

# Оптимальные оценки устойчивости восстановления неориентируемой поверхности с краем по ее ДН-оператору

Д. В. Кори́ков

С.-ПЕТЕРБУРГСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ.  
В. А. СТЕКЛОВА РАН, ФОНТАНКА 27, 191023 САНКТ-ПЕТЕРБУРГ, РОССИЯ

`thecakeisalie@list.ru`

15 сентября 2025 г.

**Abstract.** Известно, что поверхность с краем определяется с точностью до конформной эквивалентности свои ДН-оператором. В работе доказываются локальные оценки расстояния Тейхмюллера между конформными классами гомеоморфных друг другу неориентируемых поверхностей  $(M, g)$  и  $(M', g')$  с фиксированным краем через норму разности их ДН-операторов. Эти оценки уточняют результаты предыдущих работ [4, 5] и являются оптимальными.

**Ключевые слова:** электроимпедансная томография поверхностей, ДН-операторы, устойчивость решений, расстояние Тейхмюллера, оценки устойчивости.

ПРЕПРИНТЫ  
Санкт-Петербургского отделения  
Математического института им. В. А. Стеклова  
Российской академии наук

PREPRINTS  
of the St. Petersburg Department  
of Steklov Institute of Mathematics

---

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В. М. Бабич,  
М. А. Всемиров,  
А. И. Генералов, И. А. Ибрагимов, Л. Ю. Колотилина,  
Ю. В. Матиясевич, Н. Ю. Нецветаев, С. И. Репин, Г. А. Серегин

**Введение.** Пусть  $(M, g)$  – поверхность (двумерное компактное гладкое риманово многообразие) с метрикой  $g$  и краем  $(\Gamma, dl)$ ; здесь и далее  $dl$  это элемент длины на  $\Gamma$ , индуцированный метрикой  $g$ . Для простоты далее будем считать, что край  $\Gamma$  диффеоморфен окружности. Обозначим через  $u^f$  гармоническое продолжение функции  $f \in C^\infty(\Gamma; \mathbb{R})$  внутрь  $(M, g)$ . Отображение  $\Lambda : f \mapsto \partial_\nu u^f|_\Gamma$ , где  $\nu$  – единичный вектор внешней нормали на  $\Gamma$ , называется ДН-оператором поверхности  $(M, g)$ . Известно (см. [1, 2]), что  $\Lambda$  определяет  $(M, g)$  с точностью до конформной эквивалентности: если  $(M', g')$  – другая поверхность с тем же краем  $(\Gamma; dl)$  и ДН-оператором  $\Lambda'$ , то  $\Lambda' = \Lambda$  если и только если существует конформный диффеоморфизм  $\beta$  из  $(M, g)$  на  $(M', g')$ , который не двигает точки общего края  $\Gamma$ . Классы поверхностей  $(M, g)$  относительно указанной эквивалентности будут обозначаться через  $[(M, g)]$ .

В работах [3, 4, 5] получен следующий результат об устойчивости определения поверхности по ее ДН-оператору. Далее будем считать, что рассматриваемые поверхности имеют один и тот же край  $(\Gamma, dl)$  и один и тот же топологический тип  $(\chi, o)$ , где  $\chi = \chi(M)$  – эйлерова характеристика  $M$  и  $o = +$  ( $o = -$ ) если  $M$  ориентируема (неориентируема). Пространство  $\mathcal{M}_{m,o}$  конформных классов таких поверхностей наделяется естественной метрикой *Тейхмюллера*  $d_T$ , которая определяется следующим образом. Пусть  $\beta : M \rightarrow M'$  – диффеоморфизм; число

$$K_\beta(x) := \sqrt{\max_{a \in T_x M} \frac{\beta^* g'(a, a)}{g(a, a)} \Big/ \min_{a \in T_x M} \frac{\beta^* g'(a, a)}{g(a, a)}}$$

называется дилатацией отображения  $\beta$  в точке  $x$ , а его максимум  $K_\beta := \max_{x \in M} K_\beta(x)$  – дилатацией  $\beta$ . Логарифм дилатации является естественной мерой отклонения отображения  $\beta$  от конформности; в частности,  $K_\beta \geq 1$  и  $K_\beta = 1$  если и только если  $\beta$  конформно. Величина  $d_T([(M, g)], [(M', g')])$  определяется как инфимум  $\frac{1}{2} \log K_\beta$  на множестве все конформных диффеоморфизмов  $\beta$ , которые не двигают точки общего края  $\Gamma$ . Отметим, что  $d_T([(M, g)], [(M', g')])$  не зависит от выбора представителей конформных классов  $[(M, g)]$  и  $[(M', g')]$  и действительно является метрикой на  $\mathcal{M}_{m,o}$ . В то же время множество  $\mathcal{D}_{m,o}$  всех ДН-операторов поверхностей с краем  $(\Gamma, dl)$  и топологического типа  $(m, o)$  наделяется метрикой  $d_{op}(\Lambda, \Lambda') = \|\Lambda' - \Lambda\|_{H^1(\Gamma; \mathbb{R}) \rightarrow L_2(\Gamma; \mathbb{R})}$ . Введем “решающее” отображение  $\mathcal{R} : \mathcal{D}_{m,o} \rightarrow \mathcal{M}_{m,o}$ , такое, что  $\mathcal{R}(\Lambda)$  является конформным классом  $[(M, g)]$  всех поверхностей  $(M, g)$  с ДН-оператором  $\Lambda$ . В [4, 5] доказано, что отображение  $\mathcal{R} : (\mathcal{D}_{m,o}, d_{op}) \rightarrow (\mathcal{M}_{m,o}, d_T)$  непрерывно. Иными словами, если поверхность  $(M', g')$  диффеоморфна  $(M, g)$ , имеет тот же край  $(\Gamma, dl)$  и ее ДН-оператор  $\Lambda'$  близок к ДН-оператору  $\Lambda$  поверхности  $(M, g)$  по операторной норме, то между  $(M, g)$  и  $(M', g')$  существует почти конформный (т.е. обладающий близкой к единице дилатацией) диффеоморфизм, недвигающий точки  $\Gamma$ . Более того, в [5] доказаны локальные *оценки устойчивости*:

$$\begin{aligned} c(\Lambda) d_{op}(\Lambda, \Lambda') &\leq d_T(\mathcal{R}(\Lambda), \mathcal{R}(\Lambda')) \leq C(\Lambda) d_{op}(\Lambda, \Lambda') \quad (o = +, \quad d_{op}(\Lambda, \Lambda') \in [0, t_0(\Lambda)]); \\ c(\Lambda) d_{op}(\Lambda, \Lambda') &\leq d_T(\mathcal{R}(\Lambda), \mathcal{R}(\Lambda')) \leq C(\Lambda) d_{op}(\Lambda, \Lambda')^{1/3} \quad (o = -, \quad d_{op}(\Lambda, \Lambda') \in [0, t_0(\Lambda)]), \end{aligned} \quad (1)$$

где положительные константы  $c, C, t_0$  зависят только от  $\Lambda$ . В ориентируемом случае оценка (1) является оптимальной, а отображение  $\mathcal{R}$  – поточечно билипшицевым.

