

## О ГИПОТЕЗЕ ГРОТЕНДИКА-СЕРРА ДЛЯ СЛУЧАЯ СПИНОРНЫХ НОРМ

Г. М. Шарафетдинова

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Университетская наб., д. 7/9,  
Санкт-Петербург, 199034, Россия

e-mail: sharafetdinova\_galiya@mail.ru

### АННОТАЦИЯ

Рассматривается  $X$  — гладкая неприводимая относительная кривая над кольцом дискретного нормирования с бесконечным полем вычетов характеристики  $p \neq 2$ . Предполагается, что для  $X$  выполнена относительная лемма Нётер о нормализации. В эти предположениях доказывается гипотеза Гротендика-Серра о главных  $G$ -расслоениях над  $X$ , где  $G$  — спинорная группа.

Два слова о методе. Он восходит к работам Воеводского. Для каждой точки  $x \in X$  и соответствующей локальной подсхемы  $U$  в  $X$ , и каждого замкнутого  $Z$  в  $X$ , не равного  $X$ , мы «вытесняем»  $U$  в дополнение к  $Z$ . Для этого строим подходящую многозначную  $\mathbb{A}^1$ -гомотопию. Её наличие и доказывает наш результат.

**Ключевые слова:** спинорная норма, спинорная группа, главные  $G$ -расслоения, относительные кривые.

**ПРЕПРИНТЫ**

Санкт-Петербургского отделения  
Математического института им. В. А. Стеклова  
РАН

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР**

С. В. Кисляков

**РЕДКОЛЛЕГИЯ**

В. М. Бабич, Н. А. Вавилов, А. М. Вершик, М. А. Всемиров,  
А. И. Генералов, И. А. Ибрагимов, Л. Ю. Колотилина,  
Ю. В. Матиясевич, Н. Ю. Нецветаев, С. И. Репин, Г. А. Серегин.

## 1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА

Гипотеза Гротендика-Серра была сформулирована Ж.-П. Серром в постоянном случае в 1958 году [9] и А. Гротендиком в общем случае в 1968 году [10]. Она касается главных  $G$ -расслоений над регулярной неприводимой схемой  $X$ , где  $G$  — редуктивная групповая схема над  $X$ . Гипотеза утверждает, что главное  $G$ -расслоение тривиальное над общей точкой схемы  $X$  локально тривиально в топологии Зарисского над  $X$ .

Общий случай гипотезы легко сводится к случаю, когда  $X = \text{Spec}(R)$ , где  $R$  — локальное регулярное кольцо. В случае, когда  $R$  содержит поле гипотеза положительно решена. А именно, если  $R$  содержит бесконечное поле, то это сделано в работе 2015 года Р. Федорова и И. Панина [5]. Случай, когда  $R$  содержит конечное поле, сделан в работе 2020 года И. Панина [6].

Хороший исторический обзор содержится в статье [8] И. Панина на ICM-2018. Отметим ещё фундаментальную статью [11] Ж.-Л. Коллье-Тельена и М. Оянгурена.

Случай, когда  $R$  имеет смешанную характеристику практически полностью открыт. Однако стоит отметить работы Е. Нисневича [12] и N. Guo [13], в которых положительно решены случаи, когда  $R$  — кольцо дискретного нормирования и полулокальное Дедекиндово кольцо. В работе Ж.-Л. Коллье-Тельена и Ж.-Ж. Сансюка [14] гипотеза доказана в случае, когда  $G$  — это тор.

Отметим отдельно недавние работы К. Чеснавиуса [15], а также И. Панина и А. Ставровой [7]. В первой гипотеза доказана для квази-расщепимых  $G$  над неразветвленными кольцами. Во второй гипотеза доказана в постоянном случае в смешанной характеристике.

Данный препринт посвящен частному случаю отмеченной выше гипотезы Гротендика-Серра о главных  $G$ -расслоениях. Мы будем интересоваться случаем спинорной группы.

Пусть  $R$  — локальное регулярное кольцо. В частности,  $R$  — это область целостности. Пусть  $\mathfrak{m}$  — его максимальный идеал. Предположим, что поле вычетов бесконечно.

Рассмотрим квадратичную форму  $q = \sum_{i=1}^n a_i t_i^2$  над  $R$ -алгеброй  $B$ , где  $a_i \in B^\times$  при  $i = 1, 2, \dots, n$ , а  $n \geq 3$ , и соответствующую алгебру Клиффорда  $C(q)$ ,  $\sigma$  — стандартная инволюция.

**Определение 1.** Положим  $C_0(q)^\times = \{\alpha \in C_0(q) : \alpha \cdot \sigma(\alpha) \neq 0\}$  и рассмотрим её как алгебраическая группа.

**Определение 2.** Положим  $G_q = \{\gamma \in C_0(q)^\times : \gamma R^n \gamma^{-1} \subset R^n\}$  и рассмотрим её как алгебраическая группа.

**Определение 3.** Пусть  $Sn : G_q \rightarrow GL_1(B)$  — такой морфизм, что  $Sn(\gamma) = \gamma \cdot \sigma(\gamma)$ . Известно, что  $Sn$  — это морфизм алгебраических групп. В частности,  $Sn(G_q(K)) \subset B^\times$  — подгруппа. Пусть  $Spin_q$  — ядро этого морфизма.

Интересующий нас частный случай гипотезы Гротендика-Серра — это следующая

**Гипотеза 1.** Пусть  $A$  — гладкая  $R$ -алгебра, являющаяся областью целостности.  $K$  — поле частных алгебры  $A$ . Пусть  $f \in A^\times$  такой, что  $f \in Sn(G_q(K))$ . Тогда для любого максимального идеала  $\mathfrak{p}$  алгебры  $A$  выполнено  $f \in Sn(G_q(A_{\mathfrak{p}}))$ .

В случае, когда  $R$  — это поле, задача решена в совместной статье М. Оянгурена, И. Панина и К. Зайнуллина в 2004 году [1].

В настоящем препринте теорема 2 докажет гипотезу 1, когда  $R$  — кольцо дискретного нормирования с бесконечным полем вычетов характеристики  $p \neq 2$ , а  $A$  — гладкая  $R$ -алгебра относительной размерности 1, для которой выполнено условие леммы Нётер о нормализации.

$A$  именно,  $A \supset R[t_0]$  (кольцо многочленов от переменной  $t_0$ ), причем  $A$  — конечно порожденный  $R[t_0]$ -модуль. Мы ожидаем, что наш метод докажет гипотезу 1 для гладких  $R$ -алгебр произвольной относительной размерности.

## 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ЛЕММА: ФОРМУЛИРОВКА И ПОСТРОЕНИЕ МОРФИЗМА

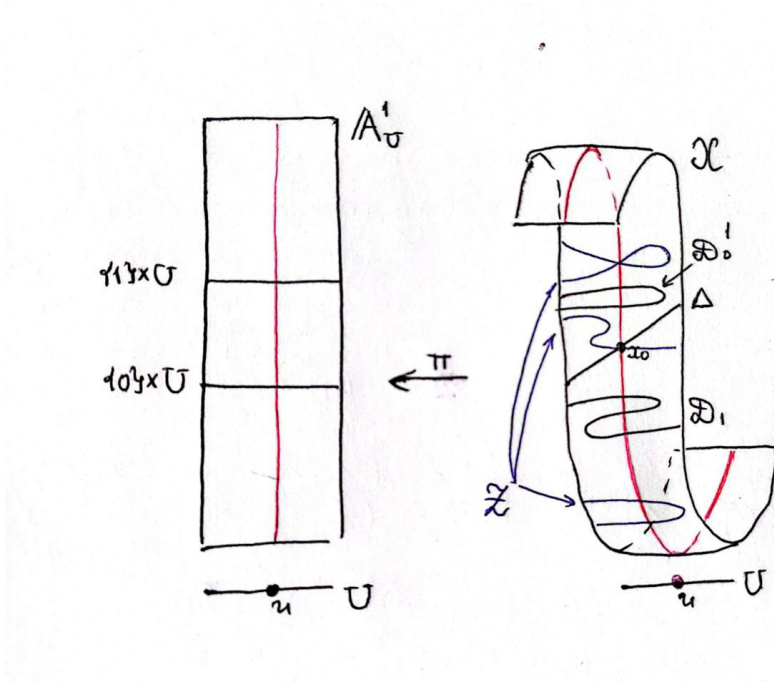
**2.1. Формулировка и условия.** Пусть  $R$  — локальное регулярное кольцо,  $\mathfrak{m}$  — его максимальный идеал,  $k = R/\mathfrak{m}$  — поле вычетов. Будем считать, что  $k$  — бесконечное поле. Обозначим  $U = \text{Spec}(R)$ , единственную замкнутую точку в  $U$  назовём  $u$ .

Пусть  $A$  — гладкая плоская  $R$ -алгебра относительной размерности 1, являющаяся областью целостности. Обозначим  $\mathcal{X} = \text{Spec}(A)$ . Тогда  $\mathcal{X}$  — гладкая, неприводимая относительная кривая. Включение  $R \subset A$  задаёт морфизм  $p: \mathcal{X} \rightarrow U$ .

Мы предполагаем, что для  $\mathcal{X}$  выполнено условие леммы Нётер о нормализации, а именно, существует конечный сюръективный морфизм из  $\mathcal{X}$  в  $\mathbb{A}_U^1$ . Другими словами, существует элемент  $t_0 \in A$  такой, что  $A$  — конечно порожденный  $R[t_0]$ -модуль.

Дан элемент  $f \in A$ , задающий замкнутое подмножество  $\mathcal{Z} = \text{Spec}(A/fA) \subset \mathcal{X}$ . При этом  $\mathcal{Z}$  квазиконечен над  $U$ , то есть прообраз любой точки из  $U$  для отображения  $p|_{\mathcal{Z}}$  конечен.

