

ИНВАРИАНТНЫЕ РАССЛОЕНИЯ НА ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. Л. Смирнов

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН
наб. р. Фонтанки, д. 27,
Санкт-Петербург, 191023, Россия

e-mail: smirnov@pdmi.ras.ru

АННОТАЦИЯ

В работе построены G -структуры для стандартных векторных расслоений на проективизации свободного модуля V конечного ранга, где G – группа автоморфизмов V . Эти структуры позволяют явно вычислить действие G на когомологиях.

Ключевые слова: проективное пространство, векторное расслоение, автоморфизм, действие группы на категории, инвариантные объекты, когомологии.

ПРЕПРИНТЫ

Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В. М. Бабич, М. А. Всемиров, А. И. Генералов,
И. А. Ибрагимов, Л. Ю. Колотилина, Ю. В. Матиясевич,
Н. Ю. Нецветаев, С. И. Репин, Г. А. Серегин.

Введение

При изучении векторных расслоений на проективной прямой, определенной над кольцом целых чисел, и, в частности, при изучении взаимодействия таких расслоений с автоморфизмами проективной прямой выяснилось, что часть результатов становится яснее в более общем контексте. А именно, оказалось, что удобный и ясный язык для изучения такого взаимодействия связан с действиями групп на категориях и инвариантными объектами. Для фиксированной группы G будем говорить о G -категориях и G -объектах.

Хотя понятия, связанные с G -структурами, давно известны (см., например, [1]), но существуют разные версии и используется разная терминология. Поэтому данная работа начинается с соответствующих уточнений.

Нам интересна конкретная ситуация, где группа $G = \text{Aut}(V)$ естественно действует на категории квазикогерентных \mathcal{O} -модулей на проективизации V , а V – свободный \mathbb{Z} -модуль конечного ранга. Для предполагаемых применений нам необходим выбор конкретных G -структур на некоторых стандартных \mathcal{O} -модулях. Оказалось, однако, что известные автору источники не содержат описания такого выбора. В данной работе мы явно строим G -структуру на стандартных расслоениях.

1 G -структуры

Здесь приведены необходимые нам сведения о G -категориях и G -объектах.

1.1 Действие группы на категории

Пусть G – обычная группа. Например, интересен случай $G = \text{GL}_n(\mathbb{Z})$.

1.1.1 Определение. Говорим, что G действует на категории \mathcal{C} справа, если для каждого $g \in G$ задан функтор $g^* : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, задан изоморфизм функторов $e^* \rightarrow \text{Id}$ (e единица G), а для каждой пары $f, g \in G$ задан изоморфизм функторов $f^* \circ g^* \rightarrow (gf)^*$ (далее называем эти изоморфизмы каноническими). При этом для каждой тройки $f, g, h \in G$ должны быть коммутативны сформированные с помощью канонических изоморфизмов диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} f^* \circ g^* \circ h^* & \longrightarrow & (gf)^* \circ h^* , & f^* \circ e^* & \longrightarrow & (ef)^* , & e^* \circ g^* & \longrightarrow & (ge)^* . \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow = & \downarrow & & \downarrow = \\ f^* \circ (hg)^* & \longrightarrow & (hgf)^* & f^* \circ \text{Id} & \xrightarrow{=} & f^* & \text{Id} \circ g^* & \xrightarrow{=} & g^* \end{array}$$

Если задано действие G на \mathcal{C} , то говорим, что категория \mathcal{C} снабжена G -структурой или что \mathcal{C} является G -категорией.

1.1.2. Определение 1.1.1 прямолинейно обобщается и приводит к понятию действия группы на объекте произвольной 2-категории. При этом исходное понятие относится к объекту 2-категории всех категорий. Это соображение позволяет легко определить действия на категориях с дополнительной структурой. Для этого достаточно указать подходящую 2-катеорию. Например, можно рассмотреть 2-катеорию аддитивных категорий и аддитивных функторов. Еще один пример связан с 2-категорией тензорных категорий и тензорных функторов.

