

# УСРЕДНЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ЛЕВИ: ОПЕРАТОРНЫЕ ОЦЕНКИ ПРИ УЧЕТЕ КОРРЕКТОРОВ

Е. А. Жижина<sup>1,2</sup>, А. Л. Пятницкий<sup>1,2</sup>, В. А. Слоущ<sup>3</sup>, Т. А. Суслина<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Высшая школа современной математики МФТИ,  
пер. Климентовский, д. 1, строение 1,  
Москва, 115184, Россия

<sup>2</sup>Арктический университет Норвегии, кампус Нарвик,  
Лодве Лангес гате 2,  
Нарвик 8517, Норвегия

<sup>3</sup>Санкт-Петербургский государственный университет,  
Университетская наб., д. 7/9,  
Санкт-Петербург, 199034, Россия

e-mail: elena.jijina@gmail.com

e-mail: apiatnitski@gmail.com

e-mail: v.slouzh@spbu.ru

e-mail: t.suslina@spbu.ru

## АННОТАЦИЯ

В  $L_2(\mathbb{R}^d)$  рассматривается самосопряженный оператор  $\mathbb{A}_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , вида

$$(\mathbb{A}_\varepsilon u)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \mu(\mathbf{x}/\varepsilon, \mathbf{y}/\varepsilon) \frac{(u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y}))}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+\alpha}} d\mathbf{y},$$

где  $1 < \alpha < 2$ . Здесь  $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  — функция,  $\mathbb{Z}^d$ -периодическая по каждой переменной, причем  $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mu(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  и  $0 < \mu_- \leq \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mu_+ < \infty$ . Строгое определение оператора  $\mathbb{A}_\varepsilon$  дается через квадратичную форму. В работе авторов (2024) показано, что резольвента  $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$  сходится к резольвенте  $(\mathbb{A}^0 + I)^{-1}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  по операторной норме в  $L_2(\mathbb{R}^d)$ . Здесь  $\mathbb{A}^0$  — эффективный оператор, заданный тем же выражением с коэффициентом  $\mu^0$ , равным среднему значению функции  $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . При этом  $\|(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + I)^{-1}\| = O(\varepsilon^{2-\alpha})$ . Мы получаем более точную аппроксимацию при учете корректоров: при  $2 - 1/N < \alpha \leq 2 - 1/(N + 1)$

$$\|(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + I)^{-1} - \sum_{m=1}^N \varepsilon^{m(2-\alpha)} \mathbb{K}_m\| = O(\varepsilon).$$

**Ключевые слова:** операторы типа Леви, периодическое усреднение, операторные оценки погрешности, эффективный оператор, корректоры.

Исследование Е. А. Жижиной и А. Л. Пятницкого выполнено при частичной поддержке проекта “Pure Mathematics in Norway” и фонда UiT Arctica проект MASCOT.

Исследование В. А. Слоуща и Т. А. Суслиной выполнено при поддержке РНФ, проект 22-11-00092-П.

**ПРЕПРИНТЫ**

Санкт-Петербургского отделения  
Математического института им. В. А. Стеклова  
РАН

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР**

С. В. Кисляков

**РЕДКОЛЛЕГИЯ**

В. М. Бабич, М. А. Всемиров, А. И. Генералов,  
И. А. Ибрагимов, Л. Ю. Колотилина, Ю. В. Матиясевич,  
Н. Ю. Нецветаев, С. И. Репин, Г. А. Серегин.

## ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена операторным оценкам в задаче усреднения периодического нелокального оператора типа Леви. Настоящая статья продолжает исследование, начатое авторами в [26].

**0.1. Постановка задачи. Основные результаты.** Изучается (неограниченный) оператор типа Леви  $\mathbb{A}_\varepsilon = \mathbb{A}_\varepsilon(\alpha, \mu)$  в  $L_2(\mathbb{R}^d)$ , формально заданный соотношением

$$(\mathbb{A}_\varepsilon u)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \mu(\mathbf{x}/\varepsilon, \mathbf{y}/\varepsilon) \frac{(u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y}))}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+\alpha}} d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Здесь  $0 < \alpha < 2$ ,  $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  — ограниченная и положительно определенная функция,  $\mathbb{Z}^d$ -периодическая по каждой переменной, причем  $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mu(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ . Строгое определение:  $\mathbb{A}_\varepsilon$  есть самосопряженный оператор в  $L_2(\mathbb{R}^d)$ , порожденный замкнутой квадратичной формой

$$a_\varepsilon[u, u] := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} d\mathbf{y} \mu(\mathbf{x}/\varepsilon, \mathbf{y}/\varepsilon) \frac{|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+\alpha}}, \quad u \in H^{\alpha/2}(\mathbb{R}^d).$$

Оператор  $-\mathbb{A}_\varepsilon$  является генератором скачкообразного марковского процесса. Подробное описание свойств такого процесса можно найти в статье [3]. Ядро оператора  $\mathbb{A}_\varepsilon$  имеет степенное убывание на бесконечности, и у него отсутствует конечный второй момент. Характерное свойство соответствующих процессов — это дальноедействие, т.е. возможность длинных прыжков (Levy flights), что существенно отличает траектории таких процессов от непрерывных траекторий диффузионных процессов. В настоящее время процессы Леви широко используются при моделировании поведения сложных систем, в которых дальноедействие играет важную, а порой и ключевую, роль. В частности, на основе этих процессов строятся многие модели биологии и экологии, физики и астрофизики, финансовой математики и механики пористых сред, см., например, [11, 12, 18, 21, 31, 32]. При необходимости изучения таких моделей в средах с переменными характеристиками мы приходим к марковским процессам с генератором вида  $-\mathbb{A}_\varepsilon$ .

Усреднение оператора  $\mathbb{A}_\varepsilon$  изучалось в работе [19]: было показано, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  резольвента  $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$  сильно сходится к резольвенте  $(\mathbb{A}^0 + I)^{-1}$  эффективного оператора. Эффективный оператор  $\mathbb{A}^0$  имеет тот же вид с постоянным коэффициентом

$$\mu^0 = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y}, \quad \Omega := [0, 1)^d.$$

Этот оператор лишь множителем отличается от дробной степени оператора Лапласа:  $\mathbb{A}^0 = \mu^0 c_0(d, \alpha)(-\Delta)^{\alpha/2}$ ,  $\text{Dom } \mathbb{A}^0 = H^\alpha(\mathbb{R}^d)$ .

В предшествующей работе авторов [26] было показано, что резольвента  $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$  сходится к резольвенте эффективного оператора по операторной норме в  $L_2(\mathbb{R}^d)$  и справедлива оценка погрешности

$$\|(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_1(\alpha, \mu) \begin{cases} \varepsilon^\alpha, & 0 < \alpha < 1, \\ \varepsilon(1 + |\ln \varepsilon|)^2, & \alpha = 1, \\ \varepsilon^{2-\alpha}, & 1 < \alpha < 2. \end{cases} \quad (0.1)$$

Как отмечалось в [26], погрешность  $O(\varepsilon^\alpha)$  оптимальна (по крайней мере, в рамках применяемого подхода). Таким образом, при  $0 < \alpha < 1$  уже старший член аппроксимации дает оптимальное приближение к резольвенте  $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ . При  $1 \leq \alpha < 2$  это уже не так; более того, погрешность  $O(\varepsilon^{2-\alpha})$  ухудшается, когда  $\alpha$  приближается к 2.

