

Аспекты ренормировки теории Янга–Миллса с обрезанием

А. В. Иванов[†] Н. В. Харук^{2⁵}

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А.Стеклова РАН,
Фонтанка 27, Санкт-Петербург, 191023, Россия

[†]E-mail: regul1@mail.ru ^{2⁵}E-mail: natakharuk@mail.ru

05 мая 2026 г.

К 10-летию «Сценария»¹

Аннотация. В работе рассматриваются вопросы перенормируемости квантовой четырехмерной теории Янга–Миллса с регуляризацией обрезанием в координатном представлении. Для формулировки производящего функционала используется метод фонового поля, а регуляризация вводится посредством квазилокального вероятностного усреднения. Предлагаются два основных варианта регуляризации: сильная деформация, заключающаяся в усреднении полей флуктуации, и слабая деформация, представляющая собой ковариантное относительно калибровочных преобразований фонового поля обобщение первого случая. В работе изучаются сингулярные вклады для первых двух квантовых поправок, проводится их детальное сравнение со случаем размерной регуляризации. Анализируется согласованность действия и уравнения движения после введения регуляризации и выполнения процедуры перенормировки, исследуются новые контрвершины, в частности, их свойства локальности и зависимость от регуляризующего параметра.

Ключевые слова и фразы: две петли, регуляризация обрезанием, размерная регуляризация, ренормировка, деформация, функция Грина, усреднение, теория Янга–Миллса, квантовое действие, эффективное действие, расходимость, квантовое уравнение, сингулярность.

¹Смотреть работы [79, 80] в списке литературы.

ПРЕПРИНТЫ

Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS

of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

М. А. Всемиров, А. И. Генералов,
И. А. Ибрагимов, Л. Ю. Колотилина, Ю. В. Матиясевич,
Н. Ю. Нецветаев, С. И. Репин, Г. А. Серегин

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В.А.Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:
ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г.
Выдано Федеральной службой по надзору
в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные:

191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27
телефоны: (812) 312-40-58; (812) 571-57-54
e-mail: admin@pdmi.ras.ru
<https://www.pdmi.ras.ru/preprint/>

Заведующая информационно-издательским сектором В. Н. Симонова

Содержание

1	Введение	4
2	Общие определения	7
3	Квантовое действие	10
4	Сильная деформация	11
4.1	Мотивировка	11
4.2	Регуляризация	13
4.3	Выбор калибровки	15
4.4	Ренормировка действия	17
4.5	Ренормировка около диагонали	18
4.6	Что вычисляем?	20
4.7	Результаты	21
5	Слабая деформация	24
5.1	Общие соображения	24
5.2	Регуляризация	25
5.3	Ситуация около диагонали	27
5.4	Что вычисляем?	28
5.5	Результаты	28
5.6	А что, если так?	30
6	Одна петля: сильный случай	31
6.1	Скалярный оператор	31
6.2	Векторный оператор	35
7	Две петли: сильный случай	36
7.1	Разложение функции Грина	36
7.2	Сингулярные операторы	38
7.3	Нелокальная часть	39
7.3.1	Вклады $G_{\text{loc}}G_{\text{loc}}PS_i$ для $\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2)$	40
7.3.2	Вклад $G_{\text{loc}}\mathcal{N}PS_1$ для $\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2)$	41
7.3.3	Вклады для $\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Omega_3^2)$	42
7.3.4	Вклады для $\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_4)$	43
7.4	Локальная часть	44
7.4.1	Вклад $G_{\text{loc}}\mathcal{N}\mathcal{N}$ для $\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2)$	44
7.4.2	Вклад $G_{\text{loc}}G_{\text{loc}}\mathcal{N}$ для $\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2)$	45
7.4.3	Вклад $G_{\text{loc}}G_{\text{loc}}\mathcal{L}$ для $\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2)$	46
7.4.4	Вклад $G_{\text{loc}}G_{\text{loc}}G_{\text{loc}}$ для $\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2)$	47
7.4.5	Вклады для $\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Omega_3^2)$	48
7.4.6	Вклады для $\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_4)$	48
7.5	Контрдиаграммы	49
7.6	Разложение локальных вкладов	50
7.7	Сингулярная часть: сумма вкладов	51
7.8	Вспомогательные соотношения	52

8 Две петли: слабый случай	56
8.1 Разложение функции Грина	56
8.2 Адаптация вычислений	57
8.3 Ответы для диаграмм	59
8.4 Сравнение вкладов $G_{\text{loc}}G_{\text{loc}}\mathcal{N}$	60
8.5 Сравнение с размерной регуляризацией	61
9 О ренормировке массы	65
10 О квазилокальных вершинах	67
11 Заключение	69
11.1 Сводка результатов	69
11.2 Комментарии	70
11.3 Благодарности	70
12 Список литературы	71

1 Введение

Понятие «расходимость» неразрывно связано с большинством квантово-полевых моделей, изучающихся при помощи пертурбативных методов [1, 2], то есть с использованием разложения по некоторому малому параметру. Оно возникло при попытках построения квантовой электродинамики порядка 80 лет назад [3, 4] и на данный момент, не теряя своей актуальности, встречается² во многих задачах теоретической и математической физики. Для примера можно упомянуть классическую теорию обобщенных функций [5, 6], вопросы функториальной квантовой теории поля [7–10], теорию представлений групп и алгебр Ли [11, 12], специальные функции [13, 14], вопросы построения функционального интеграла [15–18], а также интегрируемые модели [19].

Согласно стандартной теории, см. [20–22], расходимости необходимо регуляризовать, то есть деформировать классическое действие модели введением вспомогательного параметра³ Λ таким образом, чтобы расходимости превратились в сингулярные функции относительно Λ . Такие функции принято называть сингулярностями. Оказывается, что пертурбативные разложения для некоторых теорий содержат сингулярности, подчиняющиеся набору дополнительных соотношений, которые позволяют сократить, или вычесть, их домножением параметров и полей теории на специальные константы, см. для примера [23]. Такие теории называются перенормируемыми, а процесс нахождения коэффициентов для констант называется процессом мультипликативной перенормировки (ренормировки).

Класс применяемых на практике регуляризаций не очень широк, поскольку ограничен не только желанием сохранить те или иные внутренние симметрии теории, но и возможностью проводить многопетлевые⁴ расчеты. Среди наиболее популярных вариантов можно отметить следующие подходы: размерная регуляризация [24, 25], регуляризация высшими ковариантными производными [26–29], неявная [30–32], регуляризации Фейнмана [33, 34] и Паули–Вилларса [35], регуляризация обрезанием [36–41]. Все перечисленные методы обладают как преимуществами, так и некоторыми недостатками. К примеру, размерная регуляризация является основным инструментом при многопетлевых подсчетах, хотя и строится через деформацию размерности, что приводит к ряду открытых вопросов. В свою очередь, регуляризация высшими производными нашла свое применение в суперсимметричных теориях. Тем не менее, операторы более высокого порядка хуже изучены, и для таких ситуаций не всегда очевидна корректность постановки, не говоря уже о спектральных свойствах.

²Речь идет о сингулярных функционалах и вопросах, связанных с их определением.

³Для определенности будем обозначать параметр регуляризации символом Λ , так как это обозначение является стандартным при использовании обрезания. Предел снятия регуляризации достигается переходом $\Lambda \rightarrow +\infty$.

⁴Поправочные слагаемые высокого порядка.

Далее, регуляризация обрезанием хотя и является прозрачной с точки зрения построения и смысла, она может нарушать важные внутренние симметрии модели, к примеру, калибровочную.

К сожалению, возможность проведения перенормировочной процедуры может зависеть не только от выбора конкретной модели, но и от вида регуляризации. В качестве примера можно привести двумерную модель главного кирального поля, см. [42–44]. Она является перенормируемой в стандартном смысле в случае размерной регуляризации, однако при использовании обрезания сталкивается с необходимостью вводить вспомогательные контрвершины. В первую очередь это связано с тем фактом, что δ -функционал заменяется сглаженной функцией, которая уже не позволяет вычитать все подрасходимости при помощи стандартной \mathcal{R} -операции, см. аналогичные рассуждения на эту тему в [45, 46]. Такое положение дел ведет либо к расширению (обобщению) классического действия, как это, к примеру, было сделано в теории со взаимодействием Юкавы, см. [47–49] или задачу 10.2 в [4], либо к расширению⁵ понятия перенормируемости. Другими популярными примерами перенормируемых теорий в рамках использования размерной регуляризации являются четырехмерная квантовая модель Янга–Миллса [50, 51], а также различные скалярные модели⁶ $\{\phi_3^6, \phi_4^4, \phi_6^3\}$, см. [52, 53].

Данная работа посвящена изучению специальной регуляризации обрезанием в координатном представлении и ее ковариантного обобщения на примере четырехмерной теории Янга–Миллса, см. также [54, 55]. Такой подход был заложен в работе [56] и с тех пор значительно развит и улучшен. Помимо ряда особенностей математического характера, таких как спектральное разложение [57], связь с оператором усреднения [58–60] и согласованность относительно процесса склейки статистических сумм [61], также были изучены новые свойства, связанные с приложением к конкретным моделям. К примеру, были вычислены четырехпетлевые поправки для ϕ_3^6 , см. [62, 63], трехпетлевые для ϕ_4^4 и ϕ_5^3 , см. [64, 65], двухпетлевые⁷ для четырехмерной теории Янга–Миллса, см. [67, 68], а также изучена трехпетлевая структура сингулярностей для двумерной модели главного кирального поля, см. [44]. Стоит отметить, что в отличие от сигма-модели, где дополнительные нелокальные сингулярности привели к необходимости расширять понятие ренормировки, скалярные модели полностью уложились в стандартную парадигму. Такое положение дел привело к желанию не только более детально изучить зависимость квантового действия четырехмерной теории Янга–Миллса от обрезания в координатном представлении, но и обобщить регуляризацию, сделав ее ковариантной относительно калибровочных преобразований фонового поля.

Здесь стоит сделать важное замечание касательно истории развития более общего класса регуляризаций (деформаций). Дело в том, что введение усредняющего оператора в главном порядке можно переформулировать либо при помощи применения некоторой операторной функции $F(\cdot)$, в аргументе которой находится оператор Лапласа, либо при помощи домножения спектра на специальную регуляризующую функцию $\rho(\cdot)$. При этом семейство таких функций имеет достаточно специальный вид, см. [57]. В то же время, класс функций можно существенно расширить. В этом случае квазилокальность будет утеряна, и теория станет нелокальной. В качестве примеров можно привести «sharp» обрезание в импульсном представлении, которое возникло при изучении функциональной ренормализационной группы [69–71], или же различные виды экспоненциальных функций, см. для примера [72, 73]. Отметим, что подход с применением нелокальных теорий используется при изучении различных аспектов «квантовой» гравитации [74, 75] и стохастической квантовой механики [76]. При этом его систематическое изучение было заложено достаточно давно, см. для примера [77, 78]. Тем не менее квазилокальные деформации, являющиеся ключевым объектом данной работы, в контексте перенормировки ранее не изучались.

Порядка десяти лет назад вышли две работы, см. [79, 80], посвященные сценарию перенормировки четырехмерной квантовой теории Янга–Миллса. В них рассматривалась «комбинаторика» логарифмических особенностей⁸ $L = \ln(\Lambda/\mu)$ во всех квантовых поправках и соответствующее ре-

⁵То есть к ослаблению условий перенормируемости. Например, это может заключаться в разрешении добавлять определенный класс контрвершин.

⁶Здесь нижний индекс обозначает размерность пространства, а верхний – максимальную степень поля во взаимодействии.

⁷А также некоторые части из третьей поправки, см. [66].

⁸Здесь $\Lambda \gg 1$ – размерный параметр регуляризации, а $\mu > 0$ – вспомогательный конечный фиксированный параметр. Величина L является аналогом $1/\varepsilon$ в случае размерной регуляризации.

шение уравнения Гелл-Манна–Лоу, см. для справки [81]. Поскольку на тот момент не было подходящей регуляризации обрезанием, за основу распределения сингулярностей был взят вариант для случая с размерной регуляризацией, см. [82], секцию 6 в [22], а также некоторые вопросы ресуммирования в [83, 84]. Важно отметить, что ранее производились попытки вычисления двухпетлевых квантовых поправок в случае обрезания, см. [85, 86], а также исследовались вопросы, связанные с нарушением калибровочной симметрии, см. [37–39, 87], и вариантами ее восстановления [88, 89]. К сожалению, задача обобщения на случай большого числа петель выглядела непреодолимой, равно как и не была ясна их связь с фоновыми полями и квантовым уравнением движения. Также следует заметить, что подход с решением рекуррентных соотношений, использованный в [80, 82], является весьма полезным инструментом и встречается в ряде недавних работ [90–92], посвященных изучению ренормализационной группы.

Данная работа является продолжением двух статей [67, 68], которые, в свою очередь, рассматривались авторами как дополнение «сценария» рядом важных примеров по введению регуляризаций обрезанием и набором явных вычислений. В них проводится анализ двухпетлевого приближения для квантового действия и однопетлевого приближения для квантового уравнения движения для семейства регуляризаций обрезанием в рамках использования метода фонового поля, см. [93–97]. Также производится детальное сравнение с известными аналогичными вычислениями для размерной регуляризации [98]. Тем не менее в этих двух работах не были освещены важные вопросы, связанные с взаимодействием процессов перенормировки действия и уравнения, ковариантностью относительно калибровочных преобразований фонового поля, структурой сингулярностей и контрвершин, а также выбором анзатца для функции Грина при многопетлевых подсчетах. Именно этим вопросам и посвящена данная статья. В качестве основных результатов можно перечислить следующие пункты.

▷ Предложен вариант «сильной» деформации теории Янга–Миллса, которая сохраняет функциональную связь эффективного действия и квантового уравнения движения. В рамках данного подхода был решен следующий ряд задач.

1. Изложен процесс ренормировки действия около диагонали⁹ в рамках подхода Фаддеева¹⁰.
2. Вычислены первые два коэффициента β -функции.
3. Вычислены степенные сингулярности в первых двух поправках.
4. Вычислены сингулярности в первой петле для первой вариации квантового действия по «калибровочному условию» на диагонали.
5. Найдены контрвершины в первых двух петлях в рамках расширенного процесса перенормировки, допускающего появление слагаемых со степенными сингулярностями.
6. Показан процесс расщепления¹¹ классического действия на уровне второй поправки.

▷ Предложен вариант «слабой» деформации теории Янга–Миллса, которая является ковариантной относительно калибровочных преобразований фонового поля. В рамках данного подхода был решен следующий ряд задач.

1. Описан процесс ренормировки квантового действия при использовании подхода Фаддеева и зависимость от вспомогательного поля, входящего в оператор деформации.
2. Вычислены первые два коэффициента β -функции.
3. Показано отсутствие локальных слагаемых со степенными сингулярностями.
4. Найдена единственная контрвершина в рамках расширенного процесса перенормировки.

⁹Когда поле, отвечающее за фиксацию калибровочного условия, совпадает с фоновым.

¹⁰То есть когда фоновое поле, решающее квантовое уравнение движения, совпадает с полем из калибровочного условия. Для справки см. [99], версию на arXiv для [100] или секцию 4.3 ниже.

¹¹В данном случае означает, что некоторый части классического действия в рамках сильной деформации могут приобретать дополнительную константу перенормировки.

5. На уровне первой поправки показано, что сингулярные части не зависят от поля, входящего в оператор деформации. Также вычислены сингулярности для первой вариации на диагонали.
6. Проведено сравнение с размерной регуляризацией: определены мастер-интегралы и показано, что в случае обрезания деформируются сами интегралы, а в случае изменения размерности деформируются коэффициенты, с которыми они входят.
7. Проведено сравнение с «сильной деформацией».

▷ Рассмотрен вариант расширения классического действия добавлением массового параметра. Вычислены коэффициенты ренормировки для «слабого» случая в двух петлях и для «сильного» в первой поправке.

▷ На уровне второй поправки изучен вариант введения квазилокальных вершин, а также их влияние на коэффициенты β -функции.

▷ Предложен специальный подход, заключающийся в использовании «слабой» деформации квантового действия на диагонали без изучения остальных вариаций. Обсуждается вопрос многопетлевых подсчетов и построения действия вне диагонали.

Работа организована следующим образом. В **секции 2** изложены основные определения, связанные с классическим и квантовым действиями, пертурбативным разложением, определением вершин и операторов, а также с выбором калибровочного условия. В **секции 3** разбирается диаграммное представление для квантового действия, определяются элементарные блоки, а также варианты связности диаграмм. В **секции 4** обсуждается сильная деформация теории Янга–Миллса. Особое внимание уделяется не только процессу введения регуляризации, но и связи квантового действия и квантового уравнения движения. В этом же контексте рассматривается Фаддеевский подход к выбору фонового поля, а также процесс ренормировки с учетом сохранения связи действия и уравнения. В отдельных подсекциях описаны постановка задачи и результаты. **Секция 5** имеет аналогичную структуру, однако посвящена слабой деформации, которую можно считать ковариантным обобщением сильного случая. При этом **секция 5.6** посвящена обсуждению специального подхода, привлекательного с точки зрения многопетлевых подсчетов. В **секциях 6, 7 и 8** приведены одно- и двухпетлевые вычисления для представленных результатов. Затем в **секции 9** обсуждается вопрос расширения классического действия путем добавления массового слагаемого, а также его ренормировка в зависимости от вида деформации. Далее, в **секции 10**, обсуждаются плюсы и минусы появления квазилокальных вершин, а также их связь с полученными коэффициентами перенормировки. В **секции 11** представлены сводка результатов, комментарии, открытые вопросы и благодарности.

2 Общие определения

В данной работе изучается евклидов вариант теории Янга–Миллса [1] в плоском четырехмерном пространстве \mathbb{R}^4 . Элементы такого пространства будут обозначаться буквами $\{x, y, z\}$, а их отдельные компоненты будут выделяться греческими индексами¹². Например, x^μ или x_μ , где μ из $\{1, 2, 3, 4\}$. Ясно, что в данном случае метрический тензор воспроизводится символом Кронекера $\delta^{\mu\nu}$, поэтому $x^\mu = x_\mu$, и расположение индексов не всегда будет отслеживаться.

Пусть G обозначает компактную полупростую группу Ли, а символ \mathfrak{g} – соответствующую ей алгебру Ли, см. [101] для справки. При этом символами t^a , где $a \in \{1, \dots, \dim \mathfrak{g}\}$, обозначаются генераторы алгебры \mathfrak{g} . Без ограничения общности будем предполагать, что они удовлетворяют соотношениям

$$[t^a, t^b] = f^{abc} t^c, \quad \text{tr}(t^a t^b) = -2\delta^{ab}.$$

¹²В работе используется соглашение Эйнштейна, которое заключается в автоматическом суммировании по повторяющимся индексам.

Здесь квадратные скобки обозначают коммутатор, $\text{tr}(\cdot)$ – операция взятия следа, а коэффициенты f^{abc} являются полностью антисимметричными вещественными структурными константами, которые удовлетворяют¹³ условию нормировки и тождеству Якоби в виде

$$f^{abc}f^{abe} = c_2\delta^{ce}, \quad f^{acb}f^{bed}f^{dga} = -\frac{c_2}{2}f^{ceg}.$$

Константа c_2 является собственным значением оператора Казимира и зависит от выбора группы G . К примеру, для группы $\text{SU}(n)$ величина $c_2 = n$.

Гладким полем Янга–Миллса называется набор $\{A_\mu = A_\mu^a t^a\}_{\mu=1}^4$ элементов алгебры Ли \mathfrak{g} , коэффициенты A_μ^a которых принадлежат $C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$. В таком случае классическое действие для евклидовой версии теории Янга–Миллса определяется равенством¹⁴

$$S_{\text{cl}}[A] = \frac{1}{4g^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x F_{\mu\nu}^a[A] F_{\mu\nu}^a[A],$$

где тензор кривизны (напряженности), который при каждом фиксированных μ и ν формирует элемент $F_{\mu\nu}[A] = F_{\mu\nu}^a[A] t^a$ алгебры Ли \mathfrak{g} , определяется в локальных координатах соотношением

$$F_{\mu\nu}^a[A](x) = \partial_{x^\mu} A_\nu^a(x) - \partial_{x^\nu} A_\mu^a(x) + f^{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x).$$

Основным способом перехода к пертурбативному разложению в данной работе является метод¹⁵ фонового поля [93–97], который в общих чертах заключается в разложении на фоновое поле B_μ^a и поле флуктуации a_μ^a в виде $A_\mu^a = B_\mu^a + g a_\mu^a$. Такая подстановка приводит к декомпозиции классического действия в сумму конечного числа слагаемых

$$\begin{aligned} S_{\text{cl}}[B + ga] = & \frac{W_{-1}}{4g^2} + \frac{1}{g} \Gamma_1[a] + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x a_\mu^a M_{1\mu\nu}^{ab} a_\nu^b \\ & + g \Gamma_3[a] + \frac{g^2}{4} \Gamma_4[a] - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x (D_\mu^{ae} a_\mu^e) (D_\nu^{ab} a_\nu^b), \end{aligned} \quad (1)$$

где для удобства были использованы обозначения $W_{-1} \equiv W_{-1}[B] = 4g^2 S_{\text{cl}}[B]$ и $F_{\mu\nu}^a \equiv F_{\mu\nu}^a[B]$, определена ковариантная производная D_μ^{ab} , которая в локальных координатах принимает вид

$$D_\mu^{ab}(x) = \partial_{x^\mu} \delta^{ab} + f^{acb} B_\mu^c(x),$$

а также введены вспомогательные функционалы

$$\Gamma_1[a] = - \int_{\mathbb{R}^4} d^4x a_\nu^a D_\mu^{ab} F_{\mu\nu}^b, \quad (2)$$

$$\Gamma_3[a] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x (D_\mu^{ae} a_\nu^e) f^{abc} a_\mu^b a_\nu^c, \quad (3)$$

$$\Gamma_4[a] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x f^{abc} a_\mu^b a_\nu^c f^{aed} a_\mu^e a_\nu^d,$$

и операторы

$$M_0^{ab} = -D_\mu^{ac} D_\mu^{cb}, \quad M_{1\mu\nu}^{ab} = M_0^{ab} \delta_{\mu\nu} - 2f^{acb} F_{\mu\nu}^c. \quad (4)$$

Можно заметить, что нижний индекс в Γ -функционалах соответствует степени поля флуктуации. При этом Γ_1 и Γ_3 также зависят и от фонового поля B_μ .

Согласно общей теории [1], при переходе к квантовому случаю классическое действие Янга–Миллса должно быть дополнено слагаемым S_{gf} , фиксирующим калибровку, а также слагаемым

¹³Фактически, структурные константы могут быть выбраны в качестве новых генераторов алгебры \mathfrak{g} . Такое представление называется присоединенным.

¹⁴Здесь подразумевается, что поля убывают на бесконечности достаточно быстро, так что интеграл сходится.

¹⁵См. также [102–104] для примера использования метода в случае 0D моделей и многомерных интегралов.

Фаддеева–Попова S_g , отвечающим ду́ховым полям $c = c^a t^a$ и $\bar{c} = \bar{c}^a t^a$, см. [105]. Для этого сперва нужно определиться с видом калибровочного условия. Выберем его следующим образом

$$(\partial_{x^\mu} \delta^{ac} + f^{adc} e_\mu^d(x)) a_\mu^c(x) = \mathfrak{D}_\mu^a(x) a_\mu^c(x) = 0, \quad (5)$$

где $e_\mu = e_\mu^a t^a$ является элементом из \mathfrak{g} с гладкими коэффициентами. Его явный вид на данный момент не важен и будет фиксирован в следующих секциях. Тогда, пользуясь представлением из работы [100], добавки к классическому действию принимают вид¹⁶

$$\begin{aligned} S_{\text{gf}}[a, e] &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x (\mathfrak{D}_\mu^{ae} a_\mu^e) (\mathfrak{D}_\nu^{ab} a_\nu^b), \\ S_g[B, a, c, \bar{c}, e] &= \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \bar{c}^a \mathfrak{M}_0^{ab} c^b + g \Omega_3, \end{aligned} \quad (6)$$

где вспомогательный функционал и операторы имеют вид

$$\begin{aligned} \Omega_3[a, c, \bar{c}, e] &= \int_{\mathbb{R}^4} d^4x (\mathfrak{D}_\mu^{ab} \bar{c}^b) f^{aed} a_\mu^e c^d, \\ \mathfrak{M}_0^{ab}(x) &= -\mathfrak{D}_\mu^{ae}(x) D_\mu^{eb}(x), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\mathfrak{M}_{1\mu\nu}^{ab}(x) = M_{1\mu\nu}^{ab}(x) + D_\mu^{ae}(x) D_\nu^{eb}(x) - \mathfrak{D}_\mu^{ae}(x) \mathfrak{D}_\nu^{eb}(x). \quad (8)$$

Учитывая все конструкции, представленные выше, квантовое действие $W[B, e]$ для евклидовой версии теории Янга–Миллса с калибровочным условием¹⁷ (5) в символическом виде можно выписать при помощи функционального интеграла

$$\exp \left(-W[B, e] \right) = \int_{\mathcal{H}} \mathcal{D}a \mathcal{D}' \bar{c} \mathcal{D}' c \exp \left(-S_{\text{tot}}[B, e] \right), \quad (9)$$

где

$$S_{\text{tot}}[B, e] \equiv S_{\text{tot}}[B, e; a, c, \bar{c}, g] = S_{\text{cl}}[B + ga] + S_{\text{gf}}[a, e] + S_g[B, a, c, \bar{c}, e]. \quad (10)$$

Для удобства в дальнейшем переменные интегрирования будут как правило опускаться. В формуле (9) символ \mathcal{H} условно обозначает «область» интегрирования, функции в которой имеют заданное поведение при больших значениях аргумента. Известно, см. [1, 67, 100], что такой объект можно определить в виде пертурбативного разложения по константе связи путем выполнения гауссовых интегрирований полиномов. Для этих целей и дальнейших формулировок необходимы обратные операторы, то есть функции Грина, для упомянутых операторов Лапласа. Поэтому в заключение данной секции введем эти функции

$$M_0^{ac}(x) G_0^{cb}(x, y) = \delta^{ab} \delta(x - y), \quad \mathfrak{M}_0^{ac}(x) \mathfrak{G}_0^{cb}(x, y) = \delta^{ab} \delta(x - y), \quad (11)$$

$$M_{1\mu\sigma}^{ab}(x) G_{1\sigma\nu}^{cb}(x, y) = \delta^{ab} \delta_{\mu\nu} \delta(x - y), \quad \mathfrak{M}_{1\mu\sigma}^{ab}(x) \mathfrak{G}_{1\sigma\nu}^{cb}(x, y) = \delta^{ab} \delta_{\mu\nu} \delta(x - y). \quad (12)$$

Ясно, что функции Грина однозначно фиксируются выбором подходящих граничных условий, которые необходимо находить из физических соображений. Далее будем подразумевать, что задача корректно поставлена. Заметим также, что при $e_\mu = B_\mu$ получаем $\mathfrak{M}_0 = M_0$ и $\mathfrak{M}_1 = M_1$, а также $\mathfrak{G}_0 = G_0$ и $\mathfrak{G}_1 = G_1$.

¹⁶Важно отметить, что в общем случае функционал S_{gf} должен содержать параметр ξ . Здесь фиксирован вариант $\xi = 1$, чтобы работать исключительно со стандартным $(-\partial_\mu \partial_\mu + \dots)$ оператором Лапласа.

¹⁷Ясно, что теория не должна зависеть от калибровочного условия. В частности, от выбора e_μ . Тем не менее, наличие этого поля будет отмечаться в квантовом действии, так как после введения регуляризации инвариантность может нарушаться. Факт нарушения данной инвариантности фиксируется появлением дополнительных сингулярностей. Способы ее восстановления, в свою очередь, в данной работе не обсуждаются.

3 Квантовое действие

Формула (9) носит чисто символический характер, поскольку имеющиеся на данный момент методы функционального интегрирования, см. для примера [17, 18], не покрывают стандартные квантово-полевые модели. Тем не менее аккуратная математическая формулировка все же возможна, для этого представленную формулу необходимо понимать как формальный ряд по константе связи g^2 . Его легко получить разложением экспонент в ряд и последующим вычислением многомерных гауссовых интегралов, см. [1].

Как показывает практика, возникающие в ответах комбинации функций Грина удобно записывать (зашифровывать) в компактном виде при помощи диаграммной техники. Для этого сперва определим базовые элементы: вершины и соединительные линии. В данном случае используется подход к обозначению, предложенный в [106] и использованный в [67, 68].

1. Необходимо ввести четыре типа вершин: одинарную, две тройные и одну четверную. Определим их согласно следующему сопоставлению

$$\Gamma_1 \sim \blacksquare \text{---}, \quad \Gamma_3 \sim \text{---} \bullet \text{---}, \quad \Omega_3 \sim \text{---} \bullet \text{---}, \quad \Gamma_4 \sim \text{---} \text{---} \text{---} \text{---}.$$

Заметим, что картинки имеют внутреннюю структуру для удобства дешифрования. К примеру, в случае сравнения вершины Γ_3 с формулой (3) можно заметить, что круглой точкой обозначается ковариантная производная, серая линия обозначает свертку индексов, а порядок внешних линий воспроизводит порядок индексов $a \rightarrow b \rightarrow c$ для структурной константы f^{abc} . Аналогично можно расшифровать Γ_4 . В случае же вершины Ω_3 дополнительно используются стрелки для обозначения дѣховых полей.

2. Соединительные линии связаны с возникающими в теории функциями Грина. В данном случае имеется две: функция $\mathfrak{G}_0^{bc}(x, y)$ для оператора $\mathfrak{M}_0^{ab}(x)$ и функция $\mathfrak{G}_{1\sigma\nu}^{bc}(x, y)$ для оператора $\mathfrak{M}_{1\mu\sigma}^{ab}(x)$. Их регуляризованным версиям будут сопоставляться линии

$$\mathfrak{G}_0|_{\text{reg.}} \sim \text{---} \blacktriangleright \text{---}, \quad \mathfrak{G}_1|_{\text{reg.}} \sim \text{---}. \quad (13)$$

При этом важно учитывать, что концы линий содержат аргументы и индексы соответствующих функций Грина. К примеру, правый конец сплошной линии соответствует набору $\{y, \nu, c\}$. На рисунке для удобства они опущены.

Обратим внимание, что на данном шаге фактически было введено ограничение на вид регуляризации, которая в конечном счете сводится к деформации соответствующих функций Грина. Этого вполне достаточно, так как рассматриваемый в работе подход попадает в указанные рамки. Для удобства будем подразумевать, что Λ является параметром регуляризации, которую можно «снять»¹⁸ предельным переходом $\Lambda \rightarrow +\infty$.

Далее определим оператор, который сопоставляет набору вершин сумму диаграмм с некоторым числом внешних линий. Такой подход позволяет компактно записывать ответы для гауссовых интегралов, которые, как известно, сводятся в итоге к применению теоремы Вика о спариваниях, см. [34]. Пусть $j, i, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и Γ является набором конечного числа вершин, определенных выше, с суммарным количеством сплошных линий, равным i , и суммарным количеством штриховых линий, равным k . Символом $\mathbb{H}_j^{c(sc)}$ будем обозначать оператор, который делает с набором Γ череду преобразований. Если $j > i$, или же хотя бы одно число из набора $\{i - j, k\}$ нечетно, то в качестве ответа дает нуль. В противном случае оператор выполняет следующие три процедуры:

1. соединяет все штриховые линии (k штук) всеми возможными способами, при этом в каждой диаграмме каждая штриховая петля домножается на $(-1)^n$, где n – количество Ω -вершин в конкретной петле;

¹⁸То есть вновь перейти к расходящимся величинам.

2. соединяет каждую произвольно выбранную комбинацию из $i - j$ внешних линий всеми возможными способами;
3. сохраняет только связную (сильно связную¹⁹) часть. Это отражено верхним индексом $c(sc)$.

С учетом всего вышеизложенного, регуляризованным квантовым действием теории Янга–Миллса будем называть формальный ряд по константе связи вида

$$W_{\text{reg}}^c[B, e] = \frac{1}{4g^2} W_{-1} + \left(\ln \det(\mathfrak{G}_0|_{\text{reg.}}) - \frac{1}{2} \ln \det(\mathfrak{G}_1|_{\text{reg.}}) + \kappa_0^c \right) \quad (14)$$

$$- \mathbb{H}_0^c \left[\exp \left(-\frac{1}{g} \Gamma_1 - g \Gamma_3 - \frac{g^2}{4} \Gamma_4 - g \Omega_3 \right) \right] + \sum_{k=1}^{+\infty} g^{2k} \kappa_k^c. \quad (15)$$

Здесь величины κ_i^c в каждом порядке по константе связи вычитают сингулярные слагаемые, не зависящие от фонового поля. Такой сдвиг делается из удобства, так как регуляризация может не покрывать слишком «сильные»²⁰ расходимости, которые проще «убрать руками». При этом заметим, что описание физических явлений не зависит от сдвига действия на константу. Далее, верхний индекс в W_{reg}^c и κ_i^c связан с индексом в операторе \mathbb{H}_0^c . К примеру, обозначение W_{reg}^{sc} , которое появится в следующей секции, означает наличие оператора \mathbb{H}_0^{sc} вместо \mathbb{H}_0^c .

Обсудим специальные калибровочные преобразования. Пусть $h(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^4, G)$ является гладкой функцией. В присоединенном представлении элементы такой матрицы будем обозначать $h^{ab}(x)$. Также далее будем подразумевать, что поля B_μ^a и e_μ^a при калибровочных преобразованиях изменяются следующим образом

$$f^{acb} B_\mu^c(x) \rightarrow f^{acb} B_\mu^{h,c}(x) = h^{-1,ad}(x) f^{dce} B_\mu^c(x) h^{eb}(x) + h^{-1,ae}(x) \partial_{x^\mu} h^{eb}(x), \quad (16)$$

$$f^{acb} e_\mu^c(x) \rightarrow f^{acb} e_\mu^{h,c}(x) = h^{-1,ad}(x) f^{dce} e_\mu^c(x) h^{eb}(x) + h^{-1,ae}(x) \partial_{x^\mu} h^{eb}(x), \quad (17)$$

а поле флуктуации из (1) согласно правилу

$$f^{acb} a_\mu^c(x) \rightarrow f^{acb} a_\mu^{h,c}(x) = h^{-1,ad}(x) f^{dce} a_\mu^c(x) h^{eb}(x). \quad (18)$$

Дополнительно будем предполагать, что область интегрирования \mathcal{H} из (9) инвариантна относительно таких преобразований. Формально, при отсутствии регуляризации, такая инвариантность имеется, о чем свидетельствует определение через пертурбативный ряд. Тогда можно утверждать, что на формальном уровне при отсутствии регуляризации квантовое действие инвариантно относительно преобразований (16) и (17), что можно записать в виде

$$W^c[B, e] = W^c[B^h, e^h]. \quad (19)$$

Как покажут вычисления ниже, регуляризация может нарушать подобную инвариантность. Этот факт влияет на процесс перенормировки и коэффициенты соответствующих констант.

4 Сильная деформация

4.1 Мотивировка

Сперва расшифруем название секции. Слово «деформация» обозначает процесс изменения некоторых параметров классического действия, который в итоге приводит к регуляризации²¹ квантового действия. Слово «сильная» отражает степень нарушения внутренних симметрий. В данном случае оно символизирует потерю инвариантности относительно калибровочных преобразований фонового

¹⁹Также называют одночастично неприводимой (или 1PI) частью.

²⁰Дело в том, что сингулярность домножается на интеграл от плотности, зависящей от фонового поля. Если поля нет, то возникает интеграл от константы по \mathbb{R}^4 . Этот факт является следствием наличия инфракрасных расходимостей, которые в данной работе не обсуждаются.

²¹Речь идет об ультрафиолетовых расходимостях, зависящих от фонового поля.

поля B_μ^a и поля e_μ^a , см. формулу (19). Тем не менее это сделано не просто так и является платой за сохранение некоторых полезных функциональных равенств.

Прежде всего нужно разобраться, как именно выглядит стандартное регуляризованное²² квантовое²³ уравнение движения

$$Q_\mu^a|_{\text{reg.}}[B_q, e](x) = 0, \quad (20)$$

левую часть которого формально можно выписать как сумму всех сильно связных диаграмм с одной внешней линией, то есть²⁴

$$\int_{\mathbb{R}^4} d^4x a_\mu^a Q_\mu^a|_{\text{reg.}} = -g^{-1} \mathbb{H}_1^{\text{sc}} \left[\exp \left(-\frac{1}{g} \Gamma_1 - g \Gamma_3 - \frac{g^2}{4} \Gamma_4 - g \Omega_3 \right) \right]. \quad (21)$$

В (20) и далее символ $B_{q,\mu}^a$ обозначает решение регуляризованного квантового уравнения движения. Оно является специальным случаем выбора фонового поля B_μ^a . Если регуляризованное квантовое уравнение движения выполнено, то в квантовом действии (15) сохраняются лишь сильно связные вклады, то есть происходит замена индекса $s \rightarrow sc$ в операторе \mathbb{H} . Таким образом, можно утверждать, что

$$\text{если } Q_\mu^a|_{\text{reg.}}[B_q, e](x) = 0, \text{ то } W_{\text{reg}}^c[B_q, e] = W_{\text{reg}}^{\text{sc}}[B_q, e].$$

Это равенство хорошо известно. Действительно, оно следует из того факта, что в общем случае разность действий представима в виде

$$W_{\text{reg}}^c[\cdot, e] - W_{\text{reg}}^{\text{sc}}[\cdot, e] = \sum_{k=2}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{4 \times k}} d^4x_1 \dots d^4x_k w_{\mu_1 \dots \mu_k}^{a_1 \dots a_k}(x_1, \dots, x_k) \times \\ \times Q_{\mu_1}^{a_1}|_{\text{reg.}}[\cdot, e](x_1) \times \dots \times Q_{\mu_k}^{a_k}|_{\text{reg.}}[\cdot, e](x_k), \quad (22)$$

каждое слагаемое которого пропорционально функционалу $Q_\mu^a|_{\text{reg.}}[\cdot, e](x)$, причем суммирование начинается именно с двойки. Более подробно это изложено, к примеру, в [107]. Далее заметим, что на формальном уровне до введения регуляризации существует соотношение²⁵ между квантовым действием и плотностью из квантового уравнения движения

$$\frac{\delta}{\delta B_\mu^a(x)} W^{\text{sc}}[B, e] = Q_\mu^a[B, e](x). \quad (23)$$

Нарушение такой связи при введении регуляризации приводит к тому, что дальнейший процесс перенормировки перестает быть согласованным, в том смысле, что ренормировка действия не будет гарантировать ренормировку уравнения, и наоборот. Соответственно, возникнет необходимость каким-то образом корректировать процесс на каждом шаге (в каждом порядке по константе связи). К сожалению, возможность такой корректировки не ясна. Таким образом, важно потребовать, чтобы функциональная связь (23) была сохранена в процессе регуляризации. Обращаясь к формуле (14), математически равенство можно выписать так

$$\int_{\mathbb{R}^4} d^4x a_\mu^a \frac{\delta}{\delta B_\mu^a(x)} W_{\text{reg}}^{\text{sc}}[B, e] = -g^{-1} \mathbb{H}_1^{\text{sc}} \left[\exp \left(-\frac{1}{g} \Gamma_1 - g \Gamma_3 - \frac{g^2}{4} \Gamma_4 - g \Omega_3 \right) \right]. \quad (24)$$

Оказывается, что такое соотношение можно сохранить. Для этого необходимо заметить, что диаграммы имеют блочную структуру (состоят из вершин и линий), поэтому сохранение аналогичных связей для каждого отдельного элемента гарантирует наличие соотношения (24).

²²Вариант со снятой регуляризацией далее обозначается отсутствием $|_{\text{reg.}}$. Такой ряд содержит расходимости.

²³В низшем порядке по константе связи квантовое уравнение движения воспроизводит классическое уравнение. Остальные добавки называются квантовыми поправками.

²⁴Фактор $-g^{-1}$ здесь выбран для удобства записи соотношения с квантовым действием, см. (23) или (24).

²⁵Более правильно его воспринимать в виде разности левой и правой частей, когда неинтегрируемые плотности сокращаются.

