\delta_2^2 N} \leq C_{10} N^{-1/2}, \quad \xi \in \tilde{\Omega}, \quad |\xi| > \delta_2, \quad N \in \mathbb{N}, \quad (5.32)$$

где

$$C_{10} = \max_{s \geq 0} s e^{-\mu - C(a)\delta_2^2 s^2} = (2e\mu - C(a)\delta_2^2)^{-1/2}.$$

Аналогично,

$$e^{-N\langle g^0 \xi, \xi \rangle} \leq e^{-c_0 \delta_2^2 N} \leq C_{11} N^{-1/2}, \quad \xi \in \tilde{\Omega}, \quad |\xi| > \delta_2, \quad N \in \mathbb{N}, \quad (5.33)$$

где

$$C_{11} = \max_{s \geq 0} s e^{-c_0 \delta_2^2 s^2} = (2ec_0 \delta_2^2)^{-1/2}.$$

Из (5.32) и (5.33) вытекает неравенство

$$\left\| \mathbb{S}(\xi)^N - e^{-N\langle g^0 \xi, \xi \rangle} P \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq (C_{10} + C_{11}) N^{-1/2}, \quad \xi \in \tilde{\Omega}, \quad |\xi| > \delta_2, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Вместе с (5.31) это влечет следующий результат.

**Теорема 5.5.** *Справедлива оценка*

$$\left\| \mathbb{S}(\xi)^N - e^{-N\langle g^0 \xi, \xi \rangle} P \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_{12} N^{-1/2}, \quad \xi \in \tilde{\Omega}, \quad N \in \mathbb{N}, \quad (5.34)$$

с постоянной

$$C_{12} = \max\{C_7 + C_8 + C_9; C_{10} + C_{11}\}.$$

Постоянная  $C_{12}$  контролируется в терминах величин  $d$ ,  $\mu_-$ ,  $\mu_+$ ,  $M_1(a)$ ,  $M_2(a)$ ,  $M_3(a)$ ,  $\mathcal{M}(a)$ ,  $C_{r(a)}(a)$ ,  $C_\pi(a)$ .

**5.3. Приближение в терминах эффективного оператора.** Введем *эффективный оператор* — самосопряженный эллиптический дифференциальный оператор второго порядка с постоянными коэффициентами в  $L_2(\mathbb{R}^d)$ :

$$\mathbb{A}^0 := \sum_{j,l=1}^d g_{jl}^0 D_j D_l = -\operatorname{div} g^0 \nabla, \quad \operatorname{Dom} \mathbb{A}^0 = H^2(\mathbb{R}^d). \quad (5.35)$$

При этом *эффективная матрица*  $g^0 - (d \times d)$ -матрица с элементами  $g_{jl}^0$ , где коэффициенты  $g_{jl}^0$ ,  $j, l = 1, \dots, d$ , определены в (4.60). Выполнена оценка (4.61), тем самым матрица  $g^0$  положительно определена.

С помощью унитарного преобразования Гельфанда оператор  $\mathbb{A}^0$  раскладывается в прямой интеграл:

$$\mathbb{A}^0 = \mathcal{G}^* \left( \int_{\tilde{\Omega}} \oplus \mathbb{A}^0(\xi) d\xi \right) \mathcal{G}. \quad (5.36)$$

Здесь  $\mathbb{A}^0(\xi)$  — самосопряженный оператор в пространстве  $L_2(\Omega)$ , заданный выражением

$$\mathbb{A}^0(\xi) = (\mathbf{D} + \xi)^* g^0 (\mathbf{D} + \xi), \quad \operatorname{Dom} \mathbb{A}^0(\xi) = \tilde{H}^2(\Omega).$$

Пространство  $\tilde{H}^2(\Omega)$  определяется как подпространство в  $H^2(\Omega)$ , состоящее из функций,  $\mathbb{Z}^d$ -периодическое продолжение которых на  $\mathbb{R}^d$  принадлежит классу  $H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^d)$ . Равенство (5.36) означает следующее. Пусть  $u \in \operatorname{Dom} \mathbb{A}^0 = H^2(\mathbb{R}^d)$  и  $v = \mathbb{A}^0 u$ . Тогда  $\mathcal{G}u(\xi, \cdot) \in \operatorname{Dom} \mathbb{A}^0(\xi) = \tilde{H}^2(\Omega)$  и  $\mathcal{G}v(\xi, \cdot) = \mathbb{A}^0(\xi) \mathcal{G}u(\xi, \cdot)$ ,  $\xi \in \tilde{\Omega}$ .

Очевидно, выполнено равенство

$$\mathbb{A}^0(\xi) P = \langle g^0 \xi, \xi \rangle P, \quad \xi \in \tilde{\Omega}.$$

Поэтому оценку (5.34) можно переписать в виде

$$\left\| \mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})^N - e^{-N\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi})} P \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_{12} N^{-1/2}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}, \quad N \in \mathbb{N}. \quad (5.37)$$

С помощью дискретного преобразования Фурье имеем

$$\left\| e^{-N\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi})} (I - P) \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} = \sup_{0 \neq \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} e^{-N \langle g^0(2\pi\mathbf{n} + \boldsymbol{\xi}), 2\pi\mathbf{n} + \boldsymbol{\xi} \rangle} \leq e^{-c_0 \pi^2 N}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Мы учли (4.61) и очевидное неравенство  $|2\pi\mathbf{n} + \boldsymbol{\xi}| \geq \pi$  при  $\boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}$  и  $0 \neq \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$ . Следовательно,

$$\left\| e^{-N\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi})} (I - P) \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_{13} N^{-1/2}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}, \quad N \in \mathbb{N}, \quad (5.38)$$

где

$$C_{13} = \max_{s \geq 0} s e^{-c_0 \pi^2 s^2} = (2ec_0 \pi^2)^{-1/2}.$$

В итоге, неравенства (5.37) и (5.38) дают следующий результат.

**Теорема 5.6.** *Справедлива оценка*

$$\left\| \mathbb{S}(\boldsymbol{\xi})^N - e^{-N\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi})} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_{14} N^{-1/2}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}, \quad N \in \mathbb{N},$$

с постоянной  $C_{14} = C_{12} + C_{13}$ . Постоянная  $C_{14}$  контролируется в терминах величин  $d$ ,  $\mu_-$ ,  $\mu_+$ ,  $M_1(a)$ ,  $M_2(a)$ ,  $M_3(a)$ ,  $\mathcal{M}(a)$ ,  $\mathcal{C}_{r(a)}(a)$ ,  $\mathcal{C}_\pi(a)$ .

В силу разложений операторов  $\mathbb{S}$  и  $\mathbb{A}^0$  в прямые интегралы (см. (2.9), (5.36)) из теоремы 5.6 вытекает следующий результат.

**Теорема 5.7.** *Справедлива оценка*

$$\left\| \mathbb{S}^N - e^{-N\mathbb{A}^0} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{14} N^{-1/2}, \quad N \in \mathbb{N}. \quad (5.39)$$

Постоянная  $C_{14}$  контролируется в терминах величин  $\mu_-$ ,  $\mu_+$ ,  $M_1(a)$ ,  $M_2(a)$ ,  $M_3(a)$ ,  $\mathcal{M}(a)$ ,  $\mathcal{C}_{r(a)}(a)$ ,  $\mathcal{C}_\pi(a)$ .

Из этой теоремы и из свойств оператора  $\mathbb{S}(\sigma)$  выводим следующий результат.