В настоящей работе мы рассматриваем случай  $1 < \alpha < 2$  и показываем, что точность аппроксимации можно улучшить за счет учета корректоров. Основной результат работы

(теорема 5.2) гласит: пусть  $N \in \mathbb{N}$  и  $2 - \frac{1}{N} < \alpha < 2$ . Тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \left\| (\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + I)^{-1} - \sum_{m=1}^N \varepsilon^{m(2-\alpha)} \mathbb{K}_m \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq C_2(\alpha, \mu) \begin{cases} \varepsilon, & 2 - \frac{1}{N} < \alpha \leq 2 - \frac{1}{N+1}, \\ \varepsilon^{(N+1)(2-\alpha)}, & 2 - \frac{1}{N+1} < \alpha < 2. \end{cases} \end{aligned} \quad (0.2)$$

Здесь корректоры  $\mathbb{K}_m$ ,  $m = 1, \dots, N$ , имеют вид

$$\mathbb{K}_m := (\operatorname{div} g^0 \nabla)^m (\mathbb{A}^0 + I)^{-m-1}, \quad m = 1, \dots, N,$$

где (незнакоопределенная) симметричная вещественная матрица  $g^0$  определяется в терминах решений некоторых вспомогательных задач. Пусть функция  $v_k(\mathbf{x})$  (где  $k \in \{1, \dots, d\}$ ) является  $\mathbb{Z}^d$ -периодическим решением задачи

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+\alpha}} (v_k(\mathbf{x}) - v_k(\mathbf{y}) + x_k - y_k) d\mathbf{y} = 0, \quad \int_{\Omega} v_k(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 0.$$

(Строгая постановка задачи описана в (3.48).) Элементы матрицы  $g^0$  заданы соотношениями

$$\begin{aligned} g_{jk}^0 &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \frac{\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+\alpha}} ((x_j - y_j)(v_k(\mathbf{x}) - v_k(\mathbf{y})) + (x_k - y_k)(v_j(\mathbf{x}) - v_j(\mathbf{y}))) \\ &+ \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} \int_{\Omega + \mathbf{n}} d\mathbf{z} \frac{\mu_*(\mathbf{z}) z_j z_k}{2|\mathbf{z}|^{d+\alpha}}, \quad j, k = 1, \dots, d; \quad \mu_*(\mathbf{z}) := \int_{\Omega} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{z} + \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \mu^0. \end{aligned}$$

При фиксированном  $1 < \alpha < 2$  можно выбрать  $N \in \mathbb{N}$  так, чтобы  $2 - \frac{1}{N} < \alpha \leq 2 - \frac{1}{N+1}$ . Тогда при учете первых  $N$  корректоров мы получаем приближение резольвенты  $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$  с погрешностью  $O(\varepsilon)$ .

**0.2. Спектральный метод в теории усреднения. Операторные оценки.** В настоящее время теория усреднения (гомогенизации) периодических операторов является хорошо разработанной областью математики, в которой применяются различные методы и технические приемы, см., например, монографии [4], [5], [15]. Один из важных подходов в этой области — это спектральный метод, основанный на масштабном преобразовании и теории Флоке-Блоха. Первый строгий результат усреднения, полученный спектральным методом, можно найти в работе [28], где для равномерно эллиптического оператора  $\mathcal{A}_\varepsilon = -\operatorname{div} g(\mathbf{x}/\varepsilon) \nabla$  в  $L_2(\mathbb{R}^d)$  с периодической матрицей коэффициентов  $g$  была доказана сильная сходимость резольвенты к резольвенте эффективного оператора  $\mathcal{A}^0 = -\operatorname{div} g^0 \nabla$ . Здесь  $g^0$  — постоянная матрица, называемая эффективной. Позже этот подход получил дальнейшее развитие в [13], [1], [2], [10] и в других статьях. Заметим, однако, что упомянутые работы были направлены на доказательство сильной резольвентной сходимости.

В работах Бирмана и Суслиной [6, 7, 8] был предложен и развит теоретико-операторный подход к задачам усреднения периодических дифференциальных операторов в  $\mathbb{R}^d$  (вариант спектрального метода). Преимущество этого подхода заключается в том, что он позволяет получать точные по порядку оценки скорости сходимости в операторных нормах для широкого класса задач гомогенизации в периодических средах. Чтобы проиллюстрировать этот подход, рассмотрим в  $L_2(\mathbb{R}^d)$  скалярный эллиптический оператор вида  $\mathcal{A}_\varepsilon = -\operatorname{div} g(\mathbf{x}/\varepsilon) \nabla$  с  $\mathbb{Z}^d$ -периодическими коэффициентами. Как следует из результатов классической гомогенизации, для такого оператора имеет место сильная резольвентная сходимость при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В [6] было показано, что имеет место более сильный результат о сходимости. А именно, резольвента  $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$  сходится к резольвенте эффективного оператора  $\mathcal{A}^0$  по операторной норме в  $L_2(\mathbb{R}^d)$

и справедлива оценка

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon. \quad (0.3)$$

Оценки такого типа называются операторными оценками скорости сходимости в теории усреднения. В [7] получена более точная асимптотика резольвенты  $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ , которая включает дополнительные члены с корректорами и обеспечивает точность порядка  $O(\varepsilon^2)$  по операторной норме в  $L_2(\mathbb{R}^d)$ . Аппроксимация резольвенты  $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$  по норме операторов, действующих из  $L_2(\mathbb{R}^d)$  в пространство Соболева  $H^1(\mathbb{R}^d)$ , была найдена в [8].

Теоретико-операторный подход основан на масштабном преобразовании, теории Флоке–Блоха и аналитической теории возмущений. Поясним метод на примере вывода оценки (0.3). За счет масштабного преобразования оценка (0.3) равносильна неравенству

$$\|(\mathcal{A} + \varepsilon^2 I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + \varepsilon^2 I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon^{-1}, \quad (0.4)$$

где  $\mathcal{A} = -\operatorname{div} g(\mathbf{x})\nabla = \mathbf{D}^*g(\mathbf{x})\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{D} = -i\nabla$ . Далее, с помощью унитарного преобразования Гельфанда оператор  $\mathcal{A}$  раскладывается в прямой интеграл по операторам  $\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})$ , действующим в  $L_2(\Omega)$  и зависящим от параметра  $\boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}$  (квазиимпульса). Здесь  $\Omega = [0, 1]^d$  — ячейка решетки  $\mathbb{Z}^d$ , а  $\tilde{\Omega} = [-\pi, \pi]^d$  — ячейка двойственной решетки. Оператор  $\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})$  задается выражением  $\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}) = (\mathbf{D} + \boldsymbol{\xi})^*g(\mathbf{x})(\mathbf{D} + \boldsymbol{\xi})$  при периодических граничных условиях. Оценка (0.4) эквивалентна аналогичной оценке для операторов, зависящих от квазиимпульса:

$$\|(\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 I)^{-1} - (\mathcal{A}^0(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 I)^{-1}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C\varepsilon^{-1}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}.$$

Основная часть исследования состоит в изучении операторного семейства  $\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})$ , которое представляет собой аналитическое семейство с компактной резольвентой. Поэтому можно применить методы аналитической теории возмущений. Выясняется, что резольвенту  $(\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 I)^{-1}$  можно приблизить в терминах спектральных характеристик оператора на краю спектра. Поэтому эффект усреднения представляет собой *спектральный пороговый эффект* на краю спектра эллиптического оператора.

Другой подход к получению операторных оценок погрешности в задачах гомогенизации (так называемый “метод сдвига”) был предложен в работах Жикова и Пастуховой (см. [14, 16], а также обзор [17] и цитированную там литературу).

В последние годы операторные оценки погрешности в различных задачах гомогенизации для дифференциальных операторов привлекают внимание все большего числа исследователей; получено много содержательных результатов. Достаточно подробный обзор современного состояния этой области можно найти в [30, введение].