**Результат.** В этой заметке мы выводим оптимальную оценку устойчивости

$$d_T(\mathcal{R}(\Lambda), \mathcal{R}(\Lambda')) \leq C(\Lambda) d_{op}(\Lambda, \Lambda') \quad (o = -, \quad d_{op}(\Lambda, \Lambda') \in [0, t_0(\Lambda)]) \quad (2)$$

в неориентируемом случае. С этой целью мы применяем аргументы из предыдущей статьи [5], которые сводят доказательство (2) к исследованию свойств определенных нелинейных уравнений, содержащих ДН-оператор  $\Lambda$ .

**Редукция доказательства оценки (2) с помощью метода [5].** Пусть  $(M, g)$  – фиксированная неориентируемая поверхность с краем  $(\Gamma, dl)$  и ДН-оператором  $\Lambda$ , а  $(M', g')$  – произвольная поверхность с тем же краем и того же топологического типа, что и  $(M, g)$ , а ее ДН-оператор  $\Lambda'$  удовлетворяет оценке  $\|\Lambda' - \Lambda\|_{H^1(\Gamma; \mathbb{R}) \rightarrow L_2(\Gamma; \mathbb{R})} \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – малый параметр. Пусть  $\pi : (\mathbf{M}, \mathbf{g}) \rightarrow (M, g)$  – двулистное неразветвленное локально изометрическое накрытие, где поверхность  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{M}'$  ориентируема и наделена инволюцией  $\tau$ , причем  $\pi \circ \tau = \pi$  (тогда  $\mathbf{M}$  называется двулистным ориентируемым накрытием  $M$ ). Граница  $\mathbf{\Gamma} = \partial \mathbf{M} \equiv \Gamma \times \{+, -\}$  представляет собой две копии края  $(\Gamma, dl)$ . Конформный класс метрики  $\mathbf{g}$  и ориентация определяют комплексную структуру (комплексный атлас) на  $\mathbf{M}$ . Обозначим через  $\mathcal{A}^\infty(\mathbf{M})$  алгебру (гладких вплоть до края) голоморфных функций на  $\mathbf{M}$ . Тогда (антиголоморфная) инволюция  $\tau$  на  $\mathbf{M}$  индуцирует инволюцию  $\dagger : w \mapsto w^\dagger := \overline{w \circ \tau}$  на алгебре  $\mathcal{A}^\infty(\mathbf{M})$ . Введем пространство  $\mathfrak{H}^\infty(\mathbf{M}) = \{\mathbf{w} \in \mathcal{A}^\infty(\mathbf{M}) \mid \overline{\mathbf{w} \circ \tau} = \mathbf{w}\}$  эрмитовых элементов в  $\mathcal{A}^\infty(\mathbf{M})$ , тогда  $\mathcal{A}^\infty(\mathbf{M}) = \mathfrak{H}^\infty(\mathbf{M}) + i\mathfrak{H}^\infty(\mathbf{M})$ . Обозначим (инъективный) оператор следа  $\mathbf{w} \mapsto \mathbf{w}|_\Gamma$  на  $\mathcal{A}^\infty(\mathbf{M})$  через  $\text{Tr}$ . Аналогичным образом вводится двулистное ориентируемое накрытие  $(\mathbf{M}', \mathbf{g}', \tau', \pi')$  поверхности  $(M', g')$ , алгебра  $\mathcal{A}^\infty(\mathbf{M}')$  голоморфных функций на нем, оператор следа  $\text{Tr}'$  и т.д.

Мы рассматриваем *голоморфные вложения*  $\mathcal{E} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$ ,  $\mathcal{E}' = (\mathbf{w}'_1, \dots, \mathbf{w}'_n)$  римановых поверхностей  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{M}'$  в  $\mathbb{C}^n$  (здесь функции  $\mathbf{w}_k$  и  $\mathbf{w}'_k$  голоморфны на  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{M}'$  соответственно). Поверхности  $\mathcal{E}(\mathbf{M})$  и  $\mathcal{E}'(\mathbf{M}')$  наделяются метриками, индуцируемыми объемлющим пространством  $\mathbb{C}^n$ ; при таком выборе метрик  $\mathcal{E}(\mathbf{M})$  и  $\mathcal{E}'(\mathbf{M}')$  конформно эквивалентны  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  и  $(\mathbf{M}', \mathbf{g}')$ , соответственно. Выбирая достаточно большую размерность  $n = n(M, g) = n(\Lambda)$ , можно подчинить вложение  $\mathcal{E}$  дополнительному условию *проективности*: для любой точки  $\xi_0 \in \mathcal{E}(M)$  существует такое  $\mathbb{C}$ -линейное отображение (“проекция”)  $P : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  и такая область  $\mathcal{D} \ni P(\xi_0)$ , что сужение  $P$  на  $\mathcal{E}(M) \cap P^{-1}(\mathcal{D})$  инъективно. Напомним, что *расстоянием Хаусдорфа*  $d_H(K, K')$  между двумя компактами  $K$  и  $K'$  в  $\mathbb{C}^n$  называется такое минимальное  $\epsilon \geq 0$ , что  $\epsilon$ -окрестность  $K$  содержит  $K'$  и  $\epsilon$ -окрестность  $K'$  содержит  $K$ .

Для доказательства (1) мы используем следующий результат работ [4, 5].