Наконец, задан идеал  $I \trianglelefteq A$  такой, что композиция  $R \hookrightarrow A \rightarrow A/I$  задаёт изоморфизм  $R$  и  $A/I$ . Пусть  $\Delta: U \rightarrow \mathcal{X}$  — соответствующее отображение. Тогда  $p \circ \Delta = \text{id}_U$ . Ясно, что  $\Delta(U)$  имеет ровно одну точку в слое над  $u$ , назовём её  $x_0$ . Мы предполагаем, что  $x_0 \in \mathcal{Z}$ . Тогда  $x_0 \in \mathcal{Z} \cap \Delta(U)$



**Теорема 1.** В выше описанных условиях существует морфизм  $\pi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{A}_U^1$ , такой что  $pr \circ \pi = p$ , где  $pr: \mathbb{A}_U^1 \rightarrow U$  стандартная проекция. А также выполнены условия:

- (1)  $\pi$  — конечный и сюръективный;
- (2) Пусть  $\mathcal{D}_1 = \pi^{-1}(\{1\} \times U) = \pi^{-1}(\text{Spec}(R[t]/(t-1)))$ . Тогда  $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{Z} = \emptyset$ ;
- (3) Пусть  $\mathcal{D}_0 = \pi^{-1}(\{0\} \times U) = \pi^{-1}(\text{Spec}(R[t]/(t)))$ . Тогда  $\mathcal{D}_0 = \Delta(U) \sqcup \mathcal{D}'_0$ , где  $\mathcal{D}'_0 \cap \mathcal{Z} = \emptyset$ ;
- (4)  $\pi|_{\mathcal{D}_1}: \mathcal{D}_1 \rightarrow U$  — конечный и этальный морфизм;

(5)  $\pi|_{\mathcal{D}_0}: \mathcal{D}_0 \rightarrow U$  — конечный и этальный морфизм.

*Замечание.* Далее я буду считать, что  $A$  — область целостности,  $K$  — её поле частных. На самом деле, поскольку  $\mathcal{X}$  — гладкая кривая, то её неприводимые компоненты являются компонентами связности, поэтому отображение можно определить на них независимо. Приведённые рассуждения строят отображение для компоненты связности с точкой  $x_0$ , для остальных же рассуждение отличается незначительно, я сделаю необходимые комментарии в нужных местах текста.

**2.2. Вложение в проективное пространство, вид искомого морфизма.** Первым шагом вложим  $\mathcal{X}$  в  $\mathbb{P}_U^n$  для некоторого  $n$ . Зафиксируем стандартное  $\mathbb{A}_U^n \subset \mathbb{P}_U^n$ , его дополнение, то есть замкнутое подмножество задаваемое однородным уравнением  $T_0 = 0$  обозначим  $\mathbb{P}_{\infty,U}^{n-1}$ . От вложения хотим, чтобы  $\mathcal{X} \hookrightarrow \mathbb{A}_U^n$ , а  $\bar{\mathcal{X}} \cap \mathbb{P}_{\infty,U}^{n-1}$  имело конечное число точек в замкнутом слое.

По условию имеется конечный сюръективный морфизм  $\varphi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{A}_U^1$ . Имеется стандартное вложение  $\mathbb{A}_U^1$ . Тогда имеется  $\bar{\mathcal{X}}$  — нормализация  $\mathbb{P}_U^1$  в  $\mathcal{X}$ .

$$\begin{array}{ccccc} A & \hookrightarrow & K & \longleftarrow & B \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ R[t_0] & \hookrightarrow & K(R[t_0]) & \longleftarrow & R[\frac{1}{t_0}] \end{array}$$

Поскольку  $\varphi$  конечный сюръективный, то  $\varphi^*: R[t_0] \rightarrow A$  является вложением. Пусть  $B$  — целое замыкание  $R[\frac{1}{t_0}]$  в  $K$ ,  $\mathcal{Y} = \text{Spec}(B)$ . Заметим, что раз  $A$  гладкая  $R$ -алгебра,  $R$  — регулярное кольцо, то  $A$  также регулярно. В частности, оно целозамкнуто, поэтому целое замыкание  $R[t_0]$  в  $K$  совпадает с  $A$ . Определим  $\bar{\mathcal{X}}$  — это  $\mathcal{X}$  и  $\mathcal{Y}$  склеенные по  $\text{Spec}(C)$ , где  $C$  — целое замыкание  $R[t_0, \frac{1}{t_0}]$  в  $K$ .

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{X} & \hookrightarrow & \bar{\mathcal{X}} & \longleftarrow & \mathcal{Y} \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \bar{\varphi} & & \downarrow \\ \mathbb{A}_U^1 & \hookrightarrow & \mathbb{P}_U^1 & \longleftarrow & \mathbb{A}_U^1 = \mathbb{P}_U^1 \setminus \{0\} \times U \end{array}$$

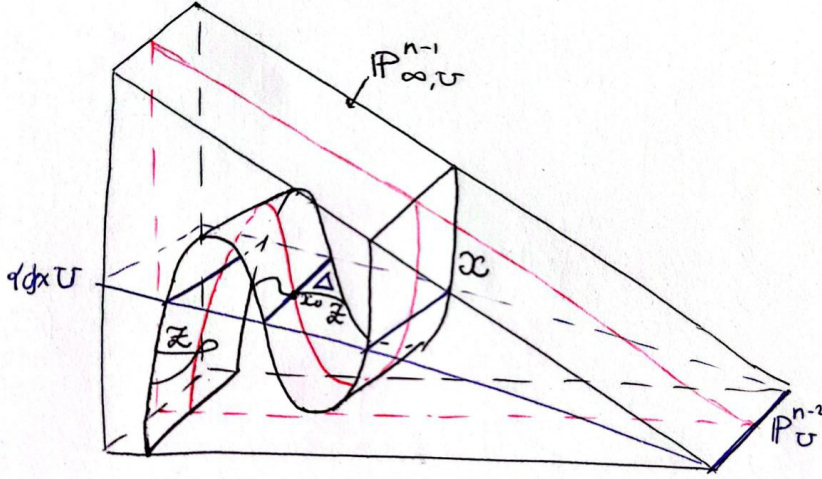
Получим  $\bar{\varphi}: \bar{\mathcal{X}} \rightarrow \mathbb{P}_U^1$  — конечный сюръективный морфизм, причём  $\bar{\varphi}^{-1}(\mathbb{A}_U^1) = \mathcal{X} \subset \bar{\mathcal{X}}$ .

**Лемма 1.** *Существует вложение  $\bar{\mathcal{X}}$  в  $\mathbb{P}_U^n$  такое, что  $\mathcal{X} = \bar{\mathcal{X}} \cap \mathbb{A}_U^n$ , а  $\mathcal{X}_{\infty} = \bar{\mathcal{X}} \cap \mathbb{P}_{\infty,U}^{n-1}$  имеет конечное число точек в замкнутом слое.*

*Доказательство.*  $A$  — конечное целое расширение  $R[t_0]$ , поэтому можно выбрать элементы  $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$ , порождающие  $A$  как  $R[t_0]$ -модуль. Аналогично, пусть  $b_1, b_2, \dots, b_l$  порождают  $B$  как  $R[\frac{1}{t_0}]$ -модуль. Если  $a \in A$  целый над  $R[t_0]$ , то существует многочлен с коэффициентами из  $R[t_0]$ , корнем которого является  $a$ . Тогда, при достаточно большом  $N$ , зависящем только от данного многочлена элемент  $a/t_0^N$  цел над  $R[\frac{1}{t_0}]$ , то есть принадлежит  $B$ . Тогда выберем  $N$  настолько большим, что  $a_i/t_0^N \in B$ , а  $b_j t_0^N \in A$ . Отображение  $\bar{\mathcal{X}} \hookrightarrow \mathbb{P}_U^{m+l-1}$  на  $\mathcal{X}$  зададим набором регулярных функций  $(1 : a_1 : a_2 : \dots : a_m : b_1 t_0^N : \dots : b_l t_0^N)$ , а на  $\mathcal{Y}$  набором  $(1/t_0^N : a_1 t_0^N : a_2 t_0^N : \dots : a_m t_0^N : b_1 : \dots : b_l)$ . Видно что эти отображения согласованы на  $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ , более того  $\mathcal{X} = \bar{\mathcal{X}} \cap \mathbb{A}_U^n$ . А  $\mathcal{X}_{\infty} = \text{Spec}(B/(1/t_0^N))$ , то есть  $\mathcal{X}_{\infty}$  — спектр алгебры конечной над  $R$ . В частности, количество точек в замкнутом слое так же конечно.  $\square$

**Замечание.** На самом деле, будет удобно рассматривать вложение заданное чуть большим набором регулярных функций, а именно, вместе с каждым из выбранных порождающих  $a_i \in A$  возьмём в порождающие ещё  $a_i^2$ . Ещё удобно будет считать, что  $a_1 = t_0$ , так что  $a_i$  порождают  $A$  как  $R$ -алгебру.

Будем искать морфизм следующего вида: выберем  $\mathbb{P}_U^{n-2}$  в  $\mathbb{P}_{\infty,U}^{n-1}$  задаваемую уравнением с коэффициентами в  $R$ . И возьмём проекцию из  $\mathbb{P}_U^{n-2}$  на  $\mathbb{P}_U^1$ . Ниже, для наглядности приведён рисунок для  $n = 2$ .