**0.3. Операторные оценки при усреднении нелокальных операторов сверточного типа.** Впервые операторные оценки при усреднении *нелокальных периодических операторов* были получены в недавних работах авторов [24, 25], где изучался нелокальный оператор  $A_\varepsilon$  сверточного типа в  $L_2(\mathbb{R}^d)$ , заданный соотношением

$$(A_\varepsilon u)(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon^{d+2}} \int_{\mathbb{R}^d} a((\mathbf{x} - \mathbf{y})/\varepsilon) \mu(\mathbf{x}/\varepsilon, \mathbf{y}/\varepsilon) (u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d). \quad (0.5)$$

Предполагалось, что  $a(\mathbf{x})$  — четная неотрицательная функция класса  $L_1(\mathbb{R}^d)$ ,  $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  — ограниченная и положительно определенная функция,  $\mathbb{Z}^d$ -периодическая по каждой переменной, причем  $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mu(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ . При этих условиях оператор  $A_\varepsilon$  ограничен, самосопряжен и неотрицателен. Кроме того, предполагались конечными несколько первых моментов  $M_k(a) = \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^k a(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ .

Операторы сверточного типа с интегрируемыми ядрами возникают в моделях математической биологии и популяционной динамики, в последние годы эти модели активно изучались в математической литературе, см. [20, 22, 23]. Усреднению таких операторов была посвящена работа [22], в которой в предположении, что  $M_2(a) < \infty$ , было показано, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  резольвента  $(A_\varepsilon + I)^{-1}$  сильно сходится к резольвенте  $(A^0 + I)^{-1}$  эффективного

оператора. Эффективный оператор имеет вид  $A^0 = -\operatorname{div} g^0 \nabla$  с положительно определенной постоянной матрицей  $g^0$ . Интересно отметить, что в этой задаче эффективный оператор является локальным и неограниченным, хотя исходный оператор  $A_\varepsilon$  нелокален и ограничен. Задачи усреднения для операторов сверточного типа с несимметричными ядрами изучались в [23], где для соответствующих параболических полугрупп был получен результат сходимости в движущихся координатах. Аналогичные задачи в перфорированных областях были исследованы вариационными методами в [9].

В работе [24] при условии  $M_3(a) < \infty$  была установлена сходимость резольвенты  $(A_\varepsilon + I)^{-1}$  к резольвенте  $(A^0 + I)^{-1}$  эффективного оператора по операторной норме в  $L_2(\mathbb{R}^d)$  и была получена точная по порядку оценка погрешности:

$$\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(a, \mu)\varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Затем в [25] при условии  $M_4(a) < \infty$  была получена более точная аппроксимация резольвенты  $(A_\varepsilon + I)^{-1}$  с учетом корректора и оценкой погрешности  $O(\varepsilon^2)$ .

В работах [24, 25] теоретико-операторный подход, разработанный Бирманом и Суслиной в [6] для дифференциальных операторов, был модифицирован и адаптирован к случаю нелокальных операторов сверточного типа с интегрируемыми ядрами. Как и в случае с дифференциальными операторами, задача гомогенизации сводится к изучению семейства операторов  $A(\xi)$ ,  $\xi \in \tilde{\Omega}$ , полученных из исходного оператора с помощью масштабного преобразования и преобразования Гельфанда. Однако, в отличие от дифференциальных операторов, это семейство не является аналитическим, и, следовательно, аналитическая теория возмущений неприменима. Вместо этого авторы использовали конечную гладкость  $A(\xi)$ , обеспеченную условием конечности нескольких первых моментов коэффициента  $a(\mathbf{x})$ .

**0.4. Метод.** Для исследования задачи об аппроксимации резольвенты оператора  $A_\varepsilon$  мы модифицируем теоретико-операторный подход и адаптируем его к случаю операторов типа Леви.

На первом шаге, выполняя масштабное преобразование, мы устанавливаем равенство

$$\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} = \varepsilon^\alpha \|(A + \varepsilon^\alpha I)^{-1} - (A^0 + \varepsilon^\alpha I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}. \quad (0.6)$$

Здесь  $A = A_{\varepsilon_0}$ ,  $\varepsilon_0 = 1$ .

Затем с помощью преобразования Гельфанда оператор  $A$  раскладывается в прямой интеграл по операторам  $A(\xi)$ , действующим в  $L_2(\Omega)$  и зависящим от параметра  $\xi \in \tilde{\Omega}$ . Для каждого  $\xi \in \tilde{\Omega}$  спектр оператора  $A(\xi)$  дискретен и принадлежит  $\mathbb{R}_+$ ; первое собственное значение имеет порядок  $O(|\xi|^\alpha)$ , а остальные собственные значения отделены от нуля.

Теперь вопрос о предельном поведении резольвенты  $(A_\varepsilon + I)^{-1}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  сводится к изучению асимптотики резольвенты  $(A(\xi) + \varepsilon^\alpha I)^{-1}$  для малом  $\varepsilon$ . Ясно, что основной вклад в рассматриваемую асимптотику вносит нижняя часть спектра  $A(\xi)$ . Следует подчеркнуть, что, в отличие от случая дифференциальных операторов, семейство  $A(\xi)$  не является аналитическим и обладает малой гладкостью. Таким образом, изучаемые операторы типа Леви существенно отличаются и от операторов сверточного типа вида (0.5), для которых конечная дифференцируемость семейства  $A(\xi)$  обеспечивается конечностью соответствующего числа моментов коэффициента  $a(\mathbf{x})$ . Тем не менее, нам удалось получить “пороговые аппроксимации”, необходимые для построения аппроксимации резольвенты  $(A(\xi) + \varepsilon^\alpha I)^{-1}$  при малом  $\varepsilon$ . А именно, мы получили аппроксимации операторов  $F(\xi)$  и  $A(\xi)F(\xi)$  при  $\xi \rightarrow 0$ . Здесь  $F(\xi)$  является спектральным проектором оператора  $A(\xi)$ , который соответствует некоторой окрестности нуля. В существующей литературе асимптотика оператора  $A(\xi)F(\xi)$  при малых  $\xi$  обычно определялась в терминах асимптотики для первого собственного значения  $\lambda_1(\xi)$  оператора  $A(\xi)$ . Здесь мы применяем альтернативный подход, основанный на интегрировании резольвенты  $(A(\xi) - \zeta I)^{-1}$  по подходящему контуру на комплексной плоскости.

Поскольку  $\|(A(\xi) + \varepsilon^\alpha I)^{-1} F(\xi)^\perp\| \leq C$ , то предельная точность, которую мы можем получить при аппроксимации резольвенты  $(A_\varepsilon + I)^{-1}$  описанным методом (рассматривая

усреднение как пороговый эффект на краю спектра), это  $O(\varepsilon^\alpha)$ ; см. (0.6). Таким образом, при  $0 < \alpha < 1$  уже старший член аппроксимации дает предельную точность; см. (0.1). При  $1 \leq \alpha < 2$  это уже не так. В настоящей работе мы рассматриваем случай  $1 < \alpha < 2$  и улучшаем точность аппроксимации за счет учета корректоров; см. (0.2).