**Теорема 5.8.** *Пусть  $N \in \mathbb{N}$  и  $0 \leq \sigma < 1$ . Справедлива оценка*

$$\left\| \mathbb{S}(\sigma) \mathbb{S}^N - e^{-(N+\sigma)\mathbb{A}^0} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{15} N^{-1/2}. \quad (5.40)$$

Постоянная  $C_{15}$  контролируется в терминах величин  $d$ ,  $\mu_-$ ,  $\mu_+$ ,  $M_1(a)$ ,  $M_2(a)$ ,  $M_3(a)$ ,  $\mathcal{M}(a)$ ,  $\mathcal{C}_{r(a)}(a)$ ,  $\mathcal{C}_\pi(a)$ .

*Доказательство.* С учетом (2.3) из (5.39) следует, что

$$\left\| \mathbb{S}(\sigma) \mathbb{S}^N - \mathbb{S}(\sigma) e^{-N\mathbb{A}^0} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{14} N^{-1/2}, \quad N \in \mathbb{N}. \quad (5.41)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \left\| \mathbb{S}(\sigma) e^{-N\mathbb{A}^0} - e^{-(N+\sigma)\mathbb{A}^0} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \left\| (\mathbb{S}(\sigma) - I) e^{-N\mathbb{A}^0} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \left\| e^{-N\mathbb{A}^0} - e^{-(N+\sigma)\mathbb{A}^0} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Второе слагаемое в правой части (5.42) легко оценить, используя преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} \left\| e^{-N\mathbb{A}^0} - e^{-(N+\sigma)\mathbb{A}^0} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= \sup_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d} \left| e^{-N \langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle} (1 - e^{-\sigma \langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle}) \right| \\ &\leq \sup_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d} \langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle e^{-N \langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle} \leq (eN)^{-1} \leq \frac{1}{e} N^{-1/2}. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Мы воспользовались неравенством  $0 \leq 1 - e^{-t} \leq t$  при  $t \geq 0$ , а также соотношением  $\max_{s \geq 0} se^{-s} = e^{-1}$ .

В силу разложений операторов  $\mathbb{S}(\sigma)$  и  $\mathbb{A}^0$  в прямые интегралы (см. (2.8), (5.36)) первое слагаемое в правой части (5.42) представляется в виде

$$\left\| (\mathbb{S}(\sigma) - I)e^{-N\mathbb{A}^0} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} = \sup_{\xi \in \tilde{\Omega}} \left\| (\mathbb{S}(\sigma, \xi) - I)e^{-N\mathbb{A}^0(\xi)} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)}. \quad (5.44)$$

С учетом (2.7) имеем:

$$\begin{aligned} \left\| (\mathbb{S}(\sigma, \xi) - I)e^{-N\mathbb{A}^0(\xi)} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq 2\|e^{-N\mathbb{A}^0(\xi)}(I - P)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ &+ \left\| (\mathbb{S}(\sigma, \xi) - I)e^{-N\mathbb{A}^0(\xi)}P \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

В силу (5.38) первое слагаемое справа не превосходит  $2C_{13}N^{-1/2}$ . Второе слагаемое перепишем в виде

$$\left\| (\mathbb{S}(\sigma, \xi) - I)e^{-N\mathbb{A}^0(\xi)}P \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} = \|(S(\sigma, \xi) - I)P\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} e^{-N\langle g^0 \xi, \xi \rangle}.$$

Поскольку  $\mathbb{S}(\sigma, \mathbf{0})P = P$ , используя (3.7), получаем:

$$\left\| (\mathbb{S}(\sigma, \xi) - I)e^{-N\mathbb{A}^0(\xi)}P \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_1 |\xi| e^{-c_0 N |\xi|^2} \leq C'_{15} N^{-1/2},$$

где

$$C'_{15} = C_1 \max_{s \geq 0} se^{-c_0 s^2} = C_1 (2ec_0)^{-1/2}.$$

В итоге, с учетом (5.44) приходим к неравенству

$$\left\| (\mathbb{S}(\sigma) - I)e^{-N\mathbb{A}^0} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq (2C_{13} + C'_{15})N^{-1/2}.$$

Вместе с (5.42) и (5.43) это дает

$$\left\| \mathbb{S}(\sigma)e^{-N\mathbb{A}^0} - e^{-(N+\sigma)\mathbb{A}^0} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq (2C_{13} + C'_{15} + e^{-1})N^{-1/2}. \quad (5.45)$$

Неравенства (5.41) и (5.45) приводят к искомой оценке (5.40) с постоянной  $C_{15} = C_{14} + 2C_{13} + C'_{15} + e^{-1}$ .  $\square$

Очевидно, при  $N \in \mathbb{N}$  выполнено  $\sqrt{N+2} \leq \sqrt{3N}$ , а потому левая часть (5.40) допускает также оценку через  $\sqrt{3}C_{15}(N+2)^{-1/2}$ . При  $N = 0$  левая часть (5.40) не превосходит  $2 = 2\sqrt{2}(N+2)^{-1/2}$ . Следовательно,

$$\left\| \mathbb{S}(\sigma)\mathbb{S}^N - e^{-(N+\sigma)\mathbb{A}^0} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_0(N+2)^{-1/2}, \quad N \in \mathbb{Z}_+, \quad 0 \leq \sigma < 1,$$

где  $C_0 = \max\{2\sqrt{2}; \sqrt{3}C_{15}\}$ .

Вспоминая соотношение (2.4), сформулируем полученный результат как в терминах разрешающих операторов, так и на языке решений задачи Коши.

**Теорема 5.9.** Пусть выполнены условия (1.2)–(1.4) и условие  $M_3(a) < \infty$ . Пусть  $\mathbb{S}(t)$  — разрешающий оператор задачи (2.1). Пусть  $\mathbb{A}^0$  — эффе́ктивный оператор, определенный в (5.35). Справедлива оценка

$$\left\| \mathbb{S}(t) - e^{-t\mathbb{A}^0} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C_0}{(t+1)^{1/2}}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (5.46)$$

*Равносильная формулировка:* Пусть  $u(\mathbf{x}, t)$  — решение задачи Коши (2.1) с начальным данным  $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ . Пусть  $u_0(\mathbf{x}, t)$  — решение усредненной задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \operatorname{div} g^0 \nabla u_0(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad t \in \mathbb{R}_+; \\ u_0(\mathbf{x}, 0) &= \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Тогда выполнена оценка

$$\|u(\cdot, t) - u_0(\cdot, t)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C_0}{(t+1)^{1/2}} \|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad t \geq 0.$$

Постоянная  $C_0$  контролируется в терминах величин  $d, \mu_-, \mu_+, M_1(a), M_2(a), M_3(a), \mathcal{M}(a), C_{r(a)}(a), C_\pi(a)$ .

## § 6. УСРЕДНЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

**6.1. Основные результаты.** Предполагая выполненными условия (1.2)–(1.4), рассмотрим семейство нелокальных операторов в  $L_2(\mathbb{R}^d)$ , заданных по правилу

$$\mathbb{A}_\varepsilon(t)u(\mathbf{x}) := \varepsilon^{-d-2} \int_{\mathbb{R}^d} a((\mathbf{x} - \mathbf{y})/\varepsilon) \mu(\mathbf{x}/\varepsilon, \mathbf{y}/\varepsilon, t/\varepsilon^2) (u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d), \quad \varepsilon > 0.$$

Пусть эффективный оператор  $\mathbb{A}^0$  в  $L_2(\mathbb{R}^d)$  определен в (5.35). Напомним, что эффективная матрица  $g^0$  — это матрица с элементами  $g_{jl}^0$ ,  $j, l = 1, \dots, d$ , определенными в (4.60).