Определим формально, что такое проекция с центром  $\mathbb{P}_U^{n-2}$  при условии, что  $\mathbb{P}_U^{n-2} \cap X = \emptyset$ . В-первых, после замены координат можно считать, что  $\mathbb{P}_U^{n-2}$  задаётся уравнениями  $T_0 = T_1 = 0$ . Рассмотрим  $\mathbb{P}_U^n \times_U \mathbb{P}_U^1$ . Здесь, пусть  $\mathbb{P}_U^n = Proj(R[T_0, T_1, \dots, T_n])$ , а  $\mathbb{P}_U^1 = Proj(R[t_0, t_1])$ . В этом пространстве рассмотрим замкнутое подмножество  $\hat{\mathbb{P}}_U^n$  задаваемое биоднородным уравнением  $t_0 T_1 = t_1 T_0$ . Заметим, что оно содержит  $\mathbb{P}_U^{n-2} \times_U \mathbb{P}_U^1$ .

**Лемма 2.** Существует отображение  $\mathbb{P}_U^n - \mathbb{P}_U^{n-2} \rightarrow \hat{\mathbb{P}}_U^n - \mathbb{P}_U^{n-2} \times_U \mathbb{P}_U^1$  такое, что композиция  $\mathbb{P}_U^n - \mathbb{P}_U^{n-2} \rightarrow \hat{\mathbb{P}}_U^n - \mathbb{P}_U^{n-2} \times_U \mathbb{P}_U^1 \subset \mathbb{P}_U^n \times_U \mathbb{P}_U^1 \rightarrow \mathbb{P}_U^n$  Это стандартное вложение  $\mathbb{P}_U^n - \mathbb{P}_U^{n-2}$  в  $\mathbb{P}_U^n$ . Более того, это отображение является изоморфизмом.

*Доказательство.* Множество  $\mathbb{P}_U^n - \mathbb{P}_U^{n-2}$  покрывается двумя стандартными аффинными картами в  $\mathbb{P}_U^n$ ,  $\mathbb{P}_U^n - \mathbb{P}_U^{n-2} = \mathbb{A}_{0,U}^n \cup \mathbb{A}_{1,U}^n$ , достаточно задать согласованные отображения там, и проверить, что это изоморфизмы. Множество  $\hat{\mathbb{P}}_U^n - \mathbb{P}_U^{n-2} \times_U \mathbb{P}_U^1$  также покрывается двумя картами, это  $\mathbb{A}_{0,U}^n \times_U \mathbb{P}_U^1 \cap \hat{\mathbb{P}}_U^n$  и  $\mathbb{A}_{1,U}^n \times_U \mathbb{P}_U^1 \cap \hat{\mathbb{P}}_U^n$ . Они естественно изоморфны  $\mathbb{A}_{0,U}^n$  и  $\mathbb{A}_{1,U}^n$ , равенство тривиально проверяется для их координатных колец.

□

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{P}_U^n - \mathbb{P}_U^{n-2} & \xrightarrow{\sim} & \hat{\mathbb{P}}_U^n - \mathbb{P}_U^{n-2} \times_U \mathbb{P}_U^1 & \hookrightarrow & \hat{\mathbb{P}}_U^n & \hookrightarrow & \mathbb{P}_U^n \times_U \mathbb{P}_U^1 \\
\uparrow & & & & & & \downarrow pr_2 \\
\tilde{\mathcal{X}} & \xrightarrow{\hspace{10em}} & & & & & \mathbb{P}_U^1
\end{array}$$

Итого получается цепочка отображений, изображённая в диаграмме выше, проекцию определим как их композицию. Заметим, что при этом сужение проекции на  $\mathcal{X}$  бьёт в  $\mathbb{A}_U^1$ .

**2.3. Выбор подпространства для проектирования.** Теперь займёмся выбором центра проекции. Для начала сделаем это в замкнутом слое. Введём некоторые обозначения. Пусть  $X_k = \text{Spec}(A/\mathfrak{m}A)$  — пересечение  $\mathcal{X}$  и замкнутого слоя,  $\bar{X}_k$  — пересечение  $\tilde{\mathcal{X}}$  и замкнутого слоя,  $Z_k$  — пересечение  $\mathcal{Z}$  и замкнутого слоя. Переобозначим кольцо  $A/\mathfrak{m}A = \bar{A}$ . Аналогично определяется  $X_{\infty, k}$ . Заметим, что раз  $\mathcal{Z}$  было квазиконечно над  $U$ , то  $Z_k$  теперь просто состоит из конечного множества точек. Тогда ищем  $\mathbb{P}_k^{n-2} \subset \mathbb{P}_{\infty, k}^{n-1}$ , не пересекающуюся с  $X_k$ . Проекция задается прежним способом:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{P}_k^n - \mathbb{P}_k^{n-2} & \xrightarrow{\sim} & \hat{\mathbb{P}}_k^n - \mathbb{P}_k^{n-2} \times \mathbb{P}_k^1 & \hookrightarrow & \hat{\mathbb{P}}_k^n & \hookrightarrow & \mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^1 \\
\uparrow & & & & & & \downarrow pr_2 \\
\bar{X}_k & \xrightarrow{\hspace{10em}} & & & & & \mathbb{P}_k^1
\end{array}$$

Заметим, что из такого определения следует, что прообраз рациональной замкнутой точки (то есть точки, поле вычетов в которой равно  $k$ ) равен пересечению  $X_k$  с некоторым гиперпространством в  $\mathbb{P}_k^n$ , содержащим  $\mathbb{P}_k^{n-2}$ .

Пусть  $\bar{k}$  — алгебраическое замыкание поля  $k$ . Рассмотрим расширение скаляров  $\otimes \bar{k}$ , перейдём от  $k$  к  $\bar{k}$ .

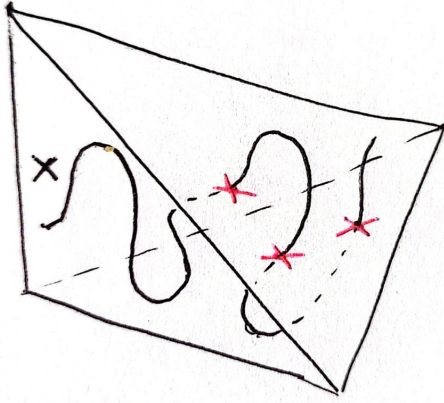
$$\begin{array}{ccccc}
X_{\bar{k}} & \hookrightarrow & \bar{X}_{\bar{k}} & \hookrightarrow & \mathbb{P}_{\bar{k}}^n \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
X & \hookrightarrow & \bar{X} & \hookrightarrow & \mathbb{P}^n
\end{array}$$

Заметим, что раз  $x_0$  — рациональная точка, то над ней в  $\bar{X}_{\bar{k}}$  висит ровно 1 точка. Раз  $Z_k$  состояло из конечного множества точек, то и  $Z_{\bar{k}}$  состоит из конечного множества точек. Теперь мы будем выбирать  $\mathbb{P}_{\bar{k}}^{n-2} \subset \mathbb{P}_{\infty, \bar{k}}^{n-1}$ , задаваемую уравнением с коэффициентами из  $k$ .

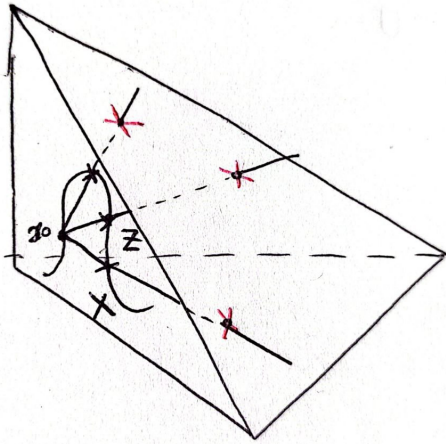
**Лемма 3.**  $X_{\bar{k}}$  — гладкая кривая.

Наконец, займемся выбором. Опишем несколько условий, выполнения которых хотим добиться. Пусть  $\pi_{\bar{k}}$  — наша проекция. Можно считать, что  $\pi_{\bar{k}}(x_0) = 0 \in \mathbb{A}_{\bar{k}}^1$ .

- (1)  $\mathbb{P}_{\bar{k}}^{n-2} \cap X_{\infty, \bar{k}} = \emptyset$ . Заметим, что раз  $\mathcal{X}_{\infty}$  конечно над  $U$ , то  $X_{\infty, \bar{k}}$  просто конечно. А значит, это условие означает просто, что  $\mathbb{P}_{\bar{k}}^{n-2}$  не проходит через конечное число фиксированных точек.



- (2)  $D_{0,\bar{k}} = \pi_{\bar{k}}^{-1}(0) \cap Z = \emptyset$ . Другими словами, гиперпространство, натянутое на  $\mathbb{P}_{\bar{k}}^{n-2}$  и  $x_0$  не содержит точек из  $Z$ . Это эквивалентно тому, что это гиперпространство не содержит прямых проходящих через  $x_0$  и  $z \in Z_{\bar{k}}$ . А это, в свою очередь эквивалентно тому, что  $\mathbb{P}_{\bar{k}}^{n-2}$  не содержит точек пересечения  $\mathbb{P}_{\infty,\bar{k}}^{n-1}$  с прямыми через  $x_0$  и  $z \in Z_{\bar{k}}$ . Множество  $Z_{\bar{k}}$  конечно, а значит это условие тоже означает, что  $\mathbb{P}_{\bar{k}}^{n-2}$  не проходит через конечное число фиксированных точек.



- (3)  $d\pi_{\bar{k}}|_{D_{0,\bar{k}}} \neq 0$ . А именно,  $(\bar{A} \otimes \bar{k})/\pi^*(\mathfrak{m}_0)$  — сепарабельная  $\bar{k}$  алгебра, где  $\mathfrak{m}_0$  — максимальный идеал, соответствующий точке  $0 \in \mathbb{A}_{\bar{k}}^1$ . Это условие менее тривиальное, с ним разберёмся отдельно.