4.2 Регуляризация

До формулировки конкретных правил деформации выпишем сперва соотношения для нерегуляризованных функций Грина и вершин, которые необходимы для доказательства формулы (23). Первое соотношение имеет вид

$$\int_{\mathbb{R}^4} d^4x \phi_\mu^a \frac{\delta \Gamma_3[a]}{\delta B_\mu^a(x)} = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \phi_\mu^a \frac{\delta \Gamma_4[a]}{\delta a_\mu^a(x)} \quad (25)$$

и допускает следующую интерпретацию. Вариация вершины Γ_3 по фоновому полю эквивалентна выделению одной внешней линии в вершине Γ_4 . Это означает, что, варьируя Γ_3 в квантовом действии, можно получить весь набор диаграмм из плотности квантового уравнения, который связан с маркировкой одной внешней линии в вершине Γ_4 в ходе применения оператора \mathbb{H}_1 . Остальные соотношения можно выписать аналогичным образом, разделив на три группы. Действительно, пусть определен оператор функционального дифференцирования

$$D[\psi, \phi] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \phi_\mu^a \frac{\delta}{\delta \psi_\mu^a(x)},$$

тогда первый набор соотношений включает формулу (25) и еще три дополнительных равенства, которые получаются прямым дифференцированием функционалов:

$$D[B, \phi]W_{-1} = 4D[a, \phi]\Gamma_1[a],$$

$$D[B, \phi]\Gamma_4[a] = 0, \quad D[B, \phi]\Omega_3[a, c, \bar{c}, e] = 0.$$

Следующий набор состоит из двух равенств. Первое из которых связано с дифференцированием функции Грина для дѳуховых полей

$$D[B, \phi]\mathfrak{G}_0^{ab}(x, y) = - \int_{\mathbb{R}^4} d^4z D_\mu^{cd}(z)\mathfrak{G}_0^{ad}(x, z)f^{ceg}\phi_\mu^e(z)\mathfrak{G}_0^{gb}(z, y).$$

Оно соотносится с вершиной Ω_3 и допускает следующую интерпретацию: внутренняя штриховая линия со стрелкой разрезается и в место разреза подсоединяется вершина Ω_3 с учетом правил диаграммной техники и дополнительным знаком минус. Отметим, что существует лишь один вариант подсоединения. Второе же равенство связано с дифференцированием сплошной линии. Оно состоит из шести частей

$$\begin{aligned} D[B, \phi]\mathfrak{G}_{1\sigma\rho}^{ab}(x, y) = & + \int_{\mathbb{R}^4} d^4z \mathfrak{G}_{1\sigma\mu}^{ad}(x, z)f^{deg}\phi_\nu^e(z)D_\nu^{gc}(z)\mathfrak{G}_{1\mu\rho}^{cb}(z, y) \\ & - \int_{\mathbb{R}^4} d^4z D_\nu^{cd}(z)\mathfrak{G}_{1\sigma\mu}^{ad}(x, z)f^{ceg}\phi_\nu^e(z)\mathfrak{G}_{1\mu\rho}^{gb}(z, y) \\ & + \int_{\mathbb{R}^4} d^4z \mathfrak{G}_{1\sigma\mu}^{ad}(x, z)f^{deg}\phi_\mu^e(z)D_\nu^{gc}(z)\mathfrak{G}_{1\nu\rho}^{cb}(z, y) \\ & - \int_{\mathbb{R}^4} d^4z D_\mu^{cd}(z)\mathfrak{G}_{1\sigma\mu}^{ad}(x, z)f^{ceg}\phi_\nu^e(z)\mathfrak{G}_{1\nu\rho}^{gb}(z, y) \\ & - \int_{\mathbb{R}^4} d^4z \mathfrak{G}_{1\sigma\mu}^{ad}(x, z)f^{deg}\phi_\nu^e(z)D_\mu^{gc}(z)\mathfrak{G}_{1\nu\rho}^{cb}(z, y) \times 2 \\ & + \int_{\mathbb{R}^4} d^4z D_\nu^{cd}(z)\mathfrak{G}_{1\sigma\mu}^{ad}(x, z)f^{ceg}\phi_\mu^e(z)\mathfrak{G}_{1\nu\rho}^{gb}(z, y) \times 2 \end{aligned}$$

и интерпретируется как операция разрезания сплошной линии с дальнейшим подсоединением вершины Γ_3 всеми возможными способами и дополнительным умножением на -1 . Последний третий набор соотношений следует из дифференцирования детерминантов. Для этого необходимо отметить, что детерминант оператора в рамках данной работы понимается в смысле пертурбативного разложения по степеням потенциалов для функционального интеграла. Их явные формулы представлены ниже в (62) и (70). Получаем два равенства

$$D[B, \phi] \ln \det(\mathfrak{G}_0) = - \int_{\mathbb{R}^4} d^4z D_\mu^{cd}(z)\mathfrak{G}_0^{ad}(x, z)|_{x=z} f^{cea}\phi_\mu^e(z) = \mathbb{H}_1^c(\Omega_3)|_{a=\phi} \quad (26)$$

и

$$\begin{aligned}
D[B, \phi] \ln \det(\mathfrak{G}_1) = & + 2 \int_{\mathbb{R}^4} d^4 z f^{beg} \phi_\nu^e(z) D_\nu^{gc}(z) \mathfrak{G}_{1\mu\mu}^{cb}(z, y) \big|_{y=z} \\
& + 2 \int_{\mathbb{R}^4} d^4 z f^{beg} \phi_\mu^e(z) D_\nu^{gc}(z) \mathfrak{G}_{1\nu\mu}^{cb}(z, y) \big|_{y=z} \\
& - 4 \int_{\mathbb{R}^4} d^4 z f^{beg} \phi_\nu^e(z) D_\mu^{gc}(z) \mathfrak{G}_{1\nu\mu}^{cb}(z, y) \big|_{y=z} = -2\mathbb{H}_1^c(\Gamma_3) \big|_{a=\phi}.
\end{aligned}$$

Оба соотношения на диаграммном языке эквивалентны разрезанию однопетлевой поправки и подсоединению тройной вершины всеми возможными способами. Дополнительно отметим, что последние равенства следует рассматривать как разность левой и правой сторон, чтобы сингулярная составляющая в первых порядках сокращалась. Всех вышеупомянутых соотношений достаточно для того, чтобы показать справедливость формулы (23).

Итак, основное требование к возможной регуляризации заключается в том, чтобы соотношение (23) выполнялось также и для регуляризованного случая. Этого можно достичь, если все функциональные соотношения, представленные в данной секции, верны и для регуляризованных объектов в том числе. Оказывается, что подходящий вариант существует. Для удобства сформулируем правила двумя эквивалентными способами.

Первый способ. Выберем в качестве ядра усреднения кусочно непрерывную²⁶ функцию $\omega(\cdot)$ на полуоси \mathbb{R}_+ таким образом, чтобы выполнялись соотношения $\text{supp}(\omega) \subset [0, 1/2]$ и $\omega \geq 0$. Тогда введением регуляризации будет называться деформация функции Грина для свободного оператора Лапласа следующего вида

$$R_0(x) = \frac{1}{4\pi^2|x|^2} \rightarrow R_0^\Lambda(x) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y \int_{\mathbb{R}^4} d^4 z \frac{\omega(|y|)\omega(|z|)}{|x + y/\Lambda + z/\Lambda|^2}. \quad (27)$$

Такой оператор также называется квазилокальным вероятностным усреднением, а вспомогательный параметр $\Lambda \gg 1$ – регуляризующим. Дополнительно будем подразумевать, что свойства гладкости ядра гарантируют принадлежность $R_0^\Lambda(\cdot) \in C^2(\mathbb{R}^4)$. Ранее было показано, см. [57], что при такой деформации свободная функция Грина допускает следующее представление

$$R_0^\Lambda(x) = \frac{\Lambda^2 \mathbf{f}(|x|^2 \Lambda^2)}{4\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} \begin{cases} \Lambda^2, & \text{для } |x| \leq 1/\Lambda; \\ |x|^{-2}, & \text{для } |x| > 1/\Lambda, \end{cases} \quad (28)$$

где носитель функции $\mathbf{f}(\cdot) \in C(\mathbb{R}_+)$ содержится в $[0, 1]$.

Далее, возвращаясь к явному виду квантового действия, заметим, что в процессе такой регуляризации вершины не деформируются, в то время как соответствующие пертурбативные разложения для регуляризованных функций Грина получаются заменой $R_0(\cdot) \rightarrow R_0^\Lambda(\cdot)$ и выписываются явно следующим образом

$$\begin{aligned}
\mathfrak{G}_{1\sigma\rho}^{ab}(x, y) = & \delta^{ab} \delta_{\sigma\rho} R_0^\Lambda(x - y) + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{4 \times k}} d^4 z_1 \dots d^4 z_k R_0^\Lambda(x - z_1) \\
& \times (-\mathfrak{M}_{1\sigma\mu_1}^{ac_1}(z_1) - \delta^{ac_1} \delta_{\sigma\mu_1} \partial_{z_1^\nu} \partial_{z_1^\nu}) R_0^\Lambda(z_1 - z_2) \times \dots \\
& \times (-\mathfrak{M}_{1\mu_k\rho}^{c_k b}(z_k) - \delta^{c_k b} \delta_{\mu_k\rho} \partial_{z_k^\nu} \partial_{z_k^\nu}) R_0^\Lambda(z_k - y),
\end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{G}_0^{ab}(x, y) = & \delta^{ab} R_0^\Lambda(x - y) + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{4 \times k}} d^4 z_1 \dots d^4 z_k R_0^\Lambda(x - z_1) \\
& \times (-\mathfrak{M}_0^{ac_1}(z_1) - \delta^{ac_1} \partial_{z_1^\nu} \partial_{z_1^\nu}) R_0^\Lambda(z_1 - z_2) \times \dots \\
& \times (-\mathfrak{M}_0^{c_k b}(z_k) - \delta^{c_k b} \partial_{z_k^\nu} \partial_{z_k^\nu}) R_0^\Lambda(z_k - y).
\end{aligned} \quad (30)$$

²⁶Более широкий класс ядер представлен в работах [58, 60].

Из построения видно, что деформация не затрагивает поля, поэтому все изложенные в начале секции функциональные соотношения сохраняют справедливость при переходе к регуляризованным (деформированным) объектам.

Второй способ. Как известно, регуляризация квантового действия в пертурбативном изложении должна вводиться путем деформации именно классического действия, см. для примера рассуждения из секции 3.3 в [61]. Поэтому переформулируем описанный выше подход к регуляризации альтернативным способом. Можно показать, что деформация (27) соответствует выполнению трех процедур с классическим действием, см. также (10),

$$S_{\text{cl}}[B + ga] + S_{\text{gf}}[a, e] + S_{\text{g}}[B, a, c, \bar{c}, e].$$

1. Усреднить все поля флуктуации $a_\mu^b(x)$ согласно формуле

$$a_\mu^b(x) \rightarrow a_\mu^{\Lambda, b}(x) = \int_{\mathbb{R}^4} d^4y \omega(|y|) a_\mu^b(x + y/\Lambda). \quad (31)$$

2. Аналогичным образом усреднить все дѹховые поля: $c^a \rightarrow c^{\Lambda, a}$ и $\bar{c}^a \rightarrow \bar{c}^{\Lambda, a}$.
3. Вычесть квадратичные формы со свободным оператором Лапласа для усредненных полей и добавить вместо них формы без усреднения. Другими словами, прибавить к имеющемуся классическому действию с усредненными полями слагаемое

$$+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(a_\mu^a A_0 a_\mu^a - a_\mu^{\Lambda, a} A_0 a_\mu^{\Lambda, a} \right) + \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(\bar{c}^a A_0 c^a - \bar{c}^{\Lambda, a} A_0 c^{\Lambda, a} \right),$$

где $A_0(x) = -\partial_{x^\mu} \partial_{x_\mu}$.

Таким образом, регуляризация заключается в усреднении всех дѹховых полей и полей флуктуации, кроме тех, которые находятся в квадратичных формах со свободным оператором Лапласа A_0 . Такой подход эквивалентен деформации функций Грина из первого способа. Этот факт следует из применения теоремы Вика о спариваниях. Приведем доказательство на примере полей флуктуации, для дѹховых полей оно выполняется аналогично. Известно, при отсутствии регуляризации пары полей заменяются на соответствующие функции Грина, то есть

$$a_\mu^a(x) a_\nu^b(y) \longrightarrow \delta^{ab} \delta_{\mu\nu} R_0(x - y).$$

В свою очередь, после деформации полей появляются два оператора усреднения, которые после применения теоремы Вика действуют на функцию Грина. Таким образом, получаем

$$a_\mu^{\Lambda, a}(x) a_\nu^{\Lambda, b}(y) \longrightarrow \delta^{ab} \delta_{\mu\nu} R_0^\Lambda(x - y),$$

из чего и следует эквивалентность двух способов.

4.3 Выбор калибровки

Возвращаясь к секции 3, заметим, что каждое слагаемое пертурбативного разложения для квантового действия $W_{\text{reg}}^c[B, e]$ из (14) является функционалом, зависящим²⁷ как от фонового поля B_μ^a , так и от калибровочного условия, которое в предложенной формулировке диктуется исключительно выбором поля e_μ^a . Проведем несколько мысленных экспериментов для регуляризованного случая. Для этого воспользуемся тем фактом, что фоновое поле можно выбрать $B_\mu^a \rightarrow B_{q, \mu}^a$ так, чтобы оно решало регуляризованное квантовое уравнение движения $Q_\mu^a|_{\text{reg}}[B_q, e](x) = 0$, см. (21). В этом случае фоновое поле B_q будет в то же время и функционалом, зависящим²⁸ от поля e_μ^a . Исходя из этого,

²⁷ Действительно, слагаемое S_{gf} из (6) не содержит фоновое поле, а потому B_μ^a нельзя убрать простым сдвигом переменной, как это обычно делается в скалярных моделях, см. для примера [64].

²⁸ Регуляризация может нарушать инвариантность, поэтому наличие зависимости вполне ожидаемо.

имеем $B_q = B_q[e]$. Появляется вопрос: «А можно ли подобрать поле $e_\mu^a = \hat{e}_\mu^a$ из калибровочного условия таким образом, чтобы выполнялось равенство $B_q[\hat{e}] = \hat{e}$?»

Аккуратного с математической точки зрения ответа на данный вопрос дать нельзя, так как практически ничего неизвестно о методах поиска решения квантового уравнения движения, о его единственности либо же о свойствах гладкости. Тем не менее существует гипотетически возможная процедура для построения такого решения. Она была предложена Фаддеевым и в сжатой версии может быть найдена²⁹ в [99, 100]. Опишем ее поэтапно.

1. Рассмотрим функционал плотности $Q_\mu^a|_{\text{reg.}}[B, e](x)$. Он зависит от полей B и e .
2. Подставим $e = B$ и решим уравнение $Q_\mu^a|_{\text{reg.}}[B, B](x) = 0$.
3. Получим некоторое решение B_f .
4. Начнем заново процедуру рассмотрения квантового действия $W_{\text{reg.}}^c[B, e]$ для $e = B_f$.
5. По построению B_f является решением квантового уравнения движения, то есть

$$\left. \frac{\delta W_{\text{reg.}}^{\text{sc}}[B, B_f]}{\delta B_\mu^a(x)} \right|_{B=B_f} = 0.$$

Таким образом, сильно связанное квантовое действие зависит от B_f и равно $W_{\text{reg.}}^{\text{sc}}[B_f, B_f]$. Однако возникают новые вопросы, связанные, в частности, с возможностью проведения процедуры перенормировки. Действительно, ранее квантовое действие и уравнение были связаны соотношением (24), что давало возможность работать лишь с одним объектом, второй перенормировался автоматически. В новой версии ситуация изменилась, так как

$$\begin{aligned} \frac{\delta W_{\text{reg.}}^{\text{sc}}[B, B]}{\delta B_\mu^a(x)} &= \left. \frac{\delta W_{\text{reg.}}^{\text{sc}}[B, e]}{\delta B_\mu^a(x)} \right|_{e=B} + \left. \frac{\delta W_{\text{reg.}}^{\text{sc}}[B, e]}{\delta e_\mu^a(x)} \right|_{e=B} \\ &= Q_\mu^a|_{\text{reg.}}[B, B](x) + \left. \frac{\delta W_{\text{reg.}}^{\text{sc}}[B, e]}{\delta e_\mu^a(x)} \right|_{e=B} \neq Q_\mu^a|_{\text{reg.}}[B, B](x). \end{aligned} \quad (32)$$

Причем имеет место именно неравенство. Прямые подсчеты в первых двух петлях показывают, что второе слагаемое имеет собственные расходимости, притом они не зависят от выбора регуляризации. Этот факт символизирует то, что перенормировка квантового действия на диагонали, то есть когда $e = B$, уже не гарантирует перенормировку квантового уравнения движения. Более того, из перенормированного $W_{\text{reg.}}^{\text{sc}}[B, B]$ нельзя найти перенормированный функционал $Q_\mu^a|_{\text{reg.}}[B, B](x)$, а значит, и не получится вычислить перенормированный аналог для решения B_f .

Возникшая проблема связана с тем, что информация при работе на диагонали намного скуднее. Действительно, проводя прямую аналогию с классическим анализом, заметим, что невозможно восстановить производные функции, зная лишь ее значение в выбранной точке. Таким образом, для дешифровки квантового уравнения движения необходимо не только перенормировать $W_{\text{reg.}}^{\text{sc}}[B, B]$, но и дополнительно сохранить некоторую информацию о вариации по второму аргументу. При этом работа с сильно связными диаграммами с более высоким количеством внешних линий приводит к необходимости работать со следующими вариациями по второму аргументу.

В данной работе приводится разбор первых двух квантовых поправок для квантового действия и первой поправки для его первой вариации. В связи с такой постановкой задачи предлагается работать с объектом вида

$$W_{\text{reg.}}^{\text{sc}}[B, B + \varepsilon],$$

где второй аргумент e_μ^a является малым возмущением около значения B_μ^a . Таким образом, будет обсуждаться не только перенормировка в двух петлях для действия $W_{\text{reg.}}^{\text{sc}}[B, B]$ на диагонали, но и

²⁹См. последнюю версию на arXiv для [100].

ее связь с первой вариацией

$$\left. \frac{\delta W_{\text{reg}}^{\text{sc}}[B, B + \varepsilon]}{\delta \varepsilon_{\mu}^a(x)} \right|_{\varepsilon=0}. \quad (33)$$

Отметим, что выбор $e_{\mu}^a = B_{\mu}^a + \varepsilon_{\mu}^a$ также обусловлен желанием работать с функциями Грина, построенными по ковариантным операторам. Действительно, в главном порядке по ε_{μ}^a появляются операторы (4), а не (7) и (8), что значительно упрощает вычисления.

Замечание. Далее для удобства будем использовать обозначения

$$W_{\text{reg}}^{\text{sc}}[B] \equiv W_{\text{reg}}^{\text{sc}}[B, B] \text{ и } Q_{\mu}^a|_{\text{reg.}}[B](x) \equiv Q_{\mu}^a|_{\text{reg.}}[B, B](x).$$

4.4 Ренормировка действия

Согласно общей теории, перенормировка сильно связанного квантового регуляризованного действия (14) заключается в переопределении (сдвиге) константы связи $g \rightarrow g_{\Lambda}$, масштабировании полей, а также в возможном домножении на константы перенормировки отдельных частей классического действия. Таким образом, добавление дополнительных слагаемых нового вида к классическому действию (1) с точки зрения общепринятого подхода, неразрывно связанного с использованием размерной регуляризации, свидетельствует о неперенормируемости теории. Примером такой теории является частный случай двумерной нелинейной сигма-модели (модели главного кирального поля) с регуляризацией обрезанием, см. [44]. В рамках данной работы³⁰ под перенормируемостью будет подразумеваться классическая постановка, дополненная возможностью вводить слагаемые со степенными сингулярностями, которые по построению отсутствуют в размерной регуляризации. Окончательно, расширяя классическую постановку, будем считать, что в ходе процедуры перенормировки классическое действие может измениться³¹ следующим образом

$$S_{\text{tot}}[B, e] \longrightarrow S_{\text{tot}}[B, e]|_{g \rightarrow g_{\Lambda}} + \hat{W}[B, e]. \quad (34)$$

При этом добавка может быть представлена в виде трех частей

$$\hat{W}[B, e; a, c, \bar{c}, g_{\Lambda}] = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{g_{\Lambda}^{2k-2}}{4} \hat{W}_k[B, e] \right) + g_{\Lambda} \hat{\Gamma}_1[B, e, a, g_{\Lambda}] + \left(\sum_{k=2}^{+\infty} g_{\Lambda}^k \hat{\Gamma}_k[B, e; a, c, \bar{c}] \right), \quad (35)$$

где правая часть удовлетворяет набору следующих предположений.

1. Первое слагаемое не зависит от переменных интегрирования a_{μ}^a , c^a и \bar{c}^a . При этом важным³² является то, что $\hat{W}_k[B, e]$ не пропорционально $W_{-1}[B]$ для всех значений индекса.
2. Вторая часть пропорциональна первой степени флуктуации. При этом $\hat{\Gamma}_1$ раскладывается в ряд по g_{Λ} , начиная с нулевой степени.
3. В третьей части каждый коэффициент является конечным набором вершин с двумя, тремя или четырьмя внешними линиями. При этом, исключая слагаемое со степенной сингулярностью Λ^2 и пропорциональное $a_{\mu}^a a_{\mu}^a$, все вершины являются частями классического действия S_{tot} .

Подытоживая сказанное, можно утверждать, что процесс перенормировки заключается в преобразовании вида

$$W_{\text{reg}}^{\text{sc}}[B, e] \longrightarrow W_{\text{ren}}^{\text{sc}}[B, e]. \quad (36)$$

³⁰В секции 9 обсуждается возможность работы с классическим процессом перенормировки путем введения массового слагаемого.

³¹В случае размерной регуляризации преобразуется не только константа связи g , но и параметр ζ из слагаемого (6), отвечающего за калибровку. В нашей постановке $\zeta = 1$. Тем не менее соответствующие вклады с логарифмическими сингулярностями возникают и вынесены во второе слагаемое формулы (34). Ниже показано, что такие вклады согласуются с имеющимися результатами.

³²От этого условия можно отказаться. Тогда перенормировку константы $g \rightarrow g_{\Lambda} \rightarrow g_{\text{ren}}$ можно будет переписать в виде суммы вспомогательных вершин.

В свою очередь, в общем виде анзацц выглядит следующим образом

$$\begin{aligned}
W_{\text{ren}}^{\text{sc}}[B, e] = & \frac{1}{4g_{\Lambda}^2} \left(W_{-1}[B] + \sum_{k=1}^{+\infty} g_{\Lambda}^{2k} \hat{W}_k[B, e] \right) \\
& + \left(\ln \det(\mathfrak{G}_0|_{\text{reg.}}) - \frac{1}{2} \ln \det(\mathfrak{G}_1|_{\text{reg.}}) + \kappa'_0 \right) \\
& - \mathbb{H}_0^{\text{sc}} \left[\exp \left(-g_{\Lambda} \Gamma_3 - \frac{g_{\Lambda}^2}{4} \Gamma_4 - g_{\Lambda} \Omega_3 - \sum_{k=2}^{+\infty} g_{\Lambda}^k \hat{\Gamma}_k \right) \right] + \sum_{k=1}^{+\infty} g^{2k} \kappa'_k.
\end{aligned} \tag{37}$$

Поясним обозначения. Штрихи для констант κ'_i обозначают их переопределение, так как в ходе ренормировки не зависящие от фонового поля плотности могут изменяться. Новая константа связи g_{Λ} является функцией параметра регуляризации Λ и перераскладывается через конечную и не зависящую от Λ ренормированную константу g_{ren} следующим образом

$$\frac{1}{g_{\Lambda}^2} = \frac{1}{g_{\text{ren}}^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(\Lambda) g_{\text{ren}}^{2k},$$

где коэффициенты $a_k(\Lambda)$ являются полиномами от $\ln(\Lambda/\sigma)$ степени не выше k для $k > 0$ и не выше 1 для $k = 0$. Важным является то условие, что добавки (35) должны вводиться согласованным образом, то есть не нарушая связи квантового действия и квантового уравнения движения. Факт выполнения такого условия необходимо проверять на каждом шаге.

После выполнения процесса ренормировки (36), учитывая тот факт, что связь действия и уравнения была сохранена, необходимо выписать ренормированное квантовое уравнение движения и затем найти ренормированное квантовое фоновое поле $B_{q,\text{ren}}$. В конце концов, обычное действие выпишется в виде

$$W_{\text{ren}}^{\text{sc}}[B, e] \longrightarrow W_{\text{ren}}^{\text{sc}}[B_{q,\text{ren}}, e] = W_{\text{ren}}^{\text{c}}[B_{q,\text{ren}}, e].$$

4.5 Ренормировка около диагонали

В секции 4.3 было отмечено, что в подходе Фаддеева при изучении действия (14) часть информации теряется, так как невозможно однозначно восстановить глобальные свойства функции по ее значению в точке. Поэтому для сохранения связи действия и уравнения необходимо параллельно изучать и первую вариацию (33) по полю, отвечающему за калибровочное условие.

Рассмотрим задачу перенормировки около диагонали и выберем $e_{\mu}^a = B_{\mu}^a + \varepsilon_{\mu}^a$ как малое изменение фонового поля B_{μ}^a с фиксированными заданными граничными условиями. Тогда функционалы, зависящие от e_{μ}^a , можно представить в виде конечных рядов по малой флуктуации ε_{μ}^a следующим образом:

Вершина: $\Omega_3 = \Omega_3|_{e=B} + \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \varepsilon_{\mu}^{ab} \bar{c}^b f^{aed} a_{\mu}^e c^d;$

Операторы: $\mathfrak{M}_0^{ab}(x) = M_0^{ab}(x) - \varepsilon_{\mu}^{ae}(x) D_{\mu}^{eb}(x),$
 $\mathfrak{M}_{1\mu\nu}^{ab}(x) = M_{1\mu\nu}^{ab}(x) - \varepsilon_{\mu}^{ae}(x) D_{\nu}^{eb}(x) - D_{\mu}^{ae}(x) \varepsilon_{\nu}^{eb}(x) - \varepsilon_{\mu}^{ae}(x) \varepsilon_{\nu}^{eb}(x);$

Функционалы ренормировки: $\hat{W}_k[B, e] = \hat{W}_k^0[B] + \hat{W}_k^1[B, \varepsilon] + \dots,$
 $\hat{\Gamma}_k[B, e] = \hat{\Gamma}_k^0[B] + \hat{\Gamma}_k^1[B, \varepsilon] + \dots,$

где $\hat{\Gamma}_k^i$ и \hat{W}_k^i пропорциональны i -ой степени ε . Введем дополнительно три вспомогательные вершины

$$V_1[B, \varepsilon] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \bar{c}^a \varepsilon_\mu^{ae} D_\mu^{eb} c^b, \quad (38)$$

$$V_2[B, \varepsilon] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x (a_\mu^e \varepsilon_\mu^{ea}) (D_\nu^{ab} a_\nu^b), \quad (39)$$

$$V_3[\varepsilon] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \varepsilon_\mu^{ab} \bar{c}^b f^{aed} a_\mu^e c^d.$$

Замечание. Далее символом Ω_3 будем обозначать вершину при $e_\mu^a = B_\mu^a$, а соединительным линиям (13) будут сопоставляться регуляризованные с учетом секции 4.2 функции Грина G_0 и G_1 .

Обратим внимание, что сильно связанное перенормированное действие (37) можно представить в виде ряда по степеням малого поля ε_μ^a следующим образом

$$W_{\text{ren}}^{\text{sc}}[B, B + \varepsilon] = W_{\text{ren}}^{\text{sc}}[B, B] + \dot{W}_{\text{ren}}^{\text{sc}}[B, \varepsilon] + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

где второй коэффициент с точкой обозначает производную действия около диагонали по второму аргументу и, таким образом, является линейным³³ по возмущению

$$\dot{W}_{\text{ren}}^{\text{sc}}[B, \varepsilon] = \left(\partial_s W_{\text{ren}}^{\text{sc}}[B, B + s\varepsilon] \right) \Big|_{s=0} = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \varepsilon_\mu^a(x) J_\mu^a(x). \quad (40)$$

При этом сами функционалы, с учетом анзатца (37), допускают явные представления

$$W_{\text{ren}}^{\text{sc}}[B, B] = \frac{1}{4g_\Lambda^2} \left(W_{-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} g_\Lambda^{2k} \hat{W}_k^0 \right) + \left(\ln \det(G_0|_{\text{reg.}}) - \frac{1}{2} \ln \det(G_1|_{\text{reg.}}) + \kappa'_0 \right) - \mathbb{H}_0^{\text{sc}} \left[\exp \left(-g_\Lambda \Gamma_3 - \frac{g_\Lambda^2}{4} \Gamma_4 - g_\Lambda \Omega_3 - \sum_{k=2}^{+\infty} g_\Lambda^k \hat{\Gamma}_k^0 \right) \right] + \sum_{k=1}^{+\infty} g^{2k} \kappa'_k, \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \dot{W}_{\text{ren}}^{\text{sc}}[B, \varepsilon] &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} g_\Lambda^{2k-2} \dot{W}_k^1 - \mathbb{H}_0^{\text{sc}} \left[\left(V_1 + V_2 - V_3 - \sum_{k=2}^{+\infty} g_\Lambda^k \hat{\Gamma}_k^1 \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left(-g_\Lambda \Gamma_3 - \frac{g_\Lambda^2}{4} \Gamma_4 - g_\Lambda \Omega_3 - \sum_{k=2}^{+\infty} g_\Lambda^k \hat{\Gamma}_k^0 \right) \right]. \end{aligned} \quad (42)$$

Таким образом, из построения видно, что два действия не равносильны между собой, поэтому необходимо производить перенормировку для обоих. При этом стоит отметить, что перенормировку первого ряда (41) можно выполнить независимо. В этом случае изучение « k -й петли», при условии наличия результатов для предыдущих поправок, приводит к ответам для следующих ренормировочных величин:

$$\begin{aligned} 1\text{-я поправка для } W_{\text{ren}}^{\text{sc}} &\longrightarrow a_0, \hat{W}_1^0; \\ 2\text{-я поправка для } W_{\text{ren}}^{\text{sc}} &\longrightarrow a_1, \hat{W}_2^0, \hat{\Gamma}_2^0; \\ k\text{-я поправка для } W_{\text{ren}}^{\text{sc}} &\longrightarrow a_{k-1}, \hat{W}_k^0, \hat{\Gamma}_{2k-2}^0, \hat{\Gamma}_{2k-3}^0, \text{ если } k > 2. \end{aligned} \quad (43)$$

В свою очередь, перенормировка второго ряда зависит от вспомогательных вершин и коэффициентов, найденных при работе с первым. Процедура вновь получается рекуррентной:

$$\begin{aligned} 1\text{-ые поправки для } W_{\text{ren}}^{\text{sc}} \text{ и } \dot{W}_{\text{ren}}^{\text{sc}} &\longrightarrow \hat{W}_1^1; \\ 2\text{-ые поправки для } W_{\text{ren}}^{\text{sc}} \text{ и } \dot{W}_{\text{ren}}^{\text{sc}} &\longrightarrow \hat{W}_2^1, \hat{\Gamma}_2^1; \\ k\text{-ые поправки для } W_{\text{ren}}^{\text{sc}} \text{ и } \dot{W}_{\text{ren}}^{\text{sc}} &\longrightarrow \hat{W}_k^1, \hat{\Gamma}_{2k-2}^1, \hat{\Gamma}_{2k-3}^1, \text{ если } k > 2. \end{aligned} \quad (44)$$

³³Формула (40) фактически определяет вспомогательное поле J_μ^a .

Напомним, что второй объект (42) является вспомогательным и используется исключительно для восстановления квантового уравнения движения. Действительно, с учетом (40), справедлива следующая формула

$$\begin{aligned} Q_\mu^a \Big|_{\text{ren.}} [B](x) &= \frac{\delta W_{\text{ren}}^{\text{sc}}[B, B]}{\delta B_\mu^a(x)} - \frac{\delta W_{\text{ren}}^{\text{sc}}[B, B + \varepsilon]}{\delta \varepsilon_\mu^a(x)} \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{\delta W_{\text{ren}}^{\text{sc}}[B, B]}{\delta B_\mu^a(x)} - J_\mu^a[B](x). \end{aligned} \quad (45)$$

Тем не менее, получившееся вспомогательное поле J_μ^a является громоздким. Выделим те элементы, по которым его можно восстановить в случае необходимости. Ясно, что в отличие от (41), формула (42) дополнительно содержит новые части классического действия \hat{W}_k^1 и вершины $\hat{\Gamma}_k^1$. Поэтому, зная их, можно восстановить второе действие целиком. Определим еще одно вспомогательное поле

$$\int_{\mathbb{R}^4} d^4x \varepsilon_\mu^a(x) j_\mu^a[B](x) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} g^{2k-2} \hat{W}_k^1[B, \varepsilon] + \sum_{k=2}^{+\infty} g^k \hat{\Gamma}_k^1[B, \varepsilon]. \quad (46)$$

При этом в определении отсутствует часть с $\hat{\Gamma}_1^1$, так как она фактически отсутствует³⁴ в квантовом уравнении движения на диагонали и во вспомогательном поле J_μ^a . Таким образом, если определить поле j_μ^a , тогда, пользуясь (42), получается и J_μ^a .

4.6 Что вычисляем?

Итак, с вычислительной точки зрения основной целью секции 4, посвященной сильной деформации, является демонстрация процесса по определению коэффициентов и вершин перенормировки в первых двух петлях для действия на диагонали, а также для первой поправки в случае первой вариации. Пользуясь схемами (43) и (44), отметим, что необходимо выполнить следующие задачи:

- 1-я поправка для $W_{\text{ren}}^{\text{sc}}$** \longrightarrow ответы для a_0 , \hat{W}_1^0 ;
- 1-я поправка для $\dot{W}_{\text{ren}}^{\text{sc}}$** \longrightarrow ответ для \hat{W}_1^1 ;
- 2-я поправка для $W_{\text{ren}}^{\text{sc}}$** \longrightarrow ответ для $\hat{\Gamma}_2^0$ + структура для a_1 , \hat{W}_2^0 .

С помощью разложений (41) и (42), полученных в предыдущей секции, выпишем первые порядки по ренормированной константе связи для квантового действия на диагонали и для его первой производной по второму аргументу

$$W_{\text{ren}}^{\text{sc}}[B, B] = \frac{1}{4g_{\text{ren}}^2} W_{-1}[B] + W_0^\Lambda[B] + g_{\text{ren}}^2 W_1^\Lambda[B] + \mathcal{O}(g_{\text{ren}}^4), \quad (47)$$

$$\dot{W}_{\text{ren}}^{\text{sc}}[B, \varepsilon] = \dot{W}_0^\Lambda[B, \varepsilon] + \mathcal{O}(g_{\text{ren}}^2), \quad (48)$$

где коэффициенты для произвольных B_μ^a и ε_μ^a определяются следующими равенствами

$$W_0^\Lambda = \ln \det(G_0|_{\text{reg.}}) - \frac{1}{2} \ln \det(G_1|_{\text{reg.}}) + \frac{1}{4} (a_0 W_{-1} + \hat{W}_1^0) + \kappa'_0, \quad (49)$$

$$W_1^\Lambda = -\frac{1}{2} \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2) + \frac{1}{4} \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_4) - \frac{1}{2} \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Omega_3^2) + \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\hat{\Gamma}_2^0) + \frac{1}{4} (a_1 W_{-1} + \hat{W}_2^0) + \kappa'_1, \quad (50)$$

$$\dot{W}_0^\Lambda = \frac{1}{4} \hat{W}_1^1 - \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(V_1 + V_2). \quad (51)$$

³⁴Так как входящие диаграммы должны быть сильно связными.

При этом диаграммное представление для основных коэффициентов выглядит следующим стандартным образом

$$\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2) = \text{diagram 1} - \text{diagram 2} + \text{diagram 3} - 2 \text{diagram 4} + \text{diagram 5}, \quad (52)$$

$$\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Omega_3^2) = - \text{diagram 6}, \quad (53)$$

$$\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_4) = \text{diagram 7} - \text{diagram 8} + \text{diagram 9}.$$

Далее воспользуемся предположением, что анзацы (41) и (42) после подходящего выбора коэффициентов ренормировки не содержат ультрафиолетовых сингулярностей. Выполнимость такого предположения вполне ожидаема, так как теория Янга–Миллса является перенормируемой в случае размерной регуляризации, о чем свидетельствует значение индекса расходимости. Предполагается, что в случае обрезания она перенормируема в обобщенной³⁵ постановке, включающей степенные расходимости. Тогда можно утверждать, что ультрафиолетовые сингулярности отсутствуют и в каждом отдельном порядке по константе связи g_{ren} . Следовательно, каждый порядок приводит к рекуррентным уравнениям, которые после введения специального знака для равенства сингулярных частей можно выписать так

$$W_0^\Lambda \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0, \quad W_1^\Lambda \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0 \text{ и т. д.}, \quad (54)$$

$$\dot{W}_0^\Lambda \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0 \text{ и т. д.} \quad (55)$$

Изучение явного вида перенормировочных констант и вершин, входящих в выделенные соотношения, является основной задачей, связанной с сильной деформацией.

4.7 Результаты

Теорема 1. Пусть выполнены все предположения, сформулированные выше в секции 4. Пусть также $L = \ln(\Lambda/\sigma)$, где Λ является параметром регуляризации, а $\sigma > 0$ безразмеривающим вспомогательным фиксированным параметром. Определим дополнительно функционалы

$$S_2[B] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x B_\mu^a(x) B_\mu^a(x), \quad S_f[a, e] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(D_\mu^{ab}(x) a_\mu^b(x) \right) \left(\mathfrak{D}_\nu^{ac}(x) a_\nu^c(x) \right),$$

а также шесть функционалов $W_{-1}^i[B]$, где $i \in \{1, \dots, 6\}$, которые являются частями классического действия и определяются интегралами по \mathbb{R}^4 от плотностей следующего вида

$$\begin{aligned} & (\partial_{y^\mu} B_\mu^a(y)) (\partial_{y^\nu} B_\nu^a(y)), \quad (\partial_{y^\mu} B_\mu^a(y)) f^{abc} B_\nu^b(y) B_\nu^c(y), \quad f^{ade} B_\mu^d(y) B_\mu^e(y) f^{abc} B_\nu^b(y) B_\nu^c(y), \\ & (\partial_{y^\mu} B_\nu^a(y)) (\partial_{y^\mu} B_\nu^a(y)), \quad (\partial_{y^\mu} B_\nu^a(y)) f^{abc} B_\mu^b(y) B_\nu^c(y), \quad f^{ade} B_\mu^d(y) B_\nu^e(y) f^{abc} B_\mu^b(y) B_\nu^c(y). \end{aligned}$$

Далее определим несколько³⁶ вспомогательных чисел³⁷, зависящих от регуляризованного свободного фундаментального решения $R_0^1(x)$, см. (28),

$$\begin{aligned} \frac{\rho_0}{4\pi^2} &= R_0^1(0), \quad \frac{\rho_3}{4\pi^2} = \int_{B_1} d^4x R_0^1(x) A_0(x) R_0^1(x), \quad \frac{2\rho_4}{\pi^2} = \int_{B_1} d^4x R_0^1(x) |x|^2 A_0(x) R_0^1(x), \\ \frac{\rho_2}{8\pi^2} &= \int_{B_1} d^4x A_0(x) R_0^1(x) \int_{\mathbb{R}^4} d^4y \left(R_0^1(x-y) R_0^1(y) - R_0^1(y) R_0^1(y) \right), \end{aligned}$$

³⁵См. обсуждения в секции 4.4.

³⁶Здесь B_1 является замкнутым шаром единичного радиуса с центром в нуле.

³⁷Они являются функционалами, зависящими от регуляризующей функции $f(\cdot)$ и были введены при подсчете асимптотических разложений по Λ в секции 7.8.

$$\frac{\rho_6}{4\pi^2} = \int_{B_1} d^4x A_0(x) R_0^1(x) \int_{\mathbb{R}^4} d^4y R_0^1(x-y) A_0(y) R_0^1(y),$$

а также

$$\begin{aligned} \frac{\rho_7}{16\pi^4} = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x & \left(\left(-2\partial_{x_\mu} \tilde{\theta}_\mu(x) - \tilde{\tau}(x) - R_0^1(x) \right) \left(R_0^1(x) \right)^2 \right. \\ & + 2R_0^1(x) \left(A_0(x) R_0^1(x) \right) \left(\theta(x) - A_0(x) \tau(x) \right) \Big|_{\Lambda=1, \sigma \rightarrow +0} \\ & \left. + R_0^1(x) \tilde{\theta}_\mu(x) \left(\partial_{x_\mu} R_0^1(x) - A_0(x) \tilde{\theta}_\mu(x) \right) - \frac{1}{2} \tilde{\theta}_\mu(x) \tilde{\theta}_\mu(x) A_0(x) R_0^1(x) \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_\mu(x) &= \int_{\mathbb{R}^4} d^4z R_0^1(x-z) \partial_{z^\mu} R_0^1(z), \\ \tilde{\tau}(x) &= \int_{\mathbb{R}^4} d^4z \int_{\mathbb{R}^4} d^4y R_0^1(x-z) A_0(z) R_0^1(z-y) A_0(y) R_0^1(y). \end{aligned}$$

Пусть также числа \tilde{a} , $\{\tilde{a}_i, \tilde{b}_i\}_{i=0,1}$ и $\{\tilde{d}_i\}_{i=1}^6$ обозначают произвольные конечные элементы из \mathbb{R} . Тогда представленные равенства (54) и (55) приводят к следующим коэффициентам и вспомогательным вершинам.

$$1) W_0^\Lambda \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0 \implies a_0(\Lambda) = \frac{11c_2L}{24\pi^2} + \tilde{a}_0, \quad \hat{W}_1^0[B] = \frac{c_2\Lambda^2(\rho_3 - 2\rho_0)}{2\pi^2} S_2[B].$$

$$2) \dot{W}_0^\Lambda \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0 \implies \hat{W}_1^1[B, \varepsilon] = \Gamma_1[\varepsilon] \left(\frac{c_2L}{2\pi^2} + \tilde{b}_0 \right).$$

$$3) W_1^\Lambda \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0 \implies \hat{\Gamma}_2^0[B] = \frac{\Lambda^2 c_2 (2\rho_3 - 3\rho_0)}{8\pi^2} S_2[a] - \left(\frac{5Lc_2}{48\pi^2} + \tilde{b}_1 \right) S_f[a, B].$$

$$a_1(\Lambda) = \frac{c_2^2 L}{(4\pi)^4} \left(26 + 2^4 17 \rho_2 / 3 - 2^7 \rho_4 + \tilde{a} \right) + \tilde{a}_1,$$

$$\begin{aligned} \hat{W}_2^0[B] &= \frac{c_2^2 \Lambda^2}{2\pi^4} \left(\frac{5L}{24} (\rho_0 + \rho_6 - 2\rho_3) - \rho_2 \rho_3 - \rho_7 \right) S_2[B] \\ &\quad - \frac{\tilde{a} c_2^2 L}{(4\pi)^4} W_{-1}[B] + \left(\text{лин. комбинация } (L + \tilde{d}_i) \times W_{-1}^i[B] \right). \end{aligned}$$

Комментарий 1. Первый коэффициент a_0 имеет стандартное значение и согласуется с результатами при использовании других³⁸ регуляризаций, см. для примера [108, 109]. Второй коэффициент a_2 имеет отличное значение от полученного ранее в размерной регуляризации, см. [110, 111] или в рамках метода фонового поля [98, 112], и в случае неявной регуляризации, см. [32]. Он зависит от регуляризующей функции $\mathbf{f}(\cdot)$, см. (28), и, более того, может быть сдвинут путем выбора свободных параметров \tilde{a} и \tilde{a}_1 . При этом параметр \tilde{a} является следствием неоднозначности фиксации вспомогательного функционала ренормировки \hat{W}_2^0 , который появился из-за отсутствия инвариантности относительно калибровочных преобразований фонового поля и, как следствие, расщепления классического действия. Строгие дополнительные условия для фиксации параметра на данный момент не ясны и могут выбираться из удобства. К примеру, если определить

$$\tilde{a} = -59/9 - 2^5 5 \rho_2 / 3,$$

³⁸Логарифмическая сингулярность в первой поправке не зависит от выбора регуляризации и схемы вычитания, поэтому во всех случаях она имеет одинаковый вид.