**Теорема 0.1** (см. [4, 5]). *Пусть  $\mathcal{E}$  – голоморфное проективное вложение римановой поверхности с гладким краем  $\mathbf{\Gamma}$  в  $\mathbb{C}^n$ . Тогда существуют такие достаточно малые положительные числа  $t_0 = t_0(\mathcal{E})$  и  $c = c(\mathcal{E})$ , что для любого голоморфного отображения  $\mathcal{E}'$  из римановой поверхности,  $\mathbf{M}'$  с тем же краем  $\mathbf{\Gamma}$  в  $\mathbb{C}^n$ , подчиненного оценке*

$$t(\mathcal{E}, \mathcal{E}') := \|\mathcal{E}'|_\Gamma - \mathcal{E}|_\Gamma\|_{C^7(\Gamma; \mathbb{C}^n)} < t_0, \quad (3)$$

*отображение  $\mathcal{E}'$  является проективным вложением, образы  $\mathcal{E}(\mathbf{M})$  и  $\mathcal{E}'(\mathbf{M}')$  близки по метрике Хаусдорфа  $d_H(\mathcal{E}(\mathbf{M}), \mathcal{E}'(\mathbf{M}')) \leq ct(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$  и существует диффеоморфизм  $\alpha : \mathcal{E}(\mathbf{M}) \rightarrow \mathcal{E}'(\mathbf{M}')$ , который является почти изометрией*

$$\max_{\xi \in \mathcal{E}(\mathbf{M})} \max_{a \in T_\xi \mathcal{E}(\mathbf{M})} \left| \frac{\|d\alpha[a]\|_{T_{\alpha(\xi)}(\mathbb{C}^n)}}{\|a\|_{T_\xi(\mathbb{C}^n)}} - 1 \right| \leq ct(\mathcal{E}, \mathcal{E}'),$$

*и удовлетворяет соотношению  $\alpha \circ \mathcal{E} = \mathcal{E}'$  на  $\mathbf{\Gamma}$ . Как следствие, отображение  $\beta := \mathcal{E}'^{-1} \circ \alpha \circ \mathcal{E} : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}'$  является почти конформным диффеоморфизмом  $|K_\beta - 1| \leq ct(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ , не двигающим точки общего края  $\mathbf{\Gamma}$  поверхностей  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{M}'$ ; в частности,  $d_T([\mathbf{M}], [\mathbf{M}']) \leq ct(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ .*

*Если при этом поверхности  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{M}'$  наделены антиголоморфными инволюциями  $\tau$  и  $\tau'$ ,  $\tau|_\Gamma = \tau'_\Gamma$ ,  $M = \mathbf{M}/\tau$ ,  $M' = \mathbf{M}'/\tau'$  – (ориентируемые и ли неориентируемые) поверхности с одним и тем же гладким краем  $\Gamma = \mathbf{\Gamma}/\tau \cong \mathbf{\Gamma}/\tau'$  и оба вложения симметричны относительно соответствующих инволюций  $\mathcal{E} \circ \tau = \overline{\mathcal{E}}$ ,  $\mathcal{E}' \circ \tau' = \overline{\mathcal{E}'}$  (где верхняя черта обозначает покомпонентное комплексное сопряжение), то  $\alpha(\xi) = \overline{\alpha(\xi)}$  при всех  $\xi \in \mathcal{E}(\mathbf{M})$  и, в частности,  $\beta$*

удовлетворяет соотношению  $\beta \circ \tau = \tau' \circ \beta$  и потому правило  $\beta \circ \pi = \pi' \circ \beta$  определяет почти конформный диффеоморфизм  $\beta : M \rightarrow M'$ ,  $|K_\beta - 1| \leq ct(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ ; в частности,

$$d_T([(M, g)], [(M', g')]) \leq ct(\mathcal{E}, \mathcal{E}'). \quad (4)$$

Таким образом, для вывода оценки (2) достаточно построить “почти тождественное” вещественно-линейное отображение  $\iota : \text{Tr } \mathfrak{H}^\infty(\mathbf{M}) \rightarrow \text{Tr}' \mathfrak{H}^\infty(\mathbf{M}')$ , удовлетворяющее оценкам

$$\|\iota \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}\|_{C^l(\Gamma; \mathbb{R})} \leq c(\Lambda, \boldsymbol{\eta}, l) \varepsilon \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \text{Tr } \mathfrak{H}^\infty(\mathbf{M}) \quad (5)$$

и определить (по любому фиксированному проективному вложению  $\mathcal{E} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$ ) индуцированное вложение  $\mathcal{E}' = (\mathbf{w}'_1, \dots, \mathbf{w}'_n)$  правилом

$$\mathbf{w}'_k|_\Gamma = \iota \mathbf{w}_k|_\Gamma.$$

Тогда величина  $t(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$  в (3) и (4) допускает оценку  $t(\mathcal{E}, \mathcal{E}') \leq C(\mathcal{E})\varepsilon$ .

Для построения отображения  $\iota$  мы используем характеризацию следов эрмитовых голоморфных функций на ориентируемом накрытии (неориентируемой) поверхности в терминах ее ДН-оператора, полученную в [7]. Обозначим через  $\partial_\gamma$  оператор дифференцирования по длине на  $\Gamma = \partial M$  и введем оператор интегрирования  $\partial_\gamma^{-1}$ , обращающий  $\partial_\gamma$  на пространстве  $\partial_\gamma C^\infty(\Gamma; \mathbb{R})$  и аннулирующий константы. Введем функцию  $\sigma$ , равную  $\pm 1$  на компоненте связности  $\Gamma \times \{\pm\}$  границы  $\mathbf{\Gamma} = \partial \mathbf{M}$ . Введем линейный оператор  $\mathfrak{D}$  и нелинейные отображения  $\mathfrak{N}$ ,  $\mathcal{G}$ , действующие на  $C^\infty(\Gamma; \mathbb{R})$  по следующим правилам

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}f &:= (\partial_\gamma + \Lambda \partial_\gamma^{-1} \Lambda) f, \\ \mathfrak{N}(f) &:= \frac{1}{2} \Lambda [f^2 - (\partial_\gamma^{-1} \Lambda f)^2] - f \Lambda f - (\partial_\gamma^{-1} \Lambda f) \partial_\gamma f, \\ \mathcal{G}(f) &:= \mathfrak{D}f \cdot \partial_\gamma \mathfrak{N}(f) - \mathfrak{N}(f) \partial_\gamma \mathfrak{D}f. \end{aligned} \quad (6)$$

**Лемма 0.2** (см. [6, 7]). Пусть  $f \in C^\infty(\Gamma; \mathbb{R})$  отлична от константы и  $\tilde{\Gamma}$  – сегмент кривой  $\Gamma$  сколь угодно малой длины. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. **Критерий ориентируемости** (см. Следствие 2.4, [6]):  $\mathfrak{D}f$  аннулируется на  $\tilde{\Gamma}$ , если и только если  $(M, g)$  ориентируема и  $f = \Re w|_\Gamma$ , где  $w$  голоморфна на  $M$  (относительно комплексной структуры, задаваемой конформным классом метрики  $g$  и выбором ориентации на  $M$ ).
2. **Характеризация следов голоморфных функций на накрытии** (см. Лемму 1, [7]):  $\mathcal{G}(f) = 0$  если и только если отношение  $\mathfrak{N}(f)/\mathfrak{D}f = c_f$  является константой и функция

$$\boldsymbol{\eta} := f \circ \pi + i\sigma((\partial_\gamma^{-1} \Lambda f) \circ \pi + c_f) \quad (7)$$

является следом на  $\mathbf{\Gamma}$  некоторой эрмитовой голоморфной функции  $\mathbf{w} \in \mathfrak{H}^\infty(\mathbf{M})$ .