1.1.3. Нас особенно интересует пример, где G действует на схеме X , а \mathcal{C} – категория квазикогерентных \mathcal{O}_X -модулей. В этом случае G естественно действует справа на \mathcal{C} с помощью функторов обратного образа. Необходимые канонические изоморфизмы получаются с помощью сопряжения из соответствующих изоморфизмов для прямых образов [4, II, 3.5.3]. Канонические изоморфизмы для прямых образов совпадают с равенствами, если $(f_*E)(U) = E(f^{-1}(U))$.

1.1.4. Кроме того, нам потребуется понятие G -функтора между G -категориями. Это функтор $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, снабженный дополнительной структурой. А именно, для каждого $g \in G$ должен быть задан изоморфизм функторов $F \circ g^* \rightarrow g^* \circ F$ (далее называем его каноническим). При этом для каждой пары $g, h \in G$ должна быть коммутативная сформированная с помощью канонических изоморфизмов диаграмма

$$\begin{array}{ccc} g^* \circ F \circ h^* & \xleftarrow{\quad} & F \circ g^* \circ h^* \xrightarrow{\quad} F \circ (hg)^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ g^* \circ h^* \circ F & \xrightarrow{\quad} & (hg)^* \circ F \end{array}$$

1.1.5. Правое действие G на категории \mathcal{C} индуцирует правое действие G на множестве классов изоморфизма объектов \mathcal{C} . Мы будем применять это наблюдение в том случае, когда \mathcal{C} группоид. В этом случае множество классов изоморфизма объектов \mathcal{C} обозначается $\pi_0(\mathcal{C})$, а G действует с помощью отображений $\pi_0(g^*)$.

1.2 Инвариантные объекты

Для G -категории \mathcal{C} можно говорить о G -инвариантных объектах или, что то же самое, о G -объектах. Во избежание недоразумений отметим, что речь идет не о свойстве объекта, а о дополнительной структуре на нем.

1.2.1 Определение. Пусть E – объект G -категории \mathcal{C} . Будем говорить, что на E задана G -структура, если заданы изоморфизмы $\phi_g : g^*E \rightarrow E$, где g пробегает G . При этом должны быть коммутативными все диаграммы вида

$$\begin{array}{ccc} (gh)^*E & \xrightarrow{\phi_{gh}} & E \\ \simeq \downarrow & & \uparrow \phi_h \\ h^*(g^*E) & \xrightarrow{h^*(\phi_g)} & h^*E \end{array} \quad , \quad (1)$$

где слева используется канонический изоморфизм.

1.2.2. В примере 1.1.3 на расслоении \mathcal{O}_X имеется естественная G -структура. При этом канонический изоморфизм получается сопряжением из структурного морфизма $\mathcal{O}_X \rightarrow g_*\mathcal{O}_X$. Естественная G -структура имеется и на пучке кэлеровых дифференциалов Ω_X^1 (см. [2, II, Предл. 8.10]).

1.3 G -структуры и операции

Рассмотрим взаимодействие G -структуры со стандартными операциями.

1.3.1. Предположим, что на категории \mathcal{C} задана тензорная структура. В этой ситуации можно говорить о G -структуре на \mathcal{C} , как на тензорной категории (см. 1.1.2). Предположим, что такая структура задана. В примере 1.1.3 ситуация именно такова.

Если на M задана G -структура ψ , а на N задана G -структура ξ . Тогда $\psi_g \otimes \xi_g$ задает G -структуру на $M \otimes N$ с помощью композиции

$$g^*(M \otimes N) \longrightarrow g^*(M) \otimes g^*(N) \xrightarrow{\psi_g \otimes \xi_g} M \otimes N,$$

где левая стрелка – обращение канонического изоморфизма из структуры тензорного функтора.

1.3.2. Пусть \mathcal{C} – некоторая G -категория, а M и N – инвариантные объекты \mathcal{C} . Рассмотрим композицию

$$\text{Hom}(M, N) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}(g^*M, g^*N) \xrightarrow{\beta \mapsto \xi_g \beta \psi_g^{-1}} \text{Hom}(M, N),$$

где ψ и ξ – канонические изоморфизмы G -структур M и N . Несложно увидеть, что таким образом мы получили правое действие G на $\text{Hom}(M, N)$.