то коэффициент a_1 будет совпадать со случаем ковариантной регуляризации из теоремы 2, а функционал \hat{W}_2^0 в этом случае будет символизировать величину отклонения при дополнительной деформации ковариантного случая.

Комментарий 2. Функционал $\hat{W}_1^1[B, \varepsilon]$ из второго пункта имеет стандартное значение и совпадает с результатами для других регуляризаций. В этом легко убедиться, вычислив вариации, с учетом (45), для функционалов ренормировки

$$\frac{1}{4} \left(\frac{\delta}{\delta B_\mu^a(x)} - \frac{\delta}{\delta \varepsilon_\mu^a(x)} \right) \left(a_0 W_{-1}[B] + \hat{W}_1^1[B, \varepsilon] \right) \Big|_{\varepsilon=0} = D_\nu^{ab}(x) F_{\nu\mu}^b(x) \left(-\frac{c_2 L}{3\pi^2} - \tilde{a}_0 \right).$$

Действительно, полученный результат в точности компенсирует сингулярную часть суммы $\mathbb{H}_1^c(\Omega_3)$ и $\mathbb{H}_1^c(\Gamma_3)$, значение которого ранее было проверено в формуле (80) работы [68] при изучении квантового уравнения движения.

Комментарий 3. Контрвершина $S_f[a, B]$ с логарифмическим коэффициентом L имеет стандартный вид и полностью согласуется с известными результатами, см. формулу (3.42) в [98]. Интересным является тот факт, что она вводится из необходимости сократить «нелокальные» сингулярности в квантовом действии. К примеру, в работе [113] эта вершина определялась иначе, из ренормировки квантового уравнения движения. Таким образом, на уровне первых двух поправок можно заметить, что квантовое действие на диагонали является замкнутым с точки зрения определения констант перенормировки.

Комментарий 4. Контрлагаемое $S_2[B]$ и контрвершина $S_2[a]$ входят вкупе с сингулярностями степенного вида Λ^2 . Такие слагаемые являются стандартными в случае использования обрезания и символизируют потерю инвариантности относительно калибровочных преобразований фонового поля. Коэффициенты зависят от регуляризующей функции $f(\cdot)$.

Комментарий 5. Заметим, что в теореме все коэффициенты с логарифмическими сингулярностями снабжены дополнительными свободными константами, которые могут фиксироваться исходя из выбора схемы вычитания. При этом слагаемые со степенными сингулярностями не имеют таких добавок. Такой выбор не является важным и используется авторами исключительно для удобства вычислений в следующих поправках. При необходимости свободную константу можно добавить.

Доказательство. Следуя формулировке, разделим решение уравнений на три части.

Первая часть. Равенство нулю сингулярной части для первой квантовой ренормированной поправки (49) сводится к поиску сингулярностей для « $\ln \det$ » и дальнейшему выбору коэффициента a_0 и вспомогательного функционала \hat{W}_1^0 таким образом, чтобы результат был конечным. В секции 6 исследованы детерминанты с помощью явных пертурбативных формул (62) и (70). Результаты состоят из двух частей:

$$\begin{aligned} \ln \det(G_0|_{\text{reg.}}) &\longrightarrow \text{см. формулу (68);} \\ \ln \det(G_1|_{\text{reg.}}) &\longrightarrow \text{см. формулу (72).} \end{aligned}$$

Подставляя полученные результаты в (49) и приравнявая сингулярную часть к нулю, получаем уравнение вида

$$-\frac{c_2 \Lambda^2 (\rho_3 - 2\rho_0)}{8\pi^2} S_2[B] - \frac{11c_2 L}{96\pi^2} W_{-1}[B] + \frac{1}{4} \left(a_0 W_{-1}[B] + \hat{W}_1^0[B] \right) \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0,$$

где $L = \ln(\Lambda/\sigma)$. Решая данное линейное уравнение, получаем ответы, указанные в формулировке.

Вторая часть. Равенство нулю сингулярной части для первой вариации по полю, отвечающему за калибровочное условие, сводится к вариации детерминантов, которые, в свою очередь, сводятся

к вычислению однопетлевых вкладов $\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(V_1)$ и $\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(V_2)$. Они изучены в секции 6, и результаты представлены в формулах:

$$\begin{aligned} -\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(V_1) &= \int_{\mathbb{R}^4} d^4z e_\mu^g(z) \left(\frac{\delta}{\delta e_\mu^g(z)} \ln \det(\mathfrak{G}_0|_{\text{reg.}}) \Big|_{e=B} \right) \longrightarrow \text{см. формулу (69);} \\ 2\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(V_2) &= \int_{\mathbb{R}^4} d^4z e_\mu^g(z) \left(\frac{\delta}{\delta e_\mu^g(z)} \ln \det(\mathfrak{G}_1|_{\text{reg.}}) \Big|_{e=B} \right) \longrightarrow \text{см. формулу (74).} \end{aligned}$$

Подставляя полученные соотношения в (51) и приравнявая сингулярную часть к нулю, получаем уравнение вида

$$\frac{1}{4} \hat{W}_1^1[B, \varepsilon] - \frac{c_2 L}{8\pi^2} \Gamma_1[\varepsilon] \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0$$

из которого следует заявленный ответ.

Третья часть. Рассмотрим вторую поправку для действия на диагонали. В этом случае удобно отдельно изучить линейную комбинацию стандартных диаграмм:

$$-\frac{1}{2} \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2) + \frac{1}{4} \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_4) - \frac{1}{2} \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Omega_3^2) \longrightarrow \text{см. формулу (130).}$$

Дополнительно подставим в полученное соотношение результаты (121) и (122) для нелокальных частей, используя определения для контрвершин

$$\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(S_2[\cdot]) = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x G_{1\rho\rho}^{aa}(x, x), \quad \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(S_f[\cdot, B]) = - \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(D_\rho^{bc}(x) D_\sigma^{ca}(x) G_{1\sigma\rho}^{ab}(x, y) \right) \Big|_{y=x}.$$

Тогда после подстановок и приведения подобных получим уравнение вида

$$\begin{aligned} & - \frac{\Lambda^2 c_2 (2\rho_3 - 3\rho_0)}{8\pi^2} \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(S_2[\cdot]) + \frac{5Lc_2}{48\pi^2} \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(S_f[\cdot, B]) + \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\hat{\Gamma}_2^0) \\ & - \frac{c_2^2 W_{-1} L}{32(4\pi^2)^2} (13 + 68\rho_2/3 - 64\rho_4) + \frac{c_2^2 W_{-1}^+ L}{32(4\pi^2)^2} (2\rho_2 - 1/2) \\ & + 2J_\ominus + \frac{c_2 \rho_3 \Lambda^2 J_\ominus}{\pi^2} - \frac{5Lc_2}{48\pi^2} J_\otimes + \frac{1}{4} (a_1 W_{-1} + \hat{W}_2^0) + \kappa_1' \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0. \quad (56) \end{aligned}$$

Из равенства нулю сингулярной части мгновенно следует ответ для вершины $\hat{\Gamma}_2^0[B, a]$, поэтому первую строку можно исключить из соотношения. Далее, вторая строка имеет подходящий вид в виде суммы классического действия и одной его специальной части, см. (131). Поэтому далее необходимо воспользоваться подсчетами для оставшихся диаграмм:

$$\begin{aligned} J_\otimes &\longrightarrow \text{см. формулу (127);} \\ J_\ominus &\longrightarrow \text{см. формулу (128);} \\ J_\ominus &\longrightarrow \text{см. формулу (129).} \end{aligned}$$

Суммируя и подставляя в (56), получаем заявленные ответы для $a_1(\Lambda)$ и $\hat{W}_2^0[B]$. Теорема доказана.

5 Слабая деформация

5.1 Общие соображения

В секции 4 был представлен вариант сильной деформации, который заключался в вероятностном усреднении полей флуктуации, см. формулу (31). Одной из проблем, связанной с таким подходом, являлась потеря инвариантности относительно калибровочных преобразований фонового поля B_μ^a .

Именно из-за этого факта на уровне уже второй квантовой поправки, см. теорему 1 в секции 4.7, сингулярный вклад, пропорциональный классическому действию W_{-1} , расщеплялся на несколько частей W_{-1}^i . Это свидетельствует о значительном усложнении процесса перенормировки, поскольку существенно ограничивает возможности использования «простых»³⁹ разложений для функций Грина, сводя их фактически к нулю.

В данной секции предлагается альтернативный подход к введению регуляризации, который заключается в деформации полей флуктуации посредством действия на них специальным калибровочно инвариантным оператором, зависящим от B_μ^a . При этом в главном порядке при разложении по «малым» полям такой оператор воспроизводит вероятностное усреднение из секции 4.1. Такая деформация будет называться слабой по двум причинам. Во-первых, она не приводит⁴⁰ к регуляризации первой петли, то есть « $\ln \det$ ». Для этих целей следует пользоваться, к примеру, регуляризацией теплового ядра, см. секцию 6.2 в [115] и секцию В в [119], или аналитическим продолжением ζ -функции [120]. Аналогичная ситуация возникает и в других регуляризациях, см. в [121]. Во-вторых, такая регуляризация дополнительно деформирует связь квантового действия и плотности квантового уравнения движения, что приводит к дополнительным трудностям пересчета.

Тем не менее подход со слабой деформацией весьма привлекателен с точки зрения многопетлевых подсчетов. Связано это в первую очередь с тем, что элементарные блоки, из которых состоят диаграммы Фейнмана, являются инвариантными относительно калибровочных преобразований фонового поля B_μ^a . Мгновенным следствием этого факта являются следующие важные свойства.

1. Логарифмические локальные вклады пропорциональны только $W_{-1}[B]$.
2. Степенные локальные вклады отсутствуют.

Такие ограничения существенно упрощают процесс подсчета и позволяют заменить разложение для функций Грина около диагонали на более простые функции. Такой процесс подробно описан в секции 8, посвященной изучению «двух петель».

5.2 Регуляризация

Обсудим процесс введения регуляризации. Для этого воспользуемся формулировками двух способов для случая сильной деформации из секции 4.2 и скорректируем их. Это возможно, так как по построению для случая слабых (малых) полей в главном порядке должен воспроизводиться «сильный» случай.

Первый способ. Сформулируем правила деформации функций Грина. Для этого, как и в секции 4.2, выберем в качестве ядра усреднения кусочно непрерывную функцию $\omega(\cdot)$ с теми же свойствами⁴¹. Далее заметим, что двойное усреднение свободной функции Грина, описываемое переходом (27) с применением интегрального оператора и сводящееся к усреднению осциллирующей экспоненты, можно переписать в операторном виде следующим образом⁴²

$$\int_{\mathbb{R}^4} d^4 y \int_{\mathbb{R}^4} d^4 z \omega(|y|) \omega(|z|) e^{ik \cdot (x+y/\Lambda+z/\Lambda)} = \hat{\Omega}^2(r/\Lambda) \Big|_{r^2=A_0(x)} e^{ik \cdot x}, \quad (57)$$

где $r = |x|$, $A_0(x) = -\partial_{x_\mu} \partial_{x^\mu}$, который в гиперсферических координатах равен $-r^{-3} \partial_r r^3 \partial_r$ для случая сферически симметричных функций, а также вспомогательная функция

$$\hat{\Omega}(r) = 2S_3 \int_0^1 dt t^2 \omega(t) J_1(tr)/r. \quad (58)$$

³⁹Имеется в виду исключение из разложений для функции Грина слагаемых, которые заведомо не приведут к сингулярным составляющим. См. для примера секцию 8.1.

⁴⁰Гипотетически деформацию можно подобрать таким образом, чтобы первая петля также была регуляризована. То есть чтобы рост собственных значений компенсировался убыванием регуляризованной спектральной плотности. Однако этот факт авторам не удалось изучить достаточно хорошо.

⁴¹Обобщение свойств можно найти в [58, 60].

⁴²Правую часть (57) необходимо понимать в операторном смысле. То есть ряд Тейлора по степеням оператора. Заметим, что в разложении возникают только четные степени.

Обратим внимание, что для последнего перехода была использована формула (20) из [57]. Далее, возвращаясь к функциям Грина, определим деформации следующим образом

$$G_0^{\Lambda, ab}(x, y) = \left(\hat{\Omega}^2(r/\Lambda) \Big|_{r^2=M_0(x)} \right)^{ac} G_0^{cb}(x, y), \quad (59)$$

а также

$$G_{1\sigma\rho}^{\Lambda, ab}(x, y) = \delta_{\sigma\rho} G_0^{\Lambda, ab}(x, y) + \sum_{k=1}^{+\infty} 2^k \int_{\mathbb{R}^{4 \times k}} d^4 z_1 \dots d^4 z_k G_0^{\Lambda, ad_1}(x, z_1) \times \\ \times F_{\sigma\mu_1}^{d_1 c_1}(z_1) G_0^{\Lambda, c_1 d_2}(z_1, z_2) \times \dots \times F_{\mu_k \rho}^{d_k c_k}(z_k) G_0^{\Lambda, c_k b}(z_k, y),$$

Из построения следует, что функции изменяются ковариантным образом относительно калибровочного преобразования (16), так как строятся по калибровочно инвариантному оператору $M_0^{ab}(x)$, а их разложение около диагонали для специального случая полей ранее уже было изучено в работе [57], см. секцию 4.1.

Второй способ. Укажем дополнительно альтернативный взгляд на введение оператора (59). Он полностью аналогичен тому, который был описан в секции 4.2, поэтому обратим внимание лишь на два ключевых изменения.

1. Поля флуктуации и дѹховые поля изменяются не под действием усредняющего оператора (31), а при помощи операторной функции (58). К примеру, деформированные флуктуации имеют вид

$$a_\mu^{\Lambda, a}(x) = \left(\hat{\Omega}(r/\Lambda) \Big|_{r^2=M_0(x)} \right)^{ab} a_\mu^b(x). \quad (60)$$

Поля c^a , \bar{c}^a изменяются аналогичным образом.

2. Замена из первого пункта применяется ко всем полям, кроме тех, которые стоят в квадратичной форме с оператором M_0 , то есть в

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x a_\mu^a(x) M_0^{ab}(x) a_\mu^b(x) + \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x \bar{c}^a(x) M_0^{ab}(x) c^b(x).$$

Раскладывая действие в пертурбативный ряд, можно убедиться, что последние правила эквивалентны переходу к деформированным функциям Грина (59) и (8).

О детерминанте. Как это уже отмечалось в секции 5.2, предложенный подход с ковариантным деформирующим оператором не гарантирует регуляризацию первой поправки с «ln det». Для этих целей следует использовать дополнительную регуляризацию, которая может быть введена либо в рамках метода теплового ядра, к примеру, при помощи аналитического продолжения или же обреза, либо простым делением и домножением (деформацией меры функционального интеграла). Поскольку в данной работе изучаются именно сингулярные части, а сингулярность в первой поправке не зависит от регуляризации, то для дальнейшего достаточно иметь лишь соотношение

$$\ln \det (G_0/G_0|_{B=0}) \Big|_{\text{reg.}} \stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{c_2 L}{96\pi^2} W_{-1}[B]. \quad (61)$$

Как и следовало ожидать, вклад не содержит степенных по Λ частей, так как величина инвариантна относительно калибровочных преобразований фонового поля.

Расширение. Далее заметим, что для введения регуляризации не обязательно использовать именно фоновое поле B_μ^a , можно выбрать и другое r_μ^a , которое при калибровочных преобразованиях изменяется так же, как и фоновое. Разумеется, при подсчетах сингулярных частей для квантового действия важен именно конкретный выбор $r_\mu^a = B_\mu^a$. Однако при попытках подсчета вариации по

полю из деформирующего оператора возникает необходимость различать поля. Для этих целей, к примеру, удобно выбрать $r_\mu^a = B_\mu^a + \varepsilon_\mu^a$, тогда

$$\left. \frac{\delta}{\delta r_\mu^a(x)} \right|_{r=B} = \left. \frac{\delta}{\delta \varepsilon_\mu^a(x)} \right|_{\varepsilon=0}.$$

В связи с этим расширим обозначение для регуляризованного квантового действия, добавив третий аргумент, который отвечает за поле в регуляризующем операторе. Таким образом, сильно связанная часть (14), регуляризованная выше предложенной процедурой с $B_\mu^a \rightarrow r_\mu^a$, далее обозначается символом

$$W_{\text{reg}}^{\text{sc}}[B, e, r], \text{ а также } W_{\text{reg}}^{\text{sc}}[B] \equiv W_{\text{reg}}^{\text{sc}}[B, B, B].$$

5.3 Ситуация около диагонали

Проблематика. В случае слабой деформации вариация квантового действия по фоновому полю на диагонали, см. (32), усложняется, поскольку деформирующий оператор дополнительно зависит от вспомогательного поля $r_\mu^a(x)$. Таким образом, первая вариация действия на диагонали, которая в данном случае характеризуется условием $r_\mu^a = e_\mu^a = B_\mu^a$, описывается формулой

$$\frac{\delta W_{\text{reg}}^{\text{sc}}[B]}{\delta B_\mu^a(x)} = \left. \frac{\delta W_{\text{reg}}^{\text{sc}}[B, e, r]}{\delta B_\mu^a(x)} \right|_{r=e=B} + \left. \frac{\delta W_{\text{reg}}^{\text{sc}}[B, e, B]}{\delta e_\mu^a(x)} \right|_{e=B} + \left. \frac{\delta W_{\text{reg}}^{\text{sc}}[B, B, r]}{\delta r_\mu^a(x)} \right|_{r=B},$$

в которой только первое слагаемое равно плотности регуляризованного квантового уравнения движения. Еще раз обратим внимание, что поскольку действие зависит от регуляризующего оператора $\hat{\Omega}$, то в общем случае выполняется неравенство

$$\left. \frac{\delta W_{\text{reg}}^{\text{sc}}[B, e, B]}{\delta B_\mu^a(x)} \right|_{e=B} \neq \left. \frac{\delta W_{\text{reg}}^{\text{sc}}[B, e, r]}{\delta B_\mu^a(x)} \right|_{r=e=B} \equiv Q_\mu^a|_{\text{reg.}}[B](x).$$

Таким образом, для пересчета величин перенормировки от квантового действия к плотности уравнения движения необходимо отслеживать не только вариацию по e_μ^a , сингулярная часть которой в случае сильной деформации определяет вспомогательный ток $j_\mu^a(x)$, см. (46), но и вариацию по r_μ^a . В такой постановке задача существенно усложняется, поэтому легче вычислять не обе вариации, а сингулярности для квантового уравнения напрямую. То есть помимо перенормировки квантового действия параллельно необходимо также изучать и перенормировку объекта $Q_\mu^a|_{\text{reg.}}[B](x)$.

Ренормировка. С учетом последних замечаний уточним, что именно будет пониматься под перенормировкой квантового действия и уравнения движения. Во-первых, рассмотрим поля r_μ^a и e_μ^a , равные⁴³ между собой и близкие к фоновому полю, то есть

$$r_\mu^a(x) = e_\mu^a(x) = B_\mu^a(x) + \varepsilon_\mu^a.$$

Тогда ренормировка пары $W_{\text{reg}}^{\text{sc}}[B]$ и $Q_\mu^a|_{\text{reg.}}[B]$ заключается в сдвиге константы связи $g \rightarrow g_\Lambda$, которая выражается в виде ряда через ренормированную константу

$$\frac{1}{g_\Lambda} = \frac{1}{g_{\text{ren}}^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(\Lambda) g_{\text{ren}}^{2k},$$

и прибавлении к классическому действию набора вспомогательных слагаемых, как это было сделано в случае сильной деформации, см. (35). Однако, учитывая инвариантность относительно калибровочных преобразований фонового поля, слагаемые можно выписать в более простом виде

$$\left(\sum_{k=2}^{+\infty} g^k \hat{\Gamma}_k^0[B, a] \right) + \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \varepsilon_\mu^a(x) j_\mu^a(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

⁴³В общем случае равенства нет. Такой выбор удобен для дальнейшего вычисления.

где вспомогательный ток $j_\mu^a(x)$, с учетом явного вида для одинарной вершины $\Gamma_1[a]$ из (2), определяется равенством

$$\int_{\mathbb{R}^4} d^4x \varepsilon_\mu^a(x) j_\mu^a(x) = \frac{\Gamma_1[\varepsilon]}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} g^{2k-2} w_k(\Lambda) + \sum_{k=2}^{+\infty} g^k \hat{\Gamma}_k^1[B, a].$$

Обратим внимание, какие величины в этом случае находятся после выполнения перенормировок:

$$\begin{aligned} W_{\text{reg}}^{\text{sc}}[B] &\longrightarrow \{a_k, \hat{\Gamma}_{k+2}^0\}_{k=0}^{+\infty}; \\ \{a_k, \hat{\Gamma}_{k+2}^0\}_{k=0}^{+\infty} + Q_\mu^a|_{\text{reg.}}[B](x) &\longrightarrow \{w_k, \hat{\Gamma}_{k+1}^1\}_{k=1}^{+\infty}, \end{aligned}$$

где на последнем шаге набор ренормировочных данных получается из рассмотрения разности двух изученных объектов

$$\left. \frac{\delta W_{\text{reg}}^{\text{sc}}[B, B + \varepsilon, B + \varepsilon]}{\delta \varepsilon_\mu^a(x)} \right|_{\varepsilon=0} = \frac{\delta W_{\text{reg}}^{\text{sc}}[B]}{\delta B_\mu^a(x)} - Q_\mu^a|_{\text{reg.}}[B](x).$$

Причем последовательность аналогична той, что была в секции 4.5, см. формулы (43) и (44). Анзатц выглядит значительно проще формулы (35), поскольку регуляризация вводится ковариантно. Именно по этой причине функционалы \hat{W}_k^1 выписаны явно $w_k \Gamma_1[\varepsilon]$. Таким образом, необходимо искать коэффициент пропорциональности w_k , а не функционал и его вид.

5.4 Что вычисляем?

Введем в рассмотрение коэффициенты разложений для перенормированного квантового действия на диагонали и его первой вариации по второму аргументу, также на диагонали. Формально они те же, что и в формулах (47) и (48), поэтому для удобства воспользуемся теми же обозначениями. Для уточнения, в «слабом» случае имеется также и третий аргумент, он выбран $r_\mu^a = B_\mu^a$. Сами коэффициенты имеют тот же вид⁴⁴, что и в (49), (50) и (51).

Основной задачей данной секции является перенормировка квантового действия на диагонали с учетом первых двух поправок, а также демонстрация того факта, что вариация по деформирующему оператору в рамках первой квантовой поправки не содержит сингулярных частей. Таким образом, планируется вычислить следующие величины:

$$\begin{aligned} \text{1-я поправка для } W_{\text{ren}}^{\text{sc}} &\longrightarrow \text{ответ для } a_0; \\ \text{1-я поправка для } \dot{W}_{\text{ren}}^{\text{sc}} &\longrightarrow \text{ответ для } w_1; \\ \text{2-я поправка для } W_{\text{ren}}^{\text{sc}} &\longrightarrow \text{ответы для } \hat{\Gamma}_2^0 \text{ и } a_1. \end{aligned}$$

А также дополнительно доказать равенство в смысле формальных рядов по константе связи

$$\left. \frac{\delta W_{\text{reg}}^{\text{sc}}[B]}{\delta B_\mu^a(x)} - Q_\mu^a|_{\text{reg.}}[B](x) - \frac{\delta W_{\text{reg}}^{\text{sc}}[B, e, B]}{\delta e_\mu^a(x)} \right|_{e=B} \stackrel{\text{s.p.}}{=} \mathcal{O}(g^2).$$

5.5 Результаты

Теорема 2. Пусть выполнены все предположения, сформулированные выше в секции 4. Пусть также $L = \ln(\Lambda/\sigma)$, где Λ является параметром регуляризации, а $\sigma > 0$ безразмеризующим вспомогательным фиксированным параметром. Определим дополнительно функционалы

$$S_2[B] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x B_\mu^a(x) B_\mu^a(x), \quad S_f[a, e] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(D_\mu^{ab}(x) a_\mu^b(x) \right) \left(\mathfrak{D}_\nu^{ac}(x) a_\nu^c(x) \right),$$

⁴⁴Обратим внимание, что оператор \mathbb{H} соединяет вершины регуляризованными функциями Грина. В сильном и слабом случаях они разные, см. для сравнения (30) и (59).

и несколько вспомогательных чисел, зависящих от регуляризованного свободного фундаментального решения $R_0^1(x)$, см. (28),

$$\begin{aligned}\frac{\rho_0}{4\pi^2} &= R_0^1(0), \quad \frac{\rho_3}{4\pi^2} = \int_{B_1} d^4x R_0^1(x) A_0(x) R_0^1(x), \quad \frac{2\rho_4}{\pi^2} = \int_{B_1} d^4x R_0^1(x) |x|^2 A_0(x) R_0^1(x), \\ \frac{\rho_2}{8\pi^2} &= \int_{B_1} d^4x A_0(x) R_0^1(x) \int_{\mathbb{R}^4} d^4y \left(R_0^1(x-y) R_0^1(y) - R_0^1(y) R_0^1(y) \right).\end{aligned}$$

Пусть также числа \tilde{a} и $\{\tilde{a}_i, \tilde{b}_i\}_{i=0,1}$ обозначают произвольные конечные элементы из \mathbb{R} . Тогда представленные равенства (54) и (55) приводят к следующим коэффициентам и вспомогательным вершинам.

$$\begin{aligned}1) \quad W_0^\Lambda \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0 &\implies a_0(\Lambda) = \frac{11c_2L}{24\pi^2} + \tilde{a}_0. \\ 2) \quad \dot{W}_0^\Lambda \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0 &\implies \omega_1(\Lambda) = \frac{c_2L}{2\pi^2} + \tilde{b}_0. \\ 3) \quad W_1^\Lambda \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0 &\implies \hat{\Gamma}_2^0[B] = \frac{\Lambda^2 c_2 (2\rho_3 - 3\rho_0)}{8\pi^2} S_2[a] - \left(\frac{5Lc_2}{48\pi^2} + \tilde{b}_1 \right) S_f[a, B], \\ a_1(\Lambda) &= \frac{c_2^2 L}{(4\pi)^4} \left(175/9 + 2^4 7 \rho_2 / 3 - 2^7 \rho_4 \right) + \tilde{a}_1.\end{aligned}$$

Комментарий 1. Как и в случае результата из теоремы 1, первый коэффициент a_1 имеет стандартное значение⁴⁵. Второй же коэффициент a_2 имеет отличное значение. В секции 8.5 произведено детальное сравнение со случаем размерной регуляризации. Было показано, что ответ для коэффициента строится из конечного набора мастер-интегралов. Они приведены в таблице 2. При этом в таблице 3 приведены результаты для отдельных диаграмм и их линейных комбинаций. Оказалось, что в случае размерной регуляризации происходит деформация коэффициентов, с которыми входят мастер-интегралы, в то время как в случае обрезания деформируются сами интегралы. Дополняет это замечание и тот факт, что при обрезании сингулярности для интегралов можно разбить на основную часть, которая переносится на «размерный» случай, и поправочную, которая по построению зависит от регуляризующей функции.

Комментарий 2. Коэффициент w_1 имеет стандартный вид, более подробное сравнение произведено в аналогичном комментарии для теоремы 1.

Комментарий 3. Контрвершина $S_f[a, B]$ имеет также стандартный вид и обсуждается в аналогичном комментарии для теоремы 1.

Комментарий 4. Заметим, что контрслагаемое $S_2[B]$ со степенной сингулярностью Λ^2 отсутствует, что является следствием ковариантности регуляризованных объектов. Однако контрвершина $S_2[a]$ осталась и имеет тот же вид, что и в теореме 1. Такое слагаемое не нарушает калибровочную инвариантность, так как поле a_μ^a преобразуется по другому закону, см. (18).

Доказательство. Во многом подсчет повторяет процесс проверки утверждений теоремы 1, поэтому ограничимся комментариями. Следуя формулировке, разделим пояснение на три части.

Первая часть. Вычисление сингулярной части для «первой петли» производится в два этапа. Сперва необходимо воспользоваться тем фактом, что сингулярный вклад для детерминанта скалярного оператора M_0^{ab} в условиях слабой деформации задается равенством (61). Далее, следуя логике подсчета для «сильного» случая, сингулярную часть для векторного оператора удобно представить в виде суммы части, зависящей от скалярного оператора, и вклада, состоящего из потенциалов, см.

⁴⁵См. ссылки в комментариях к теореме 1.

(71). Учитывая тот факт, что в главном порядке функции Грина для обеих регуляризаций совпадают по построению, см. (30) и (59), то ответ диктуется формулой (72) без степенной добавки с $S_2[B]$. Рассматривая линейную комбинацию из правой части (49), получаем заявленный ответ.

Вторая часть. В данном случае необходимо вычислить сингулярную часть для диаграмм $-\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(V_1)$ и $-\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(V_2)$, см. доказательство теоремы 1 и определение (51). При этом подход с прямым вычислением вариаций детерминантов, как это было сделано в секции 6, не сработает, так как деформирующий оператор также зависит от фонового поля. Поэтому на первый взгляд необходим явный подсчет обеих диаграмм. Однако заметим, что сингулярная часть для второй диаграммы, после использования разложения около диагонали в виде (138) и определений (38) и (39), выписывается в виде

$$\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(V_2) \stackrel{\text{s.p.}}{=} -\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(V_1) - c_2\theta(0) \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \varepsilon_\mu^a(x) D_\nu^{ab}(x) F_{\nu\mu}^b(x),$$

где было использовано обозначение (77) для специальной функции $\theta(\cdot)$. Следовательно, интересующая комбинация из (51), с учетом (133), переписывается следующим образом

$$-\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(V_1) - \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(V_2) \stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{c_2 L}{8\pi^2} \Gamma_1[\varepsilon] = -\frac{1}{4} \hat{W}_1^1[B, \varepsilon].$$

Далее, учитывая переобозначение $\hat{W}_1^1[B, \varepsilon] = w_1 \Gamma_1[\varepsilon]$, получаем заявленный ответ.

Третья часть. В данном случае процесс доказательства практически идентичен третьему пункту доказательства теоремы 1. Главное отличие заключается в разложении функций Грина около диагонали, см. секцию 8.1. Это приводит к необходимости преобразовать ряд мелких вычислений, что изложено в секции 8.2, после чего линейная комбинация основных диаграмм принимает вид (143). Дополнительная контрдиаграмма приведена в секции 8.5, в то время как окончательные ответы для локальной части и контрдиаграмм выписаны в таблицах 1 и 3. Теорема доказана.

5.6 А что, если так?

С вычислительной точки зрения соблюдение согласованности перенормировки квантового действия с перенормировкой плотности из квантового уравнения движения, см. секции 4.5 и 5.3, существенно усложняет весь процесс. Действительно, ведь фактически необходимо перенормировать не один ряд, а два. А если соблюдать согласованность с большим числом вариационных производных действия, то задача становится еще труднее. В связи с этим возникает желание упростить алгоритм перенормировки, ограничившись работой лишь с квантовым действием. Но что в этом случае получится? Опишем кратко последовательность действий. Будем рассматривать квантовое действие сразу на диагонали, то есть

$$W_{\text{reg}}^{\text{sc}}[B] \equiv W_{\text{reg}}^{\text{sc}}[B, B, B] \text{ вместо } W_{\text{reg}}^{\text{sc}}[B, e, r].$$

Далее заменим стандартные сильно связные⁴⁶ регуляризованные функции⁴⁷ Грина

$$\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_k}^{a_1 \dots a_k}(x_1, \dots, x_k) = \left(\frac{\delta}{\delta B_{\mu_k}^{a_k}(x_k)} \cdot \dots \cdot \frac{\delta}{\delta B_{\mu_1}^{a_1}(x_1)} W_{\text{reg}}^{\text{sc}}[B, e, r] \right) \Bigg|_{r=e=B},$$

где $k \in \mathbb{N}$, деформированными аналогами вида

$$\hat{\Gamma}_{\mu_1 \dots \mu_k}^{a_1 \dots a_k}(x_1, \dots, x_k) = \frac{\delta}{\delta B_{\mu_k}^{a_k}(x_k)} \cdot \dots \cdot \frac{\delta}{\delta B_{\mu_1}^{a_1}(x_1)} W_{\text{reg}}^{\text{sc}}[B].$$

⁴⁶Этот факт проверяется с использованием функциональных соотношений из секции 4.2.

⁴⁷Здесь стоит обратить внимание, что речь идет о функциях с оторванными внешними линиями (или «импутированными ногами»).

К примеру, в этом случае плотность квантового уравнения движения заменяется полной производной

$$Q_\mu^a|_{\text{reg.}}[B](x) = \frac{\delta W_{\text{reg}}^{\text{sc}}[B, e, r]}{\delta B_\mu^a(x)} \Big|_{r=e=B} \longrightarrow \frac{\delta W_{\text{reg}}^{\text{sc}}[B]}{\delta B_\mu^a(x)}.$$

Далее обратим внимание на тот факт, что связанное квантовое действие может быть построено в виде суммы, в которой первым слагаемым является сильно связанное действие, а следующие части строятся по плотности из квантового уравнения и древесным диаграммам, в узлах которых сидят сильно связанные функции Грина, см. для примера (22). Таким образом, $W_{\text{reg}}^c[B]$ является функционалом, зависящим от набора $\{\Gamma\cdots\}$. Определим деформированное связанное действие $\hat{W}_{\text{reg}}^c[B]$ как функционал $W_{\text{reg}}^c[B]$, в котором была произведена замена $\{\Gamma\cdots\} \rightarrow \{\hat{\Gamma}\cdots\}$. В итоге, деформированное связанное действие строится по сильно связанному действию на диагонали $W_{\text{reg}}^{\text{sc}}[B]$. При этом решение $B_{d,\mu}^a$ деформированного квантового уравнения движения

$$\frac{\delta W_{\text{reg}}^{\text{sc}}[B]}{\delta B_\mu^a(x)} \Big|_{B=B_d} = 0,$$

вообще говоря, не совпадает с решением $B_{f,\mu}^a$ стандартного квантового уравнения. Тем не менее, в обеих ситуациях справедливы соотношения

$$\begin{aligned} W_{\text{reg}}^c[B_f] &= W_{\text{reg}}^{\text{sc}}[B_f], \\ \hat{W}_{\text{reg}}^c[B_d] &= W_{\text{reg}}^{\text{sc}}[B_d]. \end{aligned}$$

При этом равенства сильно связанных частей в обеих ситуациях нет. Здесь следует заметить, что с точки зрения процедуры нахождения экстремума решение $B_{d,\mu}^a$ является более естественным, так как минимизирует функционал, а не его часть. Таким образом, забывая о частных вариациях, вопрос перенормировки сужается на функционал $W_{\text{reg}}^{\text{sc}}[B]$, который преобразуется к $W_{\text{ren}}^{\text{sc}}[B]$, и по которому строится $\hat{W}_{\text{ren}}^c[B]$ с учетом выше описанных правил.

Несмотря на очевидный выигрыш в трудоемкости перенормировки, на данном пути появляются некоторые открытые вопросы. Во-первых, сильно ли отличаются решения $B_{f,\mu}^a$ и $B_{d,\mu}^a$? Ведь при отсутствии регуляризации они должны совпадать. В связи с чем непонятно, является ли их разность в каком-то смысле малой (по Λ). Во-вторых, вовсе не ясно, имеет ли новое ренормированное связанное действие формулировку с использованием функционального интеграла. Другими словами, можно ли дополнить (расширить) регуляризованное классическое действие (10) таким образом, чтобы оно воспроизводило $\hat{W}_{\text{ren}}^c[B]$?

6 Одна петля: сильный случай

6.1 Скалярный оператор

Начнем рассмотрение с определителя для оператора \mathfrak{G}_0 . Пертурбативная формула для такого объекта выписывается в виде, см. для справки [107] и скалярный случай в секции 4 из [64],

$$\begin{aligned} \ln \det (\mathfrak{G}_0/\mathfrak{G}_0|_{e=B=0})|_{\text{reg.}} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \int_{\mathbb{R}^{4 \times k}} d^4 z_1 \dots d^4 z_k (\mathfrak{M}_0^{ac_1}(z_1) + \delta^{ac_1} \partial_{z_1^\nu} \partial_{z_1^\nu}) R_0^\Lambda(z_1 - z_2) \times \dots \\ &\quad \times (\mathfrak{M}_0^{c_k a}(z_k) + \delta^{c_k a} \partial_{z_k^\nu} \partial_{z_k^\nu}) R_0^\Lambda(z_k - y) \Big|_{y=z_1}. \end{aligned} \quad (62)$$

Основная задача данного раздела заключается в двух вычислениях.

1. Найти сингулярную составляющую для случая $\mathfrak{G}_0 = G_0$.
2. Найти линейный вклад по полю e_μ^a в сингулярную составляющую для \mathfrak{G}_0 .

Первая часть. Данную вычислительную задачу удобно разбить на несколько частей. Сперва выпишем все возможные комбинации, появляющиеся в разложении (62) при $\mathfrak{G}_0 = G_0$, по степеням фонового поля. Для этого определим вспомогательную функцию вида

$$\hat{R}_0^\Lambda(x) = R_0^\Lambda(x)\eta(|x|, \sigma), \quad (63)$$

где $\eta(\cdot, \sigma)$ является монотонной гладкой срезкой, которая равна единице на $[0, 1/\sigma]$ и равна нулю на полубесконечном интервале $[1/\sigma + 1/\Lambda, +\infty)$. Далее выполним вычисления для каждой степени фонового поля.

Четвертая степень. Выпишем все возможные коэффициенты для интеграла

$$\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 z_1 B_\mu^{ab}(z_1) B_\nu^{bc}(z_1) B_\sigma^{cd}(z_1) B_\rho^{da}(z_1). \quad (64)$$

Сперва заметим, что сингулярную составляющую могут дать только части с функциями $\hat{R}_0^\Lambda(x)$. Далее, после замены $R_0^\Lambda(x) \rightarrow \hat{R}_0^\Lambda(x)$, необходимо переразложить гладкие поля около точки z_1 , а затем выполнить сдвиг $z_i \rightarrow z_i + z_1$ для всех остальных переменных. Тогда интересующие сингулярные вклады факторизуются на произведение конечного функционала (64), зависящего от фонового поля, на сингулярный коэффициент, построенный по функциям $\hat{R}_0^\Lambda(x)$. Прямым подсчетом можно убедиться, что возможно появление пяти комбинаций в качестве сингулярных коэффициентов

$$\begin{aligned} & 2^4 \int_{\mathbb{R}^{4 \times 3}} d^4 z_2 d^4 z_3 d^4 z_4 \hat{R}_0^\Lambda(z_2) \hat{R}_0^\Lambda(z_2 - z_3) \hat{R}_0^\Lambda(z_3 - z_4) \partial_{z_4^\mu} \partial_{z_4^\nu} \partial_{z_4^\sigma} \partial_{z_4^\rho} \hat{R}_0^\Lambda(z_4), \\ & -\delta_{\mu\nu} 2^4 3^{-1} \int_{\mathbb{R}^{4 \times 2}} d^4 z_2 d^4 z_3 \hat{R}_0^\Lambda(z_2) \hat{R}_0^\Lambda(z_2 - z_3) \partial_{z_3^\sigma} \partial_{z_3^\rho} \hat{R}_0^\Lambda(z_3), \\ & -\delta_{\nu\sigma} 2^4 3^{-1} \int_{\mathbb{R}^{4 \times 2}} d^4 z_2 d^4 z_3 \hat{R}_0^\Lambda(z_2) \hat{R}_0^\Lambda(z_2 - z_3) \partial_{z_3^\mu} \partial_{z_3^\rho} \hat{R}_0^\Lambda(z_3), \\ & -\delta_{\sigma\rho} 2^4 3^{-1} \int_{\mathbb{R}^{4 \times 2}} d^4 z_2 d^4 z_3 \hat{R}_0^\Lambda(z_2) \hat{R}_0^\Lambda(z_2 - z_3) \partial_{z_3^\mu} \partial_{z_3^\nu} \hat{R}_0^\Lambda(z_3), \\ & \delta_{\mu\nu} \delta_{\sigma\rho} 2 \int_{\mathbb{R}^4} d^4 z_2 \hat{R}_0^\Lambda(z_2) \hat{R}_0^\Lambda(z_2). \end{aligned}$$

Учитывая тот факт, что функция (63) является гладкой и имеет компактный носитель, перебраивания производных, выполненные выше, вполне аргументированы. Воспользуемся в последних равенствах формулами сферического⁴⁸ усреднения в четырехмерном пространстве

$$\int_{\mathbb{S}^3} d^3 \sigma(\hat{x}) \hat{x}^\mu \hat{x}^\nu = \frac{S_3}{4} \delta^{\mu\nu}, \quad \int_{\mathbb{S}^3} d^3 \sigma(\hat{x}) \hat{x}^\mu \hat{x}^\nu \hat{x}^\sigma \hat{x}^\rho = \frac{S_3}{4!} (\delta^{\mu\nu} \delta^{\sigma\rho} + \delta^{\mu\sigma} \delta^{\nu\rho} + \delta^{\mu\rho} \delta^{\nu\sigma}), \quad (65)$$

где $\hat{x}^\mu = x^\mu/|x|$, а также асимптотическими разложениями⁴⁹ для следующих интегралов

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{4 \times 3}} d^4 z_2 d^4 z_3 d^4 z_4 \hat{R}_0^\Lambda(z_2) \hat{R}_0^\Lambda(z_2 - z_3) A_0(z_3) \hat{R}_0^\Lambda(z_3 - z_4) A_0(z_4) \hat{R}_0^\Lambda(z_4) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{L}{8\pi^2}, \\ & \int_{\mathbb{R}^{4 \times 2}} d^4 z_2 d^4 z_3 \hat{R}_0^\Lambda(z_2) \hat{R}_0^\Lambda(z_2 - z_3) A_0(z_3) \hat{R}_0^\Lambda(z_3) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{L}{8\pi^2}, \\ & \int_{\mathbb{R}^4} d^4 z_2 \hat{R}_0^\Lambda(z_2) \hat{R}_0^\Lambda(z_2) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{L}{8\pi^2}, \end{aligned}$$

где $L = \ln(\Lambda/\sigma)$. Тогда, после подстановок и суммирования всех вкладов, окончательная комбинация выписывается в виде

$$-\frac{c_2 L}{96\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 z f^{aec} B_\mu^e(z) B_\nu^c(z) f^{adb} B_\mu^d(z) B_\nu^b(z).$$

⁴⁸ Далее символ \mathbb{S}^3 обозначает сферу единичного радиуса в \mathbb{R}^4 с центром в нуле.

