

## Суммирование степенных сингулярностей

**А. В. Иванов**

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А.Стеклова РАН,  
Фонтанка 27, Санкт-Петербург, 191023, Россия

E-mail: regul1@mail.ru

21 августа 2025 г.

**Аннотация.** В данной работе рассматривается пример суммирования нелогарифмических сингулярностей фиксированного вида в двумерной нелинейной сигма-модели. В результате исследования получена явная формула, которая при формальном разложении по константе связи воспроизводит специальную часть квантового действия. Также в работе дано определение новой вспомогательной функции и описаны некоторые ее свойства.

**Ключевые слова и фразы:** степенная сингулярность, регуляризация обрезанием, ренормировка, деформация, функция Грина, усреднение, нелинейная сигма-модель, квантовое действие, расходимость, главное киральное поле.

## **ПРЕПРИНТЫ**

Санкт-Петербургского отделения  
Математического института им. В. А. Стеклова  
Российской академии наук

## **PREPRINTS**

of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

---

## **ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР**

С. В. Кисляков

## **РЕДКОЛЛЕГИЯ**

В. М. Бабич, М. А. Всемиров, А. И. Генералов,  
И. А. Ибрагимов, Л. Ю. Колотилина, Ю. В. Матиясевич,  
Н. Ю. Нецветаев, С. И. Репин, Г. А. Серегин

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Санкт-Петербургское отделение Математического института  
им. В.А.Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:  
ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г.  
Выдано Федеральной службой по надзору  
в сфере связи и массовых коммуникаций

## **Контактные данные:**

191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27  
телефоны: (812) 312-40-58; (812) 571-57-54  
e-mail: admin@pdmi.ras.ru  
<https://www.pdmi.ras.ru/preprint/>

Заведующая информационно-издательским сектором В. Н. Симонова

# 1 Введение

Пертурбативные методы квантовой теории поля [1–3] часто связаны с такими понятиями, как перенормировка, регуляризация и сингулярность, см. [4–6], поскольку коэффициенты формальных рядов могут содержать расходящиеся величины. Обычно исследование подобных объектов проводится последовательно, поскольку более высокие поправочные вклады зависят от процесса перенормировки предыдущих.

В некоторых специальных случаях можно выделить особый тип сингулярностей, который присутствует во всех поправочных слагаемых и имеет предсказуемое поведение. Обычно в качестве таких объектов рассматриваются главные логарифмические сингулярности. Однако подобные случаи встречаются нечасто, см. для примера [7–10] или, переходя к более абстрактным соображениям, вычисления в [11–17].

В данной работе рассматривается пример суммирования основных нелогагрифмических (степенных) особенностей в двумерной модели главного кирального поля, см. [18–25]. В качестве метода регуляризации используется сглаживание  $\delta$ -функционала, которое может быть реализовано при помощи регуляризации обрезанием [26–30], в частности, путем обрезания в координатном представлении [31–34]. Представленное исследование является продолжением серии работ [35–38], посвященных изучению структуры сингулярностей в нелинейных сигма-моделях.

Текст состоит из трех основных разделов, в которых рассматриваются постановка задачи, процесс вычислений и доказательства некоторых свойств. В заключении обсуждаются замечания и открытые вопросы.

## 2 Постановка задачи

Рассмотрим пространство  $\mathbb{R}^2$  и алгебру Ли  $\mathfrak{g}$  группы  $SU(n)$ , где  $2 \leq n \in \mathbb{N}$ , см. [39]. Генераторы  $t^a$ , где  $a \in \{1, \dots, n^2 - 1\}$ , алгебры  $\mathfrak{g}$  удовлетворяют стандартному соотношению  $[t^a, t^b] = f^{abc}t^c$ , где  $f^{abc}$  являются полностью антисимметричными вещественными структурными константами. Последние также обладают свойством  $f^{abe}f^{abc} = n\delta^{ec}$ , см. приложение C в [40]. Далее символом «tr» будем обозначать след по групповым индексам.