**0.5. План статьи.** Статья состоит из введения и пяти параграфов. В §1 вводится оператор  $\mathbb{A}$ , обсуждаются разложение этого оператора в прямой интеграл по семейству операторов  $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})$  и оценки снизу для квадратичной формы оператора  $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})$ . В §2 получено нужное представление для разности квадратичных форм  $a(\boldsymbol{\xi})$  и  $a(\mathbf{0})$ . В §3 исследованы пороговые характеристики операторного семейства  $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})$  вблизи нижнего края спектра, найдены аппроксимации для спектрального проектора  $F(\boldsymbol{\xi})$  и оператора  $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})F(\boldsymbol{\xi})$  при малом  $|\boldsymbol{\xi}|$ . В §4 найдена аппроксимация резольвенты  $(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^\alpha I)^{-1}$  при малом  $\varepsilon$ , откуда с помощью разложения оператора  $\mathbb{A}$  в прямой интеграл получена аппроксимация резольвенты  $(\mathbb{A} + \varepsilon^\alpha I)^{-1}$ . В §5 из результатов §4 с помощью масштабного преобразования выводится основной результат работы — аппроксимация резольвенты  $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$  по операторной норме в  $L_2(\mathbb{R}^d)$ .

**0.6. Обозначения.** Норма в нормированном линейном пространстве  $X$  обозначается через  $\|\cdot\|_X$  (либо без индекса, если это не ведет к недоразумениям); если пространства  $X, Y$  нормированы, то стандартная норма линейного ограниченного оператора  $T : X \rightarrow Y$  обозначается через  $\|T\|_{X \rightarrow Y}$  либо  $\|T\|$  (без индекса). Линейная оболочка системы векторов  $F \subset X$  обозначается через  $\mathcal{L}\{F\}$ .

Пусть  $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_*$  — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Если  $A : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_*$  — линейный оператор, то через  $\text{Dom } A$  обозначается его область определения, а через  $\text{Ker } A$  — его ядро.

Если  $\mathcal{O}$  — область в  $\mathbb{R}^d$ , то через  $L_p(\mathcal{O})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , обозначаются стандартные  $L_p$ -классы. Стандартное скалярное произведение в пространстве  $L_2(\mathcal{O})$  обозначается через  $(\cdot, \cdot)_{L_2(\mathcal{O})}$  либо без индекса. Стандартные классы Соболева порядка  $s > 0$  в области  $\mathcal{O}$  обозначаются через  $H^s(\mathcal{O})$ .

Далее, используем обозначения  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)^t \in \mathbb{R}^d$ ,  $iD_j = \partial_j = \partial/\partial x_j$ ,  $j = 1, \dots, d$ ;  $\mathbf{D} = -i\nabla = (D_1, \dots, D_d)^t$ . Через  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  обозначим класс Шварца в  $\mathbb{R}^d$ . Характеристическая функция множества  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$  обозначается через  $\mathbf{1}_{\mathcal{O}}$ .

Через  $B_r(\mathbf{x}_0)$  обозначим открытый шар в  $\mathbb{R}^d$  с центром в точке  $\mathbf{x}_0$  радиуса  $r$ . Через  $\omega_d$  обозначим площадь единичной сферы  $\mathbb{S}^{d-1}$  в  $\mathbb{R}^d$ .

## § 1. ОПЕРАТОРЫ ТИПА ЛЕВИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ: РАЗЛОЖЕНИЕ В ПРЯМОЙ ИНТЕГРАЛ И ОЦЕНКИ

**1.1. Оператор  $\mathbb{A}(\alpha, \mu)$ .** Пусть  $\mu \in L_\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ , причем

$$0 < \mu_- \leq \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mu_+ < \infty, \quad \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mu(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d; \quad (1.1)$$

$$\mu(\mathbf{x} + \mathbf{m}, \mathbf{y} + \mathbf{n}) = \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d. \quad (1.2)$$

Пусть  $1 < \alpha < 2$  и  $\gamma := \frac{\alpha}{2}$ . В пространстве  $L_2(\mathbb{R}^d)$  рассмотрим квадратичную форму

$$a(\alpha, \mu)[u, u] := \frac{1}{2} \int \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} d\mathbf{x} d\mathbf{y} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+\alpha}}, \quad u \in H^\gamma(\mathbb{R}^d). \quad (1.3)$$

В силу (1.1) и (1.3) форма  $a(\alpha, \mu)$  плотно определена, неотрицательна и удовлетворяет оценкам

$$\mu_- a_0(\alpha)[u, u] \leq a(\alpha, \mu)[u, u] \leq \mu_+ a_0(\alpha)[u, u], \quad u \in H^\gamma(\mathbb{R}^d). \quad (1.4)$$

Здесь

$$a_0(\alpha)[u, u] := \frac{1}{2} \int \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} d\mathbf{x} d\mathbf{y} \frac{|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+\alpha}}, \quad u \in H^\gamma(\mathbb{R}^d). \quad (1.5)$$

Хорошо известно следующее утверждение (см., например, [27, § 6.31], [26, лемма 1.1]).

**Лемма 1.1.** *Форма (1.5) допускает представление*

$$a_0(\alpha)[u, u] = c_0(d, \alpha) \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{k} |\mathbf{k}|^\alpha |\widehat{u}(\mathbf{k})|^2, \quad u \in H^\gamma(\mathbb{R}^d), \quad (1.6)$$

где  $\widehat{u}(\mathbf{k})$  — Фурье-образ функции  $u(\mathbf{x})$ , а постоянная  $c_0 = c_0(d, \alpha)$  определяется выражением

$$c_0 = c_0(d, \alpha) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1 - \cos z_1}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha}} d\mathbf{z} = \frac{\pi^{d/2} |\Gamma(-\alpha/2)|}{2^\alpha \Gamma((d+\alpha)/2)}. \quad (1.7)$$

Отметим, что  $c_0(d, \alpha) = O((2 - \alpha)^{-1})$  при  $\alpha \rightarrow 2$ .

Из леммы 1.1 следует замкнутость формы  $a_0(\alpha)$ , а с учетом оценок (1.4), также и замкнутость формы  $a(\alpha, \mu)$ .

По определению  $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\alpha, \mu)$  есть самосопряженный оператор в  $L_2(\mathbb{R}^d)$ , порожденный замкнутой формой (1.3). Формально можно записать (см. [19])

$$(\mathbb{A}u)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{(u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y}))}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+\alpha}} d\mathbf{y}.$$

Обозначим через  $\mathbb{A}_0 = \mathbb{A}_0(\alpha)$  самосопряженный оператор в  $L_2(\mathbb{R}^d)$ , порожденный замкнутой формой (1.5). В силу представления (1.6) оператор  $\mathbb{A}_0(\alpha)$  отличается от дробной степени оператора Лапласа лишь множителем:

$$\mathbb{A}_0(\alpha) = c_0(d, \alpha)(-\Delta)^\gamma, \quad \text{Dom } \mathbb{A}_0(\alpha) = H^\alpha(\mathbb{R}^d).$$

Из представления (1.6) следует, что точка  $\lambda_0 = 0$  является краем спектра оператора  $\mathbb{A}_0(\alpha)$ . В силу оценок (1.4) точка  $\lambda_0 = 0$  является также нижним краем спектра оператора  $\mathbb{A}(\alpha, \mu)$ .

**1.2. Семейство операторов  $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; \alpha, \mu)$ .** Обозначим через  $\Omega := [0, 1]^d$  ячейку решетки  $\mathbb{Z}^d$  и через  $\widetilde{\Omega} := [-\pi, \pi)^d$  — ячейку двойственной решетки  $(2\pi\mathbb{Z})^d$ . При  $s > 0$  обозначим через  $\widetilde{H}^s(\Omega)$  подпространство в  $H^s(\Omega)$ , состоящее из функций,  $\mathbb{Z}^d$ -периодическое продолжение которых принадлежит классу  $H_{\text{loc}}^s(\mathbb{R}^d)$ .