То же самое верно для поверхностей  $(M', g')$ ,  $(\mathbf{M}', \mathbf{g}')$  и ассоциированных с ними отображений  $\mathfrak{D}'$ ,  $\mathfrak{N}'$ ,  $\mathcal{G}'$ ,  $f \mapsto c'_f = \mathfrak{N}'(f)/\mathfrak{D}'f$ . В частности,  $\mathcal{G}'(f') = 0$  если и только если

$$\boldsymbol{\eta}' := f' \circ \pi' + i\sigma((\partial_\gamma^{-1} \Lambda' f') \circ \pi' + c'_{f'}) \quad (8)$$

является следом на  $\mathbf{\Gamma}$  некоторой эрмитовой голоморфной функции  $\mathbf{w}' \in \mathfrak{H}^\infty(\mathbf{M}')$ .

Поскольку все ДН-операторы являются ПДО первого порядка (см. [8]) и на пространстве таких ПДО любые две нормы  $\|\cdot\|_{H^{l+1}(\Gamma; \mathbb{R}) \rightarrow H^l(\Gamma; \mathbb{R})}$  и  $\|\cdot\|_{H^{s+1}(\Gamma; \mathbb{R}) \rightarrow H^s(\Gamma; \mathbb{R})}$  ( $l, s = 0, 1, \dots$ ) эквивалентны, справедливы оценки

$$\|\Lambda - \Lambda'\|_{C^{l+2}(\Gamma; \mathbb{R}) \rightarrow C^l(\Gamma; \mathbb{R})} \leq c_l \varepsilon. \quad (9)$$

Ввиду последнего факта и формул (7) и (8) построение отображения  $\iota$ , удовлетворяющего (5), сводится к построению “почти тождественного” отображения  $\mathfrak{Y} : \mathcal{G}^{-1}(\{0\}) \rightarrow \mathcal{G}'^{-1}(\{0\})$ , то есть к доказательству устойчивости (нелинейного) уравнения  $\mathcal{G}(f) = 0$  к малым возмущениям  $\mathcal{G}'$  оператора  $\mathcal{G}$ .

Хотя отображение  $\mathcal{G}$  нелинейно, оно положительно однородно со степенью однородности 3, т.е.  $\mathcal{G}(cf) = c^3\mathcal{G}(f)$  при любых  $f \in C^\infty(\Gamma; \mathbb{R})$  и  $c > 0$ . Кроме того, множество  $\mathcal{G}^{-1}(\{0\})$  совпадает со множеством вещественных частей следов эрмитовых голоморфных функций  $\mathbf{w} \in \mathfrak{H}^\infty(\mathbf{M})$  на  $\Gamma \times \{+\} \cong \Gamma$  и потому является *линейным* пространством коразмерности  $-\chi(M)$ . (Те же самые факты верны для оператора  $\mathcal{G}'$ , ассоциированного с  $(M', g')$ .) В общем случае мы называем непрерывное положительно однородное отображение  $G : E \rightarrow F$  (где  $E$  и  $F$  – нормированные пространства)  $(\chi, \alpha)$ –*допустимым* если степень однородности  $G$  равна  $\alpha$  и  $G^{-1}(\{0\})$  является линейным подпространством коразмерности  $\chi$  в  $\mathcal{E}$ . Множество  $\mathfrak{Q}_{\chi, \alpha}(E; F)$  всех  $(\chi, \alpha)$ –допустимых отображений из  $E$  в  $F$  наделяется метрикой

$$\mathfrak{d}(\mathcal{G}', \mathcal{G}) = \sup_{\|f\|_E=1} \|\mathcal{G}'(f) - \mathcal{G}(f)\|_F.$$

Таким образом, введенные формулой (6) отображения  $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$  являются  $(\chi, \alpha)$ –допустимыми, где  $\chi = -\chi(M) = -\chi(M')$ ,  $\alpha = 3$ ,  $E = C^{l+4}(\Gamma; \mathbb{R})$ ,  $F = C^l(\Gamma; \mathbb{R})$ , а из оценок (9) следует, что

$$\mathfrak{d}(\mathcal{G}', \mathcal{G}) \leq c(E)\varepsilon. \quad (10)$$

Для построения отображения  $\mathfrak{Y}$  используется следующая лемма, доказанная в [5].

**Лемма 0.3.** Пусть  $\mathcal{G} \in \mathfrak{Q}_{\chi, \alpha}(E; F)$  и  $h_1, \dots, h_\alpha \in E$  линейно независимы по модулю  $\mathcal{G}^{-1}(\{0\})$ . Для каждого  $f \in \mathcal{G}^{-1}(\{0\})$  введем функцию

$$\mathfrak{e}_f(t) := \sup \left\{ |\vec{d}| \mid \vec{d} = (d_1, \dots, d_\chi)^T \in \mathbb{C}^\chi, \quad \left\| \mathcal{G} \left( f - \sum_{k=1}^\chi d_k h_k \right) \right\|_F \leq t \|f\|_E^\alpha \right\} \quad (11)$$

(тогда  $\lim_{t \rightarrow 0} \mathfrak{e}_f(t) = 0$  при каждом  $f \in E$ ).

Тогда существует такое достаточно малое  $\mathfrak{d}_0 > 0$ , что для каждого отображения  $\mathcal{G}' \in \mathfrak{Q}_{\chi, \alpha}(E; F)$ , подчиненного неравенству  $\mathfrak{d}(\mathcal{G}', \mathcal{G}) < \mathfrak{d}_0$ , элементы  $h_1, \dots, h_\alpha$  линейно независимы по модулю  $\mathcal{G}'^{-1}(\{0\})$  и прямое разложение

$$f = \sum_{k=1}^\chi d_k(f) h_k + \mathfrak{Y}f \quad (d_k(f) \in \mathbb{C}, \mathfrak{Y}f \in \mathcal{G}'^{-1}(\{0\}))$$

определяет отображение  $\mathfrak{Y} : \mathcal{G}^{-1}(\{0\}) \rightarrow \mathcal{G}'^{-1}(\{0\})$ , которое при каждом  $f \in \mathcal{G}^{-1}(\{0\})$  подчинено оценке

$$\|\mathfrak{Y}f - f\|_E \leq c\mathfrak{e}_f(\mathfrak{d}(\mathcal{G}', \mathcal{G})), \quad (12)$$

где  $c$  не зависит от  $f$  и  $\mathcal{G}'$ .