В недавней работе, посвященной изучению трехпетлевых сингулярностей в двумерной модели главного кирального поля [38], был выписан анзац для ренормированного квантового действия

$$W_{\text{ren}}[B, \Lambda] = \frac{S[B]}{4\gamma_0^2} - \frac{1}{2}(\ln \det(G_{\text{reg}}) - \varkappa_0) - \left[ \mathbb{H}_0^{\text{sc}} \exp \left( \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{\gamma_0^{k-2}}{k!2} (\Gamma_k + \Gamma_{r,k-2}) \right) - \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_0^{2k} \varkappa_k \right]. \quad (1)$$

Здесь  $S[B]$  обозначает классическое действие, зависящее от фонового поля, которое, в свою очередь, удовлетворяет квантовому уравнению движения, см. [41]. Функция  $G_{\text{reg}}^{ab}(\cdot, \cdot)$  является регуляризованной функцией Грина с параметром регуляризации  $\Lambda$ , а величина  $\gamma_0 = \gamma_0(\gamma, \Lambda) = \gamma + \dots$  обозначает ренормированную константу связи. Далее, при  $k \geq 1$  справедливо представление для вершин с  $k$  внешними линиями

$$\Gamma_{k+2}[\phi] = - \int_{\mathbb{R}^2} d^2x (\partial_{x_\mu} \phi^{a_1}(x)) (\phi^k(x))^{a_1 a_{k+1}} D_\mu^{a_{k+1} b}(x) \phi^b(x), \quad (2)$$

где  $D_\mu^{ab}(x) = \delta^{ab} \partial_{x_\mu} - f^{acb} B_\mu^c(x)$  обозначает ковариантную производную, а также были использованы обозначения для полей флуктуации  $\phi^{ab}(x) = f^{acb} \phi^c(x)$  и их произведений

$$(\phi^k(x))^{a_1 a_{k+1}} = \prod_{i=1}^k \phi^{a_i a_{i+1}}(x).$$

В свою очередь,  $\Gamma_{r,k-2}$  обозначают контрвершины, которые являются конечными линейными комбинациями вспомогательных вершин с сингулярными по параметру  $\Lambda$  коэффициентами и количеством

внешних линий, не превосходящих число  $k-2$ . Далее, величины  $\kappa_k$  вычитают расходимости с плотностями, не зависящими от фонового поля, а оператор  $\mathbb{H}_0^{\text{sc}}$  всеми возможными способами соединяет внешние линии вершин при помощи деформированной функции Грина  $G_\Lambda^{ab}(\cdot, \cdot)$  и оставляет только сильно связную вакуумную часть. Отметим, что  $G_\Lambda$  однозначно строится по функции  $G_{\text{reg}}$  и в главном порядке совпадает с деформированной функцией  $2G_0^\Lambda(x-y)\delta^{ab}$  для свободного оператора Лапласа  $A(x) = -\partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2$ . Последнюю удобно понимать в смысле преобразования Фурье

$$A(x)G_0^\Lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d^2k}{4\pi^2} e^{ikx} \rho(|k|/\Lambda), \quad (3)$$

где  $0 \leq \rho(\cdot) \leq 1$  называется регуляризующей (сглаживающей) функцией. Из-за свойства  $\rho(0) = 1$  при снятии регуляризации  $\Lambda \rightarrow +\infty$  правая часть равенства стремится к  $\delta$ -функционалу в смысле обобщенных функций, см. [42, 43].

В процессе изучения двух и трех петель было замечено, что в  $n$ -петлевом коэффициенте квантового действия появляется необходимость ввести вспомогательную вершину вида

$$V_{2n-2}[\phi] = \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \text{tr}(\phi^{2n-2}(x)) \quad (4)$$

с  $2n-2$  внешними линиями. При этом такая вершина должна входить с коэффициентом, пропорциональным  $\Lambda^2 \gamma^{2n-2}$  и некоторой функции  $\rho_{2n-2}$ , которая строится исключительно по комбинациям деформированных  $\delta$ -функционалов  $A(x)G_0^1(x)$ . Такие вершины будем называть основными. Коэффициент удобно фиксировать так, чтобы  $\Gamma_{r,2n-2} = 2(2n!)\Lambda^2 \rho_{2n-2} V_{2n-2} + \dots$ . Заметим, что в частях эффективного действия с числом петель  $> n$  также могут появляться вершины  $V_{2n-2}$ , однако они не являются основными, так как входят с более высокой степенью константы связи и/или с коэффициентом, который строится не только с использованием  $A(x)G_0^1(x)$ , но и функций, содержащих иное количество производных от  $G_0^\Lambda(x)$ .