Пусть  $u_\varepsilon(\mathbf{x}, t)$  — решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\varepsilon(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= -\mathbb{A}_\varepsilon(t)u_\varepsilon(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad t \in \mathbb{R}_+; \\ u_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) &= \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \end{aligned} \quad (6.1)$$

где  $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ . Пусть  $\mathbb{S}_\varepsilon(t)$  — разрешающий оператор, сопоставляющий начальному данному  $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^d)$  значение решения в точке  $t$ :

$$\mathbb{S}_\varepsilon(t)\varphi = u_\varepsilon(\cdot, t).$$

Из теоремы 5.9 с помощью масштабного преобразования выводится наш основной результат. Мы приводим формулировку как в терминах разрешающего оператора, так и в терминах решения задачи Коши.

**Теорема 6.1.** Пусть выполнены условия (1.2)–(1.4) и  $M_3(a) < \infty$ . Пусть  $\mathbb{S}_\varepsilon(t)$  — разрешающий оператор задачи (6.1). Тогда выполнена оценка

$$\left\| \mathbb{S}_\varepsilon(t) - e^{-\mathbb{A}^0 t} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C_0 \varepsilon}{(t + \varepsilon^2)^{1/2}}, \quad t \geq 0, \quad \varepsilon > 0. \quad (6.2)$$

*Равносильная формулировка:* Пусть  $u_\varepsilon(\mathbf{x}, t)$  — решение задачи Коши (6.1) с начальным данным  $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ . Пусть  $u_0(\mathbf{x}, t)$  — решение усредненной задачи Коши (5.47). Тогда справедлива оценка

$$\|u_\varepsilon(\cdot, t) - u_0(\cdot, t)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C_0 \varepsilon}{(t + \varepsilon^2)^{1/2}} \|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad t \geq 0, \quad \varepsilon > 0.$$

Постоянная  $C_0$  контролируется через следующие величины:  $\mu_-, \mu_+, M_1(a), M_2(a), M_3(a), \mathcal{M}(a), C_\pi(a), C_{r(a)}(a)$ .

*Доказательство.* Введем масштабное преобразование (семейство унитарных операторов):

$$T_\varepsilon u(\mathbf{x}) := \varepsilon^{d/2} u(\varepsilon \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d), \quad \varepsilon > 0.$$

Нетрудно проверить равенство

$$\mathbb{A}_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-2} T_\varepsilon^* \mathbb{A}(t/\varepsilon^2) T_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Отсюда легко выводится соотношение

$$\mathbb{S}_\varepsilon(t) = T_\varepsilon^* \mathbb{S}(t/\varepsilon^2) T_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (6.3)$$

Для эффективного оператора также выполнено тождество

$$\mathbb{A}^0 = \varepsilon^{-2} T_\varepsilon^* \mathbb{A}^0 T_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

из которого следует, что

$$e^{-\mathbb{A}^0 t} = T_\varepsilon^* e^{-\mathbb{A}^0 t/\varepsilon^2} T_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (6.4)$$

В силу унитарности оператора  $T_\varepsilon$  из (6.3) и (6.4) вытекает равенство

$$\left\| \mathbb{S}_\varepsilon(t) - e^{-t\mathbb{A}^0} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} = \left\| \mathbb{S}(t/\varepsilon^2) - e^{-\mathbb{A}^0 t/\varepsilon^2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Отсюда и из (5.46) следует искомое неравенство (6.2).  $\square$

**6.2. Задача Коши для неоднородного уравнения.** Пусть  $z_\varepsilon \in C([0, T]; L_2(\mathbb{R}^d))$  — решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_\varepsilon(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= -\mathbb{A}_\varepsilon(t) z_\varepsilon(\mathbf{x}, t) + F(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad t \in (0, T); \\ z_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) &= \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \end{aligned} \quad (6.5)$$

где  $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ ,  $F \in L_1((0, T); L_2(\mathbb{R}^d))$ . Решение существует и единственно в силу теоремы 7.10. Используя теорему 6.1, получим аппроксимацию решения задачи (6.5).

Пусть  $\tau \geq 0$ . Обозначим через  $\mathbb{S}_\varepsilon(t, \tau)$  разрешающий оператор задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\varepsilon(\mathbf{x}, t; \tau)}{\partial t} &= -\mathbb{A}_\varepsilon(t) v_\varepsilon(\mathbf{x}, t; \tau), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad t \geq \tau; \\ v_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau; \tau) &= \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Оператор  $\mathbb{S}_\varepsilon(t, \tau)$  действует по правилу

$$\mathbb{S}_\varepsilon(t, \tau) \varphi = v_\varepsilon(\cdot, t; \tau).$$

Заметим, что  $\mathbb{S}_\varepsilon(t) = \mathbb{S}_\varepsilon(t, 0)$ . С учетом периодичности коэффициента  $\mu$  по времени ясно, что для оператора  $\mathbb{S}_\varepsilon(t, \tau)$  выполнен аналог оценки (6.2):

$$\left\| \mathbb{S}_\varepsilon(t, \tau) - e^{-\mathbb{A}^0(t-\tau)} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C_0 \varepsilon}{(t - \tau + \varepsilon^2)^{1/2}}, \quad t \geq \tau, \quad \varepsilon > 0. \quad (6.6)$$

Легко проверить, что решение  $z_\varepsilon$  задачи (6.5) допускает представление

$$z_\varepsilon(\cdot, t) = \mathbb{S}_\varepsilon(t) \varphi + \int_0^t \mathbb{S}_\varepsilon(t, \tau) F(\cdot, \tau) d\tau. \quad (6.7)$$

**Теорема 6.2.** Пусть  $z_\varepsilon(\mathbf{x}, t)$  — решение задачи (6.5) при  $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^d)$  и  $F \in L_q((0, T); L_2(\mathbb{R}^d))$ ,  $1 < q \leq \infty$ . Пусть  $z_0(\mathbf{x}, t)$  — решение усредненной задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_0(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \operatorname{div} g^0 \nabla z_0(\mathbf{x}, t) + F(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad t \in (0, T); \\ z_0(\mathbf{x}, 0) &= \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Тогда выполнена оценка

$$\|z_\varepsilon(\cdot, t) - z_0(\cdot, t)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C_0\varepsilon}{(t + \varepsilon^2)^{1/2}} \|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C_0\sigma_q(t, \varepsilon) \|F\|_{L_q((0,t); L_2(\mathbb{R}^d))}, \quad t \in [0, T], \quad \varepsilon > 0. \quad (6.9)$$

Здесь

$$\sigma_q(t, \varepsilon) = \begin{cases} \mathfrak{c}_q \varepsilon^{2-2/q}, & 1 < q < 2, \\ \varepsilon (\ln(1 + t/\varepsilon^2))^{1/2}, & q = 2, \\ \mathfrak{c}_q t^{1/2-1/q} \varepsilon, & 2 < q \leq \infty, \end{cases}$$

$\mathfrak{c}_q = |1 - q'/2|^{-1/q'}$  при  $q \neq 2$ ,  $1/q + 1/q' = 1$ .