Итак, Лемма 0.3 доставляет отображение  $\mathfrak{Y} : \mathcal{G}^{-1}(\{0\}) \rightarrow \mathcal{G}'^{-1}(\{0\})$ , удовлетворяющее оценкам (12). Определим отображение  $\iota : \text{Tr } \mathfrak{H}^\infty(\mathbf{M}) \rightarrow \text{Tr } \mathfrak{H}^\infty(\mathbf{M}')$  правилом  $\iota\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}'$ , где  $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}'$  заданы формулами (7), (8) и  $f$  и  $f'$  связаны равенством  $f' = \mathfrak{Y}f$ . Тогда из оценок (12), (10) и (9) следует, что

$$\|\iota\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}\|_{C^l(\Gamma; \mathbb{R})} \leq c_l[\mathfrak{e}_f(C\varepsilon) + \varepsilon], \quad (13)$$

где  $f \circ \pi = \Re \boldsymbol{\eta}$  и  $c_l, C$  не зависят от  $\mathcal{G}'$  и  $\boldsymbol{\eta}$ . Таким образом, для того, чтобы доказать неравенства (5) и, тем самым, оценку (2), достаточно доказать, что при всех  $f \in \mathcal{G}^{-1}(\{0\})$  функция  $\mathfrak{e}_f$  удовлетворяет оценке

$$\mathfrak{e}_f(s) = O(s) \quad (s \rightarrow 0). \quad (14)$$

Отметим, что в [5] доказаны более грубые оценки  $\mathfrak{e}_f(s) = O(s^{1/3})$ , подстановка которых в (13), (3) и (4) дает оценку  $t(\mathcal{E}, \mathcal{E}') = O(\varepsilon^{1/3})$  и второе неравенство в (1).

**Доказательство оценок (14).** Вторую формулу в (6) можно переписать в виде  $\mathfrak{N}(f) = \mathcal{Q}(f, f)/2$ , где  $\mathcal{Q}$  – билинейное отображение, заданное правилом

$$\mathcal{Q}(f, h) := \Lambda[f \cdot h - (\partial_\gamma^{-1} \Lambda f) \cdot (\partial_\gamma^{-1} \Lambda h)] - f \cdot \Lambda h - h \cdot \Lambda f - (\partial_\gamma^{-1} \Lambda f) \cdot \partial_\gamma h - (\partial_\gamma^{-1} \Lambda h) \cdot \partial_\gamma f. \quad (15)$$

Тогда

$$\mathfrak{N}(f + h) = \mathfrak{N}(f) + \mathcal{Q}(f, h) + \mathfrak{N}(h).$$

Отсюда и из (6) вытекает разложение

$$\mathcal{G}(f + h) = \sum_{k=0}^3 \mathcal{G}_{f,(k)}(h)$$

для оператора  $\mathcal{G}$ . Здесь  $\mathcal{G}_{f,(0)}(h) := \mathcal{G}(f)$ ,  $\mathcal{G}_{f,(3)}(h) := \mathcal{G}(h)$  и

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{f,(1)}(h) &:= \partial_\gamma \mathfrak{N}(f) \cdot \mathfrak{D}h - \mathfrak{N}(f) \cdot \partial_\gamma \mathfrak{D}h + (\mathfrak{D}f) \cdot \partial_\gamma \mathcal{Q}(f, h) - (\partial_\gamma \mathfrak{D}f) \cdot \mathcal{Q}(f, h), \\ \mathcal{G}_{f,(2)}(h) &:= (\mathfrak{D}f) \cdot \partial_\gamma \mathfrak{N}(h) - (\partial_\gamma \mathfrak{D}f) \cdot \mathfrak{N}(h) + \partial_\gamma \mathcal{Q}(f, h) \cdot \mathfrak{D}h - \mathcal{Q}(f, h) \cdot \partial_\gamma \mathfrak{D}h. \end{aligned} \quad (16)$$

Каждый член  $\mathcal{G}_{f,(k)} : E \rightarrow F$  является непрерывным положительно однородным отображением со степенью однородности  $k$ , то есть  $\mathcal{G}_{f,(k)}(sh) = s^k \mathcal{G}_{f,(k)}(h)$  для всех  $s > 0$  и  $f \in C^\infty(\Gamma; \mathbb{R})$ . Более того,  $\mathcal{G}_{f,(1)}$  является линейным оператором.

Следующее утверждение является ключевым для доказательства оценок (14) и (2).

**Лемма 0.4.** При каждом  $f \in \mathcal{G}^{-1}(\{0\}) \setminus \{0\}$  для линейного оператора (16) справедливо равенство

$$\text{Ker} \mathcal{G}_{f,(1)} = \mathcal{G}^{-1}(\{0\}). \quad (17)$$

*Доказательство.* Пусть  $f \neq \text{const}$  (случай  $f = \text{const}$  тривиален). Ввиду неориентированности  $M$  и утверждения 1. Леммы 0.2 функция  $\mathfrak{D}f$  не может аннулироваться ни на каком сегменте  $\Gamma$ . Теперь из определения (6) оператора  $\mathcal{G}$  следует, что уравнение  $\mathcal{G}(f) = 0$  эквивалентно условию  $\mathfrak{N}(f) = c_f \mathfrak{D}f$ , где  $c_f \in \mathbb{R}$ . С учетом этого условия формула (16) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{f,(1)}(h) &:= c_f [\partial_\gamma \mathfrak{D}f \cdot \mathfrak{D}h - \mathfrak{D}f \cdot \partial_\gamma \mathfrak{D}h] + (\mathfrak{D}f) \cdot \partial_\gamma \mathcal{Q}(f, h) - (\partial_\gamma \mathfrak{D}f) \cdot \mathcal{Q}(f, h) = \\ &= (\mathfrak{D}f)^{-2} \partial_\gamma \left( \frac{\mathcal{Q}(f, h) - c_f \cdot \mathfrak{D}h}{\mathfrak{D}f} \right). \end{aligned}$$

Поэтому  $\mathcal{G}_{f,(1)}(h) = 0$  если и только если

$$\mathcal{Q}(f, h) = c_f \cdot \mathfrak{D}h + \tilde{c}_{f,h} \mathfrak{D}f \quad (18)$$

при некоторых  $c_f, \tilde{c}_{f,h} \in \mathbb{R}$ .