1.4 Классы расширений

Пусть \mathcal{A} – абелева G -категория, $M, N \in \mathcal{A}$. Рассмотрим категорию изоморфизмов расширений $\mathcal{EXT}(M, N)$. Ее объекты – точные последовательности вида

$$E(s, t) : 0 \rightarrow N \xrightarrow{s} E \xrightarrow{t} M \rightarrow 0.$$

1.4.1. Предположим, что M и N – инвариантные объекты. Тогда на категории $\mathcal{EXT}(M, N)$ можно ввести действие G . А именно, рассмотрим расширение

$$g^*E(s, t) : 0 \rightarrow N \xrightarrow{g^*s \circ \xi_g^{-1}} g^*E \xrightarrow{\psi_g \circ g^*t} M \rightarrow 0,$$

где ψ и ξ – канонические изоморфизмы G -структур M и N . Обозначение g^* использовано вместо уже занятого обозначения g^* . Канонический изоморфизм $f^* \circ g^* \rightarrow (gf)^*$ определен в середине расширения как канонический изоморфизм из определения действия G на \mathcal{C} . Надо проверить, что получен морфизм расширений. Это вытекает из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} N & \xrightarrow{\xi_f^{-1}} & f^*(N) & \xrightarrow{f^*(\xi_g^{-1})} & f^*(g^*N) & \xrightarrow{f^*(g^*s)} & f^*g^*(E) \\ \downarrow = & & & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ N & \xrightarrow{\xi_{gf}^{-1}} & (gf)^*N & \xrightarrow{(gf)^*s} & (gf)^*(E) & & \end{array}$$

Левая часть этой диаграммы коммутативна по свойствам G -объекта. Коммутативность правого квадрата вытекает из функториальности канонических изоморфизмов.

1.4.2. В условиях 1.4.1 категория $\mathcal{EXT}(M, N)$ по построению является группоидом и имеет каноническую биекцию

$$\text{ext} : \pi_0(\mathcal{EXT}(M, N)) \rightarrow \text{Ext}(M, N).$$

Таким образом, естественное действие G на $\pi_0(\mathcal{EXT}(M, N))$ (см. 1.1.5) индуцирует действие G на группе $\text{Ext}(M, N)$.

2 Инвариантные расслоения на $\mathbf{P}(V)$

Пусть V – свободный \mathbb{Z} -модуль конечного ранга, Рассмотрим проективизацию V , то есть схему

$$X = \text{Proj } S(V^*),$$

где $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{Z})$ – пространство линейных функций на V , а $S(V^*) = \bigoplus S^d(V^*)$ – симметрическая алгебра V^* или, иными словами, алгебра полиномов на V . Эта алгебра градуирована с помощью степени d .

Путь построения $\text{GL}(V)$ -структуры на $\mathcal{O}(-1)$ указан в [3, р. 31], где эта структура названа линиеризацией. Однако в этом источнике не удалось найти конструкции, достаточной для получения явных формул. Ниже $\text{GL}(V)$ -структура на $\mathcal{O}(-1)$ построена несколько иным способом.

Оказывается, что на расслоении $\mathcal{O}(-1)$ на $\mathbf{P}(V)$ не существует $\text{PGL}(V)$ -структуры (см. [3, р. 33]). Поэтому не стоит ожидать естественного действия группы автоморфизмов проективного пространства на $\text{Ext}(\mathcal{O}(m), \mathcal{O}(n))$.