Доказательство. Решение  $z_0$  задачи (6.8) допускает представление

$$z_0(\cdot, t) = e^{-\mathbb{A}^0 t} \varphi + \int_0^t e^{-\mathbb{A}^0(t-\tau)} F(\cdot, \tau) d\tau. \quad (6.10)$$

Из представлений (6.7), (6.10) и оценок (6.2), (6.6) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \|z_\varepsilon(\cdot, t) - z_0(\cdot, t)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \frac{C_0\varepsilon}{(t + \varepsilon^2)^{1/2}} \|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \int_0^t \frac{C_0\varepsilon}{(t - \tau + \varepsilon^2)^{1/2}} \|F(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} d\tau, \quad t \in [0, T], \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Если  $q = \infty$ , то

$$\begin{aligned} &\int_0^t \frac{C_0\varepsilon}{(t - \tau + \varepsilon^2)^{1/2}} \|F(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} d\tau \\ &\leq 2C_0\varepsilon((t + \varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon) \|F\|_{L_\infty((0,t); L_2(\mathbb{R}^d))} \leq 2C_0\varepsilon t^{1/2} \|F\|_{L_\infty((0,t); L_2(\mathbb{R}^d))}, \quad q = \infty. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Если  $1 < q < \infty$ , воспользуемся неравенством Гёльдера:

$$\begin{aligned} &\int_0^t \frac{C_0\varepsilon}{(t - \tau + \varepsilon^2)^{1/2}} \|F(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} d\tau \\ &\leq C_0\varepsilon \left( \int_0^t (t - \tau + \varepsilon^2)^{-q'/2} d\tau \right)^{1/q'} \left( \int_0^t \|F(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^q d\tau \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Здесь  $1/q + 1/q' = 1$ . При  $q = 2$  выполнено  $q' = 2$  и

$$\left( \int_0^t (t - \tau + \varepsilon^2)^{-q'/2} d\tau \right)^{1/q'} = \left( \int_0^t (t - \tau + \varepsilon^2)^{-1} d\tau \right)^{1/2} = (\ln(t + \varepsilon^2) - \ln \varepsilon^2)^{1/2} = (\ln(1 + t/\varepsilon^2))^{1/2}.$$

Следовательно,

$$\int_0^t \frac{C_0\varepsilon}{(t - \tau + \varepsilon^2)^{1/2}} \|F(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} d\tau \leq C_0\varepsilon (\ln(1 + t/\varepsilon^2))^{1/2} \|F\|_{L_2((0,t); L_2(\mathbb{R}^d))}, \quad q = 2. \quad (6.13)$$

Если  $0 < q < 2$ , то  $q' > 2$  и

$$\begin{aligned} &\left( \int_0^t (t - \tau + \varepsilon^2)^{-q'/2} d\tau \right)^{1/q'} = (q'/2 - 1)^{-1/q'} \left( \varepsilon^{2-q'} - (t + \varepsilon^2)^{1-q'/2} \right)^{1/q'} \\ &\leq (q'/2 - 1)^{-1/q'} \varepsilon^{2/q'-1} = (q'/2 - 1)^{-1/q'} \varepsilon^{1-2/q}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\int_0^t \frac{C_0\varepsilon}{(t - \tau + \varepsilon^2)^{1/2}} \|F(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} d\tau \leq C_0 \mathfrak{c}_q \varepsilon^{2-2/q} \|F\|_{L_q((0,t); L_2(\mathbb{R}^d))}, \quad 1 < q < 2, \quad (6.14)$$

где  $\mathbf{c}_q = (q'/2 - 1)^{-1/q'}$ . Наконец, если  $2 < q < \infty$ , то  $q' < 2$  и

$$\begin{aligned} \left( \int_0^t (t - \tau + \varepsilon^2)^{-q'/2} d\tau \right)^{1/q'} &= (1 - q'/2)^{-1/q'} \left( (t + \varepsilon^2)^{1-q'/2} - \varepsilon^{2-q'} \right)^{1/q'} \\ &\leq (1 - q'/2)^{-1/q'} t^{1/q'-1/2} = (1 - q'/2)^{-1/q'} t^{1/2-1/q}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_0^t \frac{C_0 \varepsilon}{(t - \tau + \varepsilon^2)^{1/2}} \|F(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} d\tau \leq C_0 \mathbf{c}_q t^{1/2-1/q} \varepsilon \|F\|_{L_q((0,t); L_2(\mathbb{R}^d))}, \quad 2 < q < \infty, \quad (6.15)$$

где  $\mathbf{c}_q = (1 - q'/2)^{-1/q'}$ .

Сопоставляя (6.11)–(6.15), приходим к искомому неравенству (6.9).  $\square$

**6.3. Аппроксимация решения в классе  $L_q((0, T); L_2(\mathbb{R}^d))$ .** Предположим теперь, что  $0 < T < \infty$  и  $1 \leq q < \infty$ . Применяя теорему 6.1, можно оценить норму разности  $\|z_\varepsilon - z_0\|_{L_q((0,T); L_2(\mathbb{R}^d))}$ .

**Теорема 6.3.** Пусть  $z_\varepsilon(\mathbf{x}, t)$  — решение задачи (6.5) при  $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^d)$  и  $F \in L_q((0, T); L_2(\mathbb{R}^d))$ ,  $1 \leq q < \infty$ . Пусть  $z_0(\mathbf{x}, t)$  — решение усредненной задачи (6.8). Тогда выполнена оценка

$$\|z_\varepsilon(\cdot, t) - z_0(\cdot, t)\|_{L_q((0,T); L_2(\mathbb{R}^d))} \leq C_0 \varepsilon \left( \theta(q, \varepsilon, T) \|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + 2\sqrt{T} \|F\|_{L_q((0,T); L_2(\mathbb{R}^d))} \right), \quad \varepsilon > 0. \quad (6.16)$$

Здесь

$$\theta(q, \varepsilon, T) = \begin{cases} \mathbf{c}_{q'} T^{1/q-1/2}, & 1 \leq q < 2, \\ (\ln(1 + T/\varepsilon^2))^{1/2}, & q = 2, \\ \mathbf{c}_{q'} \varepsilon^{2/q-1}, & 2 < q < \infty, \end{cases}$$

$\mathbf{c}_{q'} = |1 - q/2|^{-1/q}$  при  $q \neq 2$ .

*Доказательство.* Из оценки (6.11) вытекает неравенство

$$\|z_\varepsilon(\cdot, t) - z_0(\cdot, t)\|_{L_q((0,T); L_2(\mathbb{R}^d))} \leq C_0 \varepsilon \|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \mathcal{I}_q(\varepsilon; T)^{1/q} + C_0 \varepsilon \left( \int_0^T \mathcal{L}(\varepsilon, t; F)^q dt \right)^{1/q}, \quad (6.17)$$

при  $t \in [0, T]$  и  $\varepsilon > 0$ , где

$$\mathcal{I}_q(\varepsilon; T) := \int_0^T \frac{dt}{(t + \varepsilon^2)^{q/2}}, \quad \mathcal{L}(\varepsilon, t; F) := \int_0^t (t - \tau + \varepsilon^2)^{-1/2} \|F(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} d\tau.$$

Оценивая интеграл  $\mathcal{I}_q(\varepsilon; T)$ , получаем

$$\mathcal{I}_q(\varepsilon; T)^{1/q} \leq \theta(q, \varepsilon, T). \quad (6.18)$$