С решеткой  $\mathbb{Z}^d$  связано унитарное дискретное преобразование Фурье  $\mathcal{F} : L_2(\Omega) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z}^d)$ , заданное соотношениями:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}u(\mathbf{n}) &= \widehat{u}_{\mathbf{n}} = \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle} d\mathbf{x}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d, \quad u \in L_2(\Omega); \\ u(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} \widehat{u}_{\mathbf{n}} e^{2\pi i \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle}, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned}$$

Соотношение  $u \in \widetilde{H}^s(\Omega)$  равносильно сходимости ряда

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} (1 + |2\pi \mathbf{n}|^2)^s |\widehat{u}_{\mathbf{n}}|^2,$$

причем это выражение допускает двусторонние оценки через  $\|u\|_{H^s(\Omega)}^2$ .

В пространстве  $L_2(\Omega)$  рассмотрим семейство квадратичных форм  $a(\boldsymbol{\xi}) = a(\boldsymbol{\xi}; \alpha, \mu)$ , зависящих от параметра  $\boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}$ :

$$a(\boldsymbol{\xi}; \alpha, \mu)[u, u] := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{|e^{i \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} \rangle} u(\mathbf{x}) - e^{i \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{y} \rangle} u(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+\alpha}}, \quad u \in \widetilde{H}^\gamma(\Omega). \quad (1.8)$$



Здесь считается, что функция  $u \in \tilde{H}^\gamma(\Omega)$  продолжена до  $\mathbb{Z}^d$ -периодической функции в  $\mathbb{R}^d$ . В силу (1.1) форма  $a(\xi; \alpha, \mu)$  плотно определена, неотрицательна и удовлетворяет оценкам

$$\mu_- a_0(\xi; \alpha)[u, u] \leq a(\xi; \alpha, \mu)[u, u] \leq \mu_+ a_0(\xi; \alpha)[u, u], \quad u \in \tilde{H}^\gamma(\Omega). \quad (1.9)$$

Здесь

$$a_0(\xi; \alpha)[u, u] := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \frac{|e^{i\langle \xi, \mathbf{x} \rangle} u(\mathbf{x}) - e^{i\langle \xi, \mathbf{y} \rangle} u(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+\alpha}}, \quad u \in \tilde{H}^\gamma(\Omega). \quad (1.10)$$

В [26, лемма 1.2] проверено следующее утверждение.

**Лемма 1.2** ([26]). *Форма (1.10) допускает представление*

$$a_0(\xi; \alpha)[u, u] = c_0(d, \alpha) \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} |2\pi\mathbf{n} + \xi|^\alpha |\hat{u}_{\mathbf{n}}|^2, \quad u \in \tilde{H}^\gamma(\Omega). \quad (1.11)$$

Здесь  $\hat{u}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$ , — коэффициенты Фурье функции  $u$ , а  $c_0(d, \alpha)$  — постоянная (1.7).

Из леммы 1.2 следует замкнутость формы  $a_0(\xi; \alpha)$ , а с учетом оценок (1.9), также и замкнутость формы  $a(\xi; \alpha, \mu)$ .

По определению  $\mathbb{A}(\xi) = \mathbb{A}(\xi; \alpha, \mu)$  есть самосопряженный оператор в  $L_2(\Omega)$ , порожденный замкнутой формой (1.8). Формально можно записать

$$(\mathbb{A}(\xi)u)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{(u(\mathbf{x}) - e^{-i\langle \xi, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle} u(\mathbf{y}))}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+\alpha}}.$$

Обозначим через  $\mathbb{A}_0(\xi) = \mathbb{A}_0(\xi; \alpha)$  самосопряженный оператор в  $L_2(\mathbb{R}^d)$ , порожденный замкнутой формой (1.10). В силу представления (1.11) оператор  $\mathbb{A}_0(\xi; \alpha)$  отличается от дробной степени оператора  $|\mathbf{D} + \xi|$  лишь множителем:

$$\mathbb{A}_0(\xi; \alpha) = c_0(d, \alpha) |\mathbf{D} + \xi|^\alpha, \quad \text{Dom } \mathbb{A}_0(\xi; \alpha) = \tilde{H}^\alpha(\Omega). \quad (1.12)$$

В силу компактности вложения пространства  $\tilde{H}^\gamma(\Omega)$  (области определения формы  $a(\xi; \alpha, \mu)$ ) в  $L_2(\Omega)$  спектр оператора  $\mathbb{A}(\xi)$ , как и оператора  $\mathbb{A}_0(\xi)$ , дискретен при всяком  $\xi \in \tilde{\Omega}$ .

**1.3. Разложение оператора  $\mathbb{A}(\alpha, \mu)$  в прямой интеграл.** При  $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$  обозначим через  $S_{\mathbf{n}}$  (унитарный) оператор сдвига в  $L_2(\mathbb{R}^d)$ , определенный по правилу

$$S_{\mathbf{n}}u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x} + \mathbf{n}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

Очевидно, что при условиях (1.1), (1.2) выполнено тождество

$$a(\alpha, \mu)[S_{\mathbf{n}}u, S_{\mathbf{n}}u] = a(\alpha, \mu)[u, u], \quad u \in H^\gamma(\mathbb{R}^d), \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d.$$

Это означает, что оператор  $\mathbb{A}(\alpha, \mu)$  коммутирует с операторами  $S_{\mathbf{n}}$  при всех  $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$ , то есть является  $\mathbb{Z}^d$ -периодическим оператором.

Определим преобразование Гельфанда  $\mathcal{G}$  (см., например, [29] или [6, глава 2]). Первоначально  $\mathcal{G}$  задается на классе Шварца  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  равенством

$$\mathcal{G}u(\xi, \mathbf{x}) = \tilde{u}(\xi, \mathbf{x}) := (2\pi)^{-d/2} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} u(\mathbf{x} + \mathbf{n}) e^{-i\langle \xi, \mathbf{x} + \mathbf{n} \rangle}, \quad \xi \in \tilde{\Omega}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Затем  $\mathcal{G}$  распространяется по непрерывности до унитарного отображения

$$\mathcal{G} : L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow \int_{\tilde{\Omega}} \oplus L_2(\Omega) d\xi = L_2(\tilde{\Omega} \times \Omega).$$

Напомним, что класс Соболева  $H^s(\mathbb{R}^d)$ , где  $s > 0$ , под действием преобразования Гельфанда отображается на прямой интеграл пространств  $\tilde{H}^s(\Omega)$ :

$$\mathcal{G} : H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow \int_{\tilde{\Omega}} \oplus \tilde{H}^s(\Omega) d\xi = L_2(\tilde{\Omega}; \tilde{H}^s(\Omega)).$$

Как и все периодические операторы, оператор  $\mathbb{A}(\alpha, \mu)$  раскладывается в прямой интеграл с помощью преобразования Гельфанда. Это демонстрирует следующая лемма, установленная в [26, лемма 1.3].