**Цель работы.** Найти сумму всех основных вспомогательных вершин, возникающих в квантовом действии (1), то есть вычислить величину вида

$$\Psi = \Lambda^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \gamma^{2n-2} \rho_{2n-2} V_{2n-2}.$$

Ответ дается формулой (11).

### 3 Вычисление

Заметим, что для поиска основных вершин можно воспользоваться некоторыми упрощениями. Действительно, из соображений сохранения размерности следует, что можно выбрать  $B = 0$ . В этом случае все нечетные вершины из (2) обратятся в нуль, в то время как четные приобретут вид

$$\Gamma_{0,2k+2}[\phi] = - \int_{\mathbb{R}^2} d^2x (\partial_{x_\mu} \phi^{a_1}(x)) (\phi^{2k}(x))^{a_1 a_{2k+1}} \partial_{x^\mu} \phi^{a_{2k+1}}(x).$$

Тогда, учитывая явный вид квантового действия (1), искомую комбинацию  $\Psi$  можно представить в виде функционала

$$-\mathbb{H}_0^{\text{sc}} \exp \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\gamma^{2n}}{(2n+2)!2} \Gamma_{0,2n+2} \right), \quad (5)$$

где оператор  $\mathbb{H}_0^{\text{sc}}$  произвольным образом соединяет все поля с производными, оставляя затем лишь главную часть асимптотики по параметру  $\Lambda$  для сильно связной части, то есть пропорциональную  $\Lambda^2$ . Для анализа последней комбинации рассмотрим произвольный конечный моном. Для этого

определим мультииндекс  $\alpha = \{\alpha_i\}_{i=1}^{+\infty}$ , произвольный элемент  $\alpha_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  которого обозначает степень вершины  $\Gamma_{0,2k+2}^{\alpha_k}$ , а также два числа

$$\dot{\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k, \quad \hat{\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} k\alpha_k.$$

Тогда величина (5) является суммой по всем возможным ненулевым мультииндексам  $\alpha$  от комбинаций вида

$$-\dot{\mathbb{H}}_0^{\text{sc}} \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{\gamma^{2n\alpha_n} 2^{-\alpha_n}}{[(2n+2)!]^{\alpha_n} \alpha_n!} \Gamma_{0,2n+2}^{\alpha_n}. \quad (6)$$

Вычислим применение оператора. Для этого заметим, что всевозможные соединения полей с производными приводят к диаграммам типа «цепочка». Таким образом, сохраняя лишь главную часть асимптотики и учитывая симметричный коэффициент, получаем

$$\dot{\mathbb{H}}_0^{\text{sc}} \prod_{n=1}^{+\infty} \Gamma_{0,2n+2}^{\alpha_n} = \Lambda^2 V_{2\hat{\alpha}} \vartheta(\dot{\alpha}) \frac{(-4)^{\hat{\alpha}} \dot{\alpha}!}{2 \prod_{n \geq 1} \alpha_n!}, \quad (7)$$

где вспомогательная функция  $\vartheta(\cdot)$  определяется равенством

$$\vartheta(n) = \underbrace{AG_0^1 \star \dots \star AG_0^1}_{n \text{ штук}}(0)$$

для всех  $n \geq 1$ . Операция  $\star$  обозначает свертку. Далее, используя представление (3) и сочетание свертки с преобразованием Фурье, формула переписывается в виде

$$\vartheta(n) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d^2 k}{4\pi^2} \rho^n(|k|).$$