2.1 Каноническая G -структура на $\mathcal{O}(n)$

Понятие G -структуры использует функторы обратного образа. Поэтому начнем с конструктивного их описания. Для этого описания важно, что мы имеем дело не с абстрактным проективным пространством, а с проективизацией пространства V . Далее по умолчанию

$$G = \text{GL}(V).$$

2.1.1. Морфизм градуированных колец $\alpha : T \rightarrow S$ определяет морфизм $G(\alpha) \rightarrow \text{Proj}(T)$, где $G(\alpha)$ – некоторая открытая подсхема $\text{Proj}(S)$ (см. [4, II, 2.8]). Нас интересуют только изоморфизмы α . В этом случае $G(\alpha) = \text{Proj}(S)$ и α определяет морфизм схем $a : \text{Proj}(S) \rightarrow \text{Proj}(T)$. Имеется, см. [4, II, Prop. 2.8,8, р. 44], канонический функториальный гомоморфизм

$$\nu : a^*(\widetilde{N}) \rightarrow \widetilde{S \otimes_T N}.$$

Если идеал положительных степеней T порожден элементами первой степени, а нас интересует этот случай, то ν – изоморфизм.

2.1.2. Как уже сказано выше, нас интересуют только обратимые α . В этом случае S -модуль $S \otimes_T M$ можно описать еще более явно, и это удобно для последующих вычислений. А именно, для T -модуля M определим S -модуль $M[\alpha]$. Как группа $M[\alpha]$ совпадает с M , а умножение на $s \in S$ задано формулой

$$s \star_\alpha m = \alpha^{-1}(s) \cdot m. \quad (2)$$

Соответствие $M \mapsto M[\alpha]$ дополним до функтора так, что для каждой T -стрелки $f : M \rightarrow N$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S_\alpha \otimes_S M & \xrightarrow{S_\alpha \otimes_S f} & S_\alpha \otimes_S N \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ M[\alpha] & \xrightarrow{f[\alpha]} & N[\alpha] \end{array} \quad (3)$$

Утверждается, что имеется функториальный изоморфизм

$$S_\alpha \otimes_S M \rightarrow M[\alpha], \quad s_\alpha \otimes_S m \mapsto \alpha^{-1}(s) \cdot m$$

и

$$f[\alpha] = f \tag{4}$$

при отождествлении множества $M[\alpha]$ с M и множества $N[\alpha]$ с N . Также несложно проверить, что

$$M[\beta\alpha] = (M[\alpha])[\beta].$$

для изоморфизмов $\alpha : T \rightarrow S$ и $\beta : S \rightarrow R$.

2.1.3. Перейдем к построению канонической G -структуры на расслоении $\mathcal{O}(n)$. Для целого числа n по определению $\mathcal{O}(n) = \widetilde{M}$, где $M = S(n)$. Определим φ_g как композицию

$$\varphi_g : g^*(\widetilde{M}) \xrightarrow{\nu} \widetilde{S_g \otimes_S M} \xrightarrow{\widetilde{\phi_g}} \widetilde{M},$$

где ν – стрелка из 2.1.1, а стрелка ϕ_g описана ниже в 2.1.4. При этом символ g у знака \otimes означает, что кольцо S , играющее роль сомножителя, рассматривается как алгебра над кольцом S , играющим роль скаляров, с помощью стрелки $s \mapsto s^g$.

2.1.4. Чтобы определить стрелку $\phi_g : S_g \otimes_S M \rightarrow M$, введем на группе $M = S(n)$ правое действие G по формуле

$$m^g = \sigma^{-1}(\sigma(m)^g),$$

где $\sigma : S(n) \rightarrow S$ – тавтологический изоморфизм степени $(-n)$. Получили скрученный S -модуль, то есть верно соотношение

$$(sm)^g = s^g m^g. \tag{5}$$

В терминах 2.1.2, где вычислена замена коэффициентов с помощью тензорного произведения, определим ϕ_g как стрелку $M[g] \rightarrow M$, соответствующую отображению

$$M \rightarrow M, \quad m \mapsto m^g. \tag{6}$$

Из (5) вытекает, что получили стрелку S -модулей, то есть $(s \star_g m)^g = s \cdot m^g$ или (см. (2)), иными словами, $(s^{1/g} m)^g = sm^g$.

2.1.5. Построение изоморфизма S -модулей $M[g] \rightarrow M$ в 2.1.4 – ключ к построению G -структуры. Поясним это, рассматривая следующую ситуацию. Пусть A – кольцо и G – группа автоморфизмов некоторой A -алгебры B . Для произвольного B -модуля M нет никаких оснований, вообще говоря, рассчитывать на существование естественного действия G на M . Однако, если M получен заменой коэффициентов из A -модуля, то очевидное действие G на M есть. У нас, неформально говоря, S -модуль $S(n)$ получен заменой коэффициентов в конструкции сдвига, определенной над \mathbb{Z} .