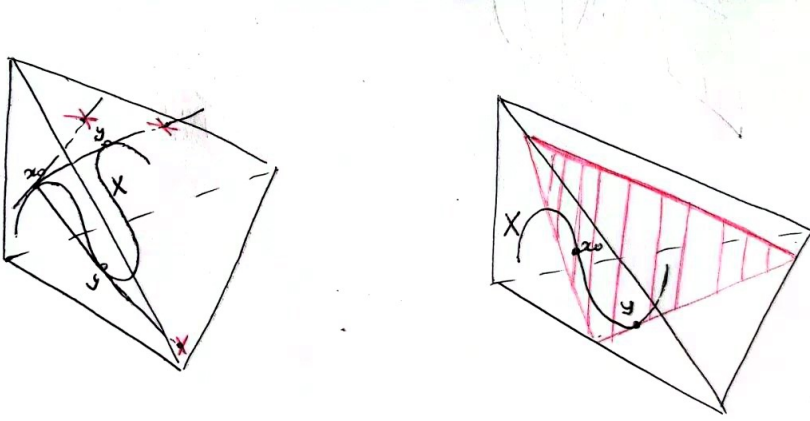
Займёмся условием (3). Раз поле  $\bar{k}$  алгебраически замкнуто, а  $X_{\bar{k}}$  — гладкая кривая, то в любой замкнутой точке  $y \in X_{\bar{k}}$  есть касательное пространство  $T_y X_{\bar{k}}$ , которое естественно отождествляется с прямой в  $\mathbb{A}_{\bar{k}}^n$ .



**Лемма 4.** *Отображение  $d\pi_{\bar{k}}$  на касательном пространстве действует естественным образом, как проекция. То есть дифференциал в точке  $y$  равен 0 тогда и только тогда, когда прямая  $T_y X_{\bar{k}}$  лежит в гиперпространстве, проходящем через  $y$  и  $\mathbb{P}_{\bar{k}}^{n-2}$ .*

*Доказательство.* Можно считать, что  $\pi_{\bar{k}}$  это параллельная проекция на первую координатную ось, потому что это верно с точностью до замены координат. Еще можно считать, что  $y$  — начало координат. Пусть  $X_{\bar{k}}$  задается идеалом  $I = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ . Тогда невырожденность дифференциала в точке  $y$  эквивалентна тому, что функция  $x_1$  не лежит в  $\mathfrak{m}_y^2$ , то есть в  $x_1 + I$  нет элементов с нулевой линейной частью. То есть тому, что линейная оболочка линейных частей  $f_j$  не содержит  $x_1$ , а это как раз и означает то, что нужно, ведь касательное пространство соответствует идеалу, порожденному линейными частями  $f_j$ .  $\square$

То есть, хотелось бы, чтобы для любой  $y \in X_{\bar{k}}$  касательное пространство в точке  $y$  не лежало в гиперпространстве натянутом на  $y$  и  $\mathbb{P}_{\bar{k}}^{n-2}$ . Рассмотрим произвольную точку  $y \in X_{\bar{k}}$ . Есть две принципиальных ситуации. (3.0) Если  $y = x_0$ , то это условие запрещает содержать точку пересечения  $\ell$  и  $\mathbb{P}_{\infty, \bar{k}}^{n-1}$ . (3.1) Если касательная  $\ell$  в точке  $y$  проходит через  $x_0$ , то наше условие означает, что  $\mathbb{P}_{\bar{k}}^{n-2}$  не содержит точку  $\ell \cap \mathbb{P}_{\infty, \bar{k}}^{n-1}$ . (3.2) Иначе, наше условие означает, что  $\mathbb{P}_{\bar{k}}^{n-2}$  не содержит прямую, полученную пересечением  $\mathbb{P}_{\infty, \bar{k}}^{n-1}$  и плоскости, натянутой на  $\ell$  и  $x_0$ . Разберемся с ситуациями отдельно.



Рассмотрим отображение  $pr_{x_0}: X_{\bar{k}} - \{x_0\} \rightarrow \mathbb{P}_{\infty, \bar{k}}^{n-1}$ , являющееся центральной проекцией с центром в  $x_0$ . Оно, очевидно, регулярное. Его дифференциал так же действует естественно, то есть точка является точкой ветвления  $pr_{x_0}$  тогда, и только тогда, когда касательная к кривой в этой точке проходит через точку  $x_0$ . То есть, точки из ситуации (3.1) это ровно точки ветвления  $pr_{x_0}$ . Докажем, что они создают конечное количество запретов вида  $\mathbb{P}_{\bar{k}}^{n-2}$  не должно проходить через фиксированную точку. Рассмотрим  $X'_{\bar{k}}$  — неприводимую компоненту  $X_{\bar{k}}$ . Заметим, что раз  $X_{\bar{k}}$  — гладкая, то её неприводимые компоненты это компоненты связности. Если  $X'_{\bar{k}}$  — это прямая, содержащая  $x_0$ , то любая точка на этой прямой запрещает ровно точку  $X'_{\bar{k}} \cap \mathbb{P}_{\infty, \bar{k}}^{n-1}$ . В противном случае, каждая из точек ветвления  $pr_{x_0}: X'_{\bar{k}} - \{x_0\} \rightarrow \mathbb{P}_{\infty, \bar{k}}^{n-1}$  запрещает одну точку. Известно, что множество точек ветвления замкнуто. Если  $\text{char}(\bar{k}) = 0$ , то так как морфизм непостоянный, то множество точек ветвления не совпадает со всей кривой, следовательно, оно конечно. Случай конечной характеристики разберём отдельно:

Положим противное. Можно считать, что  $x_0$  — начало координат. Пусть  $X'_{\bar{k}}$  задается простым идеалом  $I \subseteq R[t_1, \dots, t_n]$ . Рассмотрим любой  $f \in I$ . Раз касательная в любой точке  $y \in X'_{\bar{k}}$

(отличной от  $x_0$ ) проходит через  $x_0$ , то  $\sum_{i=1}^n t_i \frac{\partial f}{\partial t_i}$  равно 0 в  $y$ . Следовательно  $\sum_{i=1}^n t_i \frac{\partial f}{\partial t_i} \in I$ . Что делает такая операция в условиях характеристики  $p$ ? Все мономы домножаются на их степень. В частности, все мономы со степенью кратной  $p$  исчезают. Теперь домножу полученную функцию на  $t_1$  (без ограничений общности могу считать, что  $t_1$  лежит в  $I$ ) и продelaю эту операцию снова. Продelaю так  $p - 1$  раз. Получится, что  $x_1^{p-1}(p-1)!f^{(1)} \in I$ , а значит,  $f^{(1)} \in I$ , где  $f^{(1)}$  сумма мономов  $f$ , степень которых даёт остаток 1 при делении на  $p$ .

На самом деле, такие кривые действительно бывают, используя выкладки выше, несложно привести пример такой кривой, отличной от прямой. Но мы об этом позаботились, обратим внимание на замечание, сделанное после леммы 1. Из него следует, что есть  $m$  координат (без ограничений общности первые  $m$ ), соответствующих  $a_i$ -тым, координатные функции которых порождают координатное кольцо кривой (поскольку  $a_i$  порождают  $A$  как  $R$ -алгебру), а ещё  $m$  координат, снова без ограничений общности вторые  $m$  удовлетворяют уравнениям  $t_i^2 = t_{i+m}$  для  $i$  от 1 до  $m$ . То есть  $t_i^2 - t_{i+m} + c \in I$ , а тогда, как мы поняли  $t_{i+m} \in I$ , Значит, и  $t_i^2 + c \in I$ , следовательно, и  $t_i - \sqrt{-c} \in I$  (для какого-то из 2 корней). Но тогда первые  $m$  координатных функций не могут порождать координатное кольцо, ведь они все постоянны на  $X'_k$ . Заметим, что отсюда же следует, что неприводимая компонента, содержащая  $x_0$  — не прямая. Значит число точек ветвления  $pr_{x_0}$  — конечно. Обозначим его буквой  $B$ .

Итого, условия (1), (2), (3.0), (3.1) накладывают простой запрет:  $\mathbb{P}_k^{n-2}$  не должно проходить через конечное множество точек. Рассмотрим  $H = (\mathbb{P}_{\infty, \bar{k}}^{n-1})^*$  — пространство всевозможных  $n - 2$  подпространств в  $\mathbb{P}_{\infty, \bar{k}}^{n-1}$ . Ясно, что оно просто изоморфно  $\mathbb{P}_k^{n-1}$ , в частности, оно  $n - 1$ -мерно. Множество подпространств, содержащих фиксированную точку, равно гиперпространству в  $H$ , в частности, это замкнутое множество размерности  $n - 2$ . То есть, все рассмотренные условия запрещают в  $H$  замкнутое подмножество размерности  $n - 2$ . Осталось разобраться с условием (3.2).

Буду обозначать плоскость, проходящую через  $x_0$  и касательную к кривой в точке  $y$  как  $Lin(T_y X_{\bar{k}}, x_0)$ . Пусть  $L$  — пространство прямых в  $\mathbb{P}_{\infty, \bar{k}}^{n-1}$ .  $L$  — проективное многообразие над  $\bar{k}$ .

Рассмотрим отображение  $\psi: X_{\bar{k}} \setminus B \rightarrow L$ , которое  $y \mapsto Lin(T_y X_{\bar{k}}, x_0)$ .

**Лемма 5.** *Отображение  $\psi$  — регулярно.*

*Доказательство.* Рассмотрим точку  $y \in X_{\bar{k}} \setminus B$ . Можно выбрать  $n - 1$  многочлен из идеала  $f_1, \dots, f_n$ , соответствующего кривой, так, чтобы линейные части выбранных многочленов в точке  $y$  задавали уравнение касательной. Тогда уравнение  $Lin(T_y X_{\bar{k}}, x_0)$  выражается через частные производные  $f_i$ , то есть задается полиномиально. Заметим, что условие линейной независимости открыто, а поэтому линейные части  $f_i$  линейно независимы и в некоторой окрестности точки  $y$ . Здесь можно написать просто явную формулу. А значит уравнение  $Lin(T_y X_{\bar{k}}, x_0)$  задаётся тем же способом и в некоторой окрестности точки  $y$ .  $\square$

Ясно, что замыкание  $Im(\psi)$  имеет размерность не больше 1. Обозначим это замыкание  $Z_0$ .