**Лемма 1.3** ([26]). Пусть выполнены условия (1.1), (1.2) и  $1 < \alpha < 2$ . Пусть форма  $a = a(\alpha, \mu)$  в  $L_2(\mathbb{R}^d)$  определена выражением (1.3). Пусть семейство форм  $a(\xi) = a(\xi; \alpha, \mu)$  в  $L_2(\Omega)$  определено в (1.8). Здесь  $\xi \in \tilde{\Omega}$ . Пусть  $\mathcal{G} : L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\tilde{\Omega} \times \Omega)$  — унитарное преобразование Гельфанда. Соотношение  $u \in H^\gamma(\mathbb{R}^d)$  равносильно соотношению  $\mathcal{G}u = \tilde{u} \in L_2(\tilde{\Omega}; \tilde{H}^\gamma(\Omega))$ . При почти всех  $\xi \in \tilde{\Omega}$  выполнено  $\tilde{u}(\xi, \cdot) \in \tilde{H}^\gamma(\Omega)$  и

$$a[u, u] = \int_{\tilde{\Omega}} a(\xi) [\tilde{u}(\xi, \cdot), \tilde{u}(\xi, \cdot)] d\xi, \quad u \in H^\gamma(\mathbb{R}^d).$$

С учетом того, что оператор  $\mathbb{A}$ , а также операторы  $\mathbb{A}(\xi)$  определены через соответствующие квадратичные формы, лемма 1.3 показывает, что

$$\mathbb{A}(\alpha, \mu) = \mathcal{G}^* \left( \int_{\tilde{\Omega}} \oplus \mathbb{A}(\xi; \alpha, \mu) d\xi \right) \mathcal{G}. \quad (1.13)$$

**1.4. Оценки квадратичной формы оператора  $\mathbb{A}(\xi; \alpha, \mu)$ .** В силу леммы 1.2 операторы  $\mathbb{A}_0(\xi; \alpha)$ ,  $\xi \in \tilde{\Omega}$ , диагонализуются унитарным дискретным преобразованием Фурье  $\mathcal{F}$ :

$$\mathbb{A}_0(\xi; \alpha) = c_0(d, \alpha) \mathcal{F}^* [ |2\pi \mathbf{n} + \xi|^\alpha ] \mathcal{F}, \quad \xi \in \tilde{\Omega}. \quad (1.14)$$

Здесь через  $[|2\pi \mathbf{n} + \xi|^\alpha]$  обозначается оператор умножения на функцию  $|2\pi \mathbf{n} + \xi|^\alpha$ ,  $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$ , в пространстве  $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$ .

Из описанной диагонализации легко следует, что  $\text{Ker } \mathbb{A}_0(\mathbf{0}; \alpha) = \mathcal{L}\{\mathbf{1}_\Omega\}$ . Следовательно, в силу (1.9) имеет место  $\text{Ker } \mathbb{A}(\mathbf{0}; \alpha, \mu) = \mathcal{L}\{\mathbf{1}_\Omega\}$ . Мы приходим к следующему утверждению; ср. [26, лемма 1.4].

**Лемма 1.4** ([26]). Пусть выполнены условия (1.1), (1.2) и  $1 < \alpha < 2$ . Тогда число  $\lambda_0 = 0$  является простым собственным значением оператора  $\mathbb{A}(\mathbf{0}; \alpha, \mu)$ . При этом  $\text{Ker } \mathbb{A}(\mathbf{0}; \alpha, \mu) = \mathcal{L}\{\mathbf{1}_\Omega\}$ .

Очевидно, выполнены соотношения

$$|2\pi \mathbf{n} + \xi|^\alpha \geq |\xi|^\alpha, \quad \xi \in \tilde{\Omega}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d, \quad (1.15)$$

$$|2\pi \mathbf{n} + \xi|^\alpha \geq \pi^\alpha, \quad \xi \in \tilde{\Omega}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d \setminus \mathbf{0}, \quad (1.16)$$

$$\min_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d \setminus \mathbf{0}} |2\pi \mathbf{n}|^\alpha = (2\pi)^\alpha. \quad (1.17)$$

Из (1.15), (1.16) и леммы 1.2 вытекают оценки для квадратичной формы  $a_0(\xi; \alpha)$ :

$$a_0(\xi; \alpha)[u, u] \geq c_0(d, \alpha) |\xi|^\alpha \|u\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad u \in \tilde{H}^\gamma(\Omega), \quad \xi \in \tilde{\Omega}, \quad (1.18)$$

$$a_0(\xi; \alpha)[u, u] \geq c_0(d, \alpha) \pi^\alpha \|u\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad u \in \tilde{H}^\gamma(\Omega), \quad \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0, \quad \xi \in \tilde{\Omega}. \quad (1.19)$$

Из соотношений (1.9), (1.18), (1.19) вытекает следующее утверждение; ср. [26, предложение 1.5].

**Предложение 1.5** ([26]). Пусть выполнены условия (1.1), (1.2) и  $1 < \alpha < 2$ . Тогда для формы (1.8) справедливы оценки

$$\begin{aligned} a(\xi; \alpha, \mu)[u, u] &\geq \mu - c_0(d, \alpha) |\xi|^\alpha \|u\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad u \in \tilde{H}^\gamma(\Omega), \quad \xi \in \tilde{\Omega}, \\ a(\xi; \alpha, \mu)[u, u] &\geq \mu - c_0(d, \alpha) \pi^\alpha \|u\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad u \in \tilde{H}^\gamma(\Omega), \quad \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0, \quad \xi \in \tilde{\Omega}. \end{aligned}$$

## § 2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ РАЗНОСТИ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ $a(\xi)$ И $a(\mathbf{0})$

**2.1. Оценка разности квадратичных форм  $a(\xi)$  и  $a(\mathbf{0})$ .** Оценка для разности квадратичных форм  $a(\xi)$  и  $a(\mathbf{0})$  была получена в [26, лемма 2.3].

**Лемма 2.1** ([26]). Пусть выполнены условия (1.1), (1.2) и  $1 < \alpha < 2$ . Пусть форма  $a(\xi)$  определена в (1.8). Тогда выполнена оценка

$$|a(\xi)[u, u] - a(\mathbf{0})[u, u]| \leq \check{c}(d, \alpha) |\xi| \left( a(\mathbf{0})[u, u] + \mu_+ \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right), \quad u \in \tilde{H}^\gamma(\Omega), \quad \xi \in \tilde{\Omega}.$$

**Замечание 2.2.** Для постоянной  $\check{c}(d, \alpha)$  в [26] найдено явное выражение, из которого следует, что  $\check{c}(d, \alpha) \rightarrow \infty$  при  $\alpha \rightarrow 1$  и при  $\alpha \rightarrow 2$ .

Нам понадобится выделить в разности  $a(\xi)[u, u] - a(\mathbf{0})[u, u]$  члены порядка  $|\xi|$  и оценить остаток. Для этой цели удобно “разделить трудности”, представляя форму  $a(\xi)[u, u]$  в виде суммы двух слагаемых. Положим

$$b_1(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{1}_{B_1(\mathbf{0})}(\mathbf{z})}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha}}, \quad b_2(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{1}_{\mathbb{R}^d \setminus B_1(\mathbf{0})}(\mathbf{z})}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha}}, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d.$$

Тогда

$$a(\xi)[u, u] = a_1(\xi)[u, u] + a_2(\xi)[u, u], \quad u \in \tilde{H}^\gamma(\Omega), \quad (2.1)$$

где

$$a_1(\xi)[u, u] := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_1(\mathbf{x} - \mathbf{y}) |u(\mathbf{x}) - e^{i\langle \xi, \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle} u(\mathbf{y})|^2, \quad u \in \tilde{H}^\gamma(\Omega), \quad (2.2)$$

$$a_2(\xi)[u, u] := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) |u(\mathbf{x}) - e^{i\langle \xi, \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle} u(\mathbf{y})|^2, \quad u \in \tilde{H}^\gamma(\Omega). \quad (2.3)$$

## 2.2. Представление для квадратичной формы $a_1(\xi)$ .

**Лемма 2.3.** Пусть выполнены условия (1.1), (1.2) и  $1 < \alpha < 2$ . Пусть форма  $a_1(\xi)$  определена в (2.2). Тогда справедливо представление

$$a_1(\xi)[u, u] = a_1(\mathbf{0})[u, u] + \sum_{j=1}^d \xi_j a_1^{(j)}[u, u] + \tilde{a}_1(\xi)[u, u], \quad u \in \tilde{H}^\gamma(\Omega), \quad \xi \in \tilde{\Omega}. \quad (2.4)$$