Оценим теперь второе слагаемое в правой части (6.17). В случае  $q = 1$ , меняя порядок интегрирования, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^T \mathcal{L}(\varepsilon, t; F) dt &= \int_0^T dt \int_0^t d\tau (t - \tau + \varepsilon^2)^{-1/2} \|F(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &= \int_0^T d\tau \|F(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \int_\tau^T dt (t - \tau + \varepsilon^2)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Оценивая внутренний интеграл через  $2\sqrt{T}$ , получаем

$$\int_0^T \mathcal{L}(\varepsilon, t; F) dt \leq 2\sqrt{T} \|F\|_{L_1((0,T); L_2(\mathbb{R}^d))}.$$

В случае, когда  $1 < q < \infty$ , применим неравенство Гёльдера:

$$\mathcal{L}(\varepsilon, t; F) \leq \left( \int_0^t (t - \tau + \varepsilon^2)^{-1/2} d\tau \right)^{1/q'} \left( \int_0^t (t - \tau + \varepsilon^2)^{-1/2} \|F(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^q d\tau \right)^{1/q}.$$



Интеграл в первой скобке не превосходит  $2\sqrt{T}$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^T \mathcal{L}(\varepsilon, t; F)^q dt &= (2\sqrt{T})^{q/q'} \int_0^T dt \int_0^t d\tau (t - \tau + \varepsilon^2)^{-1/2} \|F(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^q \\ &= (2\sqrt{T})^{q/q'} \int_0^T d\tau \|F(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^q \int_\tau^T dt (t - \tau + \varepsilon^2)^{-1/2} \\ &\leq (2\sqrt{T})^{q/q'+1} \int_0^T d\tau \|F(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^q. \end{aligned}$$

В итоге, при всех  $1 \leq q < \infty$  установлено неравенство

$$\left( \int_0^T \mathcal{L}(\varepsilon, t; F)^q dt \right)^{1/q} \leq 2\sqrt{T} \|F\|_{L_q((0,T); L_2(\mathbb{R}^d))}. \quad (6.19)$$

Теперь из (6.17), (6.18) и (6.19) вытекает искомое неравенство (6.16).  $\square$

В оценке (6.16) коэффициент при  $\|F\|_{L_q((0,T); L_2(\mathbb{R}^d))}$  есть  $O(\varepsilon)$ , а коэффициент при  $\|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$  есть  $O(\varepsilon)$  при  $1 \leq q < 2$ ,  $O(\varepsilon |\ln \varepsilon|^{1/2})$  при  $q = 2$  и  $O(\varepsilon^{2/q})$  при  $2 < q < \infty$ .

**6.4. Заключительные замечания.** 1. Теорема 6.1 сохраняет силу, если решетку периодов  $\mathbb{Z}^d$  заменить на произвольную решетку в  $\mathbb{R}^d$ . Тогда постоянные в оценках будут зависеть не только от коэффициентов  $a$  и  $\mu$ , но и от параметров решетки.

2. Если в условиях теоремы 6.1 заменить условие  $M_3(a) < \infty$  условием

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^k a(\mathbf{x}) d\mathbf{x} < \infty,$$

где  $2 < k < 3$ , то выполнена оценка

$$\left\| \mathbb{S}_\varepsilon(t) - e^{-\mathbb{A}^0 t} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(k) \left( \frac{\varepsilon}{(t + \varepsilon^2)^{1/2}} \right)^{k-2}, \quad t \geq 0, \quad \varepsilon > 0.$$

## § 7. ПРИЛОЖЕНИЕ

**7.1. Леммы Шура и Адамара.** Здесь приводятся некоторые хорошо известные утверждения. Начнем с простейшего варианта леммы Шура.

**Лемма 7.1. (Лемма Шура)** Пусть  $(\mathcal{X}, d\rho)$ ,  $(\mathcal{Y}, d\tau)$  — сепарабельные измеримые пространства с  $\sigma$ -конечными мерами;  $\mathbb{B} : L_2(\mathcal{Y}, d\tau) \rightarrow L_2(\mathcal{X}, d\rho)$  — линейный интегральный оператор с ядром  $b(x, y)$ ,  $x \in \mathcal{X}$ ,  $y \in \mathcal{Y}$ . Предположим, что выполнены условия

$$\begin{aligned} \alpha &:= \rho\text{-sup}_{x \in \mathcal{X}} \int_{\mathcal{Y}} |b(x, y)| d\tau(y) < +\infty, \\ \beta &:= \tau\text{-sup}_{y \in \mathcal{Y}} \int_{\mathcal{X}} |b(x, y)| d\rho(x) < +\infty. \end{aligned}$$

Тогда оператор  $\mathbb{B}$  ограничен и справедлива оценка  $\|\mathbb{B}\| \leq (\alpha\beta)^{1/2}$ .

Обозначим, как и выше,  $\Omega := [0, 1]^d$ , а также  $\Delta := [-1, 1]^d$ . Следующий результат проверен в [21, следствие 4.2].

**Лемма 7.2.** Для любых функций  $\varphi \in L_1(\Delta)$ ,  $\psi \in L_\infty(\Omega \times \Omega)$  оператор, заданный равенством

$$\mathbb{B}u(\mathbf{x}) := \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad u \in L_2(\Omega),$$

является компактным оператором из  $L_2(\Omega)$  в  $L_2(\Omega)$ , и удовлетворяет оценке

$$\|\mathbb{B}\| \leq \|\varphi\|_{L_1(\Delta)} \|\psi\|_{L_\infty(\Omega \times \Omega)}.$$

Далее, мы приведем удобный для нас вариант леммы Адамара.

**Лемма 7.3. (Лемма Адамара)** 1°. Пусть функция  $f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ , дважды непрерывно дифференцируема. Тогда справедливо представление

$$f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{0}) + \sum_{i=1}^d y_i \partial_i f(\mathbf{0}) + \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d y_i y_j \int_0^1 ds_1 s_1 \int_0^1 ds_2 \partial_i \partial_j f(s_1 s_2 \mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d.$$

2°. Пусть функция  $f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ , трижды непрерывно дифференцируема. Тогда справедливо представление

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{0}) + \sum_{i=1}^d y_i \partial_i f(\mathbf{0}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d y_i y_j \partial_i \partial_j f(\mathbf{0}) + \\ + \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d y_i y_j y_k \int_0^1 ds_1 s_1^2 \int_0^1 ds_2 s_2 \int_0^1 ds_3 \partial_i \partial_j \partial_k f(s_1 s_2 s_3 \mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

**7.2. Лемма Гронуолла.** Мы используем различные варианты известной леммы Гронуолла. Для удобства приводим здесь формулировки и доказательства этих лемм.

**Лемма 7.4.** Пусть  $f(t)$  — дифференцируемая функция на  $\mathbb{R}_+$ ,  $f(t) \geq 0$  и при некотором  $\lambda \in \mathbb{R}$  выполнено неравенство

$$\frac{df(t)}{dt} \leq \lambda f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (7.1)$$

Тогда

$$f(t) \leq f(0)e^{\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

*Доказательство.* Из (7.1) следует, что

$$\frac{d}{dt} (f(t)e^{-\lambda t}) = \left( \frac{df(t)}{dt} - \lambda f(t) \right) e^{-\lambda t} \leq 0, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Следовательно, функция  $f(t)e^{-\lambda t}$  — монотонно невозрастающая, а потому

$$f(t)e^{-\lambda t} \leq f(0), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