Таким образом, после подстановки (7) в (6), получаем

$$-\frac{\Lambda^2}{2} \sum_{\alpha: \dot{\alpha} > 0} \left( (-4)^{\hat{\alpha}} \dot{\alpha}! V_{2\hat{\alpha}} \vartheta(\dot{\alpha}) \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{\gamma^{2n\alpha_n} 2^{-\alpha_n}}{[(2n+2)!]^{\alpha_n} \alpha_n!} \right).$$

Далее заметим, что можно перейти к суммированию по компонентам мультииндекса. Для этого сперва используем определение для вершины (4) и представление для факториала

$$n! = \int_{\mathbb{R}_+} ds s^n e^{-s}.$$

Тогда, добавляя и вычитая слагаемое, отвечающее  $\dot{\alpha} = 0$ , получаем факторизацию сумм, в каждой из которых можно воспользоваться представлением для функции Бесселя первого рода, см. секцию 8.441 в [46],

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-s)^k}{k!k!} = J_0(2\sqrt{s}).$$

В итоге получаем для  $\Psi$  формулу вида

$$-\frac{\Lambda^2}{2} \text{Tr}_{x,k} \left[ \text{Kh} \left( \phi(x) \gamma, 2\sqrt{\rho(|k|)} \right) - \mathbf{1} \right], \quad (8)$$

где « $\mathbf{1}$ » обозначает единичную матрицу, интегральный оператор  $\text{Tr}_{x,k}$  задается формулой

$$\text{Tr}_{x,k} = \int_{\mathbb{R}^2} d^2 x \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d^2 k}{4\pi^2} \text{tr},$$

а вспомогательная функция  $\text{Kh}(\cdot, \cdot)$  определяется равенствами

$$\text{Kh}(u, v) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \text{Kh}_j(u, v), \quad (9)$$

$$\text{Kh}_j(u, v) = \int_{\mathbb{R}_+} ds e^{-s} \left[ \prod_{n=1}^j J_0 \left( \frac{u^n v \sqrt{s}}{\sqrt{n+1}} \right) \right]. \quad (10)$$

Обратим внимание, что формулу (8) можно привести к сумме по корням характеристического полинома матрицы  $\phi(x)$ . Действительно, заметим, что матрица  $\phi(x)$  является вещественной и кососимметричной. Следовательно, см. главу VI в [44], каждый корень ее характеристического полинома для каждого фиксированного « $x$ » является либо чисто мнимым, либо нулевым. Причем мнимые входят парами (со своими сопряженными). Обозначим корни  $i\lambda^a(x)$ , где  $a \in \{1, \dots, n^2 - 1\}$  и  $\lambda^a(x) \in \mathbb{R}$ . Тогда формула (8) переписывается в виде

$$\Psi = -\frac{\Lambda^2}{2} \sum_{a=1}^{n^2-1} \text{Tr}_{x,k} \left[ \text{Kh} \left( i\lambda^a(x) \gamma, 2\sqrt{\rho(|k|)} \right) - \mathbf{1} \right]. \quad (11)$$

## 4 Свойства

Обратим внимание на некоторые свойства последней функции, начиная со случая вещественных аргументов. Во-первых, из свойства  $J_0(0) = 1$  следует, что  $\text{Kh}(u, v) = 1$  при  $u = 0$  и/или  $v = 0$ . Во-вторых, учитывая четность функции Бесселя, получаем четность по обоим аргументам  $\text{Kh}(u, v) = \text{Kh}(-u, v) = \text{Kh}(u, -v)$ . Далее предположим, что  $v \neq 0$  и  $|u| > 1$ , а также заметим, что в этом случае функция  $|u|^n / \sqrt{n+1}$  является возрастающей для всех  $n > N_1$  для некоторого фиксированного  $N_1 \in \mathbb{N}$ . Следовательно, существует такое число  $0 \leq \delta_1 < 1$ , что

$$\left| J_0 \left( \frac{u^n v \sqrt{s}}{\sqrt{n+1}} \right) \right| < \delta_1$$