**Лемма 6.** *Гиперпространства в  $\mathbb{P}_{\infty, \bar{k}}^{n-1}$ , содержащие прямые из  $Z_0 \subset L$ , рассматриваемые как точки в  $H$  лежат в замкнутом подмножестве размерности  $n - 2$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим пространство  $H \times L$ . В нём рассмотрим замкнутое подмножество  $Y$ , где  $(h, \ell) \in Y$  тогда и только тогда, когда прямая  $\ell$  лежит в гиперпространстве  $h$ . Оно замкнутое, так как это условие локально полиномиально.

$$\begin{array}{ccccc}
H & \xleftarrow{pr_1} & Y & \xrightarrow{pr_2} & L \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
pr_1(pr_2^{-1}(Z_0)) & \xleftarrow{pr_1} & pr_2^{-1}(Z_0) & \xrightarrow{pr_2} & Z_0
\end{array}$$

Заметим, что  $pr_2 : Y \rightarrow L$ , где  $pr_2$  просто проекция на вторую координату, это локально тривиальное расслоение со слоем  $\mathbb{P}_{\bar{k}}^{n-3}$ . Тогда размерность  $pr_2^{-1}(Z_0)$  не превосходит  $n - 2$ , а тогда то же можно сказать и про размерность замыкания  $pr_1(pr_2^{-1}(Z_0))$ . А все гиперпространства, содержащие прямые из  $Z_0$  там лежат.

□

Итого, наши условия запрещают в  $H$  замкнутое подмножество размерности  $n - 2$ . Значит, разрешено открытое непустое подмножество. Осталось выбрать в нём точку с координатами из  $k$ , тогда мы выберем  $\mathbb{P}^{n-2}$  над  $\bar{k}$  и соответствующую над  $k$ .

**Лемма 7.** *Открытое непустое подмножество в  $H$  содержит точку с координатами из  $k$ . Напоминание:  $H$  изоморфно  $\mathbb{P}_{\bar{k}}^{n-1}$ .*

*Доказательство.* Раз множество открыто и непусто, то его дополнение задаётся каким-то ненулевым идеалом, порождённым набором однородных уравнений. Рассмотрим любое из них. Достаточно найти точку с координатами из  $k$  не удовлетворяющую этому уравнению. Уравнение — многочлен от  $n + 1$  переменных  $t_0, t_1, \dots, t_n$ . Рассмотрим его как многочлен от  $n$  переменных с коэффициентами из  $\bar{k}[t_0]$ . Он ненулевой. Раз поле  $k$  бесконечно, то можно подобрать значение  $t_0 \in k$ , так, чтобы хотя бы один из коэффициентов этого многочлена оказался не равен нулю, и  $t_0 \neq 0$ . Так можно, так как каждый коэффициент — многочлен от  $t_0$ , а значит имеет конечное число корней. Теперь зафиксируем  $t_0$ , получили ненулевой многочлен от  $n$  переменных. Сделаем так ещё несколько раз, поочерёдно присваивая значения координатам. В конце получим набор координат, не удовлетворяющих уравнению. Он и задаёт искомую точку. □

Заметим, что  $D_{0,\bar{k}}$  состоит из конечного числа точек, например потому, что это замкнутое подмножество в кривой, и не соедражит ни одну из компонент связности целиком, иначе на ней дифференциал был бы тождественно нулевым. И раз дифференциал нигде не нулевой на  $D_{0,\bar{k}}$ , то алгебра  $(\bar{A} \otimes \bar{k})/\pi_{\bar{k}}^*(\mathfrak{m}_0)$  просто равна  $\bar{k}^m$ , для некоторого  $m$ , в частности она сепарабельна над  $\bar{k}$ .

*Замечание.* Если отметить в каждой неприводимой компоненте (их конечное число)  $X_{\bar{k}}$  точку  $x'$ , то повторив рассуждения про условие (3), можно понять, что все возможные  $\mathbb{P}_{\bar{k}}^{n-2}$  в  $H$ , кроме замкнутого подмножества размерности  $n - 2$  таковы, что  $d\pi_{\bar{k}}$  в точке  $x'$  не равен 0. Значит, можно считать, что на каждой неприводимой компоненте кривой дифференциал не тождественно нулевой. Так же мы поступим и в случае, когда рассматриваемая компонента  $\mathcal{X}$  не компонента с  $x_0$ .

Заметим, что построенное отображение  $\pi_{\bar{k}} : \bar{X}_{\bar{k}} \rightarrow \mathbb{P}_{\bar{k}}^1$  имеет конечное число точек ветвления, поскольку оно замкнуто, и по предыдущему замечанию ни одна компонента целиком в нём не лежит. Тогда можно выбрать произвольную точку в  $\mathbb{A}_{\bar{k}}^1 \subset \mathbb{P}_{\bar{k}}^1$  с координатой из  $k$  такую, что в её прообразе нет точек из  $Z_{\bar{k}}$  и точек ветвления, поскольку не подходящих нам точек конечное число. С точностью до замены координат можно считать, что эта точка и есть 1. Тогда алгебра  $(\bar{A} \otimes \bar{k})/\pi_{\bar{k}}^*(\mathfrak{m}_1)$  так же сепарабельна над  $\bar{k}$ .

*Замечание.* Если речь идёт про неприводимую компоненту  $\mathcal{X}$  не содержащую  $x_0$ , то с выбором 0 на  $\mathbb{A}_{\bar{k}}^1$  поступим так же как и с выбором 1.

Вернёмся теперь в картинку над полем  $k$ . Получили подпространство  $\mathbb{P}_k^{n-2}$ , из которого собираемся проектироваться. Оно, очевидно, не пересекается с  $X_{\infty,k}$ . Так же ясно, что  $D_{0,k} = \pi_k^{-1}(0)$  и  $D_{1,k} = \pi_k^{-1}(1)$  не содержат точек из  $Z_k$ , так как это было верно над алгебраическим замыканием. Пусть отображение проекции это  $\pi_k$ .

Поймём, что  $k$ -алгебры  $\bar{A}/\pi_k^*(\mathfrak{m}_0)$  и  $\bar{A}/\pi_k^*(\mathfrak{m}_1)$  так же сепарабельны. Конечномерная  $k$ -алгебра  $B$  называется сепарабельной над  $k$ , если билинейная форма  $Tr_k(b_1, b_2) = tr_k(b_1 b_2)$  невырождена. Алгебры  $\bar{A}/\pi_k^*(\mathfrak{m}_0)$  и  $\bar{A}/\pi_k^*(\mathfrak{m}_1)$  отличаются от соответствующих им  $(\bar{A} \otimes \bar{k})/\pi_k^*(\mathfrak{m}_0)$  и  $(\bar{A} \otimes \bar{k})/\pi_k^*(\mathfrak{m}_1)$  расширением скаляров. Но  $k$ -алгебра  $B$  сепарабельна над  $k$  тогда и только тогда, когда  $\bar{k}$ -алгебра  $B \otimes \bar{k}$  сепарабельна на  $\bar{k}$ . Действительно, в подходящих базисах матрицы соответствующих билинейных форм просто совпадают.

С точностью до замены координат, я могу считать что выбранное подпространство  $\mathbb{P}_k^{n-2}$  задаётся уравнениями  $t_0 = t_1 = 0$ . Тогда в  $\mathbb{P}_U^n$  выбираем  $\mathbb{P}_U^{n-2} \subset \mathbb{P}_{\infty,U}^{n-1}$  заданную уравнениями  $T_0 = T_1 = 0$ . Соответствующая проекция —  $\pi$ . Тогда сужение  $\pi$  на замкнутый слой совпадает с  $\pi_k$ , а пересечение  $\mathbb{P}_U^{n-2}$  с замкнутым слоем совпадает с  $\mathbb{P}_k^{n-2}$ .

Так же несложной заменой координат можно считать, что  $\pi(\Delta(U)) = \{0\} \times U$ . Действительно, выбор отображения соответствует выбору элемента алгебры  $A$ , и если выбранный элемент  $\tau$  не лежит в идеале  $I$  (это идеал соответствующий  $\Delta(U)$ ), то можно вычесть из него элемент  $r$  кольца  $R$ , так, чтобы  $\tau - r \in I$ . А именно, это возможно так как композиция  $R \hookrightarrow A \rightarrow A/I$  задаёт изоморфизм  $R$  и  $A/I$ . Изменение элемента на элемент  $R$  меняет только координаты в образе, поэтому так действительно можно считать.

На этом построение морфизма завершено.

### 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ЛЕММА: ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СВОЙСТВ МОРФИЗМА

**3.1. Конечность морфизма.** Сначала займёмся свойством (1) из теоремы 1, а именно, докажем конечность  $\pi$ .

**Лемма 8.** Пусть  $\mathcal{Y} \subset \mathbb{P}_U^n$  замкнутое подмножество не имеющее точек в замкнутом слое. Кроме того,  $\mathcal{Y}$  конечно над  $U$ . Тогда  $\mathcal{Y} = \emptyset$ .