□

**Лемма 7.5.** Пусть неотрицательная функция  $f(t)$  на  $[0, T]$  удовлетворяет неравенству

$$f(t) \leq c_1 + c_2 \int_0^t f(s) ds, \quad t \in [0, T], \quad (7.2)$$

с некоторыми константами  $c_1, c_2 > 0$ . Тогда

$$f(t) \leq c_1 e^{c_2 t}, \quad t \in [0, T]. \quad (7.3)$$

*Доказательство.* Перепишем неравенство (7.2) в виде

$$\frac{c_2 f(t)}{c_1 + c_2 \int_0^t f(s) ds} \leq c_2.$$

Левая часть равна производной  $\frac{d}{dt} \log(c_1 + c_2 \int_0^t f(s) ds)$ . Интегрируя последнее неравенство, получаем

$$\log \left( c_1 + c_2 \int_0^t f(s) ds \right) - \log c_1 \leq c_2 t.$$

Следовательно,

$$c_1 + c_2 \int_0^t f(s) ds \leq c_1 e^{c_2 t}.$$

Вместе с (7.2) это влечет искомое неравенство (7.3).  $\square$

### 7.3. Разрешимость задачи Коши для абстрактного параболического уравнения.

Пусть  $\mathcal{H}$  — сепарабельное комплексное гильбертово пространство. Пусть задано семейство ограниченных операторов  $A(t)$  в пространстве  $\mathcal{H}$ , измеримых по параметру  $t \in [0, T]$ , причем  $A(\cdot) \in L_\infty((0, T); \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ , то есть,

$$\|A(\cdot)\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{t \in (0, T)} \|A(t)\|_{\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}} < \infty. \quad (7.4)$$

Пусть функция  $u \in C([0, T]; \mathcal{H})$  является слабым решением следующей задачи Коши для параболического уравнения:

$$\frac{du(t)}{dt} = -A(t)u(t) + f(t), \quad u(0) = \varphi, \quad (7.5)$$

где  $\varphi \in \mathcal{H}$ ,  $f \in L_1((0, T); \mathcal{H})$ . Это означает, что при всяком  $v \in \mathcal{H}$  функция  $(u(t), v)_{\mathcal{H}}$  абсолютно непрерывна по  $t \in [0, T]$  и выполнено

$$\frac{d(u(t), v)_{\mathcal{H}}}{dt} = (-A(t)u(t) + f(t), v)_{\mathcal{H}} \quad \text{при п.в. } t \in (0, T), \quad (u(0), v)_{\mathcal{H}} = (\varphi, v)_{\mathcal{H}}. \quad (7.6)$$

Покажем, что слабое решение одновременно является и сильным решением.

**Лемма 7.6.** Пусть выполнено условие (7.4). Пусть  $u \in C([0, T]; \mathcal{H})$  — слабое решение задачи (7.5). Тогда при почти всех  $t \in [0, T]$  выполнено

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} - (-A(t)u(t) + f(t)) \right\|_{\mathcal{H}} = 0. \quad (7.7)$$

Иными словами, при почти всех  $t \in [0, T]$  существует производная  $\frac{du(t)}{dt}$ , понимаемая как предел разностного отношения  $\frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t}$  при  $\Delta t \rightarrow 0$  по норме в  $\mathcal{H}$ , и выполнено уравнение из (7.5).

*Доказательство.* Для удобства будем считать, что  $f(t)$  — фиксированный представитель элемента  $f \in L_1((0, T); \mathcal{H})$ , а  $A(t)$  — фиксированный представитель элемента  $A(\cdot) \in L_\infty((0, T); \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ . Пусть  $\mathcal{L} = \{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  — счетное плотное множество в  $\mathcal{H}$ . Для каждого  $h_n \in \mathcal{L}$  рассмотрим функцию

$$H_n(t) := \int_0^t \| -A(\tau)u(\tau) + f(\tau) - h_n \|_{\mathcal{H}} d\tau.$$

По теореме Лебега (о дифференцировании интеграла от суммируемой функции по верхнему пределу) функция  $H_n(t)$  дифференцируема почти всюду: существует измеримое множество  $B_n \subset [0, T]$  такое, что  $\operatorname{mes} B_n = 0$  и при  $t \in [0, T] \setminus B_n$  выполнено

$$\frac{dH_n(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \| -A(\tau)u(\tau) + f(\tau) - h_n \|_{\mathcal{H}} d\tau = \| -A(t)u(t) + f(t) - h_n \|_{\mathcal{H}}. \quad (7.8)$$

Положим  $B := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ . Тогда  $\text{mes } B = 0$ . Для произвольного  $h \in \mathcal{H}$  и  $t \in [0, T] \setminus B$  имеем:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \| -A(\tau)u(\tau) + f(\tau) - h \|_{\mathcal{H}} d\tau - \| -A(t)u(t) + f(t) - h \|_{\mathcal{H}} \right| \\
& \leq \left| \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} (\| -A(\tau)u(\tau) + f(\tau) - h \|_{\mathcal{H}} - \| -A(\tau)u(\tau) + f(\tau) - h_n \|_{\mathcal{H}}) d\tau \right| \\
& + \left| \| -A(t)u(t) + f(t) - h \|_{\mathcal{H}} - \| -A(t)u(t) + f(t) - h_n \|_{\mathcal{H}} \right| \\
& + \left| \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \| -A(\tau)u(\tau) + f(\tau) - h_n \|_{\mathcal{H}} d\tau - \| -A(t)u(t) + f(t) - h_n \|_{\mathcal{H}} \right| \\
& \leq 2\|h - h_n\|_{\mathcal{H}} + \left| \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \| -A(\tau)u(\tau) + f(\tau) - h_n \|_{\mathcal{H}} d\tau - \| -A(t)u(t) + f(t) - h_n \|_{\mathcal{H}} \right|.
\end{aligned} \tag{7.9}$$

Мы воспользовались неравенством треугольника (для чисел), а затем неравенством вида  $\|a\| - \|b\| \leq \|a - b\|$ . Зададимся числом  $\varepsilon > 0$ . В силу плотности множества  $\mathcal{L}$  для данного  $h \in \mathcal{H}$  найдется элемент  $h_n$  такой, что  $2\|h - h_n\|_{\mathcal{H}} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Теперь фиксируем  $n$ . В силу (7.8) при каждом  $t \in [0, T] \setminus B$  найдется число  $\delta = \delta(h, t, \varepsilon)$  такое, что последний член в (7.9) меньше  $\varepsilon/2$  при  $|\Delta t| < \delta$ .

В итоге мы доказали, что при  $t \in [0, T] \setminus B$  и при всех  $h \in \mathcal{H}$  выполнено

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \| -A(\tau)u(\tau) + f(\tau) - h \|_{\mathcal{H}} d\tau = \| -A(t)u(t) + f(t) - h \|_{\mathcal{H}}.$$

Выбирая здесь  $h = -A(t)u(t) + f(t)$  (при фиксированном  $t \in [0, T] \setminus B$ ) получаем

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \| -A(\tau)u(\tau) + f(\tau) - (-A(t)u(t) + f(t)) \|_{\mathcal{H}} d\tau = 0. \tag{7.10}$$

Рассмотрим теперь величину под знаком предела в (7.7). Имеем:

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} - (-A(t)u(t) + f(t)) \right\|_{\mathcal{H}} \\
& = \sup_{v \in \mathcal{H}: \|v\|=1} \left| \frac{1}{\Delta t} (u(t + \Delta t) - u(t), v)_{\mathcal{H}} - (-A(t)u(t) + f(t), v)_{\mathcal{H}} \right| \\
& = \sup_{v \in \mathcal{H}: \|v\|=1} \left| \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} (-A(\tau)u(\tau) + f(\tau), v)_{\mathcal{H}} d\tau - \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} (-A(t)u(t) + f(t), v)_{\mathcal{H}} d\tau \right|.
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Мы воспользовались тем, что  $u(t)$  — слабое решение задачи (7.5). Из (7.11) следует оценка

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} - (-A(t)u(t) + f(t)) \right\|_{\mathcal{H}} \\
& \leq \left| \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \| -A(\tau)u(\tau) + f(\tau) - (-A(t)u(t) + f(t)) \|_{\mathcal{H}} d\tau \right|.
\end{aligned}$$

Отсюда с учетом (7.10) вытекает искомое соотношение (7.7).  $\square$

Установим теперь существование решения.