для всех  $n > N_1$ . Число  $\delta_1$  может зависеть от  $v\sqrt{s}$ . Следовательно, произведение в (10) в пределе содержит сколь угодно много множителей  $\delta_1$ . Учитывая то, что остальная часть произведения ограничена единицей, получаем  $\text{Kh}(u, v) = 0$  для всех  $v \neq 0$  и  $|u| > 1$ . Обратим внимание, что в данном случае интеграл и предельный переход можно поменять местами благодаря наличию равномерной сходимости, см. главу 14 в [45]. Более того, последнее соотношение можно усилить. Пусть  $|u| = 1$  и  $a = v^2 s / 4$ , тогда существует такое  $N_2 \in \mathbb{N}$ , что для всех  $n > N_2$  выполнено  $a < n + 1$  и справедлива оценка

$$\ln \left| J_0 \left( \frac{u^n v \sqrt{s}}{\sqrt{n+1}} \right) \right| \leq -\frac{a}{n+1} + \frac{a^2}{4(n+1)^2},$$

где было использовано соотношение  $\ln(1-s) \leq -s$  для  $s \in [0, 1]$ . Таким образом, абсолютная величина произведения из (10) оценивается сверху величиной

$$\exp \left( \sum_{n=N_2+1}^{+\infty} \left[ -\frac{a}{n+1} + \frac{a^2}{4(n+1)^2} \right] \right),$$

которая равна нулю из-за расходимости гармонического ряда. Следовательно,  $\text{Kh}(u, v) = 0$  для всех  $v \neq 0$  и  $|u| \geq 1$ . При этом в регионе  $|u| < 1$  произведение из (10) может сходиться к некоторой ненулевой величине, так как функция  $|u|^n / \sqrt{n+1}$  убывает достаточно быстро с ростом индекса.

При переходе к комплексным значениям возникают существенные трудности. Предположим, что  $it = u \in i\mathbb{R}$ , в то время как  $v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Этот вариант как раз отвечает ситуации из формулы (11). В этом случае произведение в (10) формально расщепляется на две части  $J_j \cdot I_j$ , четную по индексу « $n$ » и нечетную, где

$$J_j(t, v) = \prod_{n=1}^{\lfloor j/2 \rfloor} J_0 \left( \frac{t^{2n} v \sqrt{s}}{\sqrt{2n+1}} \right),$$

$$I_j(t, v) = \prod_{n=1}^{\lceil j/2 \rceil} I_0\left(\frac{t^{2n-1}v\sqrt{s}}{\sqrt{2n}}\right).$$

Здесь были использованы функции «пол» и «потолок». В этом случае функция  $J_j(t, v)$  допускает аналогичный анализ, предложенный выше. Однако с функцией  $I_j(t, v)$  появляются трудности. Действительно, пусть в дополнение к выше отмеченным свойствам выполнено  $|t| > 1$ , тогда произведение расходится, то есть  $I_j(t, v) \rightarrow +\infty$  при  $j \rightarrow +\infty$ . В этом легко убедиться, учитывая те факты, что  $I_0(\cdot)$  является четной функцией, строго возрастающей на положительной полуоси, и функция индекса  $t^{2n-1}/\sqrt{n}$  ограничена снизу положительным числом для всех  $n \in \mathbb{N}$ . В этом случае существует такое  $\delta_2 > 1$ , что для всех значений индекса выполнено соотношение

$$I_0\left(\frac{t^{2n-1}v\sqrt{s}}{\sqrt{2n}}\right) \geq \delta_2.$$

Следовательно, расходимость произведения следует из оценки  $I_j(t, v) \geq \delta_2^{(j-1)/2} \rightarrow +\infty$  при  $j \rightarrow +\infty$ . Аналогично, пользуясь расходимостью гармонического ряда, можно расширить результат и на случай  $|t| = 1$ . Ясно, что в этом случае предельная функция не существует и менять местами интеграл и предельный переход не представляется возможным. Таким образом, предельный переход в формуле (9) является вспомогательной регуляризацией, которая может прояснить значение интеграла от «плохой» функции. На данный момент для указанной области возможен лишь численный анализ, строгие математические доказательства пока что отсутствуют.