⁴⁹ Главный порядок может быть найден при помощи следующего набора преобразований: масштабирование переменных на $1/\Lambda$, дифференцирование по Λ , обратная замена переменных, переход к пределу $\Lambda \rightarrow +\infty$, а также заключительное явное вычисление оставшегося упрощенного интеграла.

Третья степень. Проведем аналогичные вычисления для ситуации с третьей степенью фонового поля. Ясно, что в этом случае будут появляться только логарифмические особенности, при этом вместо четвертой степени фонового поля появится производная. Основным функционалом является

$$\frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 z_1 (\partial_{z_1^\mu} B_\nu^{ac}(z_1)) B_\sigma^{cd}(z_1) B_\rho^{da}(z_1).$$

При этом в качестве коэффициентов будут выступать следующие интегралы

$$\begin{aligned} & -2^2 \int_{\mathbb{R}^4 \times 2} d^4 z_2 d^4 z_3 \partial_{z_2^\rho} \hat{R}_0^\Lambda(z_2) \left(2(z_2 + z_1)^\mu \partial_{z_2^\nu} + \delta^{\mu\nu} \right) \hat{R}_0^\Lambda(z_2 - z_3) \partial_{z_3^\sigma} \hat{R}_0^\Lambda(z_3), \\ & -2^2 \int_{\mathbb{R}^4 \times 2} d^4 z_2 d^4 z_3 \partial_{z_2^\sigma} \hat{R}_0^\Lambda(z_2) \partial_{z_2^\rho} \hat{R}_0^\Lambda(z_2 - z_3) \left(2(z_3 + z_1)^\mu \partial_{z_3^\nu} + \delta^{\mu\nu} \right) \hat{R}_0^\Lambda(z_3). \end{aligned}$$

Заметим, что в ходе выписывания опускались некоторые слагаемые, содержащие $B_\mu^{cd}(z_1) B_\mu^{da}(z_1)$, так как они не приведут к сингулярному вкладу в финальном выражении из-за обнуления следа

$$(\partial_{z_1^\nu} B_\nu^{ac}(z_1)) B_\mu^{cd}(z_1) B_\mu^{da}(z_1) = 0.$$

По тем же соображениям можно убрать части с символом $\delta^{\mu\nu}$. Дополнительно, все слагаемые, содержащие множитель z_1 , также не дадут вклада вследствие наличия сферической симметрии

$$\int_{\mathbb{S}^3} d^3 \sigma(\hat{x}) \hat{x}^\mu = 0, \quad \int_{\mathbb{S}^3} d^3 \sigma(\hat{x}) \hat{x}^\mu \hat{x}^\nu \hat{x}^\sigma = 0. \quad (66)$$

Далее, пользуясь соотношениями (65) и замечая, что следующая комбинация приводит к нулю

$$(\partial_{z_1^\mu} B_\nu^{ac}(z_1)) B_\sigma^{cd}(z_1) B_\rho^{da}(z_1) \left(\delta^{\mu\nu} \delta^{\sigma\rho} + \delta^{\mu\sigma} \delta^{\nu\rho} + \delta^{\mu\rho} \delta^{\nu\sigma} \right) = 0,$$

получаем лишь один ненулевой коэффициент

$$\delta^{\mu\rho} 2^3 \int_{\mathbb{R}^4 \times 2} d^4 z_2 d^4 z_3 \partial_{z_2^\rho} \hat{R}_0^\Lambda(z_2) \hat{R}_0^\Lambda(z_2 - z_3) \partial_{z_3^\nu} \partial_{z_3^\sigma} \hat{R}_0^\Lambda(z_3) \stackrel{\text{s.p.}}{=} -\delta^{\mu\rho} \delta^{\nu\sigma} \frac{L}{4\pi^2}.$$

В итоге приходим к заключительному выражению вида

$$-\frac{c_2 L}{24\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 z (\partial_{z^\mu} B_\nu^a(z)) f^{adb} B_\mu^d(z) B_\nu^b(z).$$

Вторая степень. В данном случае возможны не только логарифмические сингулярности, когда появляются два фоновых поля и две производных, но также и степенные вклады, содержащие только два фоновых поля без производных. Рассмотрим первый случай, тогда для комбинации вида

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 z_1 (\partial_{z_1^\mu} B_\nu^{ac}(z_1)) (\partial_{z_1^\sigma} B_\rho^{ac}(z_1)) \quad (67)$$

возможны только следующие коэффициенты

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 z_2 \partial_{z_2^\nu} \hat{R}_0^\Lambda(z_2) \left(\partial_{z_2^\rho} z_2^\mu z_2^\sigma + z_2^\mu z_2^\sigma \partial_{z_2^\rho} \right) \hat{R}_0^\Lambda(z_2), \\ & -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 z_2 \hat{R}_0^\Lambda(z_2) \left(\partial_{z_2^\rho} z_2^\mu z_2^\sigma + z_2^\mu z_2^\sigma \partial_{z_2^\rho} \right) \partial_{z_2^\nu} \hat{R}_0^\Lambda(z_2). \end{aligned}$$

После интегрирования по частям приходим к представлению

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 z_2 \partial_{z_2^\nu} \hat{R}_0^\Lambda(z_2) \left(2\delta^{\rho\mu} z_2^\sigma + 2\delta^{\rho\sigma} z_2^\mu + 4z_2^\mu z_2^\sigma \partial_{z_2^\rho} \right) \hat{R}_0^\Lambda(z_2),$$

в котором уже можно пользоваться формулами усреднения (65). Введем обозначение $C(x)$ для оператора $x^\mu \partial_{x^\mu}$, тогда, пользуясь асимптотическими выражениями⁵⁰ для вспомогательных интегралов

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^4} d^4 z \left(C(z) \hat{R}_0^\Lambda(z) \right) \hat{R}_0^\Lambda(z) \stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{L}{4\pi^2}, \\ & \int_{\mathbb{R}^4} d^4 z \left(C(z) \hat{R}_0^\Lambda(z) \right) \left(C(z) \hat{R}_0^\Lambda(z_2) \right) \stackrel{\text{s.p.}}{=} +\frac{L}{2\pi^2}, \\ & \int_{\mathbb{R}^4} d^4 z \left(\partial_{z^\mu} \hat{R}_0^\Lambda(z) \right) |z|^2 \left(\partial_{z^\mu} \hat{R}_0^\Lambda(z) \right) \stackrel{\text{s.p.}}{=} +\frac{L}{2\pi^2}, \end{aligned}$$

получаем сингулярный коэффициент в виде

$$\frac{L}{48\pi^2} \left(-\delta^{\rho\mu} \delta^{\nu\sigma} - \delta^{\rho\sigma} \delta^{\nu\mu} + 2\delta^{\mu\sigma} \delta^{\nu\rho} \right).$$

Таким образом, логарифмический вклад с функционалом (67) записывается следующим образом

$$-\frac{c_2 L}{48\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 z \left(\partial_{z^\mu} B_\nu^a(z) \right) \left(\partial_{z^\mu} B_\nu^a(z) - \partial_{z^\nu} B_\mu^a(z) \right).$$

Возвращаясь к вкладу степенного поведения, получаем ответ в виде

$$\frac{c_2 \Lambda^2}{2} \left(\int_{\mathbb{R}^4} d^4 z B_\nu^a(z) B_\nu^a(z) \right) \left(\int_{B_1} d^4 x \hat{R}_0^1(x) A_0(x) \hat{R}_0^1(x) - 2\hat{R}_0^1(0) \right).$$

Далее воспользуемся вспомогательными обозначениями из секции 7.8

$$\frac{\rho_0}{4\pi^2} = R_0^1(0), \quad \frac{\rho_3}{4\pi^2} = \int_{B_1} d^4 x R_0^1(x) A_0(x) R_0^1(x).$$

Тогда, выполняя завершающие подстановки и суммируя все изложенные выше ответы, приходим к соотношению вида

$$\ln \det (G_0/G_0|_{B=0}) \Big|_{\text{reg.}} \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{c_2 \Lambda^2 (\rho_3 - 2\rho_0)}{8\pi^2} S_2[B] - \frac{c_2 L}{96\pi^2} W_{-1}[B]. \quad (68)$$

Вторая часть. Вычисление вклада, линейного по полю из калибровочного условия, можно значительно упростить. Для этого сперва следует выписать вариации по фоновому полю B_μ^a и по полю e_μ^a для соответствующего детерминанта в точке $e_\mu^a = B_\mu^a$. Используя формулу (26) и выполняя аналогичное вычисление, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta B_\mu^g(z)} \ln \det(\mathfrak{G}_0|_{\text{reg.}}) \Big|_{e=B} &= -D_\mu^{cd}(z) G_0^{ad}|_{\text{reg.}}(x, z) \Big|_{x=z} f^{cga}, \\ \frac{\delta}{\delta e_\mu^g(z)} \ln \det(\mathfrak{G}_0|_{\text{reg.}}) \Big|_{e=B} &= +D_\mu^{cd}(z) G_0^{da}|_{\text{reg.}}(z, x) \Big|_{x=z} f^{agc}. \end{aligned}$$

Далее сделаем два важных наблюдения.

1. Во-первых, их сумма равна вариации $\ln \det(G_0|_{\text{reg.}})$ по $B_\mu^g(z)$.
2. Во-вторых, функции равны из-за симметричности ядра $G_0^{ab}(x, y) = G_0^{ba}(y, x)$.

Таким образом, вычисляя вариацию для (68) и умножая на $1/2$, получаем окончательный ответ в виде

$$\int_{\mathbb{R}^4} d^4 z e_\mu^g(z) \left(\frac{\delta}{\delta e_\mu^g(z)} \ln \det(\mathfrak{G}_0|_{\text{reg.}}) \Big|_{e=B} \right) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{c_2 \Lambda^2 (\rho_3 - 2\rho_0)}{8\pi^2} \left(\int_{\mathbb{R}^4} d^4 z e_\nu^a(z) B_\nu^a(z) \right) - \frac{c_2 L}{48\pi^2} \Gamma_1[e]. \quad (69)$$

⁵⁰Они могут быть получены тем же методом, который использовался при анализе интегралов в случае четвертой степени фонового поля.

6.2 Векторный оператор

Перейдем к рассмотрению определителя для регуляризованного оператора \mathfrak{G}_1 . Пертурбативная формула для такого объекта выписывается аналогичным образом в виде

$$\ln \det (\mathfrak{G}_1/\mathfrak{G}_1|_{e=B=0})|_{\text{reg.}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \int_{\mathbb{R}^{4 \times k}} d^4 z_1 \dots d^4 z_k (\mathfrak{M}_{1\nu\mu_1}^{ac_1}(z_1) + \delta^{ac_1} \delta_{\nu\mu_1} \partial_{z_1^\nu} \partial_{z_1^\mu}) R_0^\Lambda(z_1 - z_2) \times \dots \times (\mathfrak{M}_{1\mu_k\nu}^{c_k a}(z_k) + \delta^{c_k b} \delta_{\mu_k\nu} \partial_{z_k^\nu} \partial_{z_k^\mu}) R_0^\Lambda(z_k - y)|_{y=z_1}. \quad (70)$$

Основная задача данного раздела заключается также в двух вычислениях.

1. Найти сингулярную составляющую для случая $\mathfrak{G}_1 = G_1$.
2. Найти линейный вклад по полю e_μ^a в сингулярную составляющую для \mathfrak{G}_1 .

Первая часть. Для подсчета удобно воспользоваться полученным ранее ответом (68) для скалярного оператора. Действительно, учитывая соотношение $F_{\mu\mu}^a(z) = 0$, получаем следующее разложение

$$\ln \det (G_1/G_1|_{B=0})|_{\text{reg.}} \stackrel{\text{s.p.}}{=} 4 \ln \det (G_0/G_0|_{B=0})|_{\text{reg.}} + 2 \int_{\mathbb{R}^{4 \times 2}} d^4 z_1 d^4 z_2 F_{\mu\nu}^{ac}(z_1) R_0^\Lambda(z_1 - z_2) F_{\nu\mu}^{ca}(z_2) R_0^\Lambda(z_2 - z_1). \quad (71)$$

Выполняя сдвиг переменной во втором слагаемом, оставляя лишь сингулярную часть коэффициента и используя результат (68), получаем ответ в виде

$$\ln \det (G_1/G_1|_{B=0})|_{\text{reg.}} \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{c_2 \Lambda^2 (\rho_3 - 2\rho_0)}{2\pi^2} S_2[B] + \frac{5c_2 L}{24\pi^2} W_{-1}. \quad (72)$$

Вторая часть. Пользуясь определением оператора (8), выпишем формулу для первой функциональной производной

$$\left. \frac{\delta}{\delta e_\mu^g(z)} \ln \det (\mathfrak{G}_1|_{\text{reg.}}) \right|_{e=B} = 2 f^{agc} D_\nu^{cd}(z) G_{1\nu\mu}^{da}(z, x)|_{x=z}. \quad (73)$$

Далее замечаем, что удобно воспользоваться разложением функции Грина по степеням тензора напряженности. В этом случае сингулярный вклад в правую часть (73) могут дать только следующие пять слагаемых

$$\begin{aligned} & 2 f^{agc} D_\mu^{cd}(z) G_0^{da}(z, x)|_{x=z} \\ & + 8 f^{agc} \partial_{z^\nu} \int_{\mathbb{R}^{4 \times 2}} d^4 z_2 d^4 z_3 \hat{R}_0^\Lambda(z - z_2) B_\sigma^{cd}(z_2) \partial_{z_2^\sigma} \hat{R}_0^\Lambda(z_2 - z_3) F_{\nu\mu}^{da}(z_3) \hat{R}_0^\Lambda(z_3 - x)|_{x=z} \\ & + 8 f^{agc} \partial_{z^\nu} \int_{\mathbb{R}^{4 \times 2}} d^4 z_2 d^4 z_3 \hat{R}_0^\Lambda(z - z_2) F_{\nu\mu}^{cd}(z_2) \hat{R}_0^\Lambda(z_2 - z_3) B_\sigma^{da}(z_3) \partial_{z_3^\sigma} \hat{R}_0^\Lambda(z_3 - x)|_{x=z} \\ & + 4 f^{agc} \partial_{z^\nu} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 z_2 \hat{R}_0^\Lambda(z - z_2) F_{\nu\mu}^{ca}(z_2) \hat{R}_0^\Lambda(z_2 - x)|_{x=z} \\ & + 4 f^{agc} B_\nu^{cd}(z) \int_{\mathbb{R}^4} d^4 z_2 \hat{R}_0^\Lambda(z - z_2) F_{\nu\mu}^{da}(z_2) \hat{R}_0^\Lambda(z_2 - x)|_{x=z}. \end{aligned}$$

Заметим, что первая часть равна удвоенной вариации (69) по полю e_μ^a , остальные же слагаемые вычисляются уже использованными ранее формулами, см. вспомогательные интегралы для вычисления коэффициентов с функционалом (64). Собирая все части вместе, получаем результат

$$\frac{c_2 \Lambda^2 (\rho_3 - 2\rho_0)}{4\pi^2} B_\mu^a(z) - \frac{5c_2 L}{24\pi^2} D_\nu^{ga}(z) F_{\nu\mu}^a(z),$$

что приводит к окончательному ответу вида

$$\int_{\mathbb{R}^4} d^4 z e_\mu^g(z) \left(\left. \frac{\delta}{\delta e_\mu^g(z)} \ln \det (\mathfrak{G}_1|_{\text{reg.}}) \right|_{e=B} \right) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{c_2 \Lambda^2 (\rho_3 - 2\rho_0)}{4\pi^2} \left(\int_{\mathbb{R}^4} d^4 z e_\nu^a(z) B_\nu^a(z) \right) + \frac{5c_2 L}{24\pi^2} \Gamma_1[e]. \quad (74)$$

7 Две петли: сильный случай

7.1 Разложение функции Грина

Векторная функция. Для дальнейших вычислений удобно пользоваться вспомогательными разложениями для функции Грина, как для скалярной \mathfrak{G}_0^Λ , так и для векторной \mathfrak{G}_1^Λ . Здесь и далее верхний индекс Λ обозначает наличие регуляризации. При этом обратим внимание, что поле e_μ^a , отвечающее за фиксацию калибровочного условия, выбрано равным фоновому полю B_μ^a . Поэтому $\mathfrak{G}_0^\Lambda \rightarrow G_0^\Lambda$ и $\mathfrak{G}_1^\Lambda \rightarrow G_1^\Lambda$, см. (11) и (12). Итак, разложим функцию $G_{1\mu\nu}^{\Lambda ab}(x, y)$ по степеням поля напряженности с выделением сингулярных составляющих в симметричном виде. Тогда получим

$$G_{1\mu\nu}^{\Lambda ab}(x, y) = \delta_{\mu\nu} G_0^{\Lambda ab}(x, y) + \mathcal{N}_{\mu\nu}^{ab}(x, y) + \mathcal{L}_{\mu\nu}^{ab}(x, y) + PS_{1\mu\nu}^{ab}(x, y), \quad (75)$$

где каждая часть определяется исходя из величины сингулярности и степени тензора напряженности. Поясним обозначения.

1) Вклад $\delta_{\mu\nu} G_0^{\Lambda ab}$ соответствует слагаемому, пропорциональному нулевой степени тензора напряженности $F_{\mu\nu}^a$, и, таким образом, является функцией Грина для скалярного оператора.

2) Вклад $\mathcal{N}_{\mu\nu}^{ab}$ соответствует слагаемому, пропорциональному первой степени тензора напряженности $F_{\mu\nu}^a$ и содержащему первые три сингулярных порядка из функционала

$$2 \int_{\mathbb{R}^4} d^4 z G_0^{\Lambda ac}(x, z) F_{\mu\nu}^{cd}(z) G_0^{\Lambda db}(z, y).$$

Его явный вид удобно зафиксировать следующим образом

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\mu\nu}^{ab}(x, y) = & (F_{\mu\nu}^{ab}(x) + F_{\mu\nu}^{ab}(y)) \theta(x - y) \\ & + (B_\sigma^{ac}(x) F_{\mu\nu}^{cb}(x) + F_{\mu\nu}^{ac}(y) B_\sigma^{cb}(y)) 2\partial_{x^\sigma} \tau(x - y) + n_{\mu\nu}^{ab}(x, y), \end{aligned} \quad (76)$$

где вспомогательные симметричные функции определяются равенствами

$$\theta(x) = \int_{B_{1/\sigma}} d^4 z R_0^\Lambda(x - z) R_0^\Lambda(z), \quad (77)$$

$$\tau(x) = \int_{B_{1/\sigma}} d^4 z \int_{B_{1/\sigma}} d^4 y \left(R_0^\Lambda(x - z) R_0^\Lambda(z - y) R_0^\Lambda(y) - R_0(z) R_0(z - y) R_0(y) \right). \quad (78)$$

При этом симметричная функция $n_{\mu\nu}^{ab}(x, y)$ строится аналогичным образом с использованием $F_{\mu\nu}^a$, а также либо двух фоновых полей, либо производной от фонового поля. При этом можно потребовать, чтобы при $y \rightarrow x$ в главном порядке функция $n_{\mu\nu}^{ab}(x, y)$ имела бы порядок $\ln(\Lambda/\sigma)/\Lambda^2$. Ее явный вид не важен, поскольку она не приводит к сингулярным вкладам из-за свойства $n_{\mu\mu}^{ab}(x, y) = 0$.

3) Вклад $\mathcal{L}_{\mu\nu}^{ab}$ равен главной сингулярной части слагаемого, пропорционального второй степени напряженности, и равен

$$\mathcal{L}_{\mu\nu}^{ab}(x, y) = 2(F_{\mu\sigma}^{ac}(x) F_{\sigma\nu}^{cb}(x) + F_{\mu\sigma}^{ac}(y) F_{\sigma\nu}^{cb}(y)) \tau(x - y). \quad (79)$$

4) Вклад $PS_{1\mu\nu}^{ab}$ содержит все оставшиеся части. Он имеет две конечные производные, а также зависит от граничных условий. Учитывая свойства симметричности всех предыдущих частей, можно утверждать, что он обладает свойством $PS_{1\mu\nu}^{ab}(x, y) = PS_{1\nu\mu}^{ba}(y, x)$.

Скалярная функция. Аналогичным образом разложим функцию Грина для дѳуховых полей. Однако, здесь будет представлена только та часть⁵¹ разложения по сингулярностям, которая необходима для задач данной работы, см. секцию 1. Сперва отметим, что функцию $G_0^{\Lambda ab}(x, y)$ можно

⁵¹Следующие порядки разложения необходимо дополнительно вычислять.

разделить на две части

$$G_0^{\Lambda ab}(x, y) = G_{\text{loc}}^{\Lambda ab}(x, y) + PS_0^{\Lambda ab}(x, y), \quad (80)$$

где нелинейная часть PS_0 имеет две конечные производные и является аналогом функции PS_1 , в то время как первое слагаемое имеет локальный характер, который можно описать так: функция $G_{\text{loc}}^{\Lambda ab}(x, y)$ является конечной суммой, каждое слагаемое которой равно произведению специальной функции, не зависящей от фонового поля и имеющей аргумент $x - y$, на $p(x) + p(y)$, где p является полиномом конечной степени от фонового поля и его первых трех производных. Можно показать, что в первых порядках по степеням сингулярностей функцию $G_{\text{loc}}^{\Lambda ab}(x, y)$ можно разложить так

$$\begin{aligned} G_{\text{loc}}^{\Lambda ab}(x, y) = & \delta^{ab} R_0^\Lambda(x - y) + 2B_\mu^{ab}(y) \partial_{x^\mu} \theta(x - y) \\ & + \partial_{y^\nu} B_\mu^{ab}(y) (\delta_{\mu\nu} \theta(x - y) + 2\kappa_{\nu\mu}(x - y)) \\ & + B_\mu^{ac}(y) B_\nu^{cb}(y) (\delta_{\mu\nu} \theta(x - y) + 4\partial_{x^\mu} \partial_{x^\nu} \tau(x - y)) + \dots, \end{aligned} \quad (81)$$

где дополнительная вспомогательная функция имеет вид

$$\kappa_{\nu\mu}(x) = \int_{B_{1/\sigma}} d^4 z R_0^\Lambda(x - z) z^\nu \partial_{z^\mu} R_0^\Lambda(z).$$

Далее, рассматривая симметричную комбинацию, приходим к соотношению

$$\begin{aligned} G_{\text{loc}}^{\Lambda ab}(x, y) = & \delta^{ab} R_0^\Lambda(x - y) + (B_\mu^{ab}(x) + B_\mu^{ab}(y)) \partial_{x^\mu} \theta(x - y) \\ & + B_\mu^{ac}(y) B_\nu^{cb}(y) (\delta_{\mu\nu} \theta(x - y) + 4\partial_{x^\mu} \partial_{x^\nu} \tau(x - y)) + \dots \end{aligned} \quad (82)$$

Фактически, в рамках разложения использование симметричности было эквивалентно замене одного типа сингулярности на другой, то есть

$$\delta_{\mu\nu} \theta(x) + 2\kappa_{\nu\mu}(x) \longleftrightarrow x^\nu \partial_{x^\mu} \theta(x),$$

что можно проверить интегрированием по частям. Обратим внимание, что слагаемое, пропорциональное первой степени фонового поля, имеет симметричный вид, в то время как поля для третьего слагаемого выписаны лишь в одной точке. Это связано с тем фактом, что основной целью данной работы является изучение сингулярных составляющих, для которых достаточно предложенного разложения. При попытке поиска явных⁵² коэффициентов для вершин перенормировки необходимо будет также представить слагаемые для третьей и четвертой степеней фонового поля.

Выполним⁵³ сдвиг переменной $x \rightarrow x + y$ и факторизуем отдельные слагаемые на сингулярную часть, зависящую от переменной x , и часть, зависящую от фоновых полей в точке y . Для удобства выпишем в виде таблицы разложение по «величине» сингулярностей функции $G_{\text{loc}}^{\Lambda ab}(x + y, y)$.

$\sim r^{-2}$		$\sim r^{-1}$		$\sim \log r + \sim r^0$	
1	$R_0^\Lambda(x)$	$B_\mu(y)$	$2\partial_{x^\mu} \theta(x)$	$\partial_{y^\nu} B_\mu(y)$	$x^\nu \partial_{x^\mu} \theta(x)$
				$B_\mu(y) B_\nu(y)$	$\delta_{\mu\nu} \theta(x) + 4\partial_{x^\mu} \partial_{x^\nu} \tau(x)$

(83)

Обратим внимание, что групповые индексы в таблице выше опущены. Аналогичное разложение необходимо выписать также и для второй производной функции Грина. Для этого сперва заметим, что ковариантную производную можно переписать в виде

$$D_\sigma(x) = \partial_{x^\sigma} + B_\sigma(y) + (x - y)^\eta \partial_{y^\eta} B_\sigma(y) + \dots,$$

где групповые индексы для удобства были вновь опущены. После ряда вспомогательных вычислений получаем следующую сводную таблицу.

⁵²Напомним, что в данной работе описывается отклонение от ковариантного случая. При этом для ряда контрслагаемых предлагается структура сингулярностей без вычисления явных коэффициентов.

⁵³Такие преобразования являются стандартными при анализе диаграмм с одним и двумя операторами интегрирования. Они позволяют явно выразить сингулярность. Более подробно см. для примера [56, 64].

$D_{\sigma}^{ca}(x)D_{\rho}^{db}(y)G_{\text{loc}}^{ab}(x,y) _{x \rightarrow x+y}$					
$\sim r^{-4}$		$\sim r^{-3}$		$\sim r^{-2}$	
1	$-\partial_{x^{\sigma}}\partial_{x^{\rho}}R_0^{\Lambda}(x)$	$B_{\mu}(y)$ $B_{\sigma}(y)$ $B_{\rho}(y)$	$-2\partial_{x^{\sigma}}\partial_{x^{\rho}}\partial_{x^{\mu}}\theta(x)$ $-\partial_{x^{\rho}}R_0^{\Lambda}(x)$ $-\partial_{x^{\sigma}}R_0^{\Lambda}(x)$	$\partial_{y^{\nu}}B_{\mu}(y)$ $B_{\mu}(y)B_{\nu}(y)$ $B_{\mu}(y)B_{\nu}(y)$ $\partial_{y^{\rho}}B_{\mu}(y)$ $B_{\sigma}(y)B_{\mu}(y)$ $B_{\mu}(y)B_{\rho}(y)$ $\partial_{y^{\eta}}B_{\sigma}(y)$ $B_{\sigma}(y)B_{\rho}(y)$	$-\partial_{x^{\sigma}}\partial_{x^{\rho}}x^{\nu}\partial_{x^{\mu}}\theta(x)$ $-\delta_{\mu\nu}\partial_{x^{\sigma}}\partial_{x^{\rho}}\theta(x)$ $-4\partial_{x^{\sigma}}\partial_{x^{\rho}}\partial_{x^{\mu}}\partial_{x^{\nu}}\tau(x)$ $2\partial_{x^{\sigma}}\partial_{x^{\mu}}\theta(x)$ $-\partial_{x^{\rho}}\partial_{x^{\mu}}\theta(x)$ $-\partial_{x^{\sigma}}\partial_{x^{\mu}}\theta(x)$ $-x^{\eta}\partial_{x^{\rho}}R_0^{\Lambda}(x)$ $-R_0^{\Lambda}(x)$

(84)

7.2 Сингулярные операторы

Рассмотрим для примера произвольную гладкую матричнозначную функцию двух переменных $f^{ab}(x, y)$. Будем подразумевать, что она симметричная, то есть $f^{ab}(x, y) = f^{ba}(y, x)$. Основной задачей данной секции является вычисление сингулярной части разложения по регуляризующему параметру Λ для величин

$$J_{\sigma\rho}[f] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \int_{\mathbb{R}^4} d^4y \mathcal{R}_{\sigma\rho}^{ab}(x, y) f^{ba}(y, x), \quad (85)$$

$$\hat{J}_{\sigma\rho}[f] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \int_{\mathbb{R}^4} d^4y \hat{\mathcal{R}}_{\sigma\rho}^{ab}(x, y) f^{ba}(y, x), \quad (86)$$

где ядра интегро-дифференциальных операторов заданы равенствами

$$\mathcal{R}_{\sigma\rho}^{ab}(x, y) = f^{acd} \left(D_{\sigma}^{ch}(x) D_{\rho}^{gf}(y) G_{\text{loc}}^{hf}(x, y) \right) G_{\text{loc}}^{de}(x, y) f^{egb}, \quad (87)$$

$$\hat{\mathcal{R}}_{\sigma\rho}^{ab}(x, y) = f^{hcd} G_{\text{loc}}^{cg}(x, y) G_{\text{loc}}^{de}(x, y) f^{egf} D_{\sigma}^{ha}(x) D_{\rho}^{fb}(y).$$

С учетом определения для вспомогательного числа ρ_3 из секции (132), ответы выписываются следующим образом

$$J_{\sigma\rho}[f] \stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{\delta_{\sigma\rho}\Lambda^2 c_2 \rho_3}{16\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x f^{aa}(x, x) \quad (88)$$

$$+ \frac{Lc_2}{96\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left((M_{1\rho\sigma}^{ba}(x) + 4D_{\rho}^{bc}(x)D_{\sigma}^{ca}(x)) f^{ab}(x, y) \right) \Big|_{y=x},$$

$$\hat{J}_{\sigma\rho}[f] \stackrel{\text{s.p.}}{=} + \frac{Lc_2}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left((D_{\rho}^{bc}(x)D_{\sigma}^{ca}(x)) f^{ab}(x, y) \right) \Big|_{y=x}. \quad (89)$$

Докажем вначале первое сформулированное соотношение. Для этого в интеграле (85) сделаем сдвиг переменной $x \rightarrow x + y$ и заменим область интегрирования $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow B_{1/\sigma} \times \mathbb{R}^4$. Далее переразложим плотности таким образом, чтобы все части, зависящие от фонового поля, имели переменную y , а части, содержащие сингулярную плотность, содержали только x . Именно таким образом может быть получена искомая факторизация для каждого слагаемого. Заметим, что функции Грина уже были переразложены необходимым образом, см. таблицы в (83) и (84) в секции 7.1. При этом тестовая функция имеет стандартное разложение в ряд Тейлора вида

$$f^{ba}(y, x + y) = f^{ba}(y, y) + x^{\nu} \partial_{z^{\nu}} f^{ba}(y, z) \Big|_{z=y} + \frac{x^{\nu} x^{\mu}}{2} \partial_{z^{\nu}} \partial_{z^{\mu}} f^{ba}(y, z) \Big|_{z=y} + \dots$$

Далее метод анализа сводится к перебору всех возможных комбинаций. Приведем некоторые вспомогательные комментарии. Для удобства будем пользоваться «степенью сингулярности», приведенной в таблицах (83) и (84).

1) Функции Грина DDG_{loc} и G_{loc} имеют суммарно степень сингулярности r^{-6} . Такой вариант имеется только один, см. левые столбцы таблиц (83) и (84). В этом случае оператор (87) преобразуется к виду

$$\mathcal{R}_{\sigma\rho}^{ab}(x+y, y) \rightarrow f^{acd} \left(-\delta^{cg} \partial_{x^\sigma} \partial_{x^\rho} R_0^\Lambda(x) \right) \delta^{de} R_0^\Lambda(x) f^{egb} = c_2 \delta^{ab} R_0^\Lambda(x) \partial_{x^\sigma} \partial_{x^\rho} R_0^\Lambda(x).$$

Затем выпишем интересующие части тестовой функции. Ясно, что степень переменной x должна быть четной, иначе интеграл обнулится из-за свойств симметрии, см. (66). Учитывая тот факт, что общая степень сингулярности для плотности должна быть r^{-4} или сильнее, выбираем только два слагаемых

$$f^{ba}(y, x+y) \rightarrow f^{ba}(y, y) + \frac{x^\nu x^\mu}{2} \partial_{z^\nu} \partial_{z^\mu} f^{ba}(y, z) \Big|_{z=y}.$$

Далее, после подстановки полученных разложений и использования вспомогательных формул из первой части секции 7.8, приходим к ответу

$$-\frac{\delta_{\sigma\rho} \Lambda^2 c_2 \rho_3}{16\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x f^{aa}(x, x) + \frac{Lc_2}{96\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left((\delta_{\sigma\rho} A_0(x) + 4\partial_{x^\rho} \partial_{x^\sigma}) f^{aa}(x, y) \right) \Big|_{y=x}.$$

2) Функции Грина DDG_{loc} и G_{loc} имеют суммарно степень сингулярности r^{-5} . Согласно таблице, таких вариантов может быть четыре. В этом случае оператор (87) после приведения подобных преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\sigma\rho}^{ab}(x+y, y) \rightarrow & \frac{c_2 B_\mu^{ba}(y)}{2} \left[\left(-\partial_{x^\sigma} \partial_{x^\rho} R_0^\Lambda(x) \right) \left(2\partial_{x^\mu} \theta(x) \right) + \left(-2\partial_{x^\sigma} \partial_{x^\rho} \partial_{x^\mu} \theta(x) \right) R_0^\Lambda(x) \right] \\ & - \frac{c_2 B_\sigma^{ba}(y)}{2} R_0^\Lambda(x) \partial_{x^\rho} R_0^\Lambda(x) - \frac{c_2 B_\rho^{ba}(y)}{2} R_0^\Lambda(x) \partial_{x^\sigma} R_0^\Lambda(x). \end{aligned}$$

При этом от тестовой функции необходимо взять лишь одно слагаемое первой степени

$$f^{ba}(y, x+y) \rightarrow x^\nu \partial_{z^\nu} f^{ba}(y, z) \Big|_{z=y}.$$

После подстановки и использования формул из секции 7.8 приходим к ответу вида

$$\frac{Lc_2}{96\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left((-2\delta_{\sigma\rho} B_\mu^{ba}(x) \partial_{x^\mu} + 4B_\sigma^{ba}(x) \partial_{x^\rho} + 4B_\rho^{ba}(x) \partial_{x^\sigma}) f^{ab}(x, y) \right) \Big|_{y=x}.$$

3) Функции Грина DDG_{loc} и G_{loc} имеют суммарно степень сингулярности r^{-4} . С учетом разложений из таблиц, в общей сложности получается 13 слагаемых. При этом для тестовой функции необходимо сохранить лишь главное слагаемое. Опуская рутинные вычисления, которые получаются с учетом вспомогательных интегралов из секции 7.8, выпишем лишь конечный ответ

$$\frac{Lc_2}{96\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(-\delta_{\sigma\rho} B_\mu^{bc}(x) B_\mu^{ca}(x) + 2B_\rho^{bc}(x) B_\sigma^{ca}(x) + 2B_\sigma^{bc}(x) B_\rho^{ca}(x) \right) f^{ab}(x, x).$$

Далее заметим, что можно добавить произвольное количество производных от фоновых полей, поскольку свертка симметричного f^{ab} с антисимметричным ∂B^{ba} приводит к нулю. Суммируя все ответы и добавляя недостающее количество ∂B , получаем заявленный ответ (88). Соотношение (89) получается после сохранения главного порядка для всех функций и одного интегрирования по частям. Обе формулы доказаны.

7.3 Нелокальная часть

Изучим сингулярную нелокальную часть, появляющуюся в двухпетлевом приближении квантового действия. Основной метод заключается в переборе всех возможных комбинаций с учетом вспомогательных разложений для функций Грина (75) и (82). При этом подсекции будут именоваться с учетом участвующих в разложении частей функций Грина. Например, двухпетлевая часть

$\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_2^3)$ состоит из диаграмм с тремя функциями Грина. Тогда, пользуясь разложением (75), вкладом $G_{\text{loc}}G_{\text{loc}}PS_1$ будем называть все сингулярные слагаемые в диаграммах, полученных из $\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_2^3)$ путем замены двух функций Грина на G_{loc} и одной функции Грина на PS_1 всеми возможными способами. Аналогичные обозначения можно использовать и для остальных частей. Приведем в краткой форме комбинации, которые могут привести к нелокальным сингулярностям:

$$\begin{aligned}\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2) &\rightarrow G_{\text{loc}}G_{\text{loc}}PS_1, \quad G_{\text{loc}}G_{\text{loc}}PS_0, \quad G_{\text{loc}}\mathcal{N}PS_1, \\ \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Omega_3^2) &\rightarrow G_{\text{loc}}G_{\text{loc}}PS_1, \quad G_{\text{loc}}G_{\text{loc}}PS_0, \\ \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_4) &\rightarrow G_{\text{loc}}PS_1, \quad G_{\text{loc}}PS_0, \quad \mathcal{N}PS_1.\end{aligned}$$

Остальные комбинации не содержат сингулярностей от ультрафиолетовых расходимостей. Этот факт легко проверяется путем подсчета «степеней» около диагонали.

7.3.1 Вклады $G_{\text{loc}}G_{\text{loc}}PS_i$ для $\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2)$

Вычисления данной секции основаны на использовании сингулярных интегралов из секции 7.2. Начнем с ситуации $i = 1$, так как $i = 0$ является частным случаем. Для этого напомним, что по построению часть $PS_{1\mu\nu}^{ab}$ имеет две конечные производные и потому может быть использована в качестве тестовой функции. Однако нужно пояснить, каким образом следует производить перебор. Предположим, что имеется двухпетлевая диаграмма, тогда нужно разрезать одну из трех линий и затем в место разреза подсоединить функцию $PS_{1\mu\nu}^{ab}$. При этом оставшиеся две функции Грина следует заменить на G_{loc}^{ab} . Таким образом, одна диаграмма превратится в три, а $\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2)$, состоящий из 6 диаграмм, перейдет в 18 составляющих.