*Доказательство.* Пусть  $S$  — градуированная  $R$ -алгебра, соответствующая  $\mathcal{Y}$ . Раз  $\mathcal{Y}$  не имеет точек в замкнутом слое, то градуированная  $k$ -алгебра  $S/\mathfrak{m}S$  имеет конечное число ненулевых градуированных компонент. Пусть  $S = \bigoplus_{i=0}^{\infty} S_i$ . Тогда при достаточно большом  $i$   $S_i = \mathfrak{m}S_i$ . А поскольку  $S_i$  — конечно порожденный  $R$ -модуль, то из леммы Накаямы следует, что  $S_i = 0$  при достаточно большом  $i$ . Значит  $S$  конечно над  $R$ , откуда  $\mathcal{Y} = Proj(S) = \emptyset$ .  $\square$

**Лемма 9.**  $\bar{\mathcal{X}} \cap \mathbb{P}_U^{n-2} = \emptyset$

*Доказательство.* Действительно,  $\bar{\mathcal{X}} \cap \mathbb{P}_U^{n-2} = \mathcal{X}_{\infty} \cap \mathbb{P}_U^{n-2}$ , а поскольку  $\mathcal{X}_{\infty}$  конечно над  $U$ , то  $\mathcal{X}_{\infty} \cap \mathbb{P}_U^{n-2}$  тем более конечно на  $U$ . По построению  $\mathcal{X}_{\infty} \cap \mathbb{P}_U^{n-2}$  не имеет точек в замкнутом слое, а тогда по лемме 8 оно пустое.  $\square$

Как следствие,  $\bar{\mathcal{X}} \subset \mathbb{P}_U^n - \mathbb{P}_U^{n-2}$ , более того, это вложение замкнуто. Вспомним что такое  $\bar{\pi}: \bar{\mathcal{X}} \rightarrow \mathbb{P}_U^1$ .

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{P}_U^n - \mathbb{P}_U^{n-2} & \xrightarrow{\sim} & \hat{\mathbb{P}}_U^n - \mathbb{P}_U^{n-2} \times_U \mathbb{P}_U^1 & \hookrightarrow & \hat{\mathbb{P}}_U^n & \hookrightarrow & \mathbb{P}_U^n \times_U \mathbb{P}_U^1 \\
\uparrow & & & & & & \downarrow pr_2 \\
\bar{\mathcal{X}} & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & & & & & \mathbb{P}_U^1
\end{array}$$

Или, более кратко:

$$\begin{array}{ccc}
\bar{\mathcal{X}} & \hookrightarrow & \hat{\mathbb{P}}_U^n \\
& \searrow \bar{\pi} & \downarrow pr \\
& & \mathbb{P}_U^1
\end{array}$$

При этом, поскольку отображение  $\mathbb{P}_U^n - \mathbb{P}_U^{n-2} \rightarrow \hat{\mathbb{P}}_U^n - \mathbb{P}_U^{n-2} \times_U \mathbb{P}_U^1$  изоморфизм, то  $\bar{\mathcal{X}} \hookrightarrow \hat{\mathbb{P}}_U^n$  — замкнутое вложение. Конечность — локально свойство, более того, достаточно его проверить на локальных кольцах. А именно, достаточно показать, что для любой точки  $v \in \mathbb{P}_U^1$  и её «окрестности»  $V = \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_U^1, v})$  морфизм  $\bar{\pi}^{-1}(V) \rightarrow V$  конечен. Обозначим отображение  $\hat{\mathbb{P}}_U^n \rightarrow \mathbb{P}_U^1$  как  $pr$ . Тогда имеем

$$\begin{array}{ccc}
\bar{\pi}^{-1}(V) & \hookrightarrow & pr^{-1}(V) \\
& \searrow \bar{\pi} & \downarrow pr \\
& & \mathbb{P}_U^1
\end{array}$$

При этом  $\bar{\pi}^{-1}(V) \hookrightarrow pr^{-1}(V)$  — замкнутое вложение. Кроме того  $\bar{\pi}^{-1}(V) \subset pr^{-1}(V) - \mathbb{P}_U^{n-2} \times_U V$ . Нетрудно убедиться, что  $pr: \hat{\mathbb{P}}_U^n \rightarrow \mathbb{P}_U^1$  — локально тривиальное расслоение со слоем  $\mathbb{P}^{n-1}$  (достаточно проверить на двух аффинных картах). В частности,  $pr^{-1}(V)$  изоморфно  $\mathbb{P}_V^{n-1}$ . Тогда осталось доказать такую лемму:

**Лемма 10.**  $V = \text{Spec}(S)$ , где  $S$  — локальное кольцо, пусть  $\mathfrak{n}$  — его максимальный идеал.  $\mathcal{Y} \subset \mathbb{A}_V^m \subset \mathbb{P}_V^m$ , при этом вложение  $\mathcal{Y} \subset \mathbb{P}_V^m$  — замкнутое. Тогда  $\mathcal{Y}$  конечно над  $V$ .

*Доказательство.* Пусть  $\mathbb{P}_V^m = \text{Proj}(S[t_0, t_1, \dots, t_m]) = \text{Proj}(\bigoplus_{i=0}^{\infty} S_i)$ , замкнутому подмножеству

$\mathcal{Y}$  соответствует однородный идеал  $I = \bigoplus_{i=0}^{\infty} I_i$ . Пусть без ограничений общности  $\mathbb{P}_{\infty, V}^{m-1}$  задается уравнением  $t_0 = 0$ . Пусть  $J = (t_0, \dots, t_m)$ , тогда  $S_j = J^j$ .

Поскольку в замкнутом слое  $\mathcal{Y}$  нет точек на бесконечности, то градуированная алгебра  $S[t_0, \dots, t_m]/(I, t_0)$  конечна над полем  $S/\mathfrak{n}$ . А именно, при достаточно большом  $N$  верно  $J^N = I_N + t_0 J^{N-1} + \mathfrak{n} J^N$ . Отсюда по лемме Накаямы  $S_N = J^N = I_N + t_0 J^{N-1}$ .

Поскольку  $\mathcal{Y} \subset \mathbb{A}_V^m$ , то  $\mathcal{Y} = \text{Spec}(S[\frac{t_1}{t_0}, \dots, \frac{t_m}{t_0}]/I_{t_0})$ , где  $I_{t_0}$  — соответствующий идеал. Поскольку  $S_N = J^N = I_N + t_0 J^{N-1}$ , то  $(\frac{J}{t_0})^N = (\frac{J}{t_0})^{N-1} + (I_N)t_0$ . Следовательно, отображение  $S \oplus \frac{J}{t_0} \oplus \dots \oplus (\frac{J}{t_0})^M \rightarrow S[\frac{t_1}{t_0}, \dots, \frac{t_m}{t_0}]/I_{t_0}$  сюръективно при достаточно большом  $M$ . А значит координатное кольцо  $\mathcal{Y}$  конечно над  $S$  как образ конечно порожденного  $S$ -модуля.

□

Применив лемму для  $m = n - 1$ ,  $\mathcal{Y} = \bar{\pi}^{-1}(V) \subset pr^{-1}(V) = \mathbb{P}_V^{n-1}$  получаем, что  $\bar{\pi}: \bar{\mathcal{X}} \rightarrow \mathbb{P}_U^1$  конечен. Как известно, свойство конечности морфизма сохраняется при замене базы, а  $\mathcal{X}$  — полный прообраз  $\mathbb{A}_U^1 \subset \mathbb{P}_U^1$ , то есть  $\pi$  получается из  $\bar{\pi}$  заменой базы, значит, он конечен.

*Замечание.* Аналогично доказывается и конечность  $\mathcal{D}_0 \rightarrow U$  и  $\mathcal{D}_1 \rightarrow U$ , что требуется в свойствах (4) и (5).

**3.2. Свойства (4) и (5): этальность морфизма на прообразах 0 и 1.** Конечность нужных морфизмов мы уже доказали в конце предыдущего пункта.

**Лемма 11.** Пусть  $k'$  — конечное алгебраическое расширение поля  $k$ . Тогда если билинейная форма  $Tr_{k'/k}(x, y) = tr_{k'/k}(xy)$  невырождена, то это расширение сепарабельно.

*Доказательство.* Разложим расширение  $k \subset k'$  в композицию  $k \subset k'' \subset k'$ , где  $k \subset k''$  — сепарабельное, а  $k'' \subset k'$  — чисто несепарабельное. Тогда  $tr_{k'/k}(x) = tr_{k'/k''}(tr_{k''/k}(x))$ . Если  $k'' \neq k'$ , то  $tr_{k'/k''}$  — тождественный ноль. Действительно, если расширение чисто несепарабельно, то характеристика поля  $p \neq 0$ ,  $dim_k''(k')$  делится на  $p$ , то есть след любого элемента из  $k''$  равен нулю. Для любого другого элемента минимальный многочлен имеет вид  $T^{p^l} - c_0 =$ , а след равен второму коэффициенту, то есть 0.  $\square$

**Лемма 12.** Пусть  $\mathcal{O}$  — локальное кольцо,  $\mathfrak{m}$  — его максимальный идеал, а  $k = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$  — поле вычетов.  $\mathcal{O}'$  —  $\mathcal{O}$ -алгебра, являющаяся плоским, конечно-порождённым  $\mathcal{O}$ -модулем. Пусть  $\bar{\mathcal{O}}' = \mathcal{O}'/\mathfrak{m}\mathcal{O}'$  — сепарабельная  $k$ -алгебра. Тогда  $\mathcal{O}'$  этально над  $\mathcal{O}$ .

*Доказательство.* Во-первых, заметим, что любой максимальный идеал  $\mathcal{O}'$  содержит  $\mathfrak{m}\mathcal{O}'$ . Действительно, если для некоторого максимального идеала  $\mathfrak{n}$  это неверно, что  $\mathfrak{n} + \mathfrak{m}\mathcal{O}' = \mathcal{O}'$ , а тогда из леммы Накаямы  $\mathfrak{n} = \mathcal{O}'$ , что неверно.