2.1.6 Предложение. Построенная система стрелок φ_g (см. 2.1.3) образует структуру G -объекта на $\mathcal{O}(n)$.

Доказательство. Пусть $g, h \in G$. Для проверки коммутативности диаграммы (1) из определения G -объекта достаточно проверить коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} S_{gh} \otimes_S M & \xrightarrow{\phi_{gh}} & M \\ \uparrow \simeq & & \uparrow \phi_h \\ S_h \otimes_S (S_g \otimes_S M) & \xrightarrow{S_h \otimes_S (\phi_g)} & S_h \otimes_S M \end{array} ,$$

где $M = S(n)$. В терминах 2.1.2, где вычислена замена коэффициентов с помощью тензорного произведения, и с учетом определения G -структуры в этих терминах (см. (6)) достаточно проверить коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} M[gh] & \xrightarrow{m \mapsto m^{gh}} & M \\ \uparrow = & & \uparrow m \mapsto m^h \\ (M[g])[h] & \xrightarrow{S_h \otimes_S (m \mapsto m^g)} & M[h] \end{array} .$$

Из отождествления $f[\alpha] = f$ (см. (4)) вытекает, что нижняя стрелка в этой диаграмме совпадает со стрелкой $m \mapsto m^g$. Поэтому коммутативность этой диаграммы вытекает из того, что операция $m \mapsto m^g$ представляет собой правое действие G на M (см. 2.1.4). \square

Отметим некоторые свойства канонических G -структур.

2.1.7 Предложение. *Канонический изоморфизм $\mathcal{O}(m) \otimes \mathcal{O}(n) \simeq \mathcal{O}(m+n)$ (см. [2, Prop. 5.12]) совместим с каноническими G -структурами. Точнее говоря, $\varphi_g(m) \otimes \varphi_g(n) = \varphi_g(m+n)$, где $\varphi(n)_g$ – каноническая структура G -объекта на $\mathcal{O}(n)$.*

Доказательство. Это тотчас вытекает из тензорности функтора $M \mapsto \widetilde{M}$ (см. [2, II, Предл. 5.2]). \square

Тавтологическое действие G на V индуцирует естественное правое действие G на V^* , переводящее линейный оператор t в t^g . А именно, для $g \in G$ по определению

$$t^g(v) = t(gv). \quad (7)$$

2.1.8 Предложение. *Канонический изоморфизм*

$$S^n(V^*) \rightarrow H^0(\mathbf{P}(V), \mathcal{O}(n)),$$

полученный применением функтора волны к стрелкам $S \rightarrow S(n)$, коммутирует с правым действием G . При этом действие G на $S^n(V^)$ описано в (7), а действие G на $H^0(\mathbf{P}(V), \mathcal{O}(n))$ происходит (см. 1.3.2) из канонической G -структуры на $\mathcal{O}(n)$.*

Доказательство. Проверим это утверждение. Пусть $g \in G$, m элемент $M = S(n)$ нулевой степени. Рассмотрим диаграмму S -модулей

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{m^g} & M \\ \uparrow s \mapsto s^g & & \uparrow m \mapsto m^g \\ S[g] & \xrightarrow{m[g]} & M[g] \end{array} ,$$

где градуированный S -модуль $M[g]$ определен в 2.1.2, а отображение $S \rightarrow M$, при котором стрелка $1 \mapsto m$ обозначается просто как m . Эта диаграмма коммутативна, так как $m[g] = m$ (см. (4)). Используя отождествление $M[g] \simeq S_g \otimes_S M$ из 2.1.2, получаем отсюда коммутативную диаграмму S -модулей

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{m^g} & M \\ \uparrow \phi_g(0) & & \uparrow \phi_g(n) \\ S_g \otimes_S S & \xrightarrow{S_g \otimes_S m} & S_g \otimes_S M \end{array} . \quad (8)$$

При этом использованы также определения стрелки ϕ_g из 2.1.4 и обозначение $\phi_g(n)$ вместо ϕ_g для указания подкрутки в модуле $S(n)$.