Математически это можно переписать следующим образом. Сперва выпишем все сильно связанные вершины, которые можно получить соединением двух вершин Γ_3 ,

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_2^{\text{sc}}(\Gamma_3^2) = & \text{Diagram 1} - \text{Diagram 2} + 2 \text{Diagram 3} - 2 \text{Diagram 4} \\ & - \text{Diagram 5} - \text{Diagram 6} + 2 \text{Diagram 7} - 2 \text{Diagram 8} \\ & - \text{Diagram 9} - \text{Diagram 10} + 2 \text{Diagram 11} - 2 \text{Diagram 12}. \end{aligned}$$

Далее заменим $G_{1\mu\nu}^{ab}$ на $\delta_{\mu\nu} G_{\text{loc}}^{ab}$ и получившийся в ядре дифференциальный оператор обозначим $r_{\sigma\rho}^{ab}(x, y)$, то есть

$$\mathbb{H}_2^{\text{sc}}(\Gamma_3^2) \Big|_{G_1^A \rightarrow G_{\text{loc}}} = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \int_{\mathbb{R}^4} d^4y r_{\sigma\rho}^{ab}(x,y) a_{\sigma}^a(x) a_{\rho}^b(y).$$

Тогда интересующий нас вклад $G_{\text{loc}}G_{\text{loc}}PS_1$ является сингулярной частью интеграла

$$\int_{\mathbb{R}^4} d^4x \int_{\mathbb{R}^4} d^4y r_{\sigma\rho}^{ab}(x,y) PS_{1\sigma\rho}^{ab}(x,y). \quad (90)$$

Для удобства выпишем плотность для каждой отдельной части после соответствующей замены. Всего получим 12 переходов:

$$\begin{array}{ll}
\text{Diagram 1} \rightarrow -4\mathcal{R}_{\sigma\rho}^{ab}(x,y) + 2\hat{\mathcal{R}}_{\sigma\rho}^{ab}(x,y), & \text{Diagram 2} \rightarrow -\mathcal{R}_{\rho\sigma}^{ab}(x,y) + \frac{1}{2}\hat{\mathcal{R}}_{\rho\sigma}^{ab}(x,y), \\
\text{Diagram 3} \rightarrow 4\mathcal{R}_{\sigma\rho}^{ab}(x,y), & \text{Diagram 4} \rightarrow \delta_{\sigma\rho}\mathcal{R}_{\mu\mu}^{ab}(x,y), \\
\text{Diagram 5} \rightarrow \mathcal{R}_{\sigma\rho}^{ab}(x,y), & \text{Diagram 6} \rightarrow \hat{\mathcal{R}}_{\rho\sigma}^{ab}(x,y), \\
\text{Diagram 7} \rightarrow -\mathcal{R}_{\sigma\rho}^{ab}(x,y) + \frac{1}{2}\hat{\mathcal{R}}_{\sigma\rho}^{ab}(x,y), & \text{Diagram 8} \rightarrow \delta_{\sigma\rho}\hat{\mathcal{R}}_{\mu\mu}^{ab}(x,y),
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\text{Diagram 1} &\rightarrow -\frac{1}{2}\hat{\mathcal{R}}_{\sigma\rho}^{ab}(x, y), & \text{Diagram 2} &\rightarrow -\frac{1}{2}\delta_{\sigma\rho}\hat{\mathcal{R}}_{\mu\mu}^{ab}(x, y), \\
\text{Diagram 3} &\rightarrow -\frac{1}{2}\hat{\mathcal{R}}_{\sigma\rho}^{ab}(x, y), & \text{Diagram 4} &\rightarrow -\frac{1}{2}\hat{\mathcal{R}}_{\rho\sigma}^{ab}(x, y).
\end{aligned}$$

Суммируя полученные выражения, приходим к соотношению для интересующего ядра оператора

$$\begin{aligned}
r_{\sigma\rho}^{ab}(x, y) = & -4\mathcal{R}_{\sigma\rho}^{ab}(x, y) - \mathcal{R}_{\rho\sigma}^{ab}(x, y) - \delta_{\sigma\rho}\mathcal{R}_{\mu\mu}^{ab}(x, y) \\
& + \hat{\mathcal{R}}_{\sigma\rho}^{ab}(x, y) + \frac{5}{2}\hat{\mathcal{R}}_{\rho\sigma}^{ab}(x, y) - 2\delta_{\sigma\rho}\hat{\mathcal{R}}_{\mu\mu}^{ab}(x, y).
\end{aligned}$$

Следовательно, с учетом определений (85) и (86), интеграл (90) переписывается в виде суммы шести функционалов

$$-4J_{\sigma\rho}[PS_{1\sigma\rho}] - J_{\sigma\rho}[PS_{1\rho\sigma}] - J_{\sigma\sigma}[PS_{1\rho\rho}] + \hat{J}_{\sigma\rho}[PS_{1\sigma\rho}] + \frac{5}{2}\hat{J}_{\sigma\rho}[PS_{1\rho\sigma}] - 2\hat{J}_{\sigma\sigma}[PS_{1\rho\rho}]. \quad (91)$$

Дополнительно отметим, что подобные выражения можно выписать для каждой отдельной диаграммы. Представления для соответствующих интегралов имеют вид:

$$\begin{aligned}
\text{Diagram 1} &\rightarrow -J_{\sigma\rho}[PS_{1\rho\sigma}] - \hat{J}_{\sigma\rho}[PS_{1\sigma\rho}] + \frac{1}{2}\hat{J}_{\sigma\rho}[PS_{1\rho\sigma}], \\
\text{Diagram 2} &\rightarrow -4J_{\sigma\rho}[PS_{1\sigma\rho}] - J_{\sigma\sigma}[PS_{1\rho\rho}] - \hat{J}_{\sigma\sigma}[PS_{1\rho\rho}], \\
\text{Diagram 3} &\rightarrow -4J_{\sigma\rho}[PS_{1\sigma\rho}] + 2\hat{J}_{\sigma\rho}[PS_{1\sigma\rho}] - \hat{J}_{\sigma\sigma}[PS_{1\rho\rho}], \\
-2 \text{ Diagram 4} &\rightarrow 2J_{\sigma\rho}[PS_{1\sigma\rho}] + \hat{J}_{\sigma\rho}[PS_{1\rho\sigma}], \\
\text{Diagram 5} &\rightarrow 2J_{\sigma\rho}[PS_{1\sigma\rho}] + \hat{J}_{\sigma\rho}[PS_{1\rho\sigma}].
\end{aligned}$$

Суммируя последние соотношения, можно проверить согласованность с представлением (91). Воспользуемся полученными значениями (88) и (89) для сингулярных частей, тогда

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2) \Big|_{G_{\text{loc}}G_{\text{loc}}PS_1} &\stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{9\Lambda^2 c_2 \rho_3}{16\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x PS_{1\rho\rho}^{aa}(x, x) \\
&+ \frac{Lc_2}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(\left[-\frac{5}{48}M_{1\rho\sigma}^{ba}(x) + \frac{\delta_{\sigma\rho}}{2}M_0^{ba}(x) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{11}{24}D_\rho^{bc}(x)D_\sigma^{ca}(x) - \frac{5}{8}F_{\rho\sigma}^{ba}(x) \right] PS_{1\sigma\rho}^{ab}(x, y) \right) \Big|_{y=x}. \quad (92)
\end{aligned}$$

По построению PS_0 обладает теми же свойствами гладкости, что и функция PS_1 . Следовательно, можно воспользоваться полученной формулой (92), совершив подстановку функции $PS_{1\sigma\rho}^{ab}(x, y)$ на $\delta_{\sigma\rho}PS_0^{ab}(x, y)$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2) \Big|_{G_{\text{loc}}G_{\text{loc}}PS_0} &\stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{9\Lambda^2 c_2 \rho_3}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x PS_0^{aa}(x, x) \\
&+ \frac{27Lc_2}{48\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(M_0^{ba}(x)PS_0^{ab}(x, y) \right) \Big|_{y=x}. \quad (93)
\end{aligned}$$

7.3.2 Вклад $G_{\text{loc}}\mathcal{N}PS_1$ для $\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2)$

В данном случае процесс подсчета аналогичен предыдущему. Поясним различия и дополним вычисления. Обратим внимание, что теперь после этапа разрезания линии в двухпетлевой диаграмме

из $\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2)$ одна из двух оставшихся функций Грина G_1^Λ заменяется на G_{loc} , а вторая – на \mathcal{N} , и наоборот. Таким образом, в результате получается не 18 диаграмм, а 36.

Далее заметим, что в главном порядке около диагонали, когда $x \sim y$, функция $\mathcal{N}_{\mu\nu}^{ab}(x, y)$ пропорциональна $2F_{\mu\nu}^{ab}(y)\theta(x - y)$, поэтому для появления сингулярного вклада обе производные должны быть внутри петли. Таким образом, из суммы $\mathbb{H}_2^{\text{sc}}(\Gamma_3^2)$ только следующие слагаемые могут в итоге дать ненулевой вклад

$$\text{Diagram 1} - \text{Diagram 2} + 2 \text{Diagram 3} - 2 \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} - \text{Diagram 6}.$$

Обратим внимание, что производную можно перебрасывать только внутри петли, так как производная, действующая на хвост, приведет к конечному вкладу. Следовательно, переходим к

$$-2 \text{Diagram 7} + 4 \text{Diagram 8} + \text{Diagram 9} - \text{Diagram 10}.$$

Теперь, поочередно заменяя

$$G_{1\mu\nu}^{ab}(x, y) \rightarrow \delta_{\mu\nu} \delta^{ab} R_0^\Lambda(x - y), \quad \mathcal{N}_{\mu\nu}^{ab}(x, y) \rightarrow 2F_{\mu\nu}^{ab}(y)\theta(x - y),$$

замечаем, что первая диаграмма приводит к нулю из-за $F_{\mu\mu}^{ab}(y) = 0$. Остальные же части после сдвига переменной $x \rightarrow x + y$ в сумме дают плотность вида

$$-2c_2 F_{\mu\rho}^{ba}(y) \left(R_0^\Lambda(x) \partial_{x^\sigma} \partial_{x^\mu} \theta(x) \right) - 4c_2 F_{\rho\mu}^{ba}(y) \left(R_0^\Lambda(x) \partial_{x^\sigma} \partial_{x^\mu} \theta(x) \right) + c_2 F_{\sigma\rho}^{ba}(y) \left(R_0^\Lambda(x) \partial_{x^\mu} \partial_{x^\mu} \theta(x) \right).$$

Далее, домножая на $PS_{1\sigma\rho}^{ab}(y, y)$ и пользуясь вспомогательными соотношениями из секции 7.8, получаем ответ в виде

$$\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2) \Big|_{G_{\text{loc}} \mathcal{N} PS_1} \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{3Lc_2}{16\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4y \left(F_{\rho\sigma}^{ba}(y) PS_{1\sigma\rho}^{ab}(y, y) \right). \quad (94)$$

Для полноты картины отметим, что выражения для каждой отдельной диаграммы выписываются следующим образом:

$$3 \text{Diagram 11} \Big|_{G_{\text{loc}} \mathcal{N} PS_1} \stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{3}{2} \text{Diagram 12} \Big|_{G_{\text{loc}} \mathcal{N} PS_1} \stackrel{\text{s.p.}}{=} \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2) \Big|_{G_{\text{loc}} \mathcal{N} PS_1},$$

$$\text{Diagram 13} \Big|_{G_{\text{loc}} \mathcal{N} PS_1} \stackrel{\text{s.p.}}{=} \text{Diagram 14} \Big|_{G_{\text{loc}} \mathcal{N} PS_1} \stackrel{\text{s.p.}}{=} \text{Diagram 15} \Big|_{G_{\text{loc}} \mathcal{N} PS_1} \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0.$$

7.3.3 Вклады для $\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Omega_3^2)$

Рассмотрим все три варианта возникающих нелокальных сингулярностей по очереди. Сперва напомним явный вид двухпетлевой диаграммы

$$\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Omega_3^2) = - \text{Diagram 16}.$$

Ее особенность заключается в том, что она содержит только одну функцию Грина G_1^Λ . Остальные две равны G_0^Λ . Этот факт приводит к некоторым изменениям в вычислительном процессе.

1) Рассмотрим случай с $G_{\text{loc}} G_{\text{loc}} PS_1$. Так как функция PS_1 присутствует только в средней линии, то именно ее и следует разрезать. Получившаяся диаграмма подобна уже изученной и воспроизводится следующим образом

$$-\frac{1}{4} \text{Diagram 17} \rightarrow \mathcal{R}_{\sigma\rho}^{ab}(x, y) - \frac{1}{2} \hat{\mathcal{R}}_{\sigma\rho}^{ab}(x, y). \quad (95)$$

Следовательно, пользуясь (88) и (89), получаем ответ

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Omega_3^2) \Big|_{G_{\text{loc}} G_{\text{loc}} P S_1} \stackrel{\text{s.p.}}{=} & -\frac{\Lambda^2 c_2 \rho_3}{16\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x P S_{1\rho\rho}^{aa}(x, x) \\ & + \frac{Lc_2}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(\left[\frac{1}{48} M_{1\rho\sigma}^{ba}(x) - \frac{1}{24} D_\rho^{bc}(x) D_\sigma^{ca}(x) \right] P S_{1\sigma\rho}^{ab}(x, y) \right) \Big|_{y=x}. \end{aligned} \quad (96)$$

2) Рассмотрим случай с $G_{\text{loc}} G_{\text{loc}} P S_0$. Он разделяется на две части, так как $P S_0$ содержится и в средней линии, и в скалярных функциях Грина. В первом случае ответ получается заменой в (96) функции $P S_{1\sigma\rho}$ на $\delta_{\sigma\rho} P S_0$, то есть

$$-\frac{\Lambda^2 c_2 \rho_3}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x P S_0^{aa}(x, x) + \frac{Lc_2}{16\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(M_0^{ba}(x) P S_0^{ab}(x, y) \right) \Big|_{y=x}.$$

Во втором случае разрезается боковая линия, а получившаяся диаграмма сводится к уже изученной, для которой справедлив переход

$$\frac{1}{4} \left(\text{diagram: circle with two vertices and a horizontal line through the center} \right) \Big|_{\sigma=\rho} \rightarrow \hat{\mathcal{R}}_{\mu\mu}^{ab}(x, y).$$

Затем, интегрируя с $P S_0^{ab}(x, y)$, получаем результат в виде

$$-\frac{Lc_2}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(M_0^{ba}(x) P S_0^{ab}(x, y) \right) \Big|_{y=x}.$$

Учитывая, что боковых линий две, после суммирования результатов получаем

$$\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Omega_3^2) \Big|_{G_{\text{loc}} G_{\text{loc}} P S_0} \stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{\Lambda^2 c_2 \rho_3}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x P S_0^{aa}(x, x) - \frac{3Lc_2}{16\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(M_0^{ba}(x) P S_0^{ab}(x, y) \right) \Big|_{y=x}. \quad (97)$$

7.3.4 Вклады для $\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_4)$

В данном случае вклад от четверной вершины состоит из трех диаграмм. Напомним их явный вид

$$\text{diagram: circle with two vertices and a dashed line} - \text{diagram: circle with two vertices and a solid line} + \text{diagram: two circles connected by a dashed line}.$$

Они состоят из двух функций Грина на диагонали, поэтому сперва удобно разобраться, какие именно сингулярности возникают в функции $G_{\text{loc}}^{ab}(x, x)$. Пользуясь представлением (82), видим, что на диагонали сингулярным является только главный порядок $\delta^{ab} \Lambda^2 R_0^1(0)$, так как остальные слагаемые, которые ранее приводили к сингулярностям при интегрировании, в случае $y = x$ сокращаются благодаря свойствам

$$\partial_{x^\mu} \theta(x - y) \Big|_{y=x} = 0, \quad \delta_{\mu\nu} \theta(0) + 4\partial_{x^\mu} \partial_{x^\nu} \tau(x - y) \Big|_{y=x} \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0. \quad (98)$$

Следовательно, при вычислении нелокальных составляющих можно пользоваться заменой

$$G_{\text{loc}}^{ab}(x, x) \rightarrow \delta^{ab} \Lambda^2 R_0^1(0).$$

1) Рассмотрим случай с $G_{\text{loc}} P S_i$. Сразу обратим внимание, что за счет симметричности δ^{ab} третья диаграмма в этом случае даст нулевой вклад. Далее, сворачивая пространственные индексы, заметим, что

$$\frac{1}{4} \left(\text{diagram: circle with two vertices and a dashed line} \right) \Big|_{G_{\text{loc}} P S_1} = \left(\text{diagram: circle with two vertices and a solid line} \right) \Big|_{G_{\text{loc}} P S_1} = -2c_2 \Lambda^2 R_0^1(0) \int_{\mathbb{R}^4} d^4x P S_{1\rho\rho}^{aa}(x, x).$$

Таким образом, справедливо соотношение

$$\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_4) \Big|_{G_{\text{loc}} PS_1} \stackrel{\text{s.p.}}{=} 6c_2 \Lambda^2 R_0^1(0) \int_{\mathbb{R}^4} d^4x PS_{1\rho\rho}^{aa}(x, x). \quad (99)$$

Далее, заменяя $PS_{1\mu\nu}$ на $\delta_{\mu\nu} PS_0$, получаем аналогичное равенство

$$\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_4) \Big|_{G_{\text{loc}} PS_0} \stackrel{\text{s.p.}}{=} 24c_2 \Lambda^2 R_0^1(0) \int_{\mathbb{R}^4} d^4x PS_0^{aa}(x, x). \quad (100)$$

2) Рассмотрим случай с $\mathcal{N}PS_1$. Его можно сразу упростить, заменив $\mathcal{N}_{\mu\nu}^{ab}(x, x)$ на главный порядок $2F_{\mu\nu}^{ab}(x)\theta(0)$, а также выкинув вторую диаграмму, так как след напряженности равен нулю. Далее вспомним, что $\theta(0) \stackrel{\text{s.p.}}{=} L/(8\pi^2)$, см. секцию 7.8, тогда

$$\begin{aligned} \text{Diagram 1} &\rightarrow \frac{Lc_2}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x F_{\rho\sigma}^{ba}(x) PS_{1\sigma\rho}^{ab}(x, x), \\ \text{Diagram 2} &\rightarrow \frac{Lc_2}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x F_{\rho\sigma}^{ba}(x) PS_{1\sigma\rho}^{ab}(x, x). \end{aligned}$$

Таким образом, после суммирования получаем ответ вида

$$\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_4) \Big|_{\mathcal{N}PS_1} \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{3Lc_2}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x F_{\rho\sigma}^{ba}(x) PS_{1\sigma\rho}^{ab}(x, x). \quad (101)$$

7.4 Локальная часть

Вновь воспользуемся общей идеей подсчета сингулярных составляющих, предложенной в секции 7.3. Для этого сперва, пользуясь разложениями (75) и (81), выпишем список комбинаций, которые могут привести к ненулевым сингулярным составляющим:

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2) &\rightarrow G_{\text{loc}} \mathcal{N}\mathcal{N}, \quad G_{\text{loc}} G_{\text{loc}} \mathcal{N}, \quad G_{\text{loc}} G_{\text{loc}} \mathcal{L}, \quad G_{\text{loc}} G_{\text{loc}} G_{\text{loc}}, \\ \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Omega_3^2) &\rightarrow G_{\text{loc}} G_{\text{loc}} \mathcal{N}, \quad G_{\text{loc}} G_{\text{loc}} \mathcal{L}, \quad G_{\text{loc}} G_{\text{loc}} G_{\text{loc}}, \\ \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_4) &\rightarrow \mathcal{N}\mathcal{N}, \quad G_{\text{loc}} \mathcal{L}, \quad G_{\text{loc}} G_{\text{loc}}. \end{aligned}$$

Остальные комбинации не приводят к сингулярностям «ультрафиолетового» характера.

7.4.1 Вклад $G_{\text{loc}} \mathcal{N}\mathcal{N}$ для $\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2)$

Сразу обратим внимание, что главный порядок функции Грина G_0^Λ имеет порядок сингулярности r^{-2} , что обусловлено поведением около диагонали. Далее, главный порядок функции \mathcal{N} имеет логарифмический вид, поэтому ему сопоставляется $\ln|r|$. Таким образом, максимальный порядок сингулярности для комбинации $G_{\text{loc}} \mathcal{N}\mathcal{N}$ не превосходит $\ln^2|r|/r^2$. Следовательно, для поиска сингулярных частей во всех диаграммах из $\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2)$, см. (52), необходимо заменить ковариантные производные простыми. Далее все сводится к простому перебору возможных комбинаций. Поясним пример вычислений на первой диаграмме из (52), для остальных выпишем только окончательный ответ в виде сводной таблицы.

Как и ранее, сперва необходимо выполнить сдвиг переменной $x \rightarrow x + y$, перейти к интегрированию по переменным (x, y) по области $V_{1/\sigma} \times \mathbb{R}^4$, а затем заменить плотности на главные части разложений, то есть

$$\delta_{\mu\nu} G_{\text{loc}}^{ab}(x + y, y) \rightarrow \delta_{\mu\nu} \delta^{ab} R_0^\Lambda(x), \quad \mathcal{N}_{\mu\nu}^{ab}(x + y, y) \rightarrow 2F_{\mu\nu}^{ab}(y)\theta(x).$$

Обратим внимание, что важен лишь главный порядок разложения для $\mathcal{N}_{\mu\nu}^{ab}(x + y, y)$, то есть только первая строка из (76). Остальные части приведут к вкладам без сингулярностей. Далее заметим, что для каждой диаграммы возможны три ненулевые комбинации, в зависимости от того, на что

именно заменяется каждая линия. Пусть первый случай отвечает ситуации, когда нижняя линия заменяется на G_{loc} , второй – средняя линия, и, наконец, третий – верхняя линия. В таком случае, с учетом вспомогательных асимптотических разложений из секции 7.8, можно проверить следующее соотношение

$$\text{Diagram} \Big|_{G_{\text{loc}}\mathcal{N}\mathcal{N}} \stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{c_2^2}{2} W_{-1} \left(\left[-\hat{\mathbf{I}}_2/2 \right] + \left[-\hat{\mathbf{I}}_2/2 \right] + \left[\hat{\mathbf{I}}_1 - \hat{\mathbf{I}}_2/2 \right] \right),$$

где каждая часть в квадратных скобках соответствует отдельной ситуации. Интегралы $\hat{\mathbf{I}}_i$ определены в секции 7.8. Оказывается, что для всех диаграмм ответы можно записать аналогичным образом, заменяя лишь интеграл в квадратных скобках на подходящую комбинацию $a\hat{\mathbf{I}}_1 + b\hat{\mathbf{I}}_2$. Приведем ответы:

$$\begin{aligned} & - \text{Diagram} \Big|_{G_{\text{loc}}\mathcal{N}\mathcal{N}} \stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{c_2^2}{2} W_{-1} \left(\left[0 \right] + \left[-4\hat{\mathbf{I}}_1 \right] + \left[0 \right] \right), \\ & \text{Diagram} \Big|_{G_{\text{loc}}\mathcal{N}\mathcal{N}} \stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{c_2^2}{2} W_{-1} \left(\left[0 \right] + \left[-4\hat{\mathbf{I}}_1 + 2\hat{\mathbf{I}}_2 \right] + \left[0 \right] \right), \\ & -2 \text{Diagram} \Big|_{G_{\text{loc}}\mathcal{N}\mathcal{N}} \stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{c_2^2}{2} W_{-1} \left(\left[-\hat{\mathbf{I}}_2 \right] + \left[\hat{\mathbf{I}}_2 \right] + \left[2\hat{\mathbf{I}}_1 - \hat{\mathbf{I}}_2 \right] \right), \\ & \text{Diagram} \Big|_{G_{\text{loc}}\mathcal{N}\mathcal{N}} \stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{c_2^2}{2} W_{-1} \left(\left[-\hat{\mathbf{I}}_2 \right] + \left[\hat{\mathbf{I}}_1 \right] + \left[\hat{\mathbf{I}}_1 \right] \right). \end{aligned}$$

Суммируя выражения, получим следующий результат для набора двухпетлевых диаграмм

$$\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2) \Big|_{G_{\text{loc}}\mathcal{N}\mathcal{N}} \stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{c_2^2}{2} W_{-1} \left(-3\hat{\mathbf{I}}_1 - \frac{3}{2}\hat{\mathbf{I}}_2 \right) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{3c_2^2 W_{-1}}{16(4\pi^2)^2} \left(2L^2 + L(1 + 4\rho_1 + 4\rho_2) \right). \quad (102)$$

7.4.2 Вклад $G_{\text{loc}}G_{\text{loc}}\mathcal{N}$ для $\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2)$

В данном случае в диаграмме остаются две функции G_{loc} , поэтому общая идея подсчета похожа на ту, что была в случае 7.3.1. При этом третья линия заменяется на функцию \mathcal{N} , и именно этот факт вносит существенные различия в последующем подсчете, так как \mathcal{N} не обладает двумя несингулярными производными. Более того, на диагонали она ведет себя как $\theta(0) \sim L$. Это означает, что использование результатов для сингулярных операторов из 7.2 не представляется возможным.

Тем не менее, можно выписать общий вид. Для этого необходимо воспользоваться уже готовыми представлениями после формулы (91) и заменить в них $PS_{1\sigma\rho}$ на $\mathcal{N}_{\sigma\rho}$. Пользуясь свойствами $\mathcal{N}_{\sigma\rho} = -\mathcal{N}_{\rho\sigma}$ и $\mathcal{N}_{\sigma\sigma} = 0$ и соотношениями для специальных интегралов из секции 7.3.1, промежуточные результаты для отдельных диаграмм можно представить следующим образом

$$\begin{aligned} & \text{Diagram} \Big|_{G_{\text{loc}}G_{\text{loc}}\mathcal{N}} \stackrel{\text{s.p.}}{=} J_{\sigma\rho}[\mathcal{N}_{1\sigma\rho}] - \frac{3}{2}\hat{\mathbf{J}}_{\sigma\rho}[\mathcal{N}_{1\sigma\rho}], \\ & - \text{Diagram} \Big|_{G_{\text{loc}}G_{\text{loc}}\mathcal{N}} \stackrel{\text{s.p.}}{=} -4J_{\sigma\rho}[\mathcal{N}_{1\sigma\rho}], \\ & \text{Diagram} \Big|_{G_{\text{loc}}G_{\text{loc}}\mathcal{N}} \stackrel{\text{s.p.}}{=} -4J_{\sigma\rho}[\mathcal{N}_{1\sigma\rho}] + 2\hat{\mathbf{J}}_{\sigma\rho}[\mathcal{N}_{1\sigma\rho}], \\ & -2 \text{Diagram} \Big|_{G_{\text{loc}}G_{\text{loc}}\mathcal{N}} \stackrel{\text{s.p.}}{=} 2J_{\sigma\rho}[\mathcal{N}_{1\sigma\rho}] - \hat{\mathbf{J}}_{\sigma\rho}[\mathcal{N}_{1\sigma\rho}], \\ & \text{Diagram} \Big|_{G_{\text{loc}}G_{\text{loc}}\mathcal{N}} \stackrel{\text{s.p.}}{=} 2J_{\sigma\rho}[\mathcal{N}_{1\sigma\rho}] - \hat{\mathbf{J}}_{\sigma\rho}[\mathcal{N}_{1\sigma\rho}]. \end{aligned}$$

В свою очередь, для их суммы (91) можно выписать ответ в виде

$$\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2) \Big|_{G_{\text{loc}}G_{\text{loc}}\mathcal{N}} \stackrel{\text{s.p.}}{=} -3J_{\sigma\rho}[\mathcal{N}_{1\sigma\rho}] - \frac{3}{2}\hat{\mathbf{J}}_{\sigma\rho}[\mathcal{N}_{1\sigma\rho}]. \quad (103)$$

Последние интегралы необходимо анализировать заново. Поясним первый случай, а для второго представим лишь окончательный ответ. Для этого воспользуемся определением интеграла (85) и ядра (87). Далее подставим разложения для функций Грина G_{loc} из таблиц (83) и (84), а также разложение для функции \mathcal{N} из (76). Затем удалим все слагаемые, которые не приводят к сингулярным вкладам по причинам нулевого следа или же из-за свертки симметричного объекта с антисимметричным. В итоге после сдвига $x \rightarrow x + y$ и перехода к интегрированию по $B_{1/\sigma} \times \mathbb{R}^4$ оставшиеся части получаем заменами:

$$\begin{aligned} G_{\text{loc}}^{ab}(x, y)|_{x \rightarrow x+y} &\rightarrow \delta^{ab} R_0^\Lambda(x), \\ \mathcal{N}_{\sigma\rho}^{ab}(x, y)|_{x \rightarrow x+y} &\rightarrow 2F_{\sigma\rho}^{ab}(y)\theta(x), \\ D_\sigma^{ca}(x)D_\rho^{db}(y)G_{\text{loc}}^{ab}(x, y)|_{x \rightarrow x+y} &\rightarrow -B_\sigma^{ca}(y)B_\rho^{ad}(y)R_0^\Lambda(x) - 4B_\sigma^{ca}(y)B_\mu^{ad}(y)\partial_{x^\rho}\partial_{x^\mu}\theta(x) \\ &\quad + 2\partial_{y^\rho}B_\mu^{cd}(y)\partial_{x^\sigma}\partial_{x^\mu}\theta(x) - \partial_{y^\eta}B_\mu^{cd}(y)x^\eta\partial_{x^\rho}R_0^\Lambda(x). \end{aligned}$$

Подставляя полученные варианты замен и пользуясь вспомогательными интегралами из секции 7.8, получаем равенство

$$\begin{aligned} J_{\sigma\rho}[\mathcal{N}_{1\sigma\rho}] \stackrel{\text{s.p.}}{=} & -\frac{c_2^2}{2}(\hat{\mathbf{I}}_1 - \hat{\mathbf{I}}_5) \int_{\mathbb{R}^4} d^4y f^{abc} B_\sigma^a(y) B_\rho^b(y) F_{\sigma\rho}^c(y) \\ & - \frac{c_2^2}{2}(\hat{\mathbf{I}}_1 - \hat{\mathbf{I}}_6) \int_{\mathbb{R}^4} d^4y (\partial_{y^\sigma} B_\rho^c(y)) F_{\sigma\rho}^c(y). \end{aligned} \quad (104)$$

Далее, повторяя все проделанные вычисления для второго функционала, получаем для него асимптотическое разложение в виде

$$\begin{aligned} \hat{J}_{\sigma\rho}[\mathcal{N}_{1\sigma\rho}] \stackrel{\text{s.p.}}{=} & -\frac{c_2^2}{2}(2\hat{\mathbf{I}}_1 - \hat{\mathbf{I}}_2 - 2\hat{\mathbf{I}}_5) \int_{\mathbb{R}^4} d^4y f^{abc} B_\sigma^a(y) B_\rho^b(y) F_{\sigma\rho}^c(y) \\ & - \frac{c_2^2}{2}(2\hat{\mathbf{I}}_1 - \hat{\mathbf{I}}_2 - 4\hat{\mathbf{I}}_6) \int_{\mathbb{R}^4} d^4y (\partial_{y^\sigma} B_\rho^c(y)) F_{\sigma\rho}^c(y). \end{aligned} \quad (105)$$

В завершение, подставляя полученные результаты в (103) и пользуясь асимптотическими разложениями для интегралов из секции 7.8, получаем окончательное выражение в виде

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2)|_{G_{\text{loc}}G_{\text{loc}}\mathcal{N}} \stackrel{\text{s.p.}}{=} & -\frac{3c_2^2}{16(4\pi^2)^2}(L^2 + L(2\rho_1 - 2\rho_2)) \int_{\mathbb{R}^4} d^4y f^{abc} B_\sigma^a(y) B_\rho^b(y) F_{\sigma\rho}^c(y) \\ & - \frac{6c_2^2}{16(4\pi^2)^2}(L^2 + L(-1/4 + 2\rho_1 - \rho_2)) \int_{\mathbb{R}^4} d^4y (\partial_{y^\sigma} B_\rho^c(y)) F_{\sigma\rho}^c(y). \end{aligned} \quad (106)$$

Заметим, что ответ не является инвариантным относительно калибровочных преобразований фонового поля (16) на уровне нелидирующих «логарифмов». Таким образом, классическое действие расщепляется на две части, каждая из которых имеет свою поправку. Этот факт является следствием нековариантности деформации, см. секцию 4.2, и приводит к необходимости вычислять константы перенормировки для отдельных частей классического действия. При этом в случае вкладов, пропорциональных $\sim L^2$, инвариантность сохраняется.

7.4.3 Вклад $G_{\text{loc}}G_{\text{loc}}\mathcal{L}$ для $\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2)$

В данном случае необходимо произвести аналогичные вычисления после подстановки \mathcal{L} вместо PS_1 в представление (91), однако замены интегральных ядер будут уже другими. Анализируя порядки сингулярности для всех частей, делаем вывод, что ковариантные производные можно заменить на обычные, в то время как ядра – на главные части. Другими словами, после сдвига переменной для плотностей справедливы замены

$$\delta_{\mu\nu} G_{\text{loc}}^{ab}(x + y, y) \rightarrow \delta_{\mu\nu} \delta^{ab} R_0^\Lambda(x), \quad \mathcal{L}_{\mu\nu}^{ab}(x + y, y) \rightarrow 4F_{\mu\sigma}^{ac}(y)F_{\sigma\nu}^{cb}(y)\theta(x).$$

В этом случае, к примеру, функционал $J_{\sigma\rho}[\mathcal{L}_{\sigma\rho}]$ после использования определения (87) для ядра оператора и соответствующего упрощения

$$\mathcal{R}_{\sigma\rho}^{ab}(x+y, y) \rightarrow c_2 \left(\partial_{x^\sigma} \partial_{x^\rho} R_0^\Lambda(x) \right) R_0^\Lambda(x),$$

с учетом вспомогательного интеграла из секции (7.8), представляется формулой

$$J_{\sigma\rho}[\mathcal{L}_{\sigma\rho}] \stackrel{\text{s.p.}}{=} -c_2^2 \hat{\mathbf{I}}_3 W_{-1}.$$

Аналогично доказываются соотношения

$$J_{\sigma\rho}[\mathcal{L}_{\sigma\rho}] \stackrel{\text{s.p.}}{=} J_{\sigma\rho}[\mathcal{L}_{\rho\sigma}] \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{1}{4} J_{\sigma\sigma}[\mathcal{L}_{\rho\rho}], \quad (107)$$

$$\hat{J}_{\sigma\rho}[\mathcal{L}_{\sigma\rho}] \stackrel{\text{s.p.}}{=} \hat{J}_{\sigma\rho}[\mathcal{L}_{\rho\sigma}] \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{1}{4} \hat{J}_{\sigma\sigma}[\mathcal{L}_{\rho\rho}] \stackrel{\text{s.p.}}{=} -c_2^2 \hat{\mathbf{I}}_4 W_{-1}. \quad (108)$$

Следовательно, суммируя полученные выше результаты, приходим к ответам для каждой отдельной диаграммы

$$\begin{aligned} & \left(\text{Diagram 1} \right) \Big|_{G_{\text{loc}} G_{\text{loc}} \mathcal{L}} \stackrel{\text{s.p.}}{=} c_2^2 W_{-1} \left(2\hat{\mathbf{I}}_3 + \hat{\mathbf{I}}_4 \right) \times \frac{1}{2}, \\ & - \left(\text{Diagram 2} \right) \Big|_{G_{\text{loc}} G_{\text{loc}} \mathcal{L}} \stackrel{\text{s.p.}}{=} c_2^2 W_{-1} \left(2\hat{\mathbf{I}}_3 + \hat{\mathbf{I}}_4 \right) \times 4, \\ & \left(\text{Diagram 3} \right) \Big|_{G_{\text{loc}} G_{\text{loc}} \mathcal{L}} \stackrel{\text{s.p.}}{=} c_2^2 W_{-1} \left(2\hat{\mathbf{I}}_3 + \hat{\mathbf{I}}_4 \right) \times 2, \\ & -2 \left(\text{Diagram 4} \right) \Big|_{G_{\text{loc}} G_{\text{loc}} \mathcal{L}} \stackrel{\text{s.p.}}{=} c_2^2 W_{-1} \left(2\hat{\mathbf{I}}_3 + \hat{\mathbf{I}}_4 \right) \times (-1), \\ & \left(\text{Diagram 5} \right) \Big|_{G_{\text{loc}} G_{\text{loc}} \mathcal{L}} \stackrel{\text{s.p.}}{=} c_2^2 W_{-1} \left(2\hat{\mathbf{I}}_3 + \hat{\mathbf{I}}_4 \right) \times (-1), \end{aligned}$$

а также для их суммы в виде

$$\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2) \Big|_{G_{\text{loc}} G_{\text{loc}} \mathcal{L}} \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{9c_2^2 W_{-1}}{2} \left(2\hat{\mathbf{I}}_3 + \hat{\mathbf{I}}_4 \right) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{9c_2^2 W_{-1}}{16(4\pi^2)^2} \left(L^2 + L(1 + 2\rho_1 + 24\rho_3\rho_5 - 8\rho_4) \right). \quad (109)$$

7.4.4 Вклад $G_{\text{loc}} G_{\text{loc}} G_{\text{loc}}$ для $\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2)$

Последний вклад локального типа, появляющийся в диаграммах из $\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2)$, в действительности может быть сведен к единственному интегралу

$$J_\ominus[B] = \int_{B_{1/\sigma}} d^4x \int_{\mathbb{R}^4} d^4y \left(f^{ceg} \left(D_\sigma^{ca}(x) D_\sigma^{db}(y) G_{\text{loc}}^{ab}(x, y) \right) G_{\text{loc}}^{eh}(x, y) G_{\text{loc}}^{gf}(x, y) f^{fhd} - \hat{\kappa} \right) \Big|_{x \rightarrow x+y}, \quad (110)$$

где константа $\hat{\kappa}$ вычитает из первого слагаемого часть, не зависящую от фонового поля. Чтобы это показать, необходимо в каждой из пяти диаграмм в (52) заменить функцию Грина $G_{1\mu\nu}^\Lambda$ на локальную составляющую $\delta_{\mu\nu} G_{\text{loc}}$, проинтегрировать по частям, чтобы обе производные действовали на одну и ту же локальную функцию, затем выполнить сдвиг переменной $x \rightarrow x + y$, чтобы каждое слагаемое факторизовалось на сингулярную часть и некоторый функционал от фонового поля, и в конце заменить область интегрирования $\mathbb{R}^{4 \times 2}$ на $B_{1/\sigma} \times \mathbb{R}^4$. Такой набор манипуляций преобразует каждую диаграмму следующим образом

$$\left(\text{Diagram 1} \right) \rightarrow -J_\ominus/2, \quad \left(\text{Diagram 2} \right) \rightarrow 4J_\ominus, \quad \left(\text{Diagram 3} \right) \rightarrow -2J_\ominus, \quad \left(\text{Diagram 4} \right) \rightarrow -J_\ominus/2, \quad \left(\text{Diagram 5} \right) \rightarrow J_\ominus. \quad (111)$$

Следовательно, подставляя преобразованные части в (52), приходим к соотношению

$$\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2) \Big|_{G_{\text{loc}} G_{\text{loc}} G_{\text{loc}}} \stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{9J_\ominus}{2}. \quad (112)$$

7.4.5 Вклады для $\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Omega_3^2)$

В данном случае можно воспользоваться подсчетами для группы диаграмм $\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2)$, адаптировав необходимым образом некоторые вычисления. Во-первых, локальный вклад типа $G_{\text{loc}}\mathcal{N}\mathcal{N}$ будет отсутствовать из-за наличия только одной векторной функции Грина. Остальные вклады прокомментируем подробнее.

1) Вклад $G_{\text{loc}}G_{\text{loc}}\mathcal{N}$ можно найти при помощи перерезания средней линии в диаграмме (53) и дальнейшего перехода к заранее заготовленным интегралам $J_{\sigma\rho}[\cdot]$ и $\hat{J}_{\sigma\rho}[\cdot]$. Для этого можно воспользоваться уже полученной комбинацией для интегрального ядра (95) из секции 7.3.3. Только вместо тестовой функции PS_1 необходимо подставить \mathcal{N} , тогда искомая сингулярная комбинация содержится в разности

$$J_{\sigma\rho}[\mathcal{N}_{\sigma\rho}] - \frac{1}{2}\hat{J}_{\sigma\rho}[\mathcal{N}_{\sigma\rho}]. \quad (113)$$

Далее, пользуясь ответами (104) и (105) и вспомогательными асимптотическими разложениями из секции 7.8, приходим к ответу

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Omega_3^2) \Big|_{G_{\text{loc}}G_{\text{loc}}\mathcal{N}} \stackrel{\text{s.p.}}{=} & -\frac{c_2^2}{16(4\pi^2)^2} \left(L^2 + L(2\rho_1 + 2\rho_2) \right) \int_{\mathbb{R}^4} d^4y f^{abc} B_\sigma^a(y) B_\rho^b(y) F_{\sigma\rho}^c(y) \\ & - \frac{2c_2^2}{16(4\pi^2)^2} \left(L^2 + L(1/4 + 2\rho_1 + \rho_2) \right) \int_{\mathbb{R}^4} d^4y \left(\partial_{y^\sigma} B_\rho^c(y) \right) F_{\sigma\rho}^c(y). \end{aligned} \quad (114)$$

2) Вклад $G_{\text{loc}}G_{\text{loc}}\mathcal{L}$ ищется аналогичным образом. Достаточно воспользоваться представлением (113), заменить функцию $\mathcal{N}_{\mu\nu}$ на $\mathcal{L}_{\mu\nu}$, а затем применить уже известные результаты (107) и (108). В итоге получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Omega_3^2) \Big|_{G_{\text{loc}}G_{\text{loc}}\mathcal{L}} \stackrel{\text{s.p.}}{=} & J_{\sigma\rho}[\mathcal{L}_{\sigma\rho}] - \frac{1}{2}\hat{J}_{\sigma\rho}[\mathcal{L}_{\sigma\rho}] \stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{c_2^2 W_{-1}}{2} (2\hat{\mathbf{I}}_3 - \hat{\mathbf{I}}_4) \\ \stackrel{\text{s.p.}}{=} & \frac{c_2^2 W_{-1}}{16(4\pi^2)^2} \left(L^2 + L(1 + 2\rho_1 - 24\rho_3\rho_5 + 8\rho_4) \right). \end{aligned} \quad (115)$$

3) Вклад $G_{\text{loc}}G_{\text{loc}}G_{\text{loc}}$ можно найти при помощи процедуры, описанной в секции 7.4.4. Ясно, что диаграмма (53) равна 1/4 от средней диаграммы из (111). Следовательно, имеем

$$\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Omega_3^2) \Big|_{G_{\text{loc}}G_{\text{loc}}G_{\text{loc}}} \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{J_\Theta}{2}. \quad (116)$$

7.4.6 Вклады для $\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_4)$

Как и ранее, разобьем подсчет на несколько частей. В начале секции 7.4 были выделены вклады, которые могут содержать ненулевую сингулярную часть. Остальные части не рассматриваются из-за очевидных причин: либо сингулярная часть отсутствует в принципе, либо сокращается из-за свертки симметричного объекта с антисимметричным.