**Теорема 7.7.** Пусть выполнено условие (7.4). Тогда при любых  $\varphi \in \mathcal{H}$  и  $f \in L_1((0, T); \mathcal{H})$  существует решение задачи (7.5), удовлетворяющее оценке

$$\|u\|_{C([0, T]; \mathcal{H})} \leq \exp(T\|A(\cdot)\|_{\infty}) (\|\varphi\|_{\mathcal{H}} + \|f\|_{L_1((0, T); \mathcal{H})}). \tag{7.12}$$

*Доказательство.* В банаховом пространстве  $C([0, T]; \mathcal{H})$  рассмотрим оператор  $L$ , заданный соотношением

$$(Lu)(t) = \int_0^t A(\tau)u(\tau) d\tau.$$

Очевидно,

$$\|(Lu)(t)\|_{\mathcal{H}} \leq T\|A(\cdot)\|_{\infty}\|u\|_{C([0, T]; \mathcal{H})}, \quad t \in [0, T].$$

Далее, имеем

$$\|(Lu)(t_2) - (Lu)(t_1)\|_{\mathcal{H}} \leq |t_2 - t_1|\|A(\cdot)\|_{\infty}\|u\|_{C([0, T]; \mathcal{H})}.$$

Следовательно, функция  $(Lu)(t)$  липшицева по  $t \in [0, T]$  со значениями в  $\mathcal{H}$ . Таким образом,  $L$  — непрерывный оператор в  $C([0, T]; \mathcal{H})$ , причем

$$\|L\|_{C([0, T]; \mathcal{H}) \rightarrow C([0, T]; \mathcal{H})} \leq T\|A(\cdot)\|_{\infty}.$$

Рассмотрим оператор  $L^n$ :

$$(L^n u)(t) = \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_0^{\tau_{n-1}} d\tau_n A(\tau_1)A(\tau_2) \cdots A(\tau_n)u(\tau_n).$$

Очевидно, справедлива оценка

$$\|(L^n u)(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \|A(\cdot)\|_{\infty}^n \|u\|_{C([0, T]; \mathcal{H})} \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_0^{\tau_{n-1}} d\tau_n = \frac{t^n}{n!} \|A(\cdot)\|_{\infty}^n \|u\|_{C([0, T]; \mathcal{H})}$$

при всех  $t \in (0, T)$ , откуда получаем

$$\|L^n\|_{C([0, T]; \mathcal{H}) \rightarrow C([0, T]; \mathcal{H})} \leq \frac{T^n}{n!} \|A(\cdot)\|_{\infty}^n.$$

Следовательно, ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L^n$  сходится по операторной норме, его сумма есть  $(I + L)^{-1}$ , причем выполнена оценка

$$\|(I + L)^{-1}\|_{C([0, T]; \mathcal{H}) \rightarrow C([0, T]; \mathcal{H})} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \|A(\cdot)\|_{\infty}^n = \exp(T\|A(\cdot)\|_{\infty}). \quad (7.13)$$

Нетрудно видеть, что задача (7.5) равносильна уравнению

$$u(t) = \varphi - (Lu)(t) + F(t), \quad t \in [0, T],$$

где

$$F(t) := \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

Отметим, что  $F \in C([0, T]; \mathcal{H})$  в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега. Тем самым, задача (7.5) равносильна уравнению

$$(I + L)u = \varphi + F$$

для искомой функции  $u \in C([0, T]; \mathcal{H})$ . Это уравнение имеет решение  $u = (I + L)^{-1}(\varphi + F)$ . Оценка (7.12) вытекает из (7.13).  $\square$

**Теорема 7.8.** Пусть выполнено условие (7.4). Тогда решение задачи (7.5) единственно.

*Доказательство.* Пусть  $u$  и  $\tilde{u}$  — решения задачи (7.5) с одними и теми же  $\varphi$  и  $f(t)$ . Тогда  $u - \tilde{u}$  является решением задачи

$$\frac{d(u(t) - \tilde{u}(t))}{dt} = -A(t)(u(t) - \tilde{u}(t)), \quad u(0) - \tilde{u}(0) = 0. \quad (7.14)$$

Задача (7.14) эквивалентна уравнению

$$u(t) - \tilde{u}(t) = -(L(u - \tilde{u}))(t).$$

Это уравнение имеет только нулевое решение ввиду существования резольвенты  $(I + L)^{-1}$ .  $\square$

Установим теперь свойства решения задачи (7.5) при различных условиях на  $f(t)$ .

**Лемма 7.9.** Пусть выполнено условие (7.4). Пусть  $u \in C([0, T]; \mathcal{H})$  — решение задачи (7.5).

1°. Если  $f \in L_\infty((0, T); \mathcal{H})$ , то функция  $u$  является липшицевой по  $t \in [0, T]$  со значениями в  $\mathcal{H}$ .

2°. Если  $f \in L_q((0, T); \mathcal{H})$ ,  $1 < q < \infty$ , то функция  $u$  является гёльдеровской класса  $C^{1/q'}$  по  $t \in [0, T]$  со значениями в  $\mathcal{H}$ . Здесь  $1/q + 1/q' = 1$ .

*Доказательство.* Пусть  $v \in \mathcal{H}$  и  $t_1, t_2 \in [0, T]$ ,  $t_1 < t_2$ . Проинтегрируем уравнение из (7.6) по интервалу  $(t_1, t_2)$ :

$$(u(t_2), v)_{\mathcal{H}} - (u(t_1), v)_{\mathcal{H}} = \int_{t_1}^{t_2} (-A(t)u(t) + f(t), v)_{\mathcal{H}} dt.$$

Следовательно,

$$|(u(t_2) - u(t_1), v)_{\mathcal{H}}| \leq \left( |t_2 - t_1| \|A(\cdot)\|_{\infty} \|u\|_{C([0, T]; \mathcal{H})} + \int_{t_1}^{t_2} \|f(t)\|_{\mathcal{H}} dt \right) \|v\|_{\mathcal{H}}.$$

Поскольку это неравенство выполнено для произвольного  $v \in \mathcal{H}$ , получаем

$$\|u(t_2) - u(t_1)\|_{\mathcal{H}} \leq |t_2 - t_1| \|A(\cdot)\|_{\infty} \|u\|_{C([0, T]; \mathcal{H})} + \int_{t_1}^{t_2} \|f(t)\|_{\mathcal{H}} dt.$$

Поскольку в силу неравенства Гёльдера

$$\int_{t_1}^{t_2} \|f(t)\|_{\mathcal{H}} dt \leq |t_2 - t_1|^{1/q'} \|f\|_{L_q((0, T); \mathcal{H})}, \quad 1 < q \leq \infty,$$

отсюда следуют все утверждения леммы.  $\square$

Объединяя леммы 7.6, 7.9 и теоремы 7.7, 7.8, приходим к окончательному результату.