Введем функции

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= f \circ \pi, \quad \mathbf{p} = \sigma((\partial_\gamma^{-1} \Lambda f) \circ \pi + c_f), \\ \mathbf{h} &= h \circ \pi, \quad \mathbf{q} = \sigma((\partial_\gamma^{-1} \Lambda h) \circ \pi + \tilde{c}_{f,h}) \end{aligned} \quad (19)$$

и обозначим через  $\mathbf{u}^{\mathbf{f}}$  гармоническое продолжение  $\mathbf{f}$  внутрь накрытия  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$ . Из условия  $\mathcal{G}(f) = 0$  и утверждения 2. Леммы 0.2 следует, что функция  $\mathbf{w} := \mathbf{u}^{\mathbf{f}} + i\mathbf{u}^{\mathbf{p}}$  голоморфна на накрытии  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$ . Условие Коши–Римана для  $\mathbf{w}$  можно представить в виде

$$\Phi \nabla \mathbf{u}^{\mathbf{f}} = \nabla \mathbf{u}^{\mathbf{p}}, \quad (20)$$

где  $\Phi : T\mathbf{M} \rightarrow T\mathbf{M}$  – непрерывное семейство поворотов на прямой угол в касательном расслоении  $T\mathbf{M}$ ,

$$\mathbf{g}(\Phi a, \Phi b) = \mathbf{g}(a, b), \quad \mathbf{g}(\Phi a, b) = -\mathbf{g}(a, \Phi b), \quad \Phi^2 a = -a \quad (a, b \in T_{\mathbf{x}}\mathbf{M}, \mathbf{x} \in \mathbf{M}),$$

(иногда называемое *почти комплексной структурой*, см. [9]).

Пусть  $\nu$  – единичный вектор внешней нормали на  $\Gamma$  и  $\Lambda : \mathbf{f} \mapsto \mathbf{u}^{\mathbf{f}}|_{\Gamma}$  – ДН-оператор поверхности  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$ . Ввиду локальной изометричности накрытия  $\pi : (\mathbf{M}, \mathbf{g}) \rightarrow (M, g)$  справедливы соотношения

$$\mathbf{u}^{f \circ \pi} = \mathbf{u}^f \circ \pi, \quad d\pi[\nu] = \nu, \quad \Lambda(h \circ \pi) = (\Lambda h) \circ \pi. \quad (21)$$

Введем единичный касательный вектор  $\gamma := \Phi\nu$ ; тогда  $\gamma = d\pi[\sigma\gamma]$  – единичный касательный вектор на  $\Gamma$ .

Сукая уравнение (20) на  $\Gamma$  и учитывая (21), получаем

$$\partial_{\gamma}\mathbf{p} = \Lambda\mathbf{f} = (\Lambda f) \circ \pi, \quad \Lambda\mathbf{p} = -\partial_{\gamma}\mathbf{f} = -\sigma \cdot (\partial_{\gamma}f) \circ \pi, \quad (22)$$

где  $\Lambda$  – ДН-оператор поверхности  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  (напомним, что  $\Lambda(h \circ \pi) = (\Lambda h) \circ \pi$ ).

Пусть  $U$  – односвязная область в  $\mathbf{M}$ , содержащая сегмент  $\tilde{\Gamma}$  кривой  $\Gamma$ . Поскольку функция  $\mathbf{u}^{\mathbf{h}}$  гармонична на  $U$ , из леммы Пуанкаре вытекает существование такой (определенной с точностью до аддитивной константы) функции  $\mathbf{v}_U$  на  $U$ , что функция  $\tilde{\mathbf{w}}_U := \mathbf{u}^{\mathbf{h}} + i\mathbf{v}_U$  голоморфна на  $U$ . Сукая уравнение Коши-Римана  $\Phi\nabla\mathbf{u}^{\mathbf{h}} = \nabla\mathbf{v}_U$  для  $\tilde{\mathbf{w}}_U$  на сегмент  $\tilde{\Gamma}$  и учитывая соотношение  $d\pi[\sigma\gamma] = \gamma$ , получаем

$$\partial_{\gamma}\mathbf{v}_U = \partial_{\nu}\mathbf{u}^{\mathbf{h}} = \Lambda\mathbf{h} = (\Lambda h) \circ \pi, \quad \partial_{\nu}\mathbf{v}_U = -\partial_{\gamma}\mathbf{h} = -\sigma \cdot (\partial_{\gamma}h) \circ \pi. \quad (23)$$

Сравнивая (23) с (19), получаем  $\partial_{\gamma}\mathbf{v}_U = \partial_{\gamma}\mathbf{q}$ . Таким образом, функцию  $\mathbf{v}_U$  можно выбрать так, чтобы на  $\tilde{\Gamma}$  выполнялось равенство  $\mathbf{v}_U = \mathbf{q}$ .

Поскольку  $\mathbf{w}$  и  $\tilde{\mathbf{w}}$  голоморфны на  $U$ , функция

$$\operatorname{Re}(\mathbf{w}\tilde{\mathbf{w}}_U) = \mathbf{u}^{\mathbf{f}}\mathbf{u}^{\mathbf{h}} - \mathbf{u}^{\mathbf{p}}\mathbf{v}_U$$

гармонична на  $U$ , причем на  $\tilde{\Gamma}$  выполнены равенства

$$\operatorname{Re}(\mathbf{w}\tilde{\mathbf{w}}_U) = \mathbf{f}\mathbf{h} - \mathbf{p}\mathbf{q} = \left[ fh - (\partial_{\gamma}^{-1}\Lambda f + c_f) \cdot (\partial_{\gamma}^{-1}\Lambda h + \tilde{c}_{f,h}) \right] \circ \pi =: \mathbf{Y}$$

и (ввиду (22) и (23))

$$\begin{aligned} \partial_{\nu}\operatorname{Re}(\mathbf{w}\tilde{\mathbf{w}}_U) &= \mathbf{h} \cdot \Lambda\mathbf{f} + \mathbf{f} \cdot \Lambda\mathbf{h} - \mathbf{q} \cdot \Lambda\mathbf{p} - \mathbf{p}\partial_{\nu}\mathbf{v}_U \\ &= \mathbf{h} \cdot \Lambda\mathbf{f} + \mathbf{f} \cdot \Lambda\mathbf{h} + \mathbf{q}\partial_{\gamma}\mathbf{f} + \mathbf{p}\partial_{\gamma}\mathbf{h} \\ &= \left[ h\Lambda f + f\Lambda h + (\partial_{\gamma}^{-1}\Lambda h + \tilde{c}_{f,h})\partial_{\gamma}f + (\partial_{\gamma}^{-1}\Lambda f + c_f)\partial_{\gamma}h \right] \circ \pi. \end{aligned}$$