Здесь

$$a_1^{(j)}[u, u] := - \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_1(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (x_j - y_j) \operatorname{Re} \left( i u(\mathbf{x}) \overline{u(\mathbf{y})} \right), \quad u \in \tilde{H}^\gamma(\Omega). \quad (2.5)$$

Выполнены оценки

$$|a_1^{(j)}[u, u]| \leq c_1(d, \alpha) \left( a_1(\mathbf{0})[u, u] + \mu_+ \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right), \quad u \in \tilde{H}^\gamma(\Omega), \quad j = 1, \dots, d, \quad (2.6)$$

$$|\tilde{a}_1(\xi)[u, u]| \leq \tilde{c}_1(d, \alpha) |\xi|^2 \left( a_1(\mathbf{0})[u, u] + \mu_+ \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right), \quad u \in \tilde{H}^\gamma(\Omega), \quad \xi \in \tilde{\Omega}. \quad (2.7)$$

*Доказательство.* Воспользуемся элементарным представлением

$$e^{i\lambda} = 1 + i\lambda + \lambda^2 F(\lambda), \quad F(\lambda) = - \int_0^1 dt t \int_0^1 ds e^{ist\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

Очевидно,  $F \in L_\infty(\mathbb{R})$ , причем

$$|F(\lambda)| \leq \frac{1}{2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.9)$$

Согласно (2.2) и (2.8) при  $u \in \tilde{H}^\gamma(\Omega)$  имеем

$$\begin{aligned} a_1(\boldsymbol{\xi})[u, u] &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_1(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &\quad \times \left| u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y}) + i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle u(\mathbf{y}) - \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle^2 F(\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle) u(\mathbf{y}) \right|^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$a_1(\boldsymbol{\xi})[u, u] = a_1(\mathbf{0})[u, u] + \sum_{j=1}^d \xi_j a_1^{(j)}[u, u] + \tilde{a}_1(\boldsymbol{\xi})[u, u], \quad (2.10)$$

где

$$a_1^{(j)}[u, u] = - \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_1(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (x_j - y_j) \operatorname{Re} \left( i(u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})) \overline{u(\mathbf{y})} \right), \quad (2.11)$$

$$\tilde{a}_1(\boldsymbol{\xi})[u, u] = \tilde{a}_1'(\boldsymbol{\xi})[u, u] + \tilde{a}_1''(\boldsymbol{\xi})[u, u], \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1'(\boldsymbol{\xi})[u, u] &= - \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_1(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle^2 \operatorname{Re} \left( \overline{F(\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle)} (u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})) \overline{u(\mathbf{y})} \right), \\ &\quad (2.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1''(\boldsymbol{\xi})[u, u] &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_1(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \left| i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle - \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle^2 F(\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle) \right|^2 |u(\mathbf{y})|^2. \\ &\quad (2.14) \end{aligned}$$

Из (2.10) и (2.11) с учетом очевидного равенства  $\operatorname{Re}(-i|u(\mathbf{y})|^2) = 0$  вытекают представления (2.4), (2.5).

Преобразуем форму (2.11), учитывая периодичность функций  $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  и  $u(\mathbf{y})$ :

$$\begin{aligned} a_1^{(j)}[u, u] &= - \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} \int_{\Omega + \mathbf{n}} d\mathbf{y} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_1(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (x_j - y_j) \operatorname{Re} \left( i(u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})) \overline{u(\mathbf{y})} \right) \\ &= - \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} \int_{\Omega} d\mathbf{y} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_1(\mathbf{x} - \mathbf{y} - \mathbf{n}) (x_j - y_j - n_j) \operatorname{Re} \left( i(u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})) \overline{u(\mathbf{y})} \right) \\ &= - \operatorname{Re} \left( i \int_{\Omega} d\mathbf{y} \overline{u(\mathbf{y})} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_1(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (x_j - y_j) (u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})) \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Оценим внутренний интеграл в последнем выражении, применяя неравенство Коши:

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_1(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (x_j - y_j) (u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})) \right|^2 \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_1(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (x_j - y_j)^2 \right) \left( \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_1(\mathbf{x} - \mathbf{y}) |u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|^2 \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Учитывая (2.2) (при  $\xi = 0$ ) и соотношение

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_1(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (x_j - y_j)^2 \leq \mu_+ \int_{|\mathbf{z}| < 1} \frac{d\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha-2}} = \mu_+ \omega_d \int_0^1 \frac{dr}{r^{\alpha-1}} = \mu_+ \frac{\omega_d}{2-\alpha},$$

из (2.15) и (2.16) получаем

$$\begin{aligned} |a_1^{(j)}[u, u]| &\leq \left( \mu_+ \frac{\omega_d}{2-\alpha} \right)^{1/2} \int_{\Omega} d\mathbf{y} |u(\mathbf{y})| \left( \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_1(\mathbf{x} - \mathbf{y}) |u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left( \mu_+ \frac{\omega_d}{2-\alpha} \right)^{1/2} \|u\|_{L_2(\Omega)} (2a_1(0)[u, u])^{1/2} \leq \left( \frac{\omega_d}{2(2-\alpha)} \right)^{1/2} \left( a_1(0)[u, u] + \mu_+ \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

Это доказывает неравенство (2.6) с постоянной  $c_1(d, \alpha) = \omega_d^{1/2} (2(2-\alpha))^{-1/2}$ .

Перейдем к оценке формы (2.13). По аналогии с (2.15) имеем:

$$\tilde{a}'_1(\xi)[u, u] = -\operatorname{Re} \left( \int_{\Omega} d\mathbf{y} \overline{u(\mathbf{y})} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_1(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \langle \xi, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle^2 \overline{F(\langle \xi, \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle)} (u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})) \right).$$

Используя неравенство Коши и учитывая (2.9), оценим внутренний интеграл:

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_1(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \langle \xi, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle^2 \overline{F(\langle \xi, \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle)} (u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})) \right|^2 \\ &\leq \left( \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_1(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \langle \xi, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle^4 \right) \left( \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_1(\mathbf{x} - \mathbf{y}) |u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|^2 \right) \end{aligned}$$

Учитывая (2.2) (при  $\xi = 0$ ) и соотношение

$$\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_1(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \langle \xi, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle^4 \leq \frac{\mu_+}{4} |\xi|^4 \int_{|\mathbf{z}| < 1} \frac{d\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha-4}} = \frac{\mu_+}{4} |\xi|^4 \omega_d \int_0^1 \frac{dr}{r^{\alpha-3}} = \mu_+ |\xi|^4 \frac{\omega_d}{4(4-\alpha)},$$

получаем

$$\begin{aligned} |\tilde{a}'_1(\xi)[u, u]| &\leq |\xi|^2 \left( \frac{\mu_+ \omega_d}{4(4-\alpha)} \right)^{1/2} \int_{\Omega} d\mathbf{y} |u(\mathbf{y})| \left( \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_1(\mathbf{x} - \mathbf{y}) |u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq |\xi|^2 \left( \frac{\mu_+ \omega_d}{4(4-\alpha)} \right)^{1/2} \|u\|_{L_2(\Omega)} (2a_1(0)[u, u])^{1/2} \leq \tilde{c}'_1(d, \alpha) |\xi|^2 \left( a_1(0)[u, u] + \mu_+ \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

с постоянной  $\tilde{c}'_1(d, \alpha) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \omega_d^{1/2} (4-\alpha)^{-1/2}$ .