**Теорема 7.10.** Пусть выполнено условие (7.4). Тогда при любых  $\varphi \in \mathcal{H}$  и  $f \in L_1((0, T); \mathcal{H})$  существует единственное решение  $u \in C([0, T]; \mathcal{H})$  задачи (7.5). При почти всех  $t \in [0, T]$  решение  $u(t)$  имеет классическую производную, причем  $\frac{du(t)}{dt} \in L_1((0, T); \mathcal{H})$  и выполнено уравнение из (7.5). Справедлива оценка (7.12). Если  $f \in L_\infty((0, T); \mathcal{H})$ , то  $u \in \text{Lip}([0, T]; \mathcal{H})$ . Если  $f \in L_q((0, T); \mathcal{H})$ ,  $1 < q < \infty$ , то  $u \in C^{1/q'}([0, T]; \mathcal{H})$ . Здесь  $1/q + 1/q' = 1$ .

Предположим теперь дополнительно, что при всех  $t \in [0, T]$  оператор  $A(t)$  неотрицателен:

$$a(t)[u, u] := (A(t)u, u)_{\mathcal{H}} \geq 0, \quad u \in \mathcal{H}. \quad (7.15)$$

**Лемма 7.11.** Пусть выполнены условия (7.4) и (7.15). Пусть  $u$  — решение задачи (7.5) при  $f(t) = 0$ . Тогда  $\|u(t)\|_{\mathcal{H}}^2$  является монотонно невозрастающей абсолютно непрерывной функцией от  $t \in [0, T]$ . В частности, выполнено неравенство

$$\|u(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{H}}, \quad t \in [0, T].$$

*Доказательство.* Домножая уравнение в (7.5) (при  $f(t) = 0$ ) скалярно на  $u(t)$ , при почти всех  $t \in (0, T)$  получаем

$$\begin{aligned}\left(\frac{du(t)}{dt}, u(t)\right)_{\mathcal{H}} &= -a(t)[u(t), u(t)], \\ \left(u(t), \frac{du(t)}{dt}\right)_{\mathcal{H}} &= -a(t)[u(t), u(t)].\end{aligned}$$

С учетом условия (7.15) отсюда следует, что при почти всех  $t \in (0, T)$  выполнено

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{\mathcal{H}}^2 = \left(\frac{du(t)}{dt}, u(t)\right)_{\mathcal{H}} + \left(u(t), \frac{du(t)}{dt}\right)_{\mathcal{H}} = -2a(t)[u(t), u(t)] \leq 0.$$

□

**Замечание 7.12.** Если выполнены условия (7.4) и (7.15), а оператор  $A(t)$  задан при всех  $t \in \mathbb{R}_+$ , причем  $A(\cdot) \in L_{\infty}(\mathbb{R}_+; \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ , то решение задачи (7.5) при  $f(t) = 0$  существует на любом промежутке  $[0, T]$ , а тогда и на  $\mathbb{R}_+$ . При этом

$$\|u(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{H}}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.
- [2] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publishing Co., Amsterdam–New York, 1978.
- [3] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), вып. 5, 1–108.
- [4] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учётом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), вып. 6, 1–104.
- [5] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учётом корректора. Приближение решений в классе Соболева  $H^1(\mathbb{R}^d)$* , Алгебра и анализ **18** (2006), вып. 6, 1–130.
- [6] Braides A., Piatnitski A., *Homogenization of quadratic convolution energies in periodically perforated domains*, Adv. Calc. Var. (2019), <https://doi.org/10.1515/acv-2019-0083>.
- [7] Chen X., Chen Z.-Q., Kumagai T., Wang J., *Periodic homogenization of nonsymmetric Lévy-type processes*, Ann. Probab. **49** (2021), no. 6, 2874–2921.
- [8] Geng J., Shen Z., *Convergence rates in parabolic homogenization with time-dependent periodic coefficients*, J. Funct. Anal. **272** (2017), 2092–2113.
- [9] Geng J., Shen Z., *Homogenization of parabolic equations with non-self-similar scales*, Arch. Ration. Mech. Anal. **236** (2020), 145–188.
- [10] Жиков В. В., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Докл. РАН **403** (2005), вып. 3, 305–308.
- [11] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1993.
- [12] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys. **12** (2005), no. 4, 515–524.
- [13] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients*, Russ. J. Math. Phys. **13** (2006), no. 2, 224–237.
- [14] Жиков В. В., Пастухова С. Е., *Операторные оценки в теории усреднения*, Успехи матем. наук **71** (2016), вып. 3, 27–122.
- [15] Kassmann M., Piatnitski A., Zhizhina E., *Homogenization of Lévy type operators with oscillating coefficients*, SIAM J. Math. Anal. **51** (2019), 3641–3665.
- [16] Kondratiev Yu., Molchanov S., Pirogov S., Zhizhina E., *On ground state of some non local Schrödinger operators*, Appl. Anal. **96** (2017), no. 8, 1390–1400.
- [17] Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С., *Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред*, Изд-во МГУ, М., 1990.
- [18] Piatnitski A., Zhizhina E., *Periodic homogenization of nonlocal operators with a convolution-type kernel*, SIAM J. Math. Anal. **49** (2017), no. 1, 64–81.
- [19] Piatnitski A., Zhizhina E., *Homogenization of biased convolution type operators*, Asymptotic Anal. **115** (2019), no. 3–4, 241–262.
- [20] Piatnitski A., Zhizhina E., *Homogenization of non-autonomous operators of convolution type in periodic media*, Markov Processes Relat. Fields **29** (2023), 173–188.
- [21] Piatnitski A., Sloushch V., Suslina T., Zhizhina E., *On operator estimates in homogenization of nonlocal operators of convolution type*, J. Diff. Equ. **352** (2023), 153–188.

- [22] Piatnitski A., Sloushch V., Suslina T., Zhizhina E., *On homogenization of nonlocal convolution type operators*, Russian J. Math. Phys. **31** (2024), no. 1, 137–145.
- [23] Piatnitski A., Sloushch V., Suslina T., Zhizhina E., *Homogenization of nonlocal convolution type operators: Approximation for the resolvent with corrector*, in: Friends in Partial Differential Equations. The Nina N. Uraltseva Anniversary Volume, EMS Press, 2025, p. 291–336. DOI: 10.4171/NNU90/12.
- [24] Piatnitski A., Sloushch V., Suslina T., Zhizhina E., *Homogenization of non-symmetric convolution type operators*, arXiv:2506.07176.
- [25] Piatnitski A., Sloushch V., Suslina T., Zhizhina E., *Operator estimates in homogenization of Lévy-type operators with periodic coefficients*, SIAM J. Math. Anal., to appear. Available from arXiv:2412.20408.
- [26] Жижина Е., Пятницкий А., Слоущ В., Суслина Т. *Усреднение периодических операторов типа Леви*, Функци. анализ и его прил. **59** (2025), вып. 3, 41–48.
- [27] Piatnitski A., Sloushch V., Suslina T., Zhizhina E., *Homogenization of Lévy-type operators: operator estimates with correctors*, arXiv:2601.06832.
- [28] Скриганов М. М., *Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов*, Тр. МИАН СССР **171** (1985), 3–122.
- [29] Суслина Т. А., *Об усреднении периодических параболических систем*, Функци. анализ и его прил. **38** (2004), вып. 4, 86–90.
- [30] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem*, Amer. Math. Soc. Transl. (2), vol. **220**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 201–233.
- [31] Суслина Т. А., *Теоретико-операторный подход к усреднению уравнений типа Шрёдингера с периодическими коэффициентами*, Успехи матем. наук **78** (2023), вып. 6, 47–178.