Из последних двух формул и определений (15), (6) формы  $\mathcal{Q}$  и оператора  $\mathfrak{D}$  имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(f, h) \circ \pi &:= \left[ \Lambda[ fh - (\partial_{\gamma}^{-1}\Lambda f)(\partial_{\gamma}^{-1}\Lambda h) ] \right] \circ \pi \\ &\quad - [ f\Lambda h - h\Lambda f - (\partial_{\gamma}^{-1}\Lambda f)\partial_{\gamma}h - (\partial_{\gamma}^{-1}\Lambda h)\partial_{\gamma}f ] \circ \pi \\ &= \Lambda\mathbf{Y} + \left[ \tilde{c}_{f,h}\Lambda\partial_{\gamma}^{-1}\Lambda f + c_f\Lambda\partial_{\gamma}^{-1}\Lambda h \right] \circ \pi \\ &\quad - \partial_{\nu}\operatorname{Re}(\mathbf{w}\tilde{\mathbf{w}}_U) + [\tilde{c}_{f,h}\partial_{\gamma}f + c_f\partial_{\gamma}h] \circ \pi \\ &= \partial_{\nu}[\mathbf{u}^{\mathbf{Y}} - \operatorname{Re}(\mathbf{w}\tilde{\mathbf{w}}_U)] + [\tilde{c}_{f,h}\mathfrak{D}f + c_f\mathfrak{D}h] \circ \pi. \end{aligned}$$



Таким образом, уравнение (18) эквивалентно выполнению равенства

$$\partial_\nu [\mathbf{u}^Y - \operatorname{Re}(\mathbf{w}\tilde{\mathbf{w}}_U)] = 0 \text{ на } \tilde{\Gamma} \quad (24)$$

при любых  $U$  и  $\tilde{\Gamma}$ . Поскольку функции  $\mathbf{u}^Y$  и  $\operatorname{Re}(\mathbf{w}\tilde{\mathbf{w}}_U)$  гармонические на  $U$ , из (24), из (24) и теоремы о единственности решений задачи Коши для эллиптических уравнений следует, что

$$\mathbf{u}^Y = \operatorname{Re}(\mathbf{w}\tilde{\mathbf{w}}_U) \text{ на } U.$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$\mathbf{v}_U = \frac{\mathbf{u}^f \mathbf{u}^h - \mathbf{u}^Y}{\mathbf{u}^p},$$

причем здесь правая часть определена глобально на  $\mathbf{M}$ , а левая часть гладкая и гармоническая на любой окрестности  $U$  и удовлетворяет условию Коши-Римана  $\Phi \nabla \mathbf{u}^h = \nabla \mathbf{v}_U$  на  $U$ . Таким образом, функция

$$\tilde{\mathbf{w}} := \mathbf{u}^h + i \frac{\mathbf{u}^f \mathbf{u}^h - \mathbf{u}^Y}{\mathbf{u}^p}.$$

(глобально) голоморфна на  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$ , причем  $\overline{\tilde{\mathbf{w}} \circ \tau} = \tilde{\mathbf{w}}$  и

$$\tilde{\mathbf{w}}|_{\Gamma} = \mathbf{h} + i \frac{\mathbf{f}\mathbf{h} - \mathbf{Y}}{\mathbf{p}} = \mathbf{h} + i\mathbf{q} = h \circ \pi + i\sigma((\partial_\gamma^{-1} \Lambda h) \circ \pi + \tilde{c}_{f,h}).$$

Отсюда и из утверждения 2. Леммы 0.2 следует, что  $\mathcal{G}(h) = 0$ . Тем самым доказано включение  $\operatorname{Ker} \mathcal{G}_{f,(1)} \subset \mathcal{G}^{-1}(\{0\})$ .

Теперь пусть  $h \in \mathcal{G}^{-1}(\{0\})$ ; тогда из утверждения 2. Леммы 0.2 следует, что функция  $\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{u}^h + \mathbf{u}^q$  голоморфна, где  $\mathbf{h}$  и  $\mathbf{q}$  заданы формулой (19) и  $\tilde{c}_{f,h}$  – некоторая константа. Тогда функция  $\operatorname{Re}(\dot{\mathbf{w}}\mathbf{w})$  гармонична на  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  и  $\operatorname{Re}(\dot{\mathbf{w}}\mathbf{w}) = \mathbf{Y}$  на  $\tilde{\Gamma}$ , откуда следует  $\mathbf{u}^Y = \operatorname{Re}(\dot{\mathbf{w}}\mathbf{w})$  и равенство (24) на  $\Gamma$ . Поскольку последнее равенство эквивалентно уравнениям (18) и  $\mathcal{G}_{f,(1)}(h) = 0$ , доказано включение  $\operatorname{Ker} \mathcal{G}_{f,(1)} \supset \mathcal{G}^{-1}(\{0\})$ .  $\square$

Пусть функция  $f \in \mathcal{G}^{-1}(\{0\})$  непостоянна. Поскольку функции  $h_1, \dots, h_\chi$  из Леммы 0.3 линейно независимы по модулю  $\mathcal{G}^{-1}(\{0\})$ , из формулы (17) и компактности единичной сферы  $S^{\chi-1}$  в  $\mathbb{C}^\chi$  следует, что

$$\inf_{\vec{e} \in S^{\chi-1}} \left\| \mathcal{G}_{f,(1)} \left( \sum_{k=1}^{\chi} e_k h_k \right) \right\| \geq C(\mathcal{G}, f) > 0. \quad (25)$$

Из (25) и непрерывности и однородности (степени  $k$ ) каждого отображения  $\mathcal{G}_{f,(k)}$  следует, что

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{G} \left( f - \sum_{k=1}^{\chi} d_k h_k \right) \right\|_F &= \left\| \sum_{n=1}^3 \mathcal{G}_{f,(n)} \left( - \sum_{k=1}^{\chi} d_k h_k \right) \right\|_F = \left\| \sum_{n=1}^3 |\vec{d}|^n \mathcal{G}_{f,(n)} \left( - \sum_{k=1}^{\chi} \frac{d_k}{|\vec{d}|} h_k \right) \right\|_F \\ &\geq |\vec{d}| \left\| \mathcal{G}_{f,(1)} \left( - \sum_{k=1}^{\chi} \frac{d_k}{|\vec{d}|} h_k \right) \right\|_F - \sum_{n=2,3} |\vec{d}|^n \left\| \mathcal{G}_{f,(n)} \left( - \sum_{k=1}^{\chi} \frac{d_k}{|\vec{d}|} h_k \right) \right\|_F \\ &\geq C(\mathcal{G}, f) |\vec{d}| - c(\mathcal{G}, f) |\vec{d}|^2 \geq C(\mathcal{G}, f) |\vec{d}|/2 \end{aligned}$$

при достаточно малых  $\vec{d} \in \mathbb{C}^\chi$ . Отсюда и из определения (11) функции  $\mathfrak{e}_f$  немедленно следует оценка (14).