В регионе  $|t| < 1$  и  $v \in \mathbb{R}$  функция конечна. Для доказательства воспользуемся представлением для модифицированной функции Бесселя первого рода, см. секцию 8.431 в [46],

$$I_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi ds \cosh(t \cos(s)) \leq e^{|t|}.$$

Тогда из оценок

$$|J_j(t, v)| \leq 1,$$

$$I_j(t, v) \leq \exp\left(v\sqrt{s} \sum_{n=1}^{\lceil j/2 \rceil} \frac{|t|^{2n-1}}{\sqrt{2n}}\right),$$

следуют факты сходимости произведения и интегрируемости с весом  $\exp(-t)$ . Таким образом, предельная функция  $\text{Kh}(it, v)$  существует и конечна.

Возвращаясь к формуле (11), можно сказать, что функционал  $\Psi$  может принимать конечные значения, если абсолютные значения собственных чисел «заперты» в ящик  $|\lambda^a(x)\gamma| < 1$ . В остальных случаях необходимо проводить дополнительные исследования функции  $\text{Kh}(\cdot, \cdot)$ . Даже если в какой-то точке функция стремится к бесконечности (имеет особенность), это вовсе не означает, что функционал  $\Psi$  будет стремиться к бесконечности, так как в формуле (11) имеется оператор интегрирования  $\text{Tr}_{x,k}$ , который может сглаживать поведение.

## 5 Заключение

В данной работе был представлен пример суммирования специального вида нелогарифмических сингулярностей во всех петлях. Была получена новая явная формула, которая при формальном разложении по константе связи  $\gamma$  приводит к сумме степенных по параметру регуляризации  $\Lambda$  слагаемых, возникающих в перенормированном квантовом действии.

Обратим внимание на два интересных открытых вопроса. Во-первых, при постановке задачи был выделен специальный класс нелогарифмических сингулярностей. Соответственно, суммирование остальных частей, пропорциональных  $\Lambda^2$ , является на данный момент нерешенной задачей. И хотя такие добавки будут входить с более высокой степенью константы связи, неясно, каким образом они будут дополнять имеющийся вклад (8). Во-вторых, интересным математическим вопросом является

изучение свойств функции (10). Особенно в регионе  $i\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , потому что именно в нем находятся данные для случая кососимметричных матриц.

**Благодарности.** Работа поддержана Российским Научным Фондом, грант 23-11-00311. Автор выражает благодарность Н.В.Харук за полезные комментарии, а также П.В.Акацевичу и И.В.Кореневу за плодотворную совместную работу по схожей тематике.