1) Рассмотрим вклад $\mathcal{N}\mathcal{N}$. В этом случае функцию $\mathcal{N}_{\mu\nu}^{ab}(x, x)$ можно заменить на главную часть разложения $2F_{\mu\nu}^{ab}(x)\theta(0)$, поскольку остальные части либо обращаются в нуль, либо имеют порядок L/Λ^2 . В этом случае, после свертки групповых индексов, приходим к следующим значениям

$$\bigcirc \rightarrow 2c_2^2 W_{-1} \theta^2(0), \quad - \bigcirc \rightarrow 0, \quad \bigcirc \text{---} \bigcirc \rightarrow 4c_2^2 W_{-1} \theta^2(0).$$

Следовательно, в сумме получаем

$$\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_4) \Big|_{\mathcal{N}\mathcal{N}} \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{3c_2^2 W_{-1}}{2(4\pi^2)^2} \left(L^2 + 2L\rho_1 \right). \quad (117)$$

2) Рассмотрим случай $G_{\text{loc}}\mathcal{L}$. Заметим, что благодаря справедливости соотношений (98) локальную функцию $G_{\text{loc}}^{ab}(x, x)$ можно заменить на главную часть разложения $\delta^{ab}R_0^\Lambda(0)$. Подставляя функцию \mathcal{L} из (79), получаем соотношения

$$\text{---}\bigcirc\text{---} \rightarrow -8c_2^2 W_{-1} R_0^\Lambda(0) \tau(0), \quad \bigcirc\text{---} \rightarrow 32c_2^2 W_{-1} R_0^\Lambda(0) \tau(0), \quad \bigcirc\text{---}\bigcirc \rightarrow 0,$$

из которых, после суммирования и использования разложений из секции 7.8, следует ответ

$$\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_4) \Big|_{G_{\text{loc}}\mathcal{L}} \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{9c_2^2 W_{-1}}{\pi^2} L R_0^1(0) \rho_5. \quad (118)$$

3) Последний случай отвечает комбинации $G_{\text{loc}}G_{\text{loc}}$. Заметим, что из-за тех же соотношений (98) одну из функций можно заменить на главную часть разложения, а результат удвоить. Введем вспомогательный функционал

$$J_\odot[B] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(G_{\text{loc}}^{aa}(x, x) - \kappa \right), \quad (119)$$

где константа κ вычитает часть плотности, не зависящую от фонового поля. Тогда прямым подсчетом можно убедиться в справедливости переходов

$$\text{---}\bigcirc\text{---} \rightarrow -8c_2 J_\odot R_0^\Lambda(0), \quad \bigcirc\text{---} \rightarrow 32c_2 J_\odot R_0^\Lambda(0), \quad \bigcirc\text{---}\bigcirc \rightarrow 0.$$

Суммируя, получаем ответ в виде

$$\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_4) \Big|_{G_{\text{loc}}G_{\text{loc}}} \stackrel{\text{s.p.}}{=} 24c_2 J_\odot R_0^\Lambda(0). \quad (120)$$

7.5 Контрдиаграммы

В данной секции изучим разложения на локальную и нелокальную части для возникающих контрдиаграмм и некоторых дополнительных вспомогательных частей функций Грина.

«Массовая» контрвершина. При исследовании первой поправки возникла необходимость ввести массовое⁵⁴ слагаемое в классическое действие теории Янга–Миллса из-за появления степенной сингулярности Λ^2 , пропорциональной второй степени фонового поля. Этот факт привел к появлению контрвершины S_2 с двумя внешними линиями. Так как введенная вершина пропорциональна второй степени константы связи, то в двухпетлевом приближении появляется контрдиаграмма равная следу функции Грина. Разобьем его на части, пользуясь разложениями (75) и (80). После подстановки получаем

$$\Lambda^2 \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(G_{1\mu\mu}^{\Lambda aa}(x, x) - 4G_{\text{loc}}^{aa}(x, x) \right) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \Lambda^2 \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(PS_{1\mu\mu}^{aa}(x, x) + 4PS_0^{aa}(x, x) \right) + \frac{3c_2 L \rho_5}{2\pi^2} W_{-1}, \quad (121)$$

где было использовано соотношение из секции 7.8 для подсчета $\Lambda^2 \tau(0)$.

«Калибровочная» контрвершина. При изучении нелокальных частей для двухпетлевых диаграмм в секции 7.3.1 появилось слагаемое с плотностью $D_\rho^{bc}(x) D_\sigma^{ca}(x) PS_{1\sigma\rho}^{ab}(x, y)|_{y=x}$, умноженное на $L = \ln(\Lambda/\sigma)$. Этот факт означает необходимость введения перенормировочной константы для слагаемого (6), фиксирующего калибровочное условие. В частности, это приводит к появлению в двухпетлевом порядке дополнительной контрдиаграммы. Представим для нее разложение

$$\begin{aligned} L \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(D_\rho^{bc}(x) D_\sigma^{ca}(x) G_{1\sigma\rho}^{\Lambda ab}(x, y) + M_0^{ab}(x) G_{\text{loc}}^{ba}(x, y) \right) \Big|_{y=x} &\stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{c_2 L \rho_2}{8\pi^2} W_{-1} \\ &+ L \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(D_\rho^{bc}(x) D_\sigma^{ca}(x) PS_{1\sigma\rho}^{ab}(x, y) + M_0^{ab}(x) PS_0^{ba}(x, y) \right) \Big|_{y=x}, \end{aligned} \quad (122)$$

⁵⁴Более детальный анализ расширения классического действия приведен в секции 9.

где вновь, с учетом определений из секции 7.8, было использовано вспомогательное равенство

$$\theta(0) - A_0(x)\tau(x)|_{x=0} = -\rho_2/(8\pi^2), \quad (123)$$

которое верно для всех $\Lambda/\sigma > 2$. Дополнительно введем обозначение для локальной части

$$J_\otimes[B] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(M_0^{ab}(x) G_{\text{loc}}^{ba}(x, y) \Big|_{y=x} - \tilde{\kappa} \right), \quad (124)$$

где $\tilde{\kappa}$ вычитает не зависящую от фонового поля плотность.

Разложение для LM_1PS_1 . Можно заметить, что после суммирования всех нелокальных слагаемых из секции (7.3) образуется оператор M_1 , действующий на часть PS_1 и домноженный на логарифмическую сингулярность L . Вычислим след от такой величины. Воспользуемся определением (29) при $e_\mu^a = B_\mu^a$ и определением для PS_1 из (75). Далее, пользуясь вдобавок антисимметричностью напряженности, замечаем, что ненулевой и зависящий от фонового поля вклад в интеграл

$$L \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(M_{1\mu\nu}^{ab}(x) PS_{1\nu\mu}^{ba}(x, y) \Big|_{y=x} - \kappa_{ps_1} \right),$$

где κ_{ps_1} вычитает плотность, не зависящую от фонового поля, можно представить в виде трех слагаемых

$$\begin{aligned} & 4L \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \int_{\mathbb{R}^4} d^4y \int_{\mathbb{R}^4} d^4z \left(A_0(x) R_0^\Lambda(x-y) \right) F_{\mu\nu}^{ab}(y) R_0^\Lambda(y-z) F_{\nu\mu}^{ba}(z) R_0^\Lambda(z-x) \\ & - 4L \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \int_{\mathbb{R}^4} d^4y F_{\mu\nu}^{ab}(x) R_0^\Lambda(x-y) F_{\nu\mu}^{ba}(y) R_0^\Lambda(y-x) + 4c_2 L W_{-1} \left(\theta(0) - A_0(x)\tau(x) \Big|_{x=0} \right). \end{aligned}$$

Остальные части приведут к конечным поправочным слагаемым из-за свойств функции Грина (12). Пользуясь формулой (123), видим, что последняя часть пропорциональна ρ_2 . Далее, добавлением, вычитанием и сдвигом переменной можно показать, что первые два слагаемых в главном порядке также пропорциональны ρ_2 , но с обратным знаком. При этом поправочные части являются малыми по отношению к логарифму L . Следовательно, окончательное соотношение имеет вид

$$L \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(M_{1\mu\nu}^{ab}(x) PS_{1\nu\mu}^{ba}(x, y) \Big|_{y=x} - \kappa_{ps_1} \right) \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0. \quad (125)$$

Разложение для LM_0PS_0 . Данное утверждение аналогично предыдущему и математически может быть сформулировано так

$$L \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(M_0^{ab}(x) PS_0^{ba}(x, y) \Big|_{y=x} - \kappa_{ps_0} \right) \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0, \quad (126)$$

где κ_{ps_0} вычитает плотность, не зависящую от фонового поля. Основной метод его доказательства основан на явном применении оператора и дальнейшем асимптотическом разложении.

7.6 Разложение локальных вкладов

По ходу выполнения подсчетов появились три вспомогательных функционала J_\otimes , J_\odot и J_\ominus , которые строятся при помощи локальной составляющей G_{loc} из разложения (82) около диагонали для функции Грина. Изучим их более подробно. Для этого будем пользоваться набором частей классического действия W_{-1}^i , где $i \in \{\pm, 1, \dots, 6\}$ из теоремы 1 из секции 4.7.

Разложение для J_\otimes . Определение для J_\otimes приведено в формуле (124). Основой здесь является комбинация $M_0^{ab}(x) G_{\text{loc}}^{ba}(x, y)$ при $x = y$. Далее обратим внимание на два факта. Во-первых, составляющая G_{loc} в разложении (80) подбиралась таким образом, чтобы $M_0^{ab}(x) PS_0^{ba}(x, y)$ при $x = y$

имела поведение не хуже L^{-1} . Во-вторых, применение оператора $M_0^{ab}(x)$ к нерегуляризованной скалярной функции Грина зануляет (сокращает) все ненулевые порядки по фоновому полю. Следовательно, конечная часть для $M_0^{ab}(x)G_{\text{loc}}^{ba}(x, y)$ при $x = y$ должна быть представлена в виде линейной комбинации $S_2[B]$ и $W_{-1}^i[B]$ с коэффициентами, которые являются разностями, зависящими от деформированной функции $A_0(u)R_0^1(u - z)$. Пользуясь (81) для вычисления точного коэффициента при $S_2[B]$, ответ можно представить следующим образом

$$LJ_{\otimes}[B] \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{c_2 L \Lambda^2}{4\pi^2} S_2[B](\rho_0 + \rho_6 - 2\rho_3) + L \sum_{i=1}^6 c_{\otimes}^i W_{-1}^i[B], \quad (127)$$

где были использованы обозначения из секции (7.8). Обратим внимание, что коэффициенты c_{\otimes}^i являются конечными и вещественными, они зависят от функции $\mathbf{f}(\cdot)$ из (28), и показывают отклонение от ковариантной деформации из секции 8.

Разложение для J_{\odot} . Определение для J_{\odot} приведено в формуле (119). Здесь важно обратить внимание на тот факт, что в нерегуляризованном случае логарифм $\ln(|x - y|)$ при степени $|x - y|^2$ сокращается. Чтобы это понять, достаточно посмотреть на устройство коэффициентов Сили-деВитта около диагонали, см. для справки разложение функций Грина около диагонали [114, 115] и метод теплового ядра [116–118]. Таким образом, основной вклад будет пропорционален линейной комбинации $S_2[B]$ и $W_{-1}^i[B]$. При этом коэффициенты будут представлены разностями, зависящими от деформированной функции $A_0(u)R_0^1(u - z)$. Вновь вычисляя явно вклад, пропорциональный $S[B]$, получаем ответ в виде

$$\Lambda^2 J_{\odot}[B] \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{c_2 \rho_2 \Lambda^2}{8\pi^2} S_2[B] + L \sum_{i=1}^6 c_{\odot}^i W_{-1}^i[B]. \quad (128)$$

Как и в предыдущей ситуации (127), коэффициенты c_{\odot}^i появились вследствие «отклонения» от ковариантного случая.

Разложение для J_{\ominus} . Определение для J_{\ominus} приведено в формуле (110). В данном случае необходимо обратить внимание на тот факт, что функционал J_{\ominus} может содержать либо степенную сингулярность, пропорциональную $S_2[B]$, либо линейную комбинацию классического действия $W_{-1}[B]$ и его частей $W_{-1}^i[B]$, домноженных на первую степень логарифма L . При этом появление второй степени логарифма L^2 невозможно, поскольку такая сингулярность не зависит от вида регуляризации, а значит для ее определения можно воспользоваться, к примеру, регуляризацией для ковариантного «слабого» случая, см. секцию 8.2. Более того, из той же секции следует, что часть, пропорциональная первой степени логарифма, представима в виде

$$\frac{c_2^2 L}{(4\pi)^4} W_{-1}[B] + L \sum_{i=1}^6 c_{\ominus}^i W_{-1}^i[B],$$

Она представляет собой ковариантную часть и набор добавок, содержащих коэффициенты c_{\ominus}^i , которые нужно рассматривать как отклонение от ковариантного случая при нарушении калибровочной инвариантности (16). В случае слагаемого с $S_2[B]$ достаточно перебрать все возможные варианты, пользуясь разложением (82). Таким образом, учитывая обозначения из секции 7.7, получаем

$$J_{\ominus}[B] \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{c_2^2 \rho_7 \Lambda^2}{(4\pi^2)^2} S_2[B] + \frac{c_2^2 L}{(4\pi)^4} W_{-1}[B] + L \sum_{i=1}^6 c_{\ominus}^i W_{-1}^i[B]. \quad (129)$$

7.7 Сингулярная часть: сумма вкладов

В качестве основного результата, полученного в секции 7, приведем сингулярную часть для первой регуляризованной неренормированной квантовой поправки $W_1^{\Lambda}[B]$, формула для которой приведена

в (50). Для этого воспользуемся полученными формулами для сингулярных частей для каждой отдельной составляющей:

$$\begin{aligned}\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2) : \text{нелокальная часть} &\longrightarrow \text{см. (92), (93) и (94);} \\ &\text{локальная часть} \longrightarrow \text{см. (102), (106), (109) и (112);} \\ \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_4) : \text{нелокальная часть} &\longrightarrow \text{см. (99), (100) и (101);} \\ &\text{локальная часть} \longrightarrow \text{см. (117), (118) и (120);} \\ \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Omega_3^2) : \text{нелокальная часть} &\longrightarrow \text{см. (96) и (97);} \\ &\text{локальная часть} \longrightarrow \text{см. (114), (115) и (116).}\end{aligned}$$

Дополнительно воспользуемся соотношениями (125) и (126). Тогда, после суммирования всех полученных результатов с учетом коэффициентов из (50), получаем ответ в виде

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2) + \frac{1}{4}\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_4) - \frac{1}{2}\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Omega_3^2) \stackrel{\text{s.p.}}{=} & -\frac{\Lambda^2 c_2(2\rho_3 - 3\rho_0)}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(PS_{1\rho\rho}^{aa}(x, x) + 4PS_0^{aa}(x, x) \right) (130) \\ & -\frac{5Lc_2}{48\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(D_\rho^{bc}(x) D_\sigma^{ca}(x) PS_{1\sigma\rho}^{ab}(x, y) \right) \Big|_{y=x} \\ & -\frac{c_2^2 W_{-1} L}{32(4\pi^2)^2} (13 + 16\rho_2) + \frac{c_2^2 W_{-1}^+ L}{32(4\pi^2)^2} (2\rho_2 - 1/2) \\ & -\frac{c_2^2 W_{-1} L}{(4\pi^2)^2} (3\rho_5(2\rho_3 - 3\rho_0) - 2\rho_4) + 2J_\oplus + \frac{3c_2\rho_0\Lambda^2 J_\odot}{2\pi^2}.\end{aligned}$$

Здесь были использованы вспомогательные обозначения для частей классического действия

$$W_{-1}^+ = 2 \int_{\mathbb{R}^4} d^4y \left(\partial_{y^\sigma} B_\rho^c(y) \right) F_{\sigma\rho}^c(y), \quad W_{-1}^- = \int_{\mathbb{R}^4} d^4y f^{abc} B_\sigma^a(y) B_\rho^b(y) F_{\sigma\rho}^c(y). \quad (131)$$

Заметим, что последние величины подчиняются равенству $W_{-1}^- + W_{-1}^+ = W_{-1}$.

7.8 Вспомогательные соотношения

Интегралы для нелокальной части. Все интегралы, перечисленные ниже, при асимптотическом разложении по переменной Λ в главном порядке пропорциональны $L = \ln(\Lambda/\sigma)$. В этом можно убедиться прямым дифференцированием, то есть применением оператора $\Lambda\partial_\Lambda$, и дальнейшим переходом к пределу $\Lambda \rightarrow +\infty$. Для всех интегралов такие пределы будут существовать и конечны. Таким образом, в качестве ответа необходимо взять произведение L на предельную величину.

$$\begin{aligned}\int_{B_{1/\sigma}} d^4x \left(-\partial_{x^\sigma} \partial_{x^\rho} R_0^\Lambda(x) \right) \partial_{x^\mu} \partial_{x^\nu} \tau(x) &\stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{\delta_{\rho\nu} \delta_{\sigma\mu} + \delta_{\sigma\nu} \delta_{\mu\rho} + \delta_{\sigma\rho} \delta_{\nu\mu}}{24} \frac{L}{8\pi^2}, \\ \int_{B_{1/\sigma}} d^4x \left(-\partial_{x^\sigma} \partial_{x^\rho} R_0^\Lambda(x) \right) x^\nu \partial_{x^\mu} \theta(x) &\stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{2\delta_{\rho\nu} \delta_{\sigma\mu} + 2\delta_{\sigma\nu} \delta_{\mu\rho} - \delta_{\sigma\rho} \delta_{\nu\mu}}{12} \frac{L}{8\pi^2}, \\ \int_{B_{1/\sigma}} d^4x \left(-\partial_{x^\sigma} \partial_{x^\rho} R_0^\Lambda(x) \right) x^\nu x^\mu R_0^\Lambda(x) &\stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{2\delta_{\rho\nu} \delta_{\sigma\mu} 2\delta_{\sigma\nu} \delta_{\mu\rho} - \delta_{\sigma\rho} \delta_{\nu\mu}}{6} \frac{L}{8\pi^2}, \\ \int_{B_{1/\sigma}} d^4x \left(-\partial_{x^\sigma} \partial_{x^\rho} \partial_{x^\mu} \theta(x) \right) x^\nu R_0^\Lambda(x) &\stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{\delta_{\rho\nu} \delta_{\sigma\mu} + \delta_{\sigma\nu} \delta_{\mu\rho} + \delta_{\sigma\rho} \delta_{\nu\mu}}{12} \frac{L}{8\pi^2}, \\ \int_{B_{1/\sigma}} d^4x \left(\partial_{x^\sigma} \partial_{x^\rho} \theta(x) \right) \partial_{x^\mu} \partial_{x^\nu} \theta(x) &\stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{\delta_{\rho\nu} \delta_{\sigma\mu} + \delta_{\sigma\nu} \delta_{\mu\rho} + \delta_{\sigma\rho} \delta_{\nu\mu}}{24} \frac{L}{8\pi^2}, \\ \int_{B_{1/\sigma}} d^4x \left(-\partial_{x^\sigma} \partial_{x^\rho} R_0^\Lambda(x) \right) \theta(x) &\stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{\delta_{\sigma\rho}}{4} \frac{L}{8\pi^2},\end{aligned}$$

$$\int_{B_{1/\sigma}} d^4x \left(-x^\sigma \partial_{x^\rho} R_0^\Lambda(x) \right) R_0^\Lambda(x) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{\delta_{\sigma\rho}}{2} \frac{L}{8\pi^2}.$$

Обратим внимание, что сперва удобно воспользоваться сферической симметрией в форме (65).

Интегралы для локальной части. Для формулировки ответов необходимо определить несколько вспомогательных функционалов, зависящих от деформированной свободной функции Грина $R_0^1(x)$:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \int_{B_1} d^4x R_0^1(x) R_0^1(x) \times 8\pi^2, \\ \rho_2 &= \int_{B_1} d^4x A_0(x) R_0^1(x) \int_{\mathbb{R}^4} d^4y \left(R_0^1(x-y) R_0^1(y) - R_0^1(y) R_0^1(y) \right) \times 8\pi^2, \\ \rho_3 &= \int_{B_1} d^4x R_0^1(x) A_0(x) R_0^1(x) \times 4\pi^2, \\ \rho_4 &= \int_{B_1} d^4x R_0^1(x) |x|^2 A_0(x) R_0^1(x) \times \frac{\pi^2}{2}, \\ \rho_5 &= \int_{B_1} d^4x \left(R_0^1(x) - R_0(x) \right), \\ \rho_6 &= \int_{B_1} d^4x A_0(x) R_0^1(x) \int_{\mathbb{R}^4} d^4y R_0^1(x-y) A_0(y) R_0^1(y) \times 4\pi^2, \end{aligned} \tag{132}$$

а также

$$\begin{aligned} \rho_7 &= 16\pi^4 \times \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(\left(-2\partial_{x_\mu} \tilde{\theta}_\mu(x) - \tilde{\tau}(x) - R_0^1(x) \right) \left(R_0^1(x) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2R_0^1(x) \left(A_0(x) R_0^1(x) \right) \left(\theta(x) - A_0(x) \tau(x) \right) \right) \Big|_{\Lambda=1, \sigma \rightarrow +0} \\ &\quad \left. + R_0^1(x) \tilde{\theta}_\mu(x) \left(\partial_{x_\mu} R_0^1(x) - A_0(x) \tilde{\theta}_\mu(x) \right) - \frac{1}{2} \tilde{\theta}_\mu(x) \tilde{\theta}_\mu(x) A_0(x) R_0^1(x) \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_\mu(x) &= \int_{\mathbb{R}^4} d^4z R_0^1(x-z) \partial_{z^\mu} R_0^1(z), \\ \tilde{\tau}(x) &= \int_{\mathbb{R}^4} d^4z \int_{\mathbb{R}^4} d^4y R_0^1(x-z) A_0(z) R_0^1(z-y) A_0(y) R_0^1(y). \end{aligned}$$

Тогда можно выписать следующие асимптотические разложения по параметру Λ для возникающих в подсчетах интегралов:

$$\theta(0) = \frac{L + \rho_1}{8\pi^2}, \quad \text{см. определение в (77)}, \tag{133}$$

$$\tau(0) = \frac{3L\rho_5}{8\pi^2\Lambda^2} + \mathcal{O}(1/\Lambda^2), \quad \text{см. определение в (78)},$$

$$\hat{\mathbf{I}}_1 = \int_{B_{1/\sigma}} d^4x R_0^\Lambda(x) \left(A_0(x) \theta(x) \right) \theta(x) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{L^2 + L(1 + 2\rho_1 + 2\rho_2)}{8(4\pi^2)^2},$$

$$\hat{\mathbf{I}}_2 = \int_{B_{1/\sigma}} d^4x \left(A_0(x) R_0^\Lambda(x) \right) \theta(x) \theta(x) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{L^2 + L(2\rho_1 + 2\rho_2)}{4(4\pi^2)^2},$$

$$\hat{\mathbf{I}}_3 = \int_{B_{1/\sigma}} d^4x R_0^\Lambda(x) \left(A_0(x) R_0^\Lambda(x) \right) \tau(x) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{L(3\rho_3\rho_5 - \rho_4)}{2(4\pi^2)^2},$$

$$\begin{aligned}
\hat{I}_4 &= \int_{B_{1/\sigma}} d^4x R_0^\Lambda(x) R_0^\Lambda(x) A_0(x) \tau(x) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{L^2 + L(1 + 2\rho_1)}{8(4\pi^2)^2}, \\
\hat{I}_5 &= \int_{B_{1/\sigma}} d^4x \theta(x) R_0^\Lambda(x) R_0^\Lambda(x) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{L^2 + L(1 + 2\rho_1)}{8(4\pi^2)^2}, \\
\hat{I}_6 &= \int_{B_{1/\sigma}} d^4x \theta(x) R_0^\Lambda(x) x^\mu \partial_{x^\mu} R_0^\Lambda(x) \times (-1/2) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{L^2 + L(1/2 + 2\rho_1)}{8(4\pi^2)^2}, \\
\hat{I}_7 &= \int_{B_{1/\sigma}} d^4x |x|^2 \left(R_0^\Lambda(x) \right)^3 \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{L}{2(4\pi^2)^2}.
\end{aligned}$$

Все интегралы \hat{I}_i анализируются одним и тем же методом – дифференцированием по регуляризующему параметру Λ . Только в отличие от величин в начале секции, после применения оператора $\Lambda \partial_\Lambda$ нужно не переходить к пределу, ведь он может не существовать, а находить асимптотическое разложение по Λ с сохранением логарифмической части ($\sim L$) и постоянной поправки.

Продемонстрируем пример вычисления асимптотики для \hat{I}_1 . Для этого сперва выпишем явное выражение

$$\int_{B_{1/\sigma}} d^4x_1 \int_{B_{1/\sigma}} d^4x_2 \int_{B_{1/\sigma}} d^4x_3 R_0^\Lambda(x_1) \left(A_0(x_1) R_0^\Lambda(x_1 - x_2) \right) R_0^\Lambda(x_2) R_0^\Lambda(x_1 - x_3) R_0^\Lambda(x_3).$$

Далее произведем масштабирование переменных $x_i \rightarrow x_i/\Lambda$, применим оператор $\Lambda \partial_\Lambda$, а затем вновь перемасштабируем $x_i \rightarrow x_i \Lambda/\sigma$. Поскольку после первого преобразования вся зависимость от Λ находится в $B_{\Lambda/\sigma}$, то дифференцирование действует только на предел интегрирования по радиусу. В итоге получаем три вклада:

$$\begin{aligned}
t_1 &= \int_{\mathbb{S}^3} d^3\sigma(\hat{x}_1) \int_{B_1} d^4x_2 \int_{B_1} d^4x_3 R_0^{\Lambda/\sigma}(\hat{x}_1) \left(A_0 R_0^{\Lambda/\sigma}(\hat{x}_1 - x_2) \right) R_0^{\Lambda/\sigma}(x_2) R_0^{\Lambda/\sigma}(\hat{x}_1 - x_3) R_0^{\Lambda/\sigma}(x_3), \\
t_2 &= \int_{B_1} d^4x_1 \int_{\mathbb{S}^3} d^3\sigma(\hat{x}_2) \int_{B_1} d^4x_3 R_0^{\Lambda/\sigma}(x_1) \left(A_0 R_0^{\Lambda/\sigma}(x_1 - \hat{x}_2) \right) R_0^{\Lambda/\sigma}(\hat{x}_2) R_0^{\Lambda/\sigma}(x_1 - x_3) R_0^{\Lambda/\sigma}(x_3), \\
t_3 &= \int_{B_1} d^4x_1 \int_{B_1} d^4x_2 \int_{\mathbb{S}^3} d^3\sigma(\hat{x}_3) R_0^{\Lambda/\sigma}(x_1) \left(A_0 R_0^{\Lambda/\sigma}(x_1 - x_2) \right) R_0^{\Lambda/\sigma}(x_2) R_0^{\Lambda/\sigma}(x_1 - \hat{x}_3) R_0^{\Lambda/\sigma}(\hat{x}_3).
\end{aligned}$$

Рассмотрим основные переходы для каждого слагаемого в отдельности.

1) Напомним, что $\hat{x} = x/|x|$, поэтому $R_0^{\Lambda/\sigma}(\hat{x}_1) = 1/(4\pi^2)$, так как $R_0^{\Lambda/\sigma}(\hat{x}_1) = R_0(\hat{x}_1)$, если выполнено $\Lambda/\sigma > 1$. Далее заметим, что носитель функции $A_0 R_0^{\Lambda/\sigma}(\cdot)$ расположен в $B_{\sigma/\Lambda}$, поэтому переменная x_2 находится в шаре радиуса σ/Λ с центром в точке \hat{x}_1 . При поиске главного порядка этот факт позволяет заменить $R_0^{\Lambda/\sigma}(x_2)$ на $1/(4\pi^2)$, а затем произвести подстановку

$$\int_{B_1} d^4x_2 A_0 R_0^{\Lambda/\sigma}(\hat{x}_1 - x_2) \rightarrow \frac{1}{2},$$

где множитель $1/2$ появился из-за частичного перекрытия носителя функции и области интегрирования. Окончательный ответ получается после предельного перехода и явного вычисления интеграла по переменной x_3

$$\lim_{\Lambda \rightarrow +\infty} t_1 = \frac{1}{2(4\pi^2)^2} \int_{\mathbb{S}^3} d^3\sigma(\hat{x}_1) \int_{B_1} d^4x_3 R_0(\hat{x}_1 - x_3) R_0(x_3) = \frac{1}{16(4\pi^2)^2},$$

где было использовано вспомогательное соотношение

$$\int_{B_1} d^4z R_0(x - z) R_0(z) = \frac{1}{(4\pi^2)^2} \begin{cases} 1 - 2 \ln |x|, & |x| \leq 1; \\ 1, & |x| > 1. \end{cases} \quad (134)$$

2) Вторая часть анализируется аналогичным образом. Вначале заменяется $R_0^{\Lambda/\sigma}(\hat{x}_2) \rightarrow 1/(4\pi^2)$, затем $R_0^{\Lambda/\sigma}(x_1) \rightarrow 1/(4\pi^2)$, а также интеграл с плотностью $A_0 R_0^{\Lambda/\sigma}(x_1 - \hat{x}_2)$ по «половине» шара приводит к значению $1/2$. Оставшийся интеграл полностью воспроизводит тот, что получался в первом случае, поэтому

$$\lim_{\Lambda \rightarrow +\infty} t_2 = \lim_{\Lambda \rightarrow +\infty} t_1 = \frac{1}{16(4\pi^2)^2}.$$

3) Последовательность вычисления для третьей функции иная. Для начала производится очевидная замена $R_0^{\Lambda/\sigma}(\hat{x}_3) \rightarrow 1/(4\pi^2)$. Затем нужно заметить, что одну из функций можно заменить на недеформированный аналог и явно вычислить соответствующий интеграл по сфере

$$\int_{\mathbb{S}^3} d^3\sigma(\hat{x}_3) R_0^{\Lambda/\sigma}(x_1 - \hat{x}_3) \rightarrow \int_{\mathbb{S}^3} d^3\sigma(\hat{x}_3) R_0(x_1 - \hat{x}_3) = \frac{2\pi^2}{4\pi^2} \begin{cases} 1, & |x_1| \leq 1; \\ |x_1|^{-2}, & |x_1| > 1, \end{cases} \rightarrow \frac{1}{2},$$

где было использовано $x_1 \in B_1$. После всех замен в оставшемся интеграле

$$\frac{1}{8\pi^2} \int_{B_1} d^4x_1 \int_{B_1} d^4x_2 R_0^{\Lambda/\sigma}(x_1) \left(A_0 R_0^{\Lambda/\sigma}(x_1 - x_2) \right) R_0^{\Lambda/\sigma}(x_2)$$

можно произвести перестановку

$$\left(A_0 R_0^{\Lambda/\sigma}(x_1 - x_2) \right) R_0^{\Lambda/\sigma}(x_2) \rightarrow \left(A_0 R_0^{\Lambda/\sigma}(x_2) \right) R_0^{\Lambda/\sigma}(x_1 - x_2),$$

а также добавить и вычесть плотность $\left(R_0^{\Lambda/\sigma}(x_1) \right)^2$. Тогда приходим к выражению

$$\frac{1}{8\pi^2} \int_{B_{\Lambda/\sigma}} d^4x_1 \int_{B_{\Lambda/\sigma}} d^4x_2 \left(R_0^1(x_1) R_0^1(x_1 - x_2) - R_0^1(x_1) R_0^1(x_1) \right) A_0 R_0^1(x_2) + \frac{1}{8\pi^2} \int_{B_{\Lambda/\sigma}} d^4x_1 \left(R_0^1(x_1) \right)^2.$$

Окончательно, пользуясь предложенными выше обозначениями и переходя в первом интеграле к пределу, получаем

$$\lim_{\Lambda \rightarrow +\infty} t_3 = \frac{2L + 1 + 2\rho_1 + 2\rho_2}{8(4\pi^2)^2} + o(1).$$

Суммируя все слагаемые и вычисляя интеграл, приходим к заявленному ответу. Интегралы \hat{I}_2 и \hat{I}_4 анализируются абсолютно таким же методом. Перед переходом к комментариям для \hat{I}_3 отметим, что результат для $\theta(0)$ получается прямым вычислением, в то время как для $\tau(0)$ – путем отбрасывания поправок порядка $1/\Lambda^2$. Это удобно сделать представлением всех деформированных функций в виде $R_0^\Lambda(\cdot) = R_0^\Lambda(\cdot) \pm R_0(\cdot)$. Тогда главная часть разложения, содержащая только недеформированные функции, сократится, а следующая поправка, пропорциональная L/Λ^2 , будет содержаться только в членах, состоящих из двух недеформированных функций и разности. Таких вкладов всего три. Они и приведут к заявленному ответу после использования соотношения (134). Для справки приведем значение вычитаемой части

$$\int_{B_{1/\sigma}} d^4z \int_{B_{1/\sigma}} d^4y R_0(z) R_0(z - y) R_0(y) = \frac{1}{32\pi^2\sigma^2}.$$

В случае же интеграла \hat{I}_3 проще добавить и вычесть плотность в нуле, то есть $\tau(x) = \tau(x) \pm \tau(0)$. Тогда слагаемое с $\tau(0)$ приведет к части с ρ_5 , а слагаемое с разностью после использования вспомогательного соотношения

$$\int_{B_2} d^4z \left(R_0^1(x - z) - R_0^1(z) \right) = -\frac{|x|^2}{8},$$

которое верно для всех $x \in B_1$, приведет к части с ρ_4 . Обратим внимание, что последнее равенство проверяется применением оператора $A_0(x)$ с учетом равенства нулю при $x = 0$.

8 Две петли: слабый случай

8.1 Разложение функции Грина

Основная идея подсчета двухпетлевых вкладов совпадает с той, что была в секции 7. Таким образом, анализ связан с разложением функции Грина около диагонали. Поскольку в целом оператор имеет схожий вид, будем акцентировать внимание лишь на существенных отличиях. Прежде всего отметим, что внешний вид представлений (75) и (80) остается справедливым для нового случая, поскольку разложение получается пертурбативным образом, см. для примера (29) и (30). Тем не менее определения для каждой части в отдельности изменяются, поскольку функция Грина для деформированного скалярного оператора имеет новый вид. В данной секции будут использоваться те же обозначения для составляющих, поскольку это не создает путаницы. Итак, деформированная функция Грина для дѳуховых полей может быть разделена на две части

$$G_0^{\Lambda ab}(x, y) = G_{\text{loc}}^{ab}(x, y) + P S_0^{ab}(x, y), \quad (135)$$

где вторая часть имеет две конечные производные на диагонали и по сути определяется последним соотношением. При этом $G_{\text{loc}}^{ab}(x, y)$ существенно отличается от (82) и может быть выписана в явном виде. Для этого вначале рассмотрим упрощенный случай, при котором фоновое поле $B_\mu^a(x) \rightarrow \hat{B}_\mu^a(x)$ зависит линейно от координаты и равно

$$B_\mu^a(x) = \frac{s}{2} x^\nu \xi_{\nu\mu}^a, \quad \text{где } (\xi^a)_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{8 \dim \mathfrak{g}}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{для всех } a \in \{1, \dots, \dim \mathfrak{g}\}.$$

Такой пример использовался для построения ковариантной регуляризации в [57, 68]. Здесь параметр $s > 0$ является малым для удобства формального разложения в ряд. Тогда, обозначая символом $\hat{M}_0^{ab}(x)$ скалярный оператор (4) после подстановки $B_\mu^a(x) \rightarrow \hat{B}_\mu^a(x)$ и используя формулу (84) из работы [57], можно выписать следующее разложение около диагонали

$$\rho \left(\sqrt{\hat{M}_0/\Lambda} \right)^{ab} G_0^{bc}(x, y) = \Phi_B^{ab}(x, y) \left(\delta^{bc} R_0^\Lambda|_{\mathbf{f}=0}(x-y) + s^2 \xi_{\sigma\beta}^{bd} \xi_{\sigma\beta}^{dc} \left[-\frac{|x-y|^2}{2^9 \pi^2} - \frac{\hat{R}_0^\Lambda(x-y)}{2^6 \Lambda^2} \right] + \mathcal{O}(s^3) \right). \quad (136)$$

Здесь было использовано соотношение (28), определение функции $\rho(r) = 2J_1(r)/r$ из формулы (50) в [57], где $J_1(\cdot)$ является функцией Бесселя первого рода, определение функции

$$\hat{R}_0^\Lambda(x) = \frac{1}{4\pi^2} \begin{cases} 0, & |x| > 1/\Lambda; \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{3}|x|^2 \Lambda^2 + \frac{1}{6}|x|^4 \Lambda^4, & |x| \leq 1/\Lambda, \end{cases}$$

из формулы (77) работы [57], а также определение для упорядоченной экспоненты

$$\Phi_B^{ab}(x, y) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \int_0^1 dz^{\mu_1}(s_1) \dots \int_0^{s_{k-1}} dz^{\mu_k}(s_k) B_{\mu_1}^{ac_1}(z(s_1)) \dots B_{\mu_k}^{c_{k-1}b}(z(s_k)),$$

где $z^\mu(s) = (1-s)y^\mu + sx^\mu$ является параметризацией геодезической в плоском пространстве (прямой), см. [42, 122]. Заметим, что поправочное слагаемое является $o(s^2)$ для малых значений параметра. Адаптируем представление (136) к рассматриваемому случаю.

Во-первых, при построении слабой деформации использовалась функция $\hat{\omega}(\cdot) = \hat{\Omega}^2(\cdot)$, см. формулу (59), вместо частного случая $\rho(\cdot)$, который в работе [57] относился к однократному усреднению по единичной сфере. Таким образом, необходимо произвести переход

$$\rho(r) = \frac{2J_1(r)}{r} = \frac{1}{S_3} \int_{S^3} d^4k e^{i(k,x)} \longrightarrow \int_{B_1} d^4z e^{i(z,x)} \left(\int_{B_{1/2}} d^4y \omega(|z-y|) \omega(|y|) \right) = \hat{\omega}(r),$$

где было использовано обозначение $|x| = r$. Далее заметим, что функция в круглых скобках зависит от абсолютного значения $|z| = t$. Следовательно, переходя в сферические координаты по переменной z , получаем

$$\hat{\omega}(r) = S_3 \int_0^1 dt t^3 v_\omega(t) \rho(tr), \quad \text{где } v_\omega(t) = \int_{B_{1/2}} d^4 y \omega(|z - y|) \omega(|y|).$$

Таким образом, интересующий случай может быть получен применением интегрального оператора к обеим сторонам формулы (136) после замены $1/\Lambda \rightarrow t/\Lambda$. В частности, справедливы формулы

$$S_3 \int_0^1 dt t^3 v_\omega(t) = 1, \quad S_3 \int_0^1 dt t^3 v_\omega(t) R_0^{\Lambda/t} \big|_{\mathbf{f}=0} (x - y) = R_0^\Lambda (x - y),$$

где последняя функция соответствует дважды усредненному фундаментальному решению (27) для свободного оператора Лапласа. Для определенности далее такое преобразование функции $\hat{R}_0^\Lambda(\cdot)/\Lambda^2$ будем обозначать $\hat{R}_{0,\omega}^\Lambda(\cdot)$. Заметим, что $\text{supp}(\hat{R}_{0,\omega}^\Lambda(\cdot)) \in B_{1/\Lambda}$, так как

$$\text{если } \hat{R}_0^\Lambda(x) = 0, \quad \text{то } \hat{R}_0^{\Lambda/t}(x) = 0 \quad \text{для всех } t \in [0, 1].$$

Во-вторых, необходимо объяснить применимость частного случая поля, так как итоговая формула (136) содержит достаточно специальную комбинацию напряженностей. Действительно, пользуясь инвариантностью относительно калибровочных преобразований фонового поля и соображениями, связанными с сохранением размерности, можно заметить, что все сингулярные составляющие в «слабом» случае должны быть пропорциональны классическому действию. Таким образом, часть, квадратичную по напряженности, можно выписать в любом удобном виде, в том числе и усредненном. Следовательно, функцию $G_{\text{loc}}^{ab}(x, y)$ из (135) для произвольного гладкого фонового поля B_μ^a выберем в виде

$$G_{\text{loc}}^{ab}(x, y) = \Phi_B^{ab}(x, y) R_0^\Lambda(x - y) - \frac{1}{27} \left(F_{\sigma\beta}^{ad}(x) F_{\sigma\beta}^{db}(x) + F_{\sigma\beta}^{ad}(y) F_{\sigma\beta}^{db}(y) \right) \left(\hat{R}_{0,\omega}^\Lambda(x - y) + \frac{|x - y|^2}{8\pi^2} \right). \quad (137)$$

При этом в часть $PS_0^{ab}(x, y)$ могут попадать невязки, которые после усреднения по индексам и аргументам сводятся к нулям и, таким образом, не влияют на конечные результаты.

Переходя к векторной функции Грина, также воспользуемся обозначениями из (75), то есть вновь имеем

$$G_{1\mu\nu}^{\Lambda ab}(x, y) = \delta_{\mu\nu} G_0^{ab}(x, y) + \mathcal{N}_{\mu\nu}^{ab}(x, y) + \mathcal{L}_{\mu\nu}^{ab}(x, y) + PS_{1\mu\nu}^{ab}(x, y). \quad (138)$$

Дадим вспомогательные комментарии. Здесь первая часть $G_0^{\Lambda ab}(x, y)$ совпадает с новой скалярной деформированной функцией Грина из (135). Вторая часть $\mathcal{N}_{\mu\nu}^{ab}(x, y)$ не равна той, которая была в секции 7.1. При этом она в точности совпадает в главном порядке, а в остальных – отличается. В то же время их явный вид не важен, так как не приводит к сингулярному вкладу. Третья часть $\mathcal{L}_{\mu\nu}^{ab}(x, y)$, как и ранее, определяется формулой (79). Последняя часть определяется как остаточное слагаемое и не совпадает с той, что была в (75). Отметим, что все части являются симметричными относительно одновременной перестановки индексов и аргументов.

8.2 Адаптация вычислений

В данной секции обсудим вопрос, связанный с использованием уже имеющихся подсчетов для «сильного» случая, см. секцию 7. Оказывается, что многие ответы имеют в точности тот же вид. Начнем разбор с частей, содержащих так называемые нелокальные части функций Грина. В сильном случае им была посвящена секция 7.3. Заметим, что при подсчетах не использовался явный вид для PS_0 и PS_1 , только их свойства гладкости. Вдобавок отметим, что логарифмическая сингулярность возникла лишь в первой степени и не зависела от регуляризующей функции $\mathbf{f}(\cdot)$. Более того, повторяя подсчеты, можно заметить, что при работе с асимптотиками допускалось игнорирование некоторых неважных⁵⁵ слагаемых, что в итоге приводило к возможности использовать инвариантность относительно калибровочных преобразований фонового поля. Суммируя все замечания, можно утверждать, что логарифмические нелокальные части в «слабом» случае имеют такой же вид. Далее

⁵⁵Малых в определенном смысле. Как правило, по регуляризующему параметру Λ .