Наконец, подстановка (14) в формулы (13), (3) и (4) дает оценку  $t(\mathcal{E}, \mathcal{E}') = O(\varepsilon)$  и неравенство (2). Таким образом, мы приходим к следующему утверждению.

**Следствие 0.5.** *При всех  $m = 0, 1, \dots$  и  $o = \pm$  решающее отображение  $\mathcal{R} : (\mathcal{D}_{m,o}, d_{op}) \rightarrow (\mathcal{M}_{m,o}, d_T)$  поточечно билипшицево.*

**Оценки устойчивости определения поверхности с краем по ДН-оператору, заданному на части границы.** Пусть  $(M, g)$  – (ориентируемая или неориентируемая) поверхность с краем и  $(\Gamma, dl)$  – компонента связности  $\partial M$  ( $dl$  – элемент длины, индуцированный метрикой  $g$  на  $\Gamma$ ). Введем оператор Лапласа-Бельтрами  $\Delta_g$  на  $(M, g)$  и обозначим через  $u^f$  решение задачи

$$\Delta_g u^f = 0 \text{ в } M \setminus \partial M, \quad u^f = f \text{ на } \Gamma, \quad \partial_\nu u^f = 0 \text{ на } \partial M \setminus \Gamma,$$

где  $\nu$  – единичный вектор внешней нормали на  $\partial M$ . Определим (частичный) ДН-оператор поверхности  $(M, g)$  правилом  $\Lambda f = \partial_\nu u^f|_\Gamma$ . Мы пишем  $[(M, g)] = [(M', g')]$  если  $(\Gamma, dl)$  является общей частью краев  $\partial M$  и  $\partial M'$  и между  $(M, g)$  и  $(M', g')$  существует конформный диффеоморфизм, не двигающий точки  $\Gamma$ ; тогда  $[(M, g)] = [(M', g')]$  если и только если их ДН-операторы совпадают. Как и раньше, пространство  $\mathcal{M}$  конформных классов  $[(M, g)]$  поверхностей  $(M, g)$  фиксированного топологического типа наделяется метрикой Тейхмюллера  $d_T([(M, g)], [(M', g')]) = \inf \frac{1}{2} \log K_\beta$  (где инфимум берется по всем диффеоморфизмам между  $M$  и  $M'$ , не двигающим точки  $\Gamma$ ), а пространство  $\mathcal{D}$  соответствующих им ДН-операторов – метрикой  $d_{op}$ .

Вне зависимости от ориентируемости поверхности  $M$  для нее определено двулистное (разветвленное) накрытие  $(\mathbf{M}, g, \bar{\tau})$ , такое, что  $(\mathbf{M}, g)/\bar{\tau} = (M, g)$  (если  $M$  ориентируема, то  $\mathbf{M}$  получается склеиванием двух копий  $M$  вдоль  $M \setminus \Gamma$ , если же  $M$  неориентируема, то  $\mathbf{M}$  получается из двулистного ориентируемого накрытия  $(\mathbf{M}, g, \tau, \pi)$  поверхности  $M$  отождествлением таких точек  $\mathbf{x}$  и  $\tau(\mathbf{x})$ , что  $\pi(\mathbf{x}) \in M \setminus \Gamma$ ). Для таких накрытий по-прежнему верна Теорема 0.1, а характеристика граничных следов голоморфных функций  $w$ , симметричных относительно инволюции  $(\overline{w} \circ \bar{\tau} = w)$  – такая же, как в утверждении 2. Леммы 0.2 (этот факт доказан в Лемме 2, [10]). Поэтому повторение рассуждений выше приводит к следующему утверждению.

**Предложение 0.6.** *Решающее отображение  $\mathcal{R} : (\mathcal{D}, d_{op}) \rightarrow (\mathcal{M}, d_T)$  поточечно билипшицево.*

## Список литературы

- [1] *M. Lassas, G. Uhlmann.* On determining a Riemannian manifold from the Dirichlet-to-Neumann map. // The Annales scientifiques de l'École normale supérieure, 2001. – V. 34, – no 5. – P. 771–787.
- [2] *M. I. Belishev.* The Calderon problem for two-dimensional manifolds by the BC-method. // SIAM Journal of Mathematical Analysis, 2003. – V. 35, – no 1. – P. 172–182.
- [3] *M. I. Belishev, D. V. Korikov.* Stability of determination of Riemann surface from its DN-map. // Journal of Inverse and Ill-posed Problems, 2023. – V. 31, – no 2. – P. 159–176.
- [4] *M. I. Belishev, D. V. Korikov.* Stability of Determination of Riemann Surface from its Dirichlet-to-Neumann Map in Terms of Teichmüller Distance. // SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2023. – V. 55, – no 6. – P. 7426–7448.
- [5] *D. V. Korikov.* Stability Estimates in Determination of Non-orientable Surface from Its Dirichlet-to-Neumann Map. // Complex Analysis and Operator Theory, 2024. – V. 18, – no 29.
- [6] *M. I. Belishev, D. V. Korikov.* On the EIT problem for nonorientable surfaces. // Journal of Inverse and Ill-posed Problems, 2020. – V. 18.

- [7] *M. I. Belishev, D. V. Korikov.* On determination of nonorientable surface via its Diriclet-to-Neumann operator. // SIAM Journal of Mathematical Analysis, 2021. – V. 53,– no 5. – P. 5278–5287.
- [8] *J. M. Lee, G. Uhlmann.* Determining anisotropic realanalytic conductivities by boundary measurements. // Communications on Pure and Applied Mathematics, 1989. – V. 42. – P. 1097–1112.
- [9] *Е. М. Чурка.* Римановы поверхности. Лекционные курсы НОЦ, М., вып.1, 2006.
- [10] *A. V. Badanin, M. I. Belishev, D. V. Korikov.* Electric impedance tomography problem for surfaces with internal holes. // Inverse Problems, 2021. – V. 37,– no 10.