Применяя функтор волны к диаграмме (8), получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{S} & \xrightarrow{(\widetilde{m})^g} & \widetilde{M} \\ \simeq \uparrow & & \uparrow \varphi_g \\ g^* \widetilde{S} & \xrightarrow{g^* \widetilde{m}} & g^* \widetilde{M} \end{array} .$$

Здесь верхняя стрелка представляет собой действие g на $S^n(V^*)$, а другой путь из \widetilde{S} в \widetilde{M} представляет собой действие g на стрелке m , полученное с помощью канонической G -структуры. Таким образом, предложение доказано. \square

2.2 G -структуры и двойственность

Вычислим действие G на $H^1(\mathbf{P}(V), \omega(-n))$, где ω – пучок кэлеровых дифференциалов на $\mathbf{P}(V)$, а действие определено в 1.4.2. А именно, возьмем категорию квазикогерентных \mathcal{O} -модулей в качестве \mathcal{A} , положим $M = \mathcal{O}$, $N = \omega(-n)$ и воспользуемся каноническими G -структурами на $\mathcal{O}(n)$ и ω (см. 1.2.2). Достаточно рассмотреть случай $\mathrm{rk} V = 2$. Ниже именно это и предполагается.

2.2.1 Предложение. *Двойственность Серра $H^1(\mathbf{P}(V), \omega(-n)) \simeq H^0(\mathbf{P}(V), \mathcal{O}(n))^*$ является изоморфизмом G -модулей.*

Доказательство. В [5, 1.0] указан изоморфизм

$$\eta : \mathbb{Z} \rightarrow H^1(\mathbf{P}(V), \omega),$$

построенный как композиция отображения $\mathbb{Z} \rightarrow H^1(\mathbf{P}(V), \mathcal{O}^*)$, при котором $1 \mapsto [\mathcal{O}(1)]$, и отображения $d \log : H^1(\mathbf{P}(V), \mathcal{O}^*) \rightarrow H^1(\mathbf{P}(V), \omega)$. Так как имеется естественное спаривание

$$H^1(\mathbf{P}(V), \omega(-n)) \times H^0(\mathbf{P}(V), \mathcal{O}(n)) \rightarrow H^1(\mathbf{P}(V), \omega),$$

то предложение вытекает из инвариантности η при замене базы (см. [5, thm. 1.1]). \square

Отметим, что хотя расслоения ω и $\mathcal{O}(2)$ изоморфны, но между ними нет никакого естественного изоморфизма. Например, изоморфизм $\nu : \mathcal{O}(-2) \rightarrow \omega$, заданный в общей точке формулой $dx \mapsto t_0^{-2}$, ($x = t_1/t_0$), зависит от выбора базиса. В самом деле, при замене базиса (t_0, t_1) базисом $(t_0, -t_1)$ изоморфизм ν изменится. Более того, можно доказать, что верно следующее.

2.2.2 Теорема. *Действие G на $(H^1(\mathbf{P}(V), \mathcal{O}(-1-n)))^*$ отличается от действия на $H^0(\mathbf{P}(V), \mathcal{O}(n))$ подкруткой на χ^n , где $\chi : G = \mathrm{GL}(V) \rightarrow \mathbf{G}_m(\mathbb{Z})$ – детерминант.*

Список литературы

- [1] *N. Ganter, M. Kapranov.* Representaion and character theory in 2-categories. arXiv:math/0602510v4, 2007.
- [2] *Р. Хармсхорн.* Алгебраическая геометрия. Москва, Мир, 1981.
- [3] *D. Mumford, J. Fogarty.* Geometric Invariant Theory, Springer-Verlag, 1982.
- [4] *A. Grothendieck.* Éléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné), EGA II, Publ. Math. IHES, 8, 1961.
- [5] *P. Deligne.* Cohomologie des intersections complètes, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 340, 1973.