Во-вторых,  $\bar{\mathcal{O}}'$  — конечномерная  $k$ -алгебра, значит это нетерово кольцо размерности 0, то есть артиново, а тогда оно раскладывается в произведение локальных артиновых колец. При этом в алгебре  $\bar{\mathcal{O}}'$  нет нильпотентов, ведь иначе, если  $\alpha$  — нильпотент, то для любого  $\beta \in \bar{\mathcal{O}}'$   $\alpha\beta$  также нильпотент, а следовательно,  $Tr(\alpha, \beta) = tr(\alpha\beta) = 0$ , что противоречит невырожденности. Значит, каждое из локальных артиновых колец является просто конечным расширением поля  $k$ . Пусть  $\bar{\mathcal{O}}' = \prod_{i=1}^m k_i$ . В частности, в базисе  $\bar{\mathcal{O}}'$  составленном из базисов  $k_i$  над  $k$  матрица билинейной формы  $Tr$  имеет блочно диагональный вид, поэтому её невырожденность равносильна невырожденности каждого из блоков. А это в свою очередь по лемме 11 влечёт сепарабельность расширений  $k \subset k_i$ .

Рассмотрим любой максимальный идеал  $\mathfrak{m}_i$ , соответствующий слагаемому  $k_i$  в разложении  $\bar{\mathcal{O}}'$ . Достаточно показать, что  $\mathcal{O}'_{\mathfrak{m}_i}$  этально над  $\mathcal{O}$ .  $\mathcal{O}'_{\mathfrak{m}_i}$  плоское над  $\mathcal{O}$  как локализация плоского,  $\mathcal{O}'_{\mathfrak{m}_i}/\mathfrak{m}_i\mathcal{O}'_{\mathfrak{m}_i} = k_i$  сепарабельно над  $k$ . Осталось проверить неразветвленность. Очевидно, что  $\mathfrak{m}\mathcal{O}'_{\mathfrak{m}_i} \subset \mathfrak{m}_i\mathcal{O}'_{\mathfrak{m}_i}$ . Но ещё  $\mathcal{O}'_{\mathfrak{m}_i}/\mathfrak{m}\mathcal{O}'_{\mathfrak{m}_i} = (\mathcal{O}'/\mathfrak{m}\mathcal{O}')_{\mathfrak{m}_i} = \bar{\mathcal{O}}'_{\mathfrak{m}_i} = k_i$ . Значит,  $\mathfrak{m}\mathcal{O}'_{\mathfrak{m}_i} = \mathfrak{m}_i\mathcal{O}'_{\mathfrak{m}_i}$ , что и требовалось.  $\square$

Теперь мы готовы доказать этальность  $\mathcal{D}_0 \rightarrow U$ , этальность  $\mathcal{D}_1 \rightarrow U$  доказывается аналогично. Пусть  $\mathcal{D}_0 = Spec(S_0)$ . В конце предыдущего пункта мы доказали, что  $S_0$  конечно над  $R$ .  $S_0/\mathfrak{m}S_0$  — сепарабельная  $k$ -алгебра, это мы доказывали в процессе построения морфизма. А также же  $R[t] \subset A$  — включение регулярных областей, поэтому  $A$  — плоский  $R[t]$ -модуль. Свойство плоскости сохраняется при замене базы, а  $\mathcal{D}_0$  — полный прообраз  $\{0\} \times U$ , значит  $\mathcal{D}_0$  плоский над  $U$ . Тогда, по лемме 12 получаем требуемое.

**3.3. Свойства (2) и (3).** Свойство (2) напрямую следует из леммы 8, поскольку раз  $\mathcal{D}_1$  конечно над  $U$ , то  $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{Z}$  тем более конечно над  $U$ . А точек в замкнутом слое это пересечение не имеет, мы об этом позаботились в процессе построения.

По построению  $\Delta(U) \subset \mathcal{D}_0$  и это вложение замкнутое.

**Лемма 13.**  $\Delta(U)$  открыто в  $\mathcal{D}_0$ .

*Доказательство.* Заметим, что  $id_U = \pi \circ \Delta$ . При этом  $\pi$  и  $id_U$  — этальные. Тогда и  $\Delta$  тоже этальный морфизм (см гл VI, т.4.7.(v) в [3]), в частности он плоский. На языке коммутативной алгебры  $\Delta$  соответствует проекции на факторкольцо, значит  $\Delta$  — конечный. Любой конечный и плоский морфизм является открытым (например, гл. 7, упр. 25 в [2]), как следствие  $\Delta(U)$  открыто в  $\mathcal{D}_0$ .  $\square$

Раз  $\Delta(U)$  открыто и замкнуто в  $\mathcal{D}_0$ , то  $\mathcal{D}_0 = \Delta(U) \sqcup \mathcal{D}'_0$ . При этом  $x_0$  не принадлежит  $\mathcal{D}'_0$ , а значит, по лемме 8  $\mathcal{D}'_0 \cap \mathcal{Z} = \emptyset$ .

На этом теорема 1 доказана.

#### 4. СВЕДЕНИЕ К ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЛЕММЕ

Вернёмся к доказательству гипотезы Гротендика-Серра 1 в нашем частном случае.

Пусть  $S$  — кольцо дискретного нормирования, с бесконечным полем вычетов  $k$  характеристики  $p \neq 2$ ,  $\mathfrak{m}$  — его максимальный идеал, а  $B$  — гладкая  $S$ -алгебра относительной размерности 1, для которой выполнено условие леммы Нётер о нормализации, а именно, существует элемент  $t_0 \in B$  такой, что  $B$  — конечно порожденный  $S[t_0]$ -модуль.  $K$  — поле частных алгебры  $B$ .

Пусть  $q = \sum_{i=1}^n a_i t_i^2$  — наша квадратичная форма,  $a_i \in B^\times$ , а  $n \geq 3$ .

**Теорема 2.** Пусть  $\alpha \in B^\times$  такой, что  $\alpha \in Sn(G_q(K))$ . Тогда для любого максимального идеала  $\mathfrak{n}$  алгебры  $B$  выполнено  $\alpha \in Sn(G_q(B_{\mathfrak{n}}))$ .

Пусть  $X = \text{Spec}(B)$ ,  $x$  — точка, соответствующая максимальному идеалу  $\mathfrak{n}$ . Пусть  $V = \text{Spec}(S)$ ,  $U = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ , далее буду использовать обозначение  $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}$ . Отображение  $X \rightarrow V$  индуцированное вложением  $S \subset B$  назовём  $p$ .

Рассмотрим полулокализацию  $B' B$  по набору простых идеалов  $\mathfrak{p}_j$  высоты 1, соответствующих неприводимым компонентам замкнутого слоя  $X$ . Частный случай теоремы, доказанной в [4] утверждает, что раз  $\alpha \in B'^\times$  такой, что  $\alpha \in Sn(G_q(K))$ , тогда  $\alpha \in Sn(G_q(B'))$ . Если вспомнить определение  $Sn$ , то несложно убедиться, что существует элемент  $f \in B$ , лежащий вне  $\bigcup \mathfrak{p}_j$ , такой, что  $\alpha \in Sn(G_q(B_f))$ . Определим  $Z = \text{Spec}(B/fB)$ .

Проверим квазиконечность  $Z$  над  $V$ . Раз  $S$  — кольцо дискретного нормирования, то в  $V$  всего две точки: замкнутая  $v$  и вторая  $\eta$ , соответствующая нулевому идеалу. Над  $v$  висит конечное число точек из  $Z$ , так как по построению  $f$  не тождественный 0 ни на одной из неприводимых компонент замкнутого слоя.  $X_\eta = p^{-1}(\eta)$  — гладкая неприводимая кривая над полем частных  $S$ , значит если её пересечение с  $Z$  не конечно, то она вся лежит в  $Z$ . Но во втором случае она обязана попасть в  $Z$  вместе со своим замыканием, а её замыкание это всё  $X$ . Значит над  $\eta$  тоже конечное число точек.

Определим  $\mathcal{X}$  как  $\text{Spec}(\mathcal{O} \otimes_S B)$ .  $\mathcal{Z}$  определим аналогично.  $\Delta: U \rightarrow \mathcal{O} \otimes_S B$  задаётся отображением  $\mathcal{O} \otimes_S B \rightarrow \mathcal{O}$ , таким, что  $x \otimes y \mapsto xy$ . Имеем две диаграммы как ниже. В них нижние треугольники коммутативны, а верхние нет.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{O} \otimes_S B & \longleftarrow & B \\
\uparrow & \nearrow & \uparrow \\
\mathcal{O} & \longleftarrow & S
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\mathcal{X} & \xrightarrow{p_X} & X \\
\downarrow p_U & \nearrow & \downarrow p \\
U & \longrightarrow & V
\end{array}$$

Заметим, что раз есть конечный сюръективный морфизм из  $X$  в  $\mathbb{A}_V^1$ , то тензорным домножением на  $\mathcal{O}$  мы получим конечный сюръективный морфизм из  $\mathcal{X}$  в  $\mathbb{A}_U^1$ . Условие квазиконечности сохраняется при замене базы, поэтому  $\tilde{Z}$  квазиконечно над  $U$ . Аналогично условие гладкости сохраняется при замене базы, поэтому  $\mathcal{X}$  — гладкая относительная кривая над  $U$ .