## 6 Список литературы

- [1] L. D. Faddeev, A. A. Slavnov, *Gauge Fields: An Introduction to Quantum Theory*, Frontiers in Physics **83**, Addison-Wesley, 1–236 (1991)
- [2] C. Itzykson, J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-hill, New York, 1–705 (1980)
- [3] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley, 1–868 (1995)
- [4] J. C. Collins, *Renormalization: An Introduction to Renormalization, the Renormalization Group and the Operator-Product Expansion*, Cambridge University Press, 1–392 (1984)
- [5] O. I. Zavialov, *Renormalized quantum field theory*, Kluwer Academic Publishers, Dodrecht, Boston, 1–524 (1990)
- [6] D. I. Kazakov, *Radiative Corrections, Divergences, Regularization, Renormalization, Renormalization Group and All That in Examples in Quantum Field Theory*, arXiv:0901.2208 [hep-ph] (2009)
- [7] D. G. C. McKeon, *Summing Logarithms in Quantum Field Theory: The Renormalization Group*, Int. J. Theor. Phys. **37**, 817–826 (1998) doi:10.1023/A:1026620630263
- [8] J. Linzen, M. V. Polyakov, K. M. Semenov-Tian-Shansky, N. S. Sokolova, *Exact summation of leading infrared logarithms in 2D effective field theories*, J. High Energy Phys., **2019**(4) (2019) doi:10.1007/jhep04(2019)007
- [9] S. P. Miao, N. C. Tsamis, R. P. Woodard, *Summing inflationary logarithms in nonlinear sigma models* J. High Energ. Phys., **2022**(69) (2022) doi:10.1007/JHEP03(2022)069
- [10] M. Honda, R. Jinno, L. Pinol, K. Tokeshi, *Borel resummation of secular divergences in stochastic inflation*, J. High Energ. Phys., **2023**(60) (2023) doi:10.1007/JHEP08(2023)060
- [11] L. D. Faddeev, *Scenario for the renormalization in the 4D Yang–Mills theory*, Int. J. Mod. Phys. A, **31**, 1630001 (2016) doi:10.1142/S0217751X16300015
- [12] C. E. Derkachev, A. V. Ivanov, L. D. Faddeev, *Renormalization scenario for the quantum Yang–Mills theory in four-dimensional space-time*, Theoret. and Math. Phys., **192**:2 (2017), 1134–1140 doi:10.1134/S0040577917080049
- [13] A. V. Ivanov, *About renormalized effective action for the Yang–Mills theory in four-dimensional space-time*, EPJ Web of Conferences **191**, 06001 (2018) doi:10.1051/epjconf/201819106001
- [14] A. V. Ivanov, *About dimensional regularization in the Yang–Mills theory*, J. Math. Sci. (N. Y.), **238**:6 (2019), 862–869 doi:10.1007/s10958-019-04281-2
- [15] N. P. Meshcheriakov, V. V. Shatalova, K. V. Stepanyantz, *Higher logarithms and  $\varepsilon$ -poles for the  $\overline{MS}$ -like renormalization prescriptions*, J. High Energ. Phys. **2023**, 97 (2023) doi:10.1007/JHEP12(2023)097



- [16] A. L. Kataev, K. V. Stepanyantz, *Algebraic structure of the renormalization group in the renormalizable QFT theories*, Int. J. Mod. Phys. A, **39**(34), 2445001 (2024) doi:10.1142/S0217751X24450015
- [17] K. Stepanyantz, *Exact expressions for the renormalization constants in the  $\overline{MS}$ -like schemes*, 27th Workshop on What Comes Beyond the Standard Models? (2025) arXiv:2502.12573
- [18] E. Brezin, J. Zinn-Justin, *Renormalization of the Nonlinear  $\sigma$  Model in  $2 + \varepsilon$  Dimensions – Application to the Heisenberg Ferromagnets*, Phys. Rev. Lett., **36**, 691–694 (1976) doi:10.1103/PhysRevLett.36.691
- [19] A. M. Polyakov, *Hidden symmetry of the two-dimensional chiral fields*, Phys. Lett. B, **72**(2), 224–226 (1977) doi:10.1016/0370-2693(77)90707-9
- [20] S. Hikami, E. Brezin, *Three-loop calculations in the two-dimensional non-linear  $\sigma$  model*, J. Phys. A: Math. Gen. **11**, 1141–1150 (1978) doi:10.1088/0305-4470/11/6/015
- [21] P. B. Wiegmann, *On the theory of nonabelian goldstone bosons in two dimensions; exact solution of the  $SU(N) \otimes SU(N)$  nonlinear  $\sigma$ -model*, Phys. Lett. B, **141**(3-4), 217–222 (1984) doi:10.1016/0370-2693(84)90205-3
- [22] L. D Faddeev, N. Yu Reshetikhin, *Integrability of the principal chiral field model in  $1+1$  dimension*, Ann. Phys. **167**(2), 227–256 (1986) doi:10.1016/0003-4916(86)90201-0
- [23] A. M. Polyakov, *Gauge Fields and Strings*, London, Taylor and Francis Group, 1–312 (1987)
- [24] T. Nguyen, *Quantization of the nonlinear sigma model revisited*, J. Math. Phys. **57**, 082301 (2016) doi:10.1063/1.4961153
- [25] B. Hoare, *Integrable deformations of sigma models*, J. Phys. A: Math. Theor. **55**, 093001 (2022) doi:10.1088/1751-8121/ac4a1e
- [26] J. Polchinski, *Renormalization and effective lagrangians*, Nucl. Phys. B, **231**(2), 269–295 (1984) doi:10.1016/0550-3213(84)90287-6
- [27] S. L. Shatashvili, *Two-loop approximation in the background field formalism*, Theor Math Phys **58**, 144–150 (1984) doi:10.1007/BF01017919
- [28] M. Oleszczuk, *A symmetry-preserving cut-off regularization*, Z. Phys. C, **64**, 533–538 (1994) doi:10.1007/BF01560115
- [29] Sen-Ben Liao, *Operator Cutoff Regularization and Renormalization Group in Yang-Mills Theory*, Phys. Rev. D, **56**, 5008–5033 (1997) doi:10.1103/PhysRevD.56.5008
- [30] N. V. Kharuk, *Mixed type regularizations and nonlogarithmic singularities*, J. Math. Sci. (N. Y.), **264**, 362–367 (2022) doi:10.1007/s10958-022-06003-7
- [31] A. V. Ivanov, *Explicit Cutoff Regularization in Coordinate Representation*, 2022 J. Phys. A: Math. Theor. **55**, 495401, arXiv:2209.01783, doi:10.1088/1751-8121/aca8dc
- [32] A. V. Ivanov, *An applicability condition of a cutoff regularization in the coordinate representation*, Funct Anal Its Appl **59**, 1–10 (2025) arXiv:2403.09218, <https://doi.org/10.1134/S123456782501001X>
- [33] V. P. Zastavnyi, *The continuation of the radial function from the exterior of the ball to a function positively defined on the entire space*, Bulletin of Donetsk National University: Series A. Natural Sciences, 2/2024, 14–28 (2024) doi:10.5281/zenodo.13752079
- [34] A. V. Ivanov, *Effective actions, cutoff regularization, quasi-locality, and gluing of partition functions*, J. Phys. A: Math. Theor., **58**, 135401 (2025) doi:10.1088/1751-8121/adc3de, arXiv:2411.13857