обратим внимание, что функции Грина в главном порядке в «сильном» и «слабом» случаях совпадают и пропорциональны (28). Следовательно, степенные сингулярности в обоих подходах тоже совпадают. Делая сводную таблицу, получаем следующие результаты:

$$\begin{aligned} \text{Нелокальные сингулярные части: } \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2) &\longrightarrow (92) + (93) + (94); \\ \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Omega_3^2) &\longrightarrow (96) + (97); \\ \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_4) &\longrightarrow (99) + (100) + (101). \end{aligned}$$

Перейдем к локальным частям. Здесь уже будут возникать расхождения. Отметим вначале слагаемые, которые останутся без изменений. К таким следует отнести те, при подсчете которых использовалась либо часть функции Грина $\mathcal{L}_{\mu\nu}^{ab}(x, y)$, либо главный порядок составляющей $\mathcal{N}_{\mu\nu}^{ab}(x, y)$, или же ответ в принципе выписывался в общих⁵⁶ терминах. Используя предложенные критерии, приведем ссылки на результаты в виде сводной таблицы:

$$\begin{aligned} \text{Локальные части с тем же ответом: } \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2) &\longrightarrow (102) + (109) + (112); \\ \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Omega_3^2) &\longrightarrow (115) + (116); \\ \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_4) &\longrightarrow (117) + (118) + (119). \end{aligned}$$

Таким образом, подсчет сингулярных вкладов для основных трех диаграмм сводится к адаптации двух слагаемых:

$$\begin{aligned} \text{Локальные части с другим ответом: } \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2) &\longrightarrow (106); \\ \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Omega_3^2) &\longrightarrow (114). \end{aligned}$$

Приведем основные рассуждения и результаты. Сперва заметим, что оба вклада являются линейными комбинациями $J_{\sigma\rho}[\mathcal{N}_{1\sigma\rho}]$ и $\hat{J}_{\sigma\rho}[\mathcal{N}_{1\sigma\rho}]$, см. формулы (103) и (113). Именно они и будут изучаться. Далее вспомним, что упорядоченная экспонента обладает набором важных свойств, см. для примера работу [122]. В нашем же случае примечательными являются лишь формулы дифференцирования в первых порядках

$$\begin{aligned} D_\sigma^{ca}(x)\Phi^{ab}(x, y) &= \frac{1}{2}\Phi^{ca}(x, y)(x - y)^\mu F_{\mu\sigma}^{ab}(y) + \dots, \\ D_\rho^{ba}(y)\Phi^{ca}(x, y) &= \frac{1}{2}\Phi^{ca}(x, y)(x - y)^\mu F_{\mu\rho}^{ab}(y) + \dots, \end{aligned}$$

где многоточия обозначают слагаемые, содержащие полные ковариантные производные напряженности. Исходя из этих соотношений, можно доказать вспомогательное утверждение. Пусть $g(\cdot)$ является скалярной гладкой функцией, тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} D_\sigma^{ca}(x)D_\rho^{bd}(y)\left(\Phi^{ad}(x, y)g(x - y)\right) &= \Phi^{ac}(x, y)\left(-\delta^{cb}\partial_{x^\sigma}\partial_{x^\rho} + \frac{1}{2}F_{\sigma\rho}^{cb}(y)\right. \\ &\quad \left.+ \frac{(x - y)^\mu}{2}\left[F_{\mu\rho}^{cb}(y)\partial_{x^\sigma} - F_{\mu\sigma}^{cb}(y)\partial_{x^\rho}\right] + \frac{1}{4}(x - y)^{\mu\nu}F_{\mu\rho}^{cd}(y)F_{\nu\sigma}^{db}(y) + \dots\right)g(x - y), \end{aligned} \quad (139)$$

где вновь многоточие обозначает комбинации с ковариантными производными и бóльшим числом мономов $x - y$. Данная формула является весьма примечательной, поскольку после замены функции $\Phi^{ad}(x, y)g(x - y)$ на $G_{\text{loc}}^{ad}(x, y)$ из (137) можно заметить, что двойная производная не приведет к сингулярному вкладу из-за антисимметричности $\mathcal{N}_{1\sigma\rho}$ по нижним индексам в $J_{\sigma\rho}[\mathcal{N}_{1\sigma\rho}]$ и $\hat{J}_{\sigma\rho}[\mathcal{N}_{1\sigma\rho}]$. Следовательно, $\mathcal{N}_{1\sigma\rho}$ может быть заменена на главный порядок, в то время как в (139) можно оставить лишь два слагаемых, пропорциональных напряженности в первой степени. Приводя подобные слагаемые и используя вспомогательные интегралы из секции 7.8, приходим к следующим ответам

$$J_{\sigma\rho}[\mathcal{N}_{1\sigma\rho}] \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{c_2^2}{2}W_{-1}(\hat{\mathbf{I}}_6 - \hat{\mathbf{I}}_5), \quad (140)$$

$$\hat{J}_{\sigma\rho}[\mathcal{N}_{1\sigma\rho}] \stackrel{\text{s.p.}}{=} c_2^2W_{-1}(2\hat{\mathbf{I}}_6 - \hat{\mathbf{I}}_5). \quad (141)$$

⁵⁶Подразумеваются функционалы типа J_\odot , J_\otimes и J_\ominus .

Следовательно, формулы для «сильного» случая, с учетом (103) и (113), преобразуются согласно следующим заменам:

$$\begin{aligned} (106) &\longrightarrow \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2) \Big|_{G_{\text{loc}} G_{\text{loc}} \mathcal{N}} \stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{3c_2^2}{2} W_{-1} (3\hat{\Gamma}_6 - 2\hat{\Gamma}_5) \stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{3c_2^2 W_{-1}}{16(4\pi^2)^2} (L^2 + L(-1/2 + 2\rho_1)), \\ (114) &\longrightarrow \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Omega_3^2) \Big|_{G_{\text{loc}} G_{\text{loc}} \mathcal{N}} \stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{c_2^2}{2} W_{-1} \hat{\Gamma}_6 \stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{c_2^2 W_{-1}}{16(4\pi^2)^2} (L^2 + L(1/2 + 2\rho_1)). \end{aligned}$$

Дополнительно прокомментируем тот факт, что оба ответа являются калибровочно инвариантными в отличие от «сильного» случая, в котором поправочные сингулярности зависят от степени фонового поля. Таким образом, последние формулы завершают обсуждение вкладов для трех сильно связанных двухпетлевых диаграмм.

Следующим этапом необходимо рассмотреть соотношения для контрдиаграмм из секции 7.5. Повторяя основные этапы рассуждений, приведенных выше, а также обращая внимание на тот факт, что в «слабом» случае вся усредненная следовая часть, пропорциональная второй степени напряженности, содержится именно в $G_{\text{loc}}^{\text{ad}}(x, y)$, см. формулы (136) и (137), получаем справедливость всех имеющихся соотношений.

Равенства (121), (122), (125) и (126) имеют тот же вид.

Последним пунктом обсуждения является секция 7.6. В данном случае все три функционала J_{\otimes} , J_{\odot} и J_{\ominus} могут быть вычислены явно с помощью формулы (137) для $G_{\text{loc}}^{\text{ad}}(x, y)$. Используя определения для функционалов (110), (119) и (124), после прямой подстановки получаем

$$J_{\otimes} = -\frac{c_2 W_{-1}}{48(4\pi^2)} + o(1), \quad J_{\odot} \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{c_2 W_{-1}}{2^6} \hat{R}_{0,\omega}^{\Lambda}(0) = \mathcal{O}(1/\Lambda^2), \quad J_{\ominus} \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{c_2^2 W_{-1} L}{16(4\pi^2)^2} + \mathcal{O}(1), \quad (142)$$

где поправочные слагаемые приведены относительно регуляризующего параметра Λ . Заметим, что при выводе последнего соотношения использовалось свойство (139) для упорядоченной экспоненты. В итоге, суммируя все приведенные выше факты, аналог формулы (130) для слабой деформации выписывается в следующем виде

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2) + \frac{1}{4} \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_4) - \frac{1}{2} \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Omega_3^2) &\stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{\Lambda^2 c_2 (2\rho_3 - 3\rho_0)}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x \left(P S_{1\rho\rho}^{aa}(x, x) + 4 P S_0^{aa}(x, x) \right) \\ &\quad - \frac{5Lc_2}{48\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x \left(D_{\rho}^{bc}(x) D_{\sigma}^{ca}(x) P S_{1\sigma\rho}^{ab}(x, y) \right) \Big|_{y=x} \\ &\quad - \frac{c_2^2 W_{-1} L}{32(4\pi^2)^2} (10 + 12\rho_2 + 96\rho_5(2\rho_3 - 3\rho_0) - 64\rho_4). \end{aligned}$$

Далее, пользуясь соотношениями (121) и (122), получаем финальное соотношение в виде

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2) + \frac{1}{4} \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_4) - \frac{1}{2} \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Omega_3^2) &\stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{\Lambda^2 c_2 (2\rho_3 - 3\rho_0)}{8\pi^2} \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(S_2[\cdot]) \\ &\quad - \frac{5Lc_2}{48\pi^2} \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(S_{\text{f}}[\cdot, B]) \\ &\quad - \frac{c_2^2 W_{-1} L}{32(4\pi^2)^2} (175/18 + 56\rho_2/3 - 64\rho_4). \end{aligned} \quad (143)$$

Ясно, что первые два слагаемых сокращаются контрдиаграммами, а третья часть приводит к двухпетлевому коэффициенту для константы перенормировки.

8.3 Ответы для диаграмм

Основной результат предыдущей секции заключался в выводе формулы для сингулярной составляющей линейной комбинации диаграмм (143) в отдельности. Производя аналогичные шаги, можно

Диаграмма	$\frac{c_2^2 W_{-1}}{(4\pi)^4}$	$\frac{\Lambda^2 c_2 \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(S_2)}{(4\pi)^2}$	$\frac{Lc_2 V_1}{48\pi^2}$	$\frac{Lc_2 V_2}{48\pi^2}$	$\frac{Lc_2 V_3}{48\pi^2}$	$\frac{Lc_2 V_4}{48\pi^2}$
	$L(-1 + 4\rho_2 - 8\rho_4)$	ρ_3	-5	$-1/2$	0	0
$-$	$12L^2 + L(10 + 24\rho_1 + 8\rho_2 - 64\rho_4)$	$8\rho_3$	-8	4	18	0
	$8L^2 + L(8 + 16\rho_1 - 32\rho_4)$	$4\rho_3$	4	4	12	0
-2	$-4L^2 + L(-4 - 8\rho_1 + 16\rho_4)$	$-2\rho_3$	10	1	-6	0
	$-4L^2 + L(-4 - 8\rho_1 + 16\rho_4)$	$-2\rho_3$	10	1	-6	0
$\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2)$	$12L^2 + L(9 + 24\rho_1 + 12\rho_2 - 72\rho_4)$	$9\rho_3$	11	$19/2$	18	0
$\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Omega_3^2)$	$L(1 + 8\rho_4)$	$-\rho_3$	-1	$1/2$	0	-6
$-\frac{1}{2}\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_4)$	$-12L^2 + L(-24\rho_1)$	$-12\rho_0$	0	0	-18	0
$-\frac{\text{сумма}}{2}$	$L(-5 - 6\rho_2 + 32\rho_4)$	$6\rho_0 - 4\rho_3$	-5	-5	0	3

Таблица 1: В таблице представлены сингулярные составляющие для отдельных диаграмм, а также для их линейных комбинаций. В шестой строке выписан результат для выражения (52), который равен сумме первых пяти диаграмм (строк). В последней строке выписана линейная комбинация для (143).

получить ответы для каждой диаграммы. Для этого достаточно адаптировать вычисления, как это было сделано в секции 8.3, с учетом вспомогательных вычислений из секций 7.3 и 7.1 для отдельных диаграмм. Пользуясь введенными выше обозначениями и вспомогательными функционалами вида

$$\begin{aligned}
V_1 &= \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(D_\rho^{ab}(x) D_\sigma^{bc}(x) (PS_{1\sigma\rho}^{ca}(x, y) + \delta_{\sigma\rho} PS_0^{ca}(x, y)) \right) \Big|_{y=x}, \\
V_2 &= \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(M_{1\rho\sigma}^{ac}(x) (PS_{1\sigma\rho}^{ca}(x, y) + \delta_{\sigma\rho} PS_0^{ca}(x, y)) \right) \Big|_{y=x}, \\
V_3 &= \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(F_{\rho\sigma}^{ac}(x) (PS_{1\sigma\rho}^{ca}(x, x) + \delta_{\sigma\rho} PS_0^{ca}(x, x)) \right), \\
V_4 &= \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(M_0^{ac}(x) PS_0^{ca}(x, y) \right) \Big|_{y=x},
\end{aligned}$$

предоставим ответ в виде таблицы 1.

8.4 Сравнение вкладов $G_{\text{loc}} G_{\text{loc}} \mathcal{N}$

В секции 8.2 был показан вариант преобразования формул для сингулярных частей в случае сильной деформации к формулам для «слабого» подхода. Оказалось, что большинство «сингулярных» интегралов имеют один и тот же вид и не зависят от выбора деформации. Основное отличие содержится в локальных вкладах типа $G_{\text{loc}} G_{\text{loc}} \mathcal{N}$. Чтобы увидеть это, достаточно сравнить формулы (104) \longleftrightarrow (140) и (105) \longleftrightarrow (141).

Обсудим первую пару. Ясно, что в «сильном» случае классическое действие расщепляется на две части, поэтому производить сравнение более корректно именно для второй части с производной, поскольку в этом случае присутствует меньшее количество деформирующих усредняющих операторов. Для удобства выберем поле в виде $B_\mu^{ab}(x) = x^\nu F_{\nu\mu}^{ab}(x)$, удовлетворяющим калибровочному условию Фока–Швингера. Тогда, пользуясь соотношением (139), получаем, что в случае слабой

деформации основной вклад в функционал $J_{\sigma\rho}[\mathcal{N}_{1\sigma\rho}]$ дает комбинация

$$D_{\sigma}^{ac}(x)D_{\rho}^{bd}(y)\left(\Phi^{cd}(x,y)R_0^{\Lambda,\mathbf{f}}(x-y)\right)\longrightarrow\frac{1}{2}F_{\sigma\rho}^{ab}(y)R_0^{\Lambda,\mathbf{f}}(x)+\frac{1}{4}F_{\sigma\rho}^{ab}(y)x^{\mu}\partial_{x^{\mu}}R_0^{\Lambda,\mathbf{f}}(x),$$

где дополнительно были использованы сдвиг переменной и сферическое усреднение. В случае же сильной деформации функция Грина не инвариантна относительно калибровочных преобразований фонового поля, поэтому часть в больших круглых скобках имеет другой вид. Воспользуемся разложением около диагонали из секции 7.1, формула (82). Из нее следует, что для перехода⁵⁷ к сильной деформации необходимо произвести замену

$$\Phi^{cd}(x,y)R_0^{\Lambda,\mathbf{f}}(x-y)\longrightarrow\delta^{cd}R_0^{\Lambda,\mathbf{f}}(x-y)+y^{\nu}F_{\nu\mu}^{ab}(y)\partial_{x^{\mu}}\theta(x-y).$$

Применяя затем две производные $D_{\sigma}^{ac}(x)D_{\rho}^{bd}(y)$, делая сдвиг переменной с последующим использованием сферического усреднения, а также отбрасывая симметричные по индексам $\sigma-\rho$ комбинации, получаем следующие остаточные слагаемые

$$\frac{1}{4}F_{\sigma\rho}^{ab}(y)\left(A_0(x)\theta(x)+x^{\mu}\partial_{x^{\mu}}R_0^{\Lambda,\mathbf{f}}(x)/2\right).$$

Таким образом, сравнивая полученные комбинации в обоих подходах, видим, что переход между сильной деформацией и слабой в функционале $J_{\sigma\rho}[\mathcal{N}_{1\sigma\rho}]$ осуществляется следующей заменой

$$A_0(x)\theta(x)\longleftrightarrow 2R_0^{\Lambda,\mathbf{f}}(x)+x^{\mu}\partial_{x^{\mu}}R_0^{\Lambda,\mathbf{f}}(x)/2.$$

Именно такой переход и приводит к связи сингулярных интегралов в паре (104) \longleftrightarrow (140), так как после преобразования плотности изменяются и интегралы, см. секцию 7.8,

$$\hat{\mathbf{I}}_1\overset{\text{s.p.}}{\longleftrightarrow}2\hat{\mathbf{I}}_5-\hat{\mathbf{I}}_6.$$

Для полноты изложения отметим, что во второй паре (105) \longleftrightarrow (141) происходит замена интегралов вида

$$\hat{\mathbf{I}}_2-2\hat{\mathbf{I}}_1\overset{\text{s.p.}}{\longleftrightarrow}4\hat{\mathbf{I}}_6-4\hat{\mathbf{I}}_5.$$

Учитывая справедливость перехода из первой пары, вторая замена сводится к $\hat{\mathbf{I}}_2\overset{\text{s.p.}}{\longleftrightarrow}2\hat{\mathbf{I}}_6$.

8.5 Сравнение с размерной регуляризацией

Рассматривая сингулярности для первой петли, см. для примера [98] и первый пункт теоремы 1, может сложиться впечатление, что «элементарные» логарифмические сингулярности, которые $\sim 1/\varepsilon$ в размерной регуляризации и $\sim L = \ln(\Lambda/\sigma)$ в случае обрезания, могут быть сопоставлены между собой при помощи некоторой линейной зависимости $1/\varepsilon \longleftrightarrow aL + b$. Однако это впечатление обманчиво, поскольку разбор двухпетлевых поправок показывает, что такая зависимость отсутствует.

В данной работе удалось сделать очень важное наблюдение касательно двухпетлевых сингулярностей. Оказывается, что можно выделить набор мастер-интегралов, в которых слагаемые, не зависящие от деформирующей функции, имеют прямое соотношение с сингулярностями для размерной регуляризации. При этом разница между двумя подходами возникает из-за того, что в случае размерной регуляризации происходит деформация коэффициентов, с которыми мастер-интегралы входят в диаграммы, тогда как в случае обрезания деформируются сами интегралы. Продемонстрируем это явно в несколько этапов.

Этап 1. Сперва сопоставим элементарные блоки, участвующие при построении разложения функций Грина около диагонали. Первой функцией является главная часть асимптотического разложения $R_0(x)$

$$\frac{\Gamma(d/2-1)}{4\pi^{d/2}|x|^{d-2}}=R_0^{\varepsilon}(x)\longleftarrow R_0(x)\longrightarrow R_0^{\Lambda,\mathbf{f}}(x)\text{ из (28).}$$

⁵⁷Данный переход справедлив для поиска локальной сингулярной части. В общем случае это неверно.

При этом $d = 4 - \varepsilon$, где ε – малый параметр размерной регуляризации, переход которого $\varepsilon \rightarrow +0$ является пределом снятия. В качестве второй функции выберем коэффициент $R_1(x)$ около $2F_{\mu\nu}^{ab}$ при разложении векторной функции Грина около диагонали, который подчиняется соотношению⁵⁸ $A_0(x)R_1(x) = R_0(x)$ в некоторой фиксированной окрестности нуля. При отсутствии регуляризации он равен $-\ln(|x|^2\sigma^2)/(16\pi^2)$. После деформации получаем⁵⁹

$$\frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{2\sigma^{-\varepsilon}}{\varepsilon} + \frac{\Gamma(d/2 - 2)}{\pi^{d/2-2}} |x|^{4-d} \right) = R_1^\varepsilon(x) \longleftarrow R_1(x) \longrightarrow \theta(x) \text{ из (77).}$$

Третьей функцией является коэффициент около $2F_{\mu\sigma}^{ac}(x)F_{\sigma\nu}^{cb}(x)$, который в случае обрезания содержится в слагаемом $\mathcal{L}_{\mu\nu}^{ab}$, см. (79). По построению такая функция должна приводить⁶⁰ к $2R_1(x)$ после действия оператором $A_0(x)$ и обычно обозначается $R_2(x) = |x|^2/(2^7\pi^2)$, где

$$R_2(x) = \frac{|x|^2 (\ln(|x|^2\sigma^2) - 1)}{64\pi^2}.$$

Сравнивая такую функцию со случаем размерной регуляризации [98, 106] и с обрезанием из секции 7.1, получаем

$$\frac{1}{32\pi^2} \left(-\frac{|x|^2\sigma^{-\varepsilon}}{\varepsilon} + \frac{\Gamma(d/2 - 3)}{2\pi^{d/2-2}} |x|^{6-d} \right) = R_2^\varepsilon(x) \longleftarrow R_2(x) \longrightarrow 2\tau(x) + \frac{|x|^2}{2^7\pi^2} \text{ из (78).}$$

Этап 2. На следующей стадии произведем сопоставление мастер-интегралов. В случае размерной регуляризации использовались восемь штук I_1 – I_8 , см. секцию 2.3 в [68]. В случае регуляризации обрезанием были использованы семь функционалов \hat{I}_1 – \hat{I}_7 , см. секцию 7.8. Представим результаты сопоставлений в виде таблицы 2. При этом соотношения являются не целенаправленным подбором линейных комбинаций, а следствием сопоставлений плотностей из предыдущего шага.

Регуляризация обрезанием			Размерная регуляризация	
Инт. $\times (4\pi)^4$	Основная часть	Поправка	Инт. $\times (4\pi)^4 \sigma^{2\varepsilon}$	Сингулярность
\hat{I}_1	$2L^2 + L(2 + 4\rho_1)$	$L(4\rho_2)$	$-(I_4 + dI_3)/(2c_2^2)$	$2/\varepsilon^2 + 1/\varepsilon$
\hat{I}_2	$4L^2 + L(8\rho_1)$	$L(8\rho_2)$	$-dI_3/c_2^2$	$4/\varepsilon^2$
\hat{I}_3	0	$L(24\rho_3\rho_5 - 8\rho_4)$	$-d(I_1 + I_2)/(4c_2^2)$	0
\hat{I}_4	$2L^2 + L(2 + 4\rho_1)$	0	$-d(I_1 - I_7)/(2c_2^2)$	$2/\varepsilon^2 + 1/\varepsilon$
\hat{I}_5	$2L^2 + L(2 + 4\rho_1)$	0	$-2(I_6 - I_5)/c_2^2$	$2/\varepsilon^2 + 1/\varepsilon$
\hat{I}_6	$2L^2 + L(1 + 4\rho_1)$	0	$2I_5/c_2^2$	$2/\varepsilon^2 + 1/(2\varepsilon)$
\hat{I}_7	$8L$	0	$8dI_7/c_2^2 = 8dI_8/c_2^2$	$4/\varepsilon$

Таблица 2: Первый столбец содержит мастер-интегралы для регуляризации с обрезанием. В четвертом столбце приведены выражения через мастер-интегралы для размерной регуляризации. Здесь $L = \ln(\Lambda/\sigma)$, и ρ_i – вспомогательные функционалы (числа) из секции 7.8.

Из таблицы видно, что в случае регуляризации обрезанием «базовой» сингулярностью является комбинация $L + \rho_1$, а не просто L , которая равна $8\pi^2\theta(0)$. Такая величина является более естественной. Аналогичная ситуация наблюдалась в двумерной сигма-модели, см. [44], и играла важную

⁵⁸В случае размерной регуляризации оператор также является деформированным, так как изменяется квадратичная форма в том числе.

⁵⁹Для размерной регуляризации обычно используется обозначение параметра μ вместо σ . Мы нарушили эту договоренность в целях удобства.

⁶⁰Возможно наличие малых поправок по регуляризующему параметру. Зависит от определения добавки.

роль⁶¹ при изучении трехпетлевых вкладов. Заметим, что в случае необходимости сумма $L + \rho_1$ может быть приведена к L сдвигом по σ . Таким образом, главные «полюса» имеют прямую связь

$$(L + \rho_1)^2 \longleftrightarrow \frac{1}{\varepsilon^2},$$

в то время как все сингулярности первого порядка, не зависящие от выбора регуляризующей функции $\mathbf{f}(\cdot)$, отличаются двойкой. В столбце «поправка» содержатся сингулярности, возникающие из-за сглаживания дельта-функционала. Часть из них сокращается после суммирования всех диаграмм, что является следствием инвариантности двухпетлевого вклада относительно сдвига на константу с множителем L/Λ^2 , а часть может быть нейтрализована введением квазилокальных вершин, см. секцию 10. Таким образом, остается лишь функционал ρ_2 , который и отвечает за деформацию мастер-интегралов, приводящую к изменению двухпетлевых поправок.

Этап 3. На данной стадии можно обсуждать отдельные диаграммы и их линейные комбинации. Заметим, что в данной работе вклад $\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2)$, см. формулу (52), состоит из пяти диаграмм. Аналогичный же вклад в работах [67, 68] был представлен суммой четырех частей

$$\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2) = \sum_{i=1}^4 2\mathcal{J}_i,$$

где, используя формулы (48) и (49) из [67], верны следующие связывающие соотношения

$$\begin{aligned} 2\mathcal{J}_1 &= -2 \text{ (diagram) }, \quad 2\mathcal{J}_2 = 2 \text{ (diagram) }, \quad 2\mathcal{J}_3 = - \text{ (diagram) } - \text{ (diagram) }, \\ 2\mathcal{J}_4 &= 2 \text{ (diagram) } + \text{ (diagram) } + \text{ (diagram) }. \end{aligned}$$

При этом для остальных частей использовались схожие обозначения

$$\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2) = 2\mathcal{J}_5, \quad \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_4) = -4\mathcal{J}_6.$$

Вопрос сопоставления мастер-интегралов касается диаграмм с двумя интегрированиями, то есть \mathcal{J}_1 – \mathcal{J}_5 . Воспользуемся выведенными ранее формулами, см. (61)–(66) в [68], для случая размерной регуляризации и перепишем их, разделив на две части: основную, которая допускает прямое сопоставление со случаем обрезания согласно таблице 2, и поправочную, которая отвечает за деформацию коэффициентов, с которыми мастер-интегралы входят. Имеем следующие формулы

$$\begin{aligned} 2\mathcal{J}_1 \times (4\pi)^4 \sigma^{2\varepsilon} &\stackrel{\text{s.p.}}{=} \left(2d\mathbf{I}_1 + d\mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_4 - 4\mathbf{I}_5 + 4\mathbf{I}_7 \right) + \varepsilon \left(2\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 \right) \\ &\rightarrow \left(-2\hat{\mathbf{I}}_1 + \hat{\mathbf{I}}_2 - 4\hat{\mathbf{I}}_3 - 2\hat{\mathbf{I}}_4 - 2\hat{\mathbf{I}}_6 + \hat{\mathbf{I}}_7/4 \right) \times c_2^2, \\ 2\mathcal{J}_2 \times (4\pi)^4 \sigma^{2\varepsilon} &\stackrel{\text{s.p.}}{=} \left(-4d\mathbf{I}_1 - 2d\mathbf{I}_2 - 2\mathbf{I}_4 + 8\mathbf{I}_5 - 8\mathbf{I}_7 \right) + \varepsilon \left(-2\mathbf{I}_5 \right) \\ &\rightarrow \left(4\hat{\mathbf{I}}_1 - 2\hat{\mathbf{I}}_2 + 8\hat{\mathbf{I}}_3 + 4\hat{\mathbf{I}}_4 + 4\hat{\mathbf{I}}_6 - \hat{\mathbf{I}}_7/2 \right) \times c_2^2, \\ 2\mathcal{J}_3 \times (4\pi)^4 \sigma^{2\varepsilon} &\stackrel{\text{s.p.}}{=} \left(-2d\mathbf{I}_1 - d\mathbf{I}_2 - d\mathbf{I}_3 - 4\mathbf{I}_5 - d\mathbf{I}_6 - d\mathbf{I}_7 \right) + \varepsilon \left(\mathbf{I}_5 \right) \\ &\rightarrow \left(\hat{\mathbf{I}}_2 + 4\hat{\mathbf{I}}_3 + 2\hat{\mathbf{I}}_4 + 2\hat{\mathbf{I}}_5 - 4\hat{\mathbf{I}}_6 - \hat{\mathbf{I}}_7/4 \right) \times c_2^2, \\ 2\mathcal{J}_4 \times (4\pi)^4 \sigma^{2\varepsilon} &\stackrel{\text{s.p.}}{=} \left(-d\mathbf{I}_1/2 - d\mathbf{I}_2/4 - d\mathbf{I}_3/2 + \mathbf{I}_4/4 - 3\mathbf{I}_5 - 6\mathbf{I}_6 - \mathbf{I}_7 \right) + \varepsilon \left(-\mathbf{I}_1/2 - \mathbf{I}_2/4 - \mathbf{I}_3/2 \right) \end{aligned}$$

⁶¹Предложенный выбор значительно уменьшает количество вычислений.

$$\begin{aligned}
& \rightarrow \left(-\hat{I}_1/2 + 3\hat{I}_2/4 + \hat{I}_3 + \hat{I}_4/2 + \hat{I}_5 - 5\hat{I}_6/2 - \hat{I}_7/16 \right) \times c_2^2, \\
2\mathcal{J}_5 \times (4\pi)^4 \sigma^{2\varepsilon} & \stackrel{\text{s.p.}}{=} \left(dI_2/4 - I_5 + I_7 + 2I_8 \right) + \varepsilon \left(I_2/4 \right) \\
& \rightarrow \left(-\hat{I}_3 + \hat{I}_4/2 - \hat{I}_6/2 + \hat{I}_7/16 \right) \times c_2^2.
\end{aligned}$$

Здесь первая строка соответствует случаю размерной регуляризации, а вторая строка – случаю с обрезанием. При этом при переходе от «размерного» варианта к обрезанию зануляется вторая часть первой строки, а затем деформируются коэффициенты в первой части, и наоборот. Подставим в полученные соотношения значения для мастер-интегралов, явно разделив ответы на основную часть и поправку. Полученные значения представлены в таблице 3.

Заметим интересное свойство, которым обладают поправочные слагаемые для размерной регуляризации. Если просуммировать все части, не содержащие I_5 , то получим

$$\varepsilon \left(2I_1 + I_2 \right) + \varepsilon \left(-I_1/2 - I_2/4 - I_3/2 \right) + \varepsilon \left(I_2/4 \right) \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0.$$

Следовательно, такие невязки подобны слагаемым с ρ_1 в случае регуляризации с обрезанием, которые в конечном счете взаимоуничтожаются. В свою очередь, части с интегралом I_5 не сокращаются

$$\varepsilon \left(-2I_5 \right) + \varepsilon \left(I_5 \right) \stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{c_2^2 \sigma^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^4} \frac{1}{\varepsilon}$$

и являются аналогом вкладов с функционалом ρ_2 для случая обрезания, который также остается.

	Рег. обрезанием		Размерная рег.	
Диаграмма	Осн. часть	Доп.	Осн. часть	Доп.
$2\mathcal{J}_1$	$-8L^2 + L(-8 + 16\rho_1)$	$L(32\rho_4)$	$-8/\varepsilon^2 - 4/\varepsilon$	$-1/\varepsilon$
$2\mathcal{J}_2$	$16L^2 + L(16 + 32\rho_1)$	$L(-64\rho_4)$	$16/\varepsilon^2 + 8/\varepsilon$	$-2/\varepsilon$
$2\mathcal{J}_3$	$4L^2 + L(2 + 8\rho_1)$	$L(8\rho_2 - 32\rho_4)$	$4/\varepsilon^2 + 1/\varepsilon$	$1/\varepsilon$
$2\mathcal{J}_4$	$-L$	$L(4\rho_2 - 8\rho_4)$	$-1/(2\varepsilon)$	$3/(4\varepsilon)$
$\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2)$	$12L^2 + L(9 + 24\rho_1)$	$L(12\rho_2 - 72\rho_4)$	$12/\varepsilon^2 + 9/(2\varepsilon)$	$-5/(4\varepsilon)$
$\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Omega_3^2)$	L	$L(8\rho_4)$	$1/(2\varepsilon)$	$1/(4\varepsilon)$
$-\frac{1}{2}\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_4)$	$-12L^2 + L(-24\rho_1)$	0	$-12/\varepsilon^2$	0
$-\frac{\text{сумма}}{2}$	$-5L$	$L(-6\rho_2 + 32\rho_4)$	$-5/(2\varepsilon)$	$1/(2\varepsilon)$
$-\mathcal{J}_7$	0	$L(5/36 - 10\rho_2/3)$	0	$-5/(6\varepsilon)$
Ответ	$L(-175/36 - 28\rho_2/3 + 32\rho_4)$		$-17/(6\varepsilon)$	

Таблица 3: В таблице представлены локальные сингулярные составляющие, отвечающие второму столбцу таблицы 1. При этом второй и третий столбцы необходимо домножить на $c_2^2 W_{-1}/(4\pi)^4$, а последние два – на $c_2^2 W_{-1} \sigma^{-2\varepsilon}/(4\pi)^4$.

Этап 4. Кроме того, в таблице 3 приведены значения и разбиение на основную часть и поправочную для контрвершины. Приведем вначале полное сингулярное разложение для каждого вида

регуляризации

$$\begin{aligned} -\frac{5Lc_2}{48\pi^2} \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(S_f[\cdot, B]) \Big|_{\text{cutoff}} &\stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{5}{6} \frac{c_2^2 W_{-1}}{(4\pi)^4} \times L(4\rho_2 - 1/6) + \frac{5Lc_2 V_1}{48\pi^2}, \\ -\frac{5c_2}{48\pi^2 \varepsilon} \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(S_f[\cdot, B]) \Big|_{\text{d.reg.}} &\stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{5}{6} \frac{c_2^2 W_{-1} \sigma^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^4} \times \frac{1}{\varepsilon} + \frac{5c_2 V_1}{48\pi^2 \varepsilon}. \end{aligned}$$

Последнюю величину, следуя определениям из [68], будем обозначать $-\mathcal{J}_7$. При этом в обоих случаях локальная сингулярность, пропорциональная W_{-1} , будет записываться в поправочную часть. Сравним соответствующие слагаемые со случаем без регуляризации. Во-первых, часть от $M_0^{ab} G_{\text{loc}}^{ba}$, пропорциональная $F_{\nu\sigma}^{ab} F_{\mu\sigma}^{ba}$, содержит следующий множитель

$$e_1^{\mu\nu}(x) = -\frac{x^{\mu\nu}}{4} R_0(x) + A_0(x) \left(x^{\mu\nu} R_1(x) + R_2(x) \delta^{\mu\nu} - \frac{|x|^2 \delta^{\mu\nu}}{2^7 \pi^2} \right) \frac{1}{12}.$$

В условиях отсутствия регуляризации он равен нулю $e_1^{\mu\nu}(x) = 0$ для всех значений x . Однако при введении регуляризации он может деформироваться. Нетрудно проверить, что

$$e_1^{\mu\nu} \Big|_{\text{d.reg.}}(0) = 0, \quad e_1^{\mu\nu} \Big|_{\text{cutoff}}(0) = \frac{\delta^{\mu\nu}}{48(4\pi^2)}.$$

Во втором случае попадаетея комбинация с напряженностью вида $F_{\nu\sigma}^{ab} F_{\sigma\mu}^{ba}$. Опять же, в нерегуляризованном случае она имеет вид

$$e_2^{\mu\nu}(x) = -R_1(x) \delta^{\mu\nu} - 2\partial_{x_\mu} \partial_{x_\nu} \left(R_2(x) - \frac{|x|^2}{2^7 \pi^2} \right) = \frac{\delta^{\mu\nu} - 4x^\mu x^\nu / |x|^2}{2^5 \pi^2}.$$

В данном случае появляется неопределенность в нуле. Она зависит от предела (направления подхода к нулю). Переходя к размерной регуляризации или обрезанию, убеждаемся в справедливости следующих соотношений

$$e_2^{\mu\nu} \Big|_{\text{d.reg.}}(0) = \frac{\delta^{\mu\nu}}{32\pi^2}, \quad e_2^{\mu\nu} \Big|_{\text{cutoff}}(0) = \frac{\rho_2 \delta^{\mu\nu}}{8\pi^2}.$$

Таким образом, в случае размерной регуляризации неопределенность раскрывается при помощи зануления второго слагаемого, в то время как в случае обрезания важны обе части, причем их суммарное значение имеет противоположный знак, так как $\rho_2 \leq 0$. Тем не менее, именно второй вариант является более естественным, так как в случае обрезания по импульсам достигается максимум $\rho_2 \rightarrow 0$, который согласуется с тем фактом, что след матрицы $e_2^{\mu\nu}$ равен нулю при отсутствии регуляризации.

9 О ренормировке массы

В секции 1 обсуждался процесс перенормировки и делался акцент на том факте, что ренормируемость может зависеть от вида регуляризации. В этом случае необходимо либо расширять классическое действие, добавляя новые слагаемые с новыми параметрами, либо расширять правила ренормировки, допуская добавление новых контрвершин. Сразу следует сказать, что второй вариант является частным случаем первого, так как при занулении новых добавленных параметров в классическом действии оба результата должны совпадать. В секциях 4 и 5 использовался именно второй подход, так как он проще в реализации. Основной задачей данной секции является демонстрация первого подхода в рамках первых двух квантовых поправок для слабой деформации и обсуждение дополнительных изменений в случае сильной деформации.

Слабая деформация. Регуляризация в данном подходе вводится ковариантным образом (59), поэтому контрвершины также будут обладать инвариантностью относительно калибровочных преобразований фоновое поля B_μ^a , см. (16). Этот факт означает, что новые дополнительные части

классического действия (10) также должны обладать этим свойством. Теперь заметим, что в пределах первых двух квантовых поправок, см. теорему 2, была введена только одна новая контрвершина

$$S_2[a] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x a_\mu^a(x) a_\mu^a(x) \quad (144)$$

таким образом, что классическое действие (10) сдвигалось на величину

$$g^2 \frac{\Lambda^2 c_2 (2\rho_3 - 3\rho_0)}{8\pi^2} S_2[a].$$

Для проверки достаточно принять во внимание формулу (34) и ее частный случай из секции 5.3. Определения коэффициентов ρ_0 и ρ_3 приведены в теореме 2. Следовательно, расширенное классическое действие должно отличаться только массовым⁶² слагаемым и иметь вид

$$S_{\text{tot}}[B, e] + \frac{\mu^2}{2} S_2[a]. \quad (145)$$

Отметим, что ковариантность здесь присутствует, так как поле a_μ^a преобразуется по закону (18). После такого дополнения процедуру перенормировки с добавлением новой контрвершины можно переформулировать стандартным образом через домножение параметра μ^2 на вспомогательную константу перенормировки Z_μ , которая раскладывается в формальный ряд⁶³ по константе связи

$$Z_\mu = 1 + z_{\mu,1} + g_{\text{ren}}^2 z_{\mu,2} + \mathcal{O}(g_{\text{ren}}^4).$$

При этом коэффициенты $z_{\mu,1}$ и $z_{\mu,2}$ определяются исходя из первых двух поправок. Они содержат «степенные» части $z_{\mu,1}^\Lambda$ и $z_{\mu,2}^\Lambda$, которые следуют из теоремы 2 и равны

$$z_{\mu,1}^\Lambda = 0, \quad z_{\mu,2}^\Lambda = \frac{\Lambda^2 c_2 (2\rho_3 - 3\rho_0)}{4\mu^2 \pi^2},$$

а также «логарифмические» части $z_{\mu,1}^L$ и $z_{\mu,2}^L$, которые необходимо дополнительно вычислить. Для определения первого коэффициента достаточно заметить, что вклад в первую поправку, содержащий μ^2 , пропорционален $\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(S_2[\cdot])$. Принимая во внимание разложение для функции Грина около диагонали из секции 8.1, равенство $F_{\nu\nu}^a = 0$ и соотношение для J_\odot из (142), приходим к заключению, что в первой поправке нет логарифмических сингулярностей, пропорциональных μ^2 . Таким образом, имеем⁶⁴ $z_{\mu,1}^L = 0$. Переходя ко второй «петле», заметим, что все диаграммные блоки ковариантны, поэтому из общих соображений можно утверждать, что $z_{\mu,2}^L$ не будет содержать сингулярностей. Он может быть выбран равным любой конечной константе, в частности, $z_{\mu,2}^L = 0$. Если обращаться к механике вычислений, то для поиска необходимо решить равенство⁶⁵

$$-\frac{1}{2} \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_3^2 S_2) + \frac{1}{4} \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_4 S_2) - \frac{1}{2} \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Omega_3^2 S_2) + \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\hat{\Gamma}_2^0 S_2) - z_{\mu,2}^L \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(S_2) \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0. \quad (146)$$

Для этого нужно проделать вычисления, связанные с подстановкой разложения для функции Грина из секции 8.1, и воспользоваться леммой 4 из [123]. Тогда можно увидеть, что нелокальные слагаемые сокращаются, так как в этом случае комбинации полностью повторяют уже изученные в секции 7, а локальная сингулярная часть пропорциональна следу напряженности и потому равна нулю. Исходя из всего сказанного, константа перенормировки переписывается в виде

$$Z_\mu = 1 + g_{\text{ren}}^2 \frac{\Lambda^2 c_2 (2\rho_3 - 3\rho_0)}{4\mu^2 \pi^2} + \mathcal{O}(g_{\text{ren}}^4).$$

⁶²Интуитивно правильнее было бы называть массовым слагаемым $S_2[B + ga]$. По этой причине параметр обозначается μ^2 , а не m^2 . Авторы полагают, что слагаемое с $S_2[a]$ имеет большее отношение к перенормировке меры, а не массы. В любом случае, это открытый вопрос.