Определим  $\tilde{\mathcal{X}} = \text{Spec}((\mathcal{O} \otimes_S B)[b_1, \dots, b_n]/(b_1^2 = \frac{a_1 \otimes 1}{1 \otimes a_1}, \dots, b_n^2 = \frac{a_n \otimes 1}{1 \otimes a_n}))$ . А именно просто построим конечное расширение  $\mathcal{O} \otimes_S B$  добавив в него все корни из  $\frac{a_i \otimes 1}{1 \otimes a_i}$ . Далее координатное кольцо  $\mathcal{X}$  будем обозначать буквой  $\mathcal{B}$ , а координатное кольцо  $\tilde{\mathcal{X}}$  будем обозначать буквой  $\tilde{\mathcal{B}}$ . Тогда включение  $\mathcal{B} \in \tilde{\mathcal{B}}$  задаёт конечный этальный морфизм  $\tau: \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$ , а значит имеется и конечный сюръективный морфизм  $\tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathbb{A}_U^1$ . Построенное  $\tilde{\mathcal{X}}$  гладкая относительная кривая над  $U$ .  $\tilde{Z}$  определим как  $\tau^{-1}(Z)$ , раз  $\tau$  конечный, то  $\tilde{Z}$  квазиконечно над  $v$ . Осталось сказать что такое  $\tilde{\Delta}: U \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}$ . Заметим, что  $\tau^{-1}(\Delta(U)) = \text{Spec}((\mathcal{O} \otimes_S B)[b_1, \dots, b_n]/(b_1^2 = \frac{a_1 \otimes 1}{1 \otimes a_1}, \dots, b_n^2 = \frac{a_n \otimes 1}{1 \otimes a_n})/J(\Delta)) = \text{Spec}(R[b_1, \dots, b_n]/(b_1^2 = 1, \dots, b_n^2 = 1))$ . Раз характеристика поля вычетов не равна 2, то  $b_i^2 - 1 = (b_i - 1)(b_i + 1)$ . Возьмём за  $\tilde{\Delta}$  компоненту  $\text{Spec}(R[b_1, \dots, b_n]/(b_1^2 = 1, \dots, b_n^2 = 1))$  соответствующую  $b_i = 1$ . Все построенные данные для  $\tilde{\mathcal{X}}$  удовлетворяют условиям из теоремы 1, называемой нами геометрической леммой. А значит существует конечный сюръективный морфизм  $\pi: \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathbb{A}_U^1$  как в теореме 1.

Форма  $q$ , перенесённая на  $\mathcal{B}$  имеет вид  $q = \sum_{i=0}^n (1 \otimes a_i) t_i$ . Пусть  $q' = \sum_{i=0}^n (a_i \otimes 1) t_i$  другая квадратичная форма на  $\mathcal{B}$ , а точнее это та же форма, перенесённая с  $\mathcal{O}$ . Форму  $q$  можно определить на всех схемах над  $X$ , а форму  $q'$  на всех схемах над  $U$ .

Заметим, что квадратичная форма  $q$  задаёт предпучок  $\mathcal{F}: (Sch/\mathcal{B})^{op} \rightarrow Ab$ , а именно схеме  $Y = \text{Spec}(C)$ , где  $C$  —  $B$ -алгебра сопоставляется абелева группа  $C^\times / Sn(G_q(C))$ . (Здесь категория  $Sch/B$  — категория аффинных схем над  $B$ .) Более того, этот предпучок гомотопически инвариантный на  $EssSm/B$ , а именно если  $W$  — спектр локального кольца гладкой схемы, а  $pr: \mathbb{A}_W^1 \rightarrow W$  — стандартная проекция, то  $\mathcal{F}(pr)$  — изоморфизм. Так же известно, что  $\mathcal{F}$  является предпучком со слабыми трансферами, а именно он продолжается на категорию  $MultLoc/B$ , объекты которой являются спектрами полулокальных  $\mathcal{B}$ -алгебр, а в качестве морфизмов рассматриваются многозначные морфизмы, то есть многозначный морфизм из  $X$  в  $Y$  состоит из пары морфизмов  $\pi: Z \rightarrow Y$ , и  $\varphi: Z \rightarrow X$ , где  $\pi$  — конечный этальный. То, что  $\mathcal{F}$  — предпучок со слабыми трансферами доказано в [1], теорема 3.2.

Аналогично форма  $q'$  задаёт предпучок  $\mathcal{F}'$  со слабыми трансферами на  $Sch/\mathcal{B}$ . Заметим, что  $\tilde{\mathcal{X}}$  было построено так, что на ней формы  $q$  и  $q'$  эквивалентны. А значит, сужения  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{F}'$  на категорию схем над  $\tilde{\mathcal{X}}$  совпадают.

Пусть  $s \in \mathcal{F}(X)$  — элемент, являющийся образом  $\alpha$  при факторизации. Тогда  $s|_{X-Z} = 0$ , так как  $\alpha$  лежит в образе гомоморфизма спинорной нормы для  $B_f$ . Положим  $\psi = p_X \circ \tau: \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow X$ . Пусть  $s' = \mathcal{F}(\psi)(s)$ . Воспользуемся теперь результатом геометрической леммы. Построенные в ней два многозначных вложения  $\mathcal{D}_1$  и  $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}'_0 \sqcup \tilde{\Delta}$  из  $U$  в  $\tilde{\mathcal{X}}$  «слабо гомотопны», а значит  $\mathcal{F}(\mathcal{D}_1) = \mathcal{F}(\mathcal{D}'_0) + \mathcal{F}(\Delta)$ .



Изобразим диаграммами ниже и указанные многозначные морфизмы и гомотопию между ними.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{D}_1 \xrightarrow{in_1} \tilde{\mathcal{X}} & \mathcal{D}_0 \xrightarrow{in_0} \tilde{\mathcal{X}} & \tilde{\mathcal{X}} \xrightarrow{id} \tilde{\mathcal{X}} \\
 \downarrow \pi_1 & \downarrow \pi_0 & \downarrow \pi \\
 U & U & \mathbb{A}_U^1
 \end{array}$$

Диаграмма  $(\pi, id)$  — это и есть слабая гомотопия между многозначными вложениями  $(\pi_1, in_1)$  и  $(\pi_0, in_0)$ .

Но при этом и  $\mathcal{D}_1$  и  $\mathcal{D}'_0$  — подмножества  $\tilde{\mathcal{X}} - \tilde{\mathcal{Z}}$ , а  $s' \mid_{\tilde{\mathcal{X}} - \tilde{\mathcal{Z}}} = \mathcal{F}(\psi)(s \mid_{X-Z}) = 0$ , значит  $\mathcal{F}(\tilde{\Delta})(s') = \mathcal{F}'(\tilde{\Delta})(s') = 0$ . А  $can = \psi \circ \tilde{\Delta}$  по построению (здесь  $can$  это каноническое вложение  $U$  в  $X$ ), значит  $\mathcal{F}(\Delta)(s) = (\mathcal{F}(\tilde{\Delta}) \circ \mathcal{F}(\psi))(s) = \mathcal{F}(\tilde{\Delta})(s') = 0$ . Значит,  $s \mid_U = 0$ , то есть  $\alpha \in Sn(G_q(\mathcal{O}))$ , что и требовалось доказать.

*Замечание.* Из доказанного нетрудно следует, что  $\alpha$  лежит в образе гомоморфизма  $Sn$  и для какой-то открытой по Зарисскому окрестности  $x$ .

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение и формулировка	3
2. Геометрическая лемма: формулировка и построение морфизма	4
2.1. Формулировка и условия	4
2.2. Вложение в проективное пространство, вид искомого морфизма	5
2.3. Выбор подпространства для проектирования	7
3. Геометрическая лемма: доказательство свойств морфизма	12
3.1. Конечность морфизма	12
3.2. Свойства (4) и (5): этактность морфизма на прообразах 0 и 1	14
3.3. Свойства (2) и (3)	15
4. Сведение к геометрической лемме	15
Список литературы	19

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Ojanguren, I. Panin, and K. Zainoulline (2004). “On the norm principle for quadratic forms”. *J. Ramanujan Math. Soc.* 19.4, pp. 289–300. MR: 2125505 (cit. on pp. 209, 211).
- [2] Атья, Макдональд «Введение в коммутативную алгебру»
- [3] Altman A., Kleiman S. Introduction to Grothendieck duality theory, *Lect. Notes Math.*, vol. 146, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.
- [4] Guo N. The Grothendieck–Serre conjecture over semi-local Dedekind rings, *Transformation groups* (2022), Vol. 27, pp. 897–917
- [5] Roman Fedorov and Ivan Panin (2015). A proof of the Grothendieck-Serre conjecture on principal bundles over regular local rings containing infinite fields. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* 122, pp. 169–193
- [6] И. А. Панин, Доказательство гипотезы Гротендика–Серра о главных расслоениях над регулярным локальным кольцом, содержащим поле, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 84:4 (2020), 169–186
- [7] I. Panin, A. Stavrova. Constant case of the Grothendieck–Serre conjecture in mixed characteristic. preprint, arXiv.2412.11723
- [8] Ivan Panin. On Grothendieck–Serre conjecture concerning principal bundles, Ivan Panin, *Proc. Int. Cong. of Math* 2018, Rio de Janeiro, Vol.1 (201-222)
- [9] Serre, J.-P. Espaces fibrés algébriques, in *Anneaux de Chow et applications*, Séminaire Chevalley, 2-e année, Secrétariat mathématique, Paris, 1958.
- [10] Grothendieck, A. Le group de Brauer II, in *Dix exposés sur la cohomologie de schémas*, Amsterdam, North-Holland, 1968.
- [11] Colliot-Thélène J.-L., Ojanguren M. Espaces Principaux Homogènes Localement Triviaux. *Publ. Math. IHÉS* 75 (1992), no. 2, 97–122.
- [12] Nisnevich Ye. Espaces homogènes principaux rationnellement triviaux et arithmétique des schémas en groupes réductifs sur les anneaux de Dedekind. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 299.1 (1984), pp. 5–8.
- [13] Guo, N. The Grothendieck–Serre conjecture over semi-local Dedekind rings. *Transformation Groups* (2022), 27 (3), 897–917.
- [14] Colliot-Thélène J.-L., Sansuc J.-J. Principal Homogeneous Spaces under Flasque Tori: Applications. *Journal of Algebra*, (1987), 106, 148–205.
- [15] Česnavičius K. Grothendieck–Serre in the quasi-split unramified case. *Forum of Mathematics, Pi* (2022), Vol. 10:e9, 1–30.