- [35] A. A. Bagaev, *Two-loop calculations of the matrix  $\sigma$ -model effective action in the background field formalism*, Theor Math Phys, **154**:2, 303–310 (2008) doi:10.1007/s11232-008-0028-5
- [36] P. V. Akacevich, A. V. Ivanov, *On Two-Loop Effective Action of 2D Sigma Model*, Eur. Phys. J. C **83**, 653 (2023), arXiv:2304.02374, doi:10.1140/epjc/s10052-023-11797-0
- [37] A. V. Ivanov, *Applicability condition of a cutoff in two-dimensional models*, Questions of quantum field theory and statistical physics. Part 30, Zap. Nauchn. Sem. POMI, 532, POMI, St. Petersburg, 153–168 (2024) <https://www.mathnet.ru/eng/zns17457>
- [38] P. V. Akacevich, A. V. Ivanov, I. V. Korenev, *Three-loop singularity structure for a non-linear sigma model*, (2025) arXiv:2507.05923
- [39] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*, Second Edition, CRC Press, 1–573 (2003)
- [40] J. P. Bornsen, A. E. M. van de Ven, *Three-loop Yang–Mills  $\beta$ -function via the covariant background field method*, Nucl. Phys. B, **657**, 257–303 (2003) doi:10.1016/S0550-3213(03)00118-4
- [41] A. A. Bagaev, *A remark on renormalization of the quantum equation of motion for the matrix sigma model*, J Math Sci **151**, 2813–2815 (2008) doi:10.1007/s10958-008-9007-5
- [42] I. M. Gel’fand, G. E. Shilov, *Generalized Functions, Volume 1: Properties and Operations*, AMS Chelsea Publishing **377**, 1–423 (1964)
- [43] V. S. Vladimirov, *Methods of the theory of generalized functions*, London, CRC Press, 1–328 (2002)
- [44] E. Netto, *Die determinanten*, Leipzig: B. G. Teubner, 1–128 (1910)
- [45] G. M. Fikhtengol’ts, *Course of differential and integral calculus*, Moscow: Fizmatgiz, Vol. 2, 1–800 (1970)
- [46] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Translated by Scripta Technica, Seventh Edition, Academic Press, 1–1220 (2007)