⁶³Обычно используется анзац $z_{\mu,1} = 0$. В данном случае рассматривается более общий случай, так как $z_{\mu,1} = 0$ не является очевидным. Он следует из вычислений.

⁶⁴Вообще говоря, можно добавить произвольную константу. Однако в этом случае первый коэффициент в Z_μ не будет равен единице.

⁶⁵Оно следует из (50) и (54) после добавления «массовой» вершины.

Можно предположить, что в старших петлях логарифмические части также будут отсутствовать из-за ковариантности регуляризации. Однако этот факт нужно дополнительно исследовать, поскольку он может зависеть от перенормируемости⁶⁶ в целом. Тем не менее на уровне двух поправок можно утверждать, что в ковариантном случае не было особого смысла в введении массового слагаемого, так как степенные сингулярности остались теми же, а логарифмических не появилось.

Сильная деформация. В данном случае необходимо опираться на результаты теоремы 1. Видно, что в рамках двух квантовых поправок новыми контрвершинами⁶⁷ являются $S_2[B + ga]$ и $S_2[a]$, поэтому расширенного действия (145) для слабой деформации уже недостаточно. Необходимо рассматривать следующий расширенный функционал классического действия

$$S_{\text{tot}}[B, e] + \frac{\mu^2}{2} S_2[a] + \frac{m^2}{2g^2} S_2[B + ga].$$

Последнее слагаемое⁶⁸ при этом полностью согласуется со связью действия и уравнения (24). При этом инвариантность относительно калибровочных преобразований нарушается уже на уровне классического действия, что обусловлено видом регуляризации. Перейдем к процессу ренормировки. Здесь уже появятся две константы ренормировки⁶⁹

$$Z_\mu = 1 + z_{\mu,1} + g_{\text{ren}}^2 z_{\mu,2} + \mathcal{O}(g_{\text{ren}}^4), \quad Z_m = \frac{g^2}{g_{\text{ren}}^2} \left(1 + g_{\text{ren}}^2 z_{m,1} + g_{\text{ren}}^4 z_{m,2} + \mathcal{O}(g_{\text{ren}}^6) \right).$$

Для восстановления вида коэффициентов обратимся к результатам теоремы 1. Из первого пункта следует, что для компенсации сингулярностей классическое действие нужно сдвинуть на величину

$$\frac{\Lambda^2 c_2 (\rho_3 - 2\rho_0)}{8\pi^2} S_2[B] + g_{\text{ren}}^2 \frac{\Lambda^2 c_2 \alpha}{8\pi^2} S_2[B] + g_{\text{ren}}^2 \frac{\Lambda^2 c_2 (2\rho_3 - 3\rho_0)}{8\pi^2} S_2[a] + \dots,$$

где многоточие обозначает часть, содержащую перекрестное слагаемое с $B_\mu^a a_\mu^a$, которое однозначно восстанавливается с учетом (32). Следовательно, «степенные» части первых двух коэффициентов принимают вид

$$z_{m,1}^\Lambda = \frac{\Lambda^2 c_2 (\rho_3 - 2\rho_0)}{4m^2 \pi^2}, \quad z_{m,2}^\Lambda = \frac{\Lambda^2 c_2 \alpha}{4m^2 \pi^2},$$

$$z_{\mu,1}^\Lambda = 0, \quad z_{\mu,2}^\Lambda = \frac{\Lambda^2 c_2 (\rho_3 - \rho_0)}{4\mu^2 \pi^2}.$$

Возвращаясь к логарифмическим сингулярностям, вычислим лишь первые. Они имеют вид $z_{m,1}^\Lambda = 0$ и $z_{m,1}^\Lambda = 0$ в схеме с минимальными вычитаниями и являются следствием разложений функций Грина около диагонали, см. формулу (81) в секции 7.1, и соотношения (123). Действительно, в этом случае диаграмма $\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(S_2[\cdot])$ не имеет сингулярностей. Вторые коэффициенты, которые в общем случае пропорциональны первой степени логарифма L , являются результатом исследования соотношения (146) и не включены в данную работу. Их следует воспринимать как «отклонение» от ковариантного случая.

10 О квазилокальных вершинах

В теоремах 1 и 2 был вычислен двухпетлевой коэффициент бета-функции. Оказалось, что, помимо числового слагаемого, ответ содержит также функционалы ρ_2 и ρ_4 , зависящие от деформирующей функции $\mathbf{f}(\cdot)$, см. (28). Эти функционалы отличаются существенным образом и, по мнению авторов,

⁶⁶На данный момент нет доказательства, что в более высоких поправках стандартная \mathcal{R} -операция Боголюбова–Парасюка вычитает все необходимые подрасходимости в диаграммах.

⁶⁷Вид первого функционала обусловлен необходимостью сохранять связь действия и плотности из уравнения. По этой причине выбран $S_2[B + ga]$, а не $S_2[B]$.

⁶⁸Заметим, что здесь используется стандартное обозначение массового параметра.

⁶⁹В случае Z_m анзатц выбран из соображений удобства.

имеют различную природу происхождения. К примеру, функционал ρ_2 , см. секцию 7.8, строится в виде разности сверток функций $R_0^1(x)$ и $A_0(x)R_0^\Lambda(x)$ и, таким образом, отражает наличие деформированного δ -функционала, то есть перехода $\delta(x) \rightarrow A_0(x)R_0^1(x)$. При отсутствии⁷⁰ регуляризации такие функционалы также отсутствуют.

В свою очередь, функционал ρ_4 , см. секцию 7.8, не содержит разности и отличен от нуля, в том числе и при отсутствии регуляризации. Действительно, в этом случае получаем

$$\frac{\pi^2}{2} \int_{B_1} d^4x R_0(x) |x|^2 A_0(x) R_0(x) = \frac{1}{8} \int_{B_1} d^4x \delta(x) = \frac{1}{8}.$$

Следовательно, в ситуации без регуляризации, когда все симметрии изначальной модели присутствуют, такой интеграл также не обращается в нуль. При этом его вклад является вполне естественным и не нарушает «физики» и «комбинаторики». Дополнительный интерес к ρ_4 обусловлен его появлением в двухпетлевых диаграммах, см. таблицу 1. Заметим, что коэффициент, с которым появляется этот функционал, пропорционален коэффициенту для функционала ρ_3 , который полностью вычитается контрдиаграммой $\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(S_2)$. Возникает вопрос: «Можно ли обобщить контрвершину $S_2[a]$ путем перехода к квазилокальной плотности таким образом, чтобы она вычитала все функционалы ρ_4 и не затрагивала остальные?» Приведем в качестве положительного ответа явное построение.

Итак, вершина $S_2[a]$ по построению определяется интегралом (144). При этом разложение по ультрафиолетовым сингулярностям для диаграммы $\Lambda^2 \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(S_2)$, с учетом (121), в случае слабой деформации, см. секцию (8.1), выписывается в виде

$$\Lambda^2 \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(G_{1\mu\mu}^{\Lambda aa}(x, x) - 4R_0^\Lambda(0) \dim(\mathfrak{g}) \right) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{3c_2 L \rho_5}{2\pi^2} W_{-1} + \Lambda^2 \times PS\text{-часть}.$$

Рассмотрим для примера⁷¹ переход от функционала $S_2[\cdot]$ с локальной плотностью к функционалу $Q[\cdot]$ с квазилокальной плотностью, то есть допускающей наличие интегрального ядра, зависящего от переменных x и y , которое равно нулю при $|x - y| > 1/\Lambda$. Явный переход можно представить так

$$S_2[a] \rightarrow Q[a] = \frac{4\pi^2}{\rho_3 \Lambda^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \int_{\mathbb{R}^4} d^4y a_\mu^b(x) \left(R_0^\Lambda(x - y) A_0(x) R_0^\Lambda(x - y) \right) a_\mu^b(y).$$

Изучим сингулярную часть $\Lambda^2 \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(Q)$. Сразу отметим, что вычисление нелокальной составляющей (PS -часть) сводится к рассмотрению функции на диагонали. Учитывая определение для ρ_3 из секции 7.8, получаем тот же ответ, что и для $\Lambda^2 \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(S_2)$. Далее заметим, что часть (137) не даст сингулярного вклада, зависящего от фонового поля, так как логарифмические составляющие в разложении отсутствуют. Следовательно, как и в случае вершины S_2 , вклад даст только \mathcal{L} -часть. Далее, пользуясь определением $\hat{\mathbb{I}}_3$ из секции (7.8), можно показать, что

$$\Lambda^2 \frac{c_2 \rho_3}{(4\pi)^2} \left(\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(Q) - \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(S_2) \right) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{c_2}{(4\pi)^2} \left(4c_2 \hat{\mathbb{I}}_3 - \frac{3c_2 \rho_5 \rho_3}{2\pi^2} W_{-1} L \right) \stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{8c_2^2 \rho_4 L}{(4\pi)^4} W_{-1}.$$

Окончательно, сравнивая полученный результат с таблицей 1, видим, что новая вершина $Q[\cdot]$ сокращает функционалы ρ_4 во всех петлях, оставляя при этом другие части такими же. Такая идея является весьма привлекательной с точки зрения корректировки сингулярных вкладов. Дело в том, что на данный момент отсутствует доказательство, что вычитание подрасходимостей работает для данной регуляризации во всех петлях. Поэтому, в случае появления нарушений такой процедуры, введение квазилокальных слагаемых может дать дополнительную свободу в подборе подходящих контрвершин. Другими словами «лишние» сингулярности могут быть нейтрализованы введением квазилокальности.

⁷⁰Они также равны нулю при обрезании «sharp cutoff» в импульсном представлении.

⁷¹Введение квазилокальных ядер не является однозначным. Их можно построить целое семейство. Похожая ситуация возникает в двумерной модели главного кирального поля, см. [44]. Дополнительные условия, однозначно фиксирующие ядро, на данный момент не ясны.

11 Заключение

11.1 Сводка результатов

Опишем в краткой форме основные результаты. Прежде всего напомним, что работа состоит из двух основных частей, посвященных сильной деформации, см. секцию 4, а также слабой деформации, см. секцию 5. При этом в первом случае регуляризация вводится путем квазилокального вероятностного усреднения полей флуктуации, см. формулу (31), а во втором случае предлагается ковариантный способ «усреднения», см. формулу (60), который в главном порядке совпадает с первым. Подробное описание соответствующих результатов приведено в двух теоремах и вспомогательных комментариях после них:

сильная деформация \longrightarrow теорема 1 + комментарии;

слабая деформация \longrightarrow теорема 2 + комментарии.

Схематично результаты можно представить в виде следующего вспомогательного списка.

Первая «петля». В обоих случаях логарифмическая сингулярная часть для первой квантовой поправки имеет стандартный вид $11/3 \times c_2 L W_{-1}/(4\pi)^2$, где $L = \ln(\Lambda/\sigma)$, и совпадает со случаем размерной регуляризации, см. для примера [108, 109]. При этом использование «сильной» регуляризации дополнительно влечет появление степенных сингулярностей $\sim \Lambda^2$, которые можно либо компенсировать введением вспомогательных контрвершин, как это было сделано в теореме 1, либо путем расширения классического действия, добавив «массовое» слагаемое, и дальнейшей перенормировкой массы, см. секцию 9.

Локальная часть второй «петли». В «слабом» случае локальная сингулярная часть $\sim L W_{-1}$, см. пункт 3 теоремы 2. При этом коэффициент пропорциональности не совпадает со случаем размерной регуляризации, см. для примера [98], и зависит от регуляризующей функции $f(\cdot)$, см. (28). В «сильном» случае локальная сингулярность дополняется «массовыми» слагаемыми $\sim \Lambda^2$ и $\sim L\Lambda^2$, а также набором частей классического действия W_{-1} , пропорциональных L и отражающих нарушение инвариантности относительно калибровочных преобразований фонового поля (16).

Нелокальная часть второй «петли». В обеих ситуациях, см. пункт 3 в теоремах 1 и 2, вклад имеет один и тот же вид и состоит из двух частей: логарифмической $\sim L$, которая приводит к перенормировке функционала S_f , фиксирующего калибровку, и степенной $\sim \Lambda^2$, которая приводит к дополнительному «массовому» слагаемому. При этом вторая часть не нарушает инвариантности, так как поля флуктуации преобразуются по закону (18). Также заметим, что логарифмическая часть согласуется со случаем других регуляризаций.

Первая «петля» для первой вариации. Рассматривалась сингулярная часть вариации квантового действия (14) по полю, отвечающему за калибровочное условие. Было показано, что в обеих ситуациях она имеет один и тот же вид, см. пункт 2 в теоремах 1 и 2, и согласуется с другими регуляризациями. При этом в «слабом» случае также было доказано, что вариация по полю, отвечающему за ковариантную деформацию, не добавляет новых сингулярностей в рамках первой поправки.

Квазилокальные вершины. В секции 10 было показано, что часть локальной сингулярной составляющей второй поправки может быть убрана путем перехода от «массовой» контрвершины с локальной плотностью к обобщенному случаю с квазилокальной контрвершиной. При этом на другие сингулярные вклады такое изменение не влияет.

Сравнение. В секции 8.5 было произведено детальное сравнение сингулярных частей в случае размерной регуляризации и в случае слабой деформации. Было показано, что сингулярные вклады можно представить в виде линейной комбинации конечного числа мастер-интегралов. При этом в

случае размерной регуляризации деформируются коэффициенты, с которыми эти интегралы входят, а в случае обрезания деформируются сами интегралы. Для сравнения см. таблицы 2 и 3.

Подход Фаддеева. В рамках подхода работы с квантовым действием, см. секции 4.3–4.5 и 5.3, заключающимся в использовании фонового поля специального вида, была рассмотрена процедура перенормировки. Обсуждалась согласованность функционалов до и после регуляризации, а также варианты корректировки соотношений в процессе перенормировки. В качестве пояснения процесс был выполнен для первых двух квантовых поправок.

11.2 Комментарии

О второй поправке. Интересной открытой задачей является изучение второй поправки для вариации квантового действия как по фоновому полю (то есть стандартная вторая поправка для квантового уравнения движения), так и по полю, отвечающему за выбор калибровочного условия. Причем эти вычисления важны не только для поиска вспомогательного тока (46), но и для поиска сингулярной части вариации эффективного действия по полю, отвечающему за регуляризацию в случае слабой деформации. В данной работе было показано, что подобная величина для первой поправки равна нулю. При этом ожидается, что для следующего поправочного слагаемого она не только будет ненулевой, но и дополнительно потеряет калибровочную инвариантность относительно изменений фонового поля. Это связано с тем фактом, что калибровочно инвариантный регуляризующий оператор восстанавливает инвариантность при переходе от сильной деформации к слабой.

О третьей «петле». Задача о подсчете сингулярных вкладов для третьей квантовой поправки в случае регуляризации обрезанием является открытой. При этом в рамках использования слабой деформации, см. секцию 8, она является вполне осуществимой. Обратим внимание, что в этом случае можно сразу пользоваться разложением вида (137), поскольку все конструкции являются инвариантными относительно калибровочных преобразований фонового поля (16). Отметим, что вдобавок удобно пользоваться разложениями «по напряженностям» для упорядоченных экспонент из [123], а также рядом уже исследованных диаграмм [66].

О классических решениях. Заметим, что функционал (14) можно рассматривать в случае, когда фоновое поле $B_\mu^a = B_{\text{cl},\mu}^a$ решает классическое уравнение движения. При этом разложение будет содержать связанные диаграммы, а не только сильно связанные. К примеру, диаграмма типа «очки» не присутствует в квантовом действии $W_{\text{reg}}^{\text{sc}}[\cdot]$. С точки зрения ренормировочного процесса связь действия и квантового уравнения в этом случае важна, так как она гарантирует отсутствие дополнительных сингулярностей. Заметим, что в случае слабой деформации в первых двух поправках проверить ренормируемость достаточно легко. Действительно, благодаря ковариантности деформации в квантовом уравнении движения сингулярность пропорциональна плотности классического уравнения движения, которая равна нулю за счет выбора фонового поля.

О древесных диаграммах. В секции 5.6 обсуждался специальный подход, который заключался в изучении сильно связанного квантового действия на диагонали без контроля ренормируемости частных вариаций по фоновому полю. В этом случае ренормированное связанное действие по определению строится с использованием ренормированного сильно связанного действия и его производных. При этом важны явные формулы для древесных диаграмм. К сожалению, авторам не удалось найти подходящих формул. Более того, не ясно, можно ли новое действие представить в виде функционального интеграла от какого-то «классического» действия.

11.3 Благодарности

Мы благодарны нашим \mathcal{K} и \mathcal{L} за вдохновение.

12 Список литературы

- [1] L. D. Faddeev, A. A. Slavnov, *Gauge Fields: An Introduction to Quantum Theory*, Frontiers in Physics **83**, Addison-Wesley, 1–236 (1991)
- [2] C. Itzykson, J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-hill, New York, 1–705 (1980)
- [3] R. Feynman, *QED: The Strange Theory of Light and Matter*, Princeton University Press, United States, 1–158 (1985)
- [4] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley, 1–868 (1995)
- [5] I. M. Gel'fand, G. E. Shilov, *Generalized Functions, Volume 1: Properties and Operations*, AMS Chelsea Publishing **377**, 1–423 (1964)
- [6] V. S. Vladimirov, *Methods of the theory of generalized functions*, London, CRC Press, 1–328 (2002)
- [7] N. Reshetikhin, *Lectures on Quantization of Gauge Systems*, New Paths Towards Quantum Gravity, Springer Berlin Heidelberg, 125–190 (2010) doi:10.1007/978-3-642-11897-5_3
- [8] A. S. Cattaneo, P. Mnev, N. Reshetikhin, *Perturbative Quantum Gauge Theories on Manifolds with Boundary*, Commun. Math. Phys. **357**, 631–730 (2018) doi:10.1007/s00220-017-3031-6
- [9] S. Kandel, *Functorial quantum field theory in the Riemannian setting*, Adv. Theor. Math. Phys. **20**(6), 1443–1471 (2016) doi:10.4310/ATMP.2016.v20.n6.a5
- [10] S. Kandel, P. Mnev, K. Wernli, *Two-dimensional perturbative scalar QFT and Atiyah-Segal gluing*, Adv. Theor. Math. Phys. **25**(7), 1847–1952 (2021) doi:10.4310/ATMP.2021.v25.n7.a5
- [11] P. A. Valinevich, S. E. Derkachov, A. P. Isaev, *SOS-Representation for the $SL(2, \mathbb{C})$ -Invariant R-Operator and Feynman Diagrams*, J Math Sci, **238**, 819–833 (2019) doi:10.1007/s10958-019-04278-x
- [12] S. E. Derkachov, V. P. Spiridonov, *The $6j$ -Symbols for the $SL(2, \mathbb{C})$ Group*, Theor Math Phys, **198**, 29–47 (2019) doi:10.1134/S0040577919010033
- [13] S. E. Derkachev, A. V. Ivanov, L. A. Shumilov, *Mellin–Barnes Transformation for Two-Loop Master-Diagram*, J Math Sci, **264**, 298–312 (2022) doi:10.1007/s10958-022-05998-3
- [14] S. E. Derkachov, A. N. Manashov, *On Complex Gamma-Function Integrals*, SIGMA, **16**, 003, 20 pp. (2020) doi:10.3842/SIGMA.2020.003
- [15] R. P. Feynman, A. R. Hibbs, D. F. Styer, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, Mineola, NY: Dover Publications, 1–371 (2010)
- [16] P. Cartier, C. DeWitt-Morette, *A Rigorous Mathematical Foundation of Functional Integration*, In: DeWitt-Morette, C., Cartier, P., Folacci, A. (eds) Functional Integration. NATO ASI Series, vol **361**, Springer, Boston (1997) doi:10.1007/978-1-4899-0319-8_1
- [17] J. Zinn Justin, *Path Integrals in Quantum Mechanics*, Oxford University Press, 1–334 (2004)
- [18] E. T. Shavgulidze, O.G. Smolyanov, *Functional integrals*, Moscow, URSS, 1–328 (2015)
- [19] P. V. Antonenko, S. E. Derkachov, P. A. Valinevich, *A-Type Open $SL(2, \mathbb{C})$ Spin Chain*, SIGMA, **21**, 107, 48 pp. (2025) doi:10.3842/SIGMA.2025.107
- [20] J. C. Collins, *Renormalization: An Introduction to Renormalization, the Renormalization Group and the Operator-Product Expansion*, Cambridge University Press, 1–392 (1984)

- [21] O. I. Zavialov, *Renormalized quantum field theory*, Kluwer Academic Publishers, Dodrecht, Boston, 1–524 (1990)
- [22] D. I. Kazakov, *Radiative Corrections, Divergences, Regularization, Renormalization, Renormalization Group and All That in Examples in Quantum Field Theory*, arXiv:0901.2208 [hep-ph] (2009)
- [23] O. I. Zavialov, *Bogolyubov’s \mathcal{R} -operation and the Bogolyubov–Parasyuk theorem*, Russian Math. Surveys, **49**:5, 67–76 (1994) doi:10.1070/RM1994v049n05ABEH002426
- [24] C. G. Bollini, J. J. Giambiagi, *Dimensional Renormalization: The Number of Dimensions as a Regularizing Parameter*, Nuovo Cim. B, **12**, 20–26 (1972)
- [25] G. ’t Hooft, M. Veltman, *Regularization and renormalization of gauge fields*, Nucl. Phys. B **44**, 189–213 (1972)
- [26] A. A. Slavnov, *Invariant regularization of non-linear chiral theories*, Nucl. Phys. B, **31**(2), 301–315 (1971) doi:10.1016/0550-3213(71)90234-3
- [27] A. A. Slavnov, *Invariant regularization of gauge theories*, Theoret. and Math. Phys., **13**:2 (1972) 1064–1066 doi:10.1007/BF01035526
- [28] T. Bakeyev, A. Slavnov, *Higher covariant derivative regularization revisited*, Mod. Phys. Lett. A **11**(19), 1539–1554 (1996)
- [29] K. V. Stepanyantz, *The Higher Covariant Derivative Regularization as a Tool for Revealing the Structure of Quantum Corrections in Supersymmetric Gauge Theories*, Proc. Steklov Inst. Math. **309**, 284–298 (2020)
- [30] A. Brizola, O. Battistel, M. Sampaio, M. C. Nemes, *Implicit Regularisation Technique: Calculation of the Two-loop ϕ_4^4 -theory β -function*, Mod. Phys. Lett. A, **14**, 1509–1518 (1999)
- [31] A. L. Cherchiglia, M. Sampaio, M. C. Nemes, *Systematic Implementation of Implicit Regularization for Multi-Loop Feynman Diagrams*, Int. J. Mod. Phys. A, **26**, 2591–2635 (2011)
- [32] A. Cherchiglia, D. C. Arias-Perdomo, A. R. Vieira, M. Sampaio, B. Hiller, *Two-loop renormalisation of gauge theories in 4D Implicit Regularisation and connections to dimensional methods*, Eur. Phys. J. C, **81**, 468 (2021) doi:10.1140/epjc/s10052-021-09259-6
- [33] R. P. Feynman, *Relativistic Cut-Off for Quantum Electrodynamics*, Phys. Rev. **74**, 1430–1438 (1948) doi:10.1103/PhysRev.74.1430
- [34] N. N. Bogolyubov, D. V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, Willey, New York, 1–620 (1980)
- [35] W. Pauli, F. Villars, *On the Invariant Regularization in Relativistic Quantum Theory*, Rev. Mod. Phys. **21**(3): 434–444 (1949)
- [36] S. L. Shatashvili, *Two-loop approximation in the background field formalism*, Theor Math Phys **58**, 144–150 (1984) doi:10.1007/BF01017919
- [37] M. Oleszczuk, *A symmetry-preserving cut-off regularization*, Z. Phys. C, **64**, 533–538 (1994)
- [38] Sen-Ben Liao, *Operator Cutoff Regularization and Renormalization Group in Yang-Mills Theory*, Phys. Rev. D, **56**, 5008–5033 (1997)
- [39] G. Cynolter, E. Lendvai, *Cutoff Regularization Method in Gauge Theories*, [arXiv:1509.07407 [hep-ph]] (2015)

- [40] N. V. Kharuk, *Mixed type regularizations and nonlogarithmic singularities*, Questions of quantum field theory and statistical physics. Part 27, Zap. Nauchn. Sem. POMI, **494**, POMI, St. Petersburg, 2020, 242–249; J. Math. Sci. (N. Y.), **264**, 362–367 (2022) 10.1007/s10958-022-06003-7
- [41] A. A. Bagaev, *Two-loop calculations of the matrix σ -model effective action in the background field formalism*, Theor Math Phys, **154**:2, 303–310 (2008) doi:10.1007/s11232-008-0028-5
- [42] A. M. Polyakov, *Gauge Fields and Strings*, London, Taylor and Francis Group, 1–312 (1987)
- [43] P. V. Akacevich, A. V. Ivanov, *On Two-Loop Effective Action of 2D Sigma Model*, Eur. Phys. J. C **83**, 653 (2023), arXiv:2304.02374, doi:10.1140/epjc/s10052-023-11797-0
- [44] P. V. Akacevich, A. V. Ivanov, I. V. Korenev, *Three-loop singularity structure for a non-linear sigma model*, (2025) arXiv:2507.05923
- [45] N. D. Lenshina, A. A. Radionov, F. V. Tkachov, *MS⁴: An Alternative to the Bogolyubov–Parasiuk–Hepp–Zimmermann (BPHZ) Theory*, Phys. Part. Nucl., **51**, 567–571 (2020) doi:10.1134/S1063779620040462
- [46] N. D. Lenshina, A. A. Radionov, F. V. Tkachov, *Finite Z-Less Integral Expressions for β -Functions in the MS⁴ Scheme*, Phys. Part. Nucl. Lett., **18**, 131–140 (2021) doi:10.1134/S1547477121020102
- [47] H. Yukawa, *On the Interaction of Elementary Particles I*, Proc. Phys. Math. Soc. Jap., **17**, 48 (1935)
- [48] S. Weinberg, *A Model of Leptons*, Phys. Rev. Lett., **19**(21), 1264–1266 (1967) doi:10.1103/PhysRevLett.19.1264
- [49] M. E. Machacek, M. T. Vaughn, *Two-loop renormalization group equations in a general quantum field theory (II). Yukawa couplings*, Nucl. Phys. B, **236** 221–232 (1984) doi:10.1016/0550-3213(84)90533-9
- [50] C. N. Yang, R. Mills, *Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*, Phys. Rev. **96**, 191–195 (1954)
- [51] G. 't Hooft, *Renormalization of massless Yang–Mills fields*, Nucl. Phys. B, **33**, 173–199 (1971) doi:10.1016/0550-3213(71)90395-6
- [52] H. Kleinert, V. Schulte-Frohlinde, *Critical properties of ϕ^4 -theories*, World Scientific, Singapore, 1–512 (2001)
- [53] A. N. Vasil'ev, *The field theoretic renormalization group in critical behavior theory and stochastic dynamics*, Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 1–681 (2004)
- [54] A. Jaffe, E. Witten, *Quantum Yang–Mills Theory*, www.claymath.org/sites/default/files/yangmills.pdf
- [55] L. D. Faddeev, V. Popov, *Feynman Diagrams for Yang–Mills field*, Phys. Lett. B, **25**, 29–30 (1967)
- [56] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Quantum equation of motion and two-loop cutoff renormalization for ϕ^3 model*, Zap. Nauchn. Sem. POMI, **487**, POMI, St. Petersburg, 2019, 151–166; J. Math. Sci. (N. Y.), **257**:4 (2021), 526–536, arXiv:2203.04562, doi:10.1007/s10958-021-05500-5
- [57] A. V. Ivanov, *Explicit Cutoff Regularization in Coordinate Representation*, 2022 J. Phys. A: Math. Theor. **55**, 495401, arXiv:2209.01783, doi:10.1088/1751-8121/aca8dc
- [58] A. V. Ivanov, *An applicability condition of a cutoff regularization in the coordinate representation*, Funct Anal Its Appl **59**, 1–10 (2025) arXiv:2403.09218, <https://www.pdmi.ras.ru/preprint/2024/24-04.html>, <https://doi.org/10.1134/S123456782501001X>; Translated from: Funktsional'nyi Analiz i ego Prilozheniya, **59**:1, 5–17 (2025) <https://doi.org/10.4213/faa4221>

- [59] V. P. Zastavnyi, *The continuation of the radial function from the exterior of the ball to a function positively defined on the entire space*, Bulletin of Donetsk National University: Series A. Natural Sciences, 2/2024, 14–28 (2024) doi:10.5281/zenodo.13752079
- [60] A. V. Ivanov, I. V. Korenev, ???
- [61] A. V. Ivanov, *Effective actions, cutoff regularization, quasi-locality, and gluing of partition functions*, J. Phys. A: Math. Theor., **58**, 135401 (2025) doi:10.1088/1751-8121/adc3de, arXiv:2411.13857, <https://www.pdmi.ras.ru/preprint/2024/24-11.html>
- [62] N. V. Kharuk, *Three-loop renormalization with a cutoff in a sextic model*, Questions of quantum field theory and statistical physics. Part 30, Zap. Nauchn. Sem. POMI, **532**, POMI, St. Petersburg, 2024, 273–286 <https://mathscinet.ams.org/mathscinet/relay-station?mr=4811943> <https://www.mathnet.ru/eng/zns17462>
- [63] N. V. Kharuk, *Four-loop renormalization with a cutoff in a sextic model*, 2025 J. Phys. A: Math. Theor. **58**, 395401 (2025) arXiv:2504.07688, <http://www.pdmi.ras.ru/preprint/2025/25-02.html> doi:10.1088/1751-8121/ae0798
- [64] A. V. Ivanov, *Three-loop renormalization of the quantum action for a four-dimensional scalar model with quartic interaction with the usage of the background field method and a cutoff regularization*, Nucl. Phys. B, **1006**, 116647 (2024), doi:10.1016/j.nuclphysb.2024.116647, arXiv:2402.14549, <https://www.pdmi.ras.ru/preprint/2024/24-02.html>
- [65] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Three-loop renormalization of the quantum action for a five-dimensional scalar cubic model with the usage of the background field method and a cutoff regularization*, Eur. Phys. J. Plus **139**, 849 (2024) doi:10.1140/epjp/s13360-024-05648-4, arXiv:2404.07513, <https://www.pdmi.ras.ru/preprint/2024/24-05.html>
- [66] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Three-loop divergences in effective action of 4-dimensional Yang–Mills theory with cutoff regularization: Γ_4^2 -contribution*, Zap. Nauchn. Sem. POMI, **520**, POMI, St. Petersburg, 2023, 162–188, J Math Sci **284**, 681–699 (2024) doi:10.1007/s10958-024-07379-4
- [67] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Two-Loop Cutoff Renormalization of 4-D Yang–Mills Effective Action*, 2020 J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **48**, 015002, arXiv:2004.05999, doi:10.1088/1361-6471/abb939
- [68] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Formula for two-loop divergent part of 4-D Yang–Mills effective action*, Eur. Phys. J. C **82**, 997 (2022), arXiv:2203.07131, doi:10.1140/epjc/s10052-022-10921-w
- [69] J. Polchinski, *Renormalization and effective lagrangians*, Nucl. Phys. B, **231**(2), 269–295 (1984) doi:10.1016/0550-3213(84)90287-6
- [70] J. Polonyi, *Lectures on the functional renormalization group method*, Central Eur. J. Phys. **1**, 1–71 (2003) doi:10.2478/BF02475552
- [71] P. Kopietz, L. Bartosch, F. Schütz, *Introduction to the Functional Renormalization Group*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1–382 (2010)
- [72] J. W. Moffat and S. M. Robbins, *Yang-Mills Theory and Non-Local Regularization*, Mod. Phys. Lett. A, **6**, No. 17, 1581–1587 (1991) doi:10.1142/S0217732391001706
- [73] N.J. Cornish, *Quantum Nonlocal Field Theory: Physics Without Infinities*, Int. J. Mod. Phys. A, **7**, No. 24, 6121–6157 (1992) doi:10.1142/S0217751X92002787
- [74] L. Modesto, L. Rachwał, *Nonlocal quantum gravity: A review*, Int. J. Mod. Phys. D, **26**, 1730020 (2017) doi:10.1142/S0218271817300208
- [75] N. V. Krasnikov, *Introduction to Nonlocal Field Theory Including Gravity*, Phys. Part. Nuclei **55**, 1467–1473 (2024) doi:10.1134/S1063779624701107

- [76] K. Namsrai, *Nonlocal Quantum Field Theory and Stochastic Quantum Mechanics*, Springer, Dordrecht, 1–426, (1986)
- [77] G. V. Efimov, *Nonlocal quantum field theory, nonlinear interaction lagrangians, and the convergence of the perturbation-theory series*, Theor Math Phys, **2**, 217–223 (1970) doi:10.1007/BF01038039
- [78] G. V. Efimov, *Quantization of non-local field theory*, Int J Theor Phys, **10**, 19–37 (1974) doi:10.1007/BF01808314
- [79] L. D. Faddeev, *Scenario for the renormalization in the 4D Yang–Mills theory*, Int. J. Mod. Phys. A, **31**, 1630001 (2016)
- [80] C. E. Derkachev, A. V. Ivanov, L. D. Faddeev, *Renormalization scenario for the quantum Yang–Mills theory in four-dimensional space-time*, TMF, **192**:2 (2017), 227–234; Theoret. and Math. Phys., **192**:2 (2017), 1134–1140 10.1134/S0040577917080049
- [81] J. D. Fraser, *The twin origins of renormalization group concepts*, Studies in History and Philosophy of Science Part A, **89**, 114–128 (2021) doi:10.1016/j.shpsa.2021.08.002
- [82] D. J. Gross, *Applications of the renormalization group to high-energy physics*, in: Methods in Field Theory: Les Houches Session XXVIII, World Scientific, 141–250 (1993) doi:10.1142/9789814412674_0004
- [83] A. V. Ivanov, *About renormalized effective action for the Yang–Mills theory in four-dimensional space-time*, EPJ Web of Conferences **191**, 06001 (2018) doi:10.1051/epjconf/201819106001
- [84] A. V. Ivanov, *About dimensional regularization in the Yang–Mills theory*, J. Math. Sci. (N. Y.), **238**:6 (2019), 862–869 doi:10.1007/s10958-019-04281-2
- [85] S. L. Shatashvili, *Two-loop approximation in the background field formalism*, Theoret. and Math. Phys., **58**:2, 144–150 (1984) doi:10.1007/BF01017919
- [86] P. H. Chankowski, A. Lewandowski, K. A. Meissner, *Two-loop RGE of a general renormalizable Yang–Mills theory in a renormalization scheme with an explicit UV cutoff*, High Energ. Phys. **105**, (2016) doi:10.1007/JHEP11(2016)105
- [87] T. Varin, D. Davesne, M. Oertel, M. Urban, *How to preserve symmetries with cut-off regularized integrals?*, Nucl. Phys. A, **791**, 422–433 (2007) doi:10.1016/j.nuclphysa.2007.05.003
- [88] A. A. Slavnov, *Universal gauge invariant renormalization*, Phys. Lett. B, **518**, 195–200 (2001)
- [89] A. A. Slavnov, *Regularization-independent gauge-invariant renormalization of the Yang–Mills theory*, Teor. Mat. Fiz. **130**, 3–14 (2002)
- [90] N. P. Meshcheriakov, V. V. Shatalova, K. V. Stepanyantz, *Higher logarithms and ε -poles for the \overline{MS} -like renormalization prescriptions*, J. High Energ. Phys. **2023**, 97 (2023) doi:10.1007/JHEP12(2023)097
- [91] A. L. Kataev, K. V. Stepanyantz, *Algebraic structure of the renormalization group in the renormalizable QFT theories*, Int. J. Mod. Phys. A, **39**(34), 2445001 (2024) doi:10.1142/S0217751X24450015
- [92] K. Stepanyantz, *Exact expressions for the renormalization constants in the \overline{MS} -like schemes*, 27th Workshop on What Comes Beyond the Standard Models? (2025) arXiv:2502.12573
- [93] B. S. DeWitt, *Quantum Theory of Gravity. 2. The Manifestly Covariant Theory*, Phys. Rev. **162**, 1195–1239 (1967)
- [94] B. S. DeWitt, *Quantum Theory of Gravity. 3. Applications of the Covariant Theory*, Phys. Rev. **162**, 1239–1256 (1967)

- [95] G. 't Hooft, *The background field method in gauge field theories*, (Karpacz, 1975), Proceedings, Acta Universitatis Wratislaviensis, **1**, Wroclaw, 345–369 (1976)
- [96] L. F. Abbott, *Introduction to the background field method*, Acta Phys. Polon. B, **13**:1–2, 33–50 (1982)
- [97] I. Ya. Aref'eva, A. A. Slavnov, L. D. Faddeev, *Generating functional for the S-matrix in gauge-invariant theories*, TMF, **21**:3, 311–321 (1974)
- [98] I. Jack, H. Osborn, *Two-loop background field calculations for arbitrary background fields*, Nucl. Phys. B, **207**, 474–504 (1982) doi:10.1016/0550-3213(82)90212-7
- [99] L. D. Faddeev, *A couple of methodological comments on the quantum Yang-Mills theory*, Theor Math Phys, **181**, 1638–1642 (2014) doi:10.1007/s11232-014-0240-4
- [100] L. D. Faddeev, *Mass in Quantum Yang–Mills theory (comment on a Clay millenium problem)*, Bull. Braz. Math. Soc. (N. S.), **33**:2, 201–212 (2002) arXiv:0911.1013
- [101] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*, Second Edition, CRC Press, 1–573 (2003)
- [102] A. A. Bagaev, Yu. M. Pis'mak, *Background field formalism for multiple integrals*, Vestnik SPbSU, Ser. 4, Vol. **1**(59), 464–472 (2014)
- [103] A. A. Bagaev, Yu. M. Pis'mak, *The $0D \phi^4$ model in the background field formalism*, Vestnik SPbSU, Ser. 4, Vol. **2**(60), 327–334 (2015)
- [104] A. V. Ivanov, M. A. Russkikh, *Quantum Field Theory on the Example of the Simplest Cubic Model*, J Math Sci **275**, 306–325 (2023) doi:10.1007/s10958-023-06683-9
- [105] F. A. Berezin, *The Method of Secondary Quantization*, (in russian), Moscow, Nauka, (1965)
- [106] J. P. Bornsen, A. E. M. van de Ven, *Three-loop Yang–Mills β -function via the covariant background field method*, Nucl. Phys. B, **657**, 257–303 (2003)
- [107] A. N. Vasiliev, *Functional Methods in Quantum Field Theory and Statistical Physics*, CRC Press, 1–320 (1998)
- [108] D. J. Gross, F. Wilczek, *Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories*, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343–1346 (1973) doi:10.1103/PhysRevLett.30.1343
- [109] H. D. Politzer, *Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?*, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346–1349 (1973) doi:10.1103/PhysRevLett.30.1346
- [110] W. E. Caswell, *Asymptotic Behavior of Non-Abelian Gauge Theories to Two-Loop Order*, Phys. Rev. Lett., **33**, 244–246 (1974) doi:10.1103/PhysRevLett.33.244
- [111] D. R. T. Jones, *Two-loop diagrams in Yang–Mills theory*, Nuclear Physics B, **75**, 531–538 (1974) doi:10.1016/0550-3213(74)90093-5
- [112] L. F. Abbot, *The background field method beyond one loop*, Nucl. Phys. B, **185**, 189–203 (1981) doi:10.1016/0550-3213(81)90371-0
- [113] A. A. Bagaev, *Renormalization of the quantum equation of motion for Yang–Mills fields in the background formalism*, J Math Sci, **138**, 5631–5635 (2006) doi:10.1007/s10958-006-0331-3
- [114] M. Lüscher, *Dimensional regularisation in the presence of large background fields*, Annals of Physics **142**, 359–392 (1982) doi:10.1016/0003-4916(82)90076-8
- [115] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Special Functions for Heat Kernel Expansion*, Eur. Phys. J. Plus **137**, 1060 (2022), arXiv:2106.00294v2, 10.1140/epjp/s13360-022-03176-7

- [116] V. Fock, *Die Eigenzeit in der Klassischen- und in der Quanten- mechanik*, Sow. Phys., **12**, 404–425 (1937)
- [117] D. V. Vassilevich, *Heat kernel expansion: user's manual*, Phys. Rept. **388**, 279–360 (2003) doi:10.1016/j.physrep.2003.09.002
- [118] D. Fursaev, D. Vassilevich, *Operators, Geometry and Quanta: Methods of Spectral Geometry in Quantum Field Theory*, Springer, 1–304 (2011)
- [119] A. O. Barvinsky, A. E. Kalugin, W. Wachowski, *Functorial properties of Schwinger-DeWitt expansion and Mellin-Barnes representation*, Phys. Rev. D, **113**, 045005, (2026) doi:10.1103/1112-5cz3
- [120] S. W. Hawking, *Zeta function regularization of path integrals in curved spacetime* Commun. Math. Phys., **55**, 133–148 (1977) doi:10.1007/BF01626516
- [121] A. A. Slavnov, *Pauli–Villars regularization for non-Abelian gauge theories*, Theor Math Phys, **33**, 977–981 (1977) doi:10.1007/BF01036595
- [122] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Heat kernel: Proper-time method, Fock–Schwinger gauge, path integral, and Wilson line*, TMF, **205**:2, 242–261, (2020); Theoret. and Math. Phys., **205**:2, 1456–1472 (2020) <https://doi.org/10.1134/S0040577920110057>
- [123] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Ordered Exponential and Its Features in Yang–Mills Effective Action*, 2023 Commun. Theor. Phys. **75**, 085202, arXiv:2301.10514, 10.1088/1572-9494/acde4e