Остается оценить форму (2.14). По аналогии с (2.15) имеем:

$$\tilde{a}''_1(\xi)[u, u] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} d\mathbf{y} |u(\mathbf{y})|^2 \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_1(\mathbf{x} - \mathbf{y}) |i\langle \xi, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle - \langle \xi, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle^2 F(\langle \xi, \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle)|^2.$$

Учитывая (2.9), оценим внутренний интеграл:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_1(\mathbf{x} - \mathbf{y}) |i\langle \xi, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle - \langle \xi, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle^2 F(\langle \xi, \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle)|^2 \\ &\leq \mu_+ \int_{|\mathbf{z}| < 1} d\mathbf{z} \left( \frac{2|\xi|^2}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha-2}} + \frac{|\xi|^4}{2|\mathbf{z}|^{d+\alpha-4}} \right) = \mu_+ \omega_d \left( \frac{2|\xi|^2}{2-\alpha} + \frac{|\xi|^4}{2(4-\alpha)} \right). \end{aligned}$$

В результате, используя неравенство  $|\xi| \leq \pi\sqrt{d}$  для  $\xi \in \tilde{\Omega}$ , приходим к оценке

$$|\tilde{a}''_1(\xi)[u, u]| \leq \tilde{c}''_1(d, \alpha) |\xi|^2 \mu_+ \|u\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad (2.18)$$

где  $\tilde{c}''_1(d, \alpha) = \omega_d((2-\alpha)^{-1} + \frac{1}{4}\pi^2 d(4-\alpha)^{-1})$ .

Сопоставляя (2.12), (2.17) и (2.18), приходим к искомой оценке (2.7) с постоянной  $\tilde{c}_1(d, \alpha) = \tilde{c}'_1(d, \alpha) + \tilde{c}''_1(d, \alpha)$ .  $\square$

**Замечание 2.4.** Из явных выражений для констант  $c_1(d, \alpha)$  и  $\tilde{c}_1(d, \alpha)$  видно, что  $c_1(d, \alpha) \rightarrow \infty$  и  $\tilde{c}_1(d, \alpha) \rightarrow \infty$  при  $\alpha \rightarrow 2$ .

**2.3. Представление для квадратичной формы  $a_2(\xi)$ .** Преобразуем форму (2.3):

$$\begin{aligned} a_2(\xi)[u, u] &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) |u(\mathbf{x})|^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) |u(\mathbf{y})|^2 \\ &\quad - \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) e^{i\langle \xi, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle} u(\mathbf{x}) \overline{u(\mathbf{y})}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Положим

$$V(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^d} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Поскольку

$$\int_{\mathbb{R}^d} b_2(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \int_{|\mathbf{z}| > 1} \frac{d\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha}} = \omega_d \int_1^\infty \frac{dr}{r^{1+\alpha}} = \frac{\omega_d}{\alpha},$$

то потенциал  $V(\mathbf{x})$  ограничен:

$$\mu_- \frac{\omega_d}{\alpha} \leq V(\mathbf{x}) \leq \mu_+ \frac{\omega_d}{\alpha}, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.20)$$

Очевидно, первое слагаемое в правой части (2.19) запишется в виде  $\frac{1}{2} \int_{\Omega} V(\mathbf{x}) |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$ . Аналогично (2.15) второе слагаемое в правой части (2.19) можно преобразовать:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) |u(\mathbf{y})|^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} d\mathbf{y} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) |u(\mathbf{y})|^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} V(\mathbf{y}) |u(\mathbf{y})|^2 d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Третий член в правой части (2.19) представим в виде

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) e^{i\langle \xi, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle} u(\mathbf{x}) \overline{u(\mathbf{y})} \\ &= \operatorname{Re} \int_{\Omega} d\mathbf{y} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{b}_2(\xi, \mathbf{x} - \mathbf{y}) u(\mathbf{x}) \overline{u(\mathbf{y})} = \operatorname{Re} (K(\xi)u, u)_{L_2(\Omega)}, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{b}_2(\xi, \mathbf{z}) := \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} b_2(\mathbf{z} + \mathbf{n}) e^{i\langle \xi, \mathbf{z} + \mathbf{n} \rangle},$$

а  $K(\xi)$  — интегральный оператор вида

$$(K(\xi)u)(\mathbf{y}) = \int_{\Omega} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{b}_2(\xi, \mathbf{x} - \mathbf{y}) u(\mathbf{x}).$$

Оператор  $K(\xi)$  ограничен; его норму легко оценить с помощью теста Шура (см., например, [24, лемма 4.1]):

$$\|K(\xi)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)}^2 \leq \left( \sup_{\mathbf{y} \in \Omega} \int_{\Omega} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) |\tilde{b}_2(\xi, \mathbf{x} - \mathbf{y})| d\mathbf{x} \right) \left( \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) |\tilde{b}_2(\xi, \mathbf{x} - \mathbf{y})| d\mathbf{y} \right). \quad (2.21)$$

Имеем:

$$\sup_{\mathbf{y} \in \Omega} \int_{\Omega} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) |\tilde{b}_2(\xi, \mathbf{x} - \mathbf{y})| d\mathbf{x} \leq \mu_+ \sup_{\mathbf{y} \in \Omega} \int_{\Omega} |\tilde{b}_2(\xi, \mathbf{x} - \mathbf{y})| d\mathbf{x} \leq \mu_+ \int_{\mathbb{R}^d} b_2(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \mu_+ \frac{\omega_d}{\alpha}. \quad (2.22)$$

Второй супремум в (2.21) допускает такую же оценку. Следовательно,

$$\|K(\boldsymbol{\xi})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mu_+ \frac{\omega_d}{\alpha}. \quad (2.23)$$

В итоге получаем:

$$a_2(\boldsymbol{\xi})[u, u] = \int_{\Omega} V(\mathbf{x}) |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} - \operatorname{Re} (K(\boldsymbol{\xi})u, u)_{L_2(\Omega)}. \quad (2.24)$$

Тем самым форма  $a_2(\boldsymbol{\xi})[u, u]$  ограничена и ее можно распространить на все  $u \in L_2(\Omega)$ . Из (2.20), (2.23) и (2.24) вытекает оценка

$$a_2(\boldsymbol{\xi})[u, u] \leq 2\mu_+ \frac{\omega_d}{\alpha} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad u \in L_2(\Omega).$$

**Лемма 2.5.** Пусть выполнены условия (1.1), (1.2) и  $1 < \alpha < 2$ . Пусть форма  $a_2(\boldsymbol{\xi})$  определена в (2.3). Тогда форму  $a_2(\boldsymbol{\xi})[u, u]$  можно распространить на все  $u \in L_2(\Omega)$  и представить в виде (2.24). Справедливо представление

$$a_2(\boldsymbol{\xi})[u, u] = a_2(\mathbf{0})[u, u] + \sum_{j=1}^d \xi_j a_2^{(j)}[u, u] + \tilde{a}_2(\boldsymbol{\xi})[u, u], \quad u \in L_2(\Omega), \quad \boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}. \quad (2.25)$$

Здесь

$$a_2^{(j)}[u, u] := - \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (x_j - y_j) \operatorname{Re} (iu(\mathbf{x}) \overline{u(\mathbf{y})}), \quad u \in L_2(\Omega). \quad (2.26)$$

Выполнены оценки

$$|a_2^{(j)}[u, u]| \leq c_2(d, \alpha) \mu_+ \|u\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad u \in L_2(\Omega), \quad j = 1, \dots, d, \quad (2.27)$$

$$|\tilde{a}_2(\boldsymbol{\xi})[u, u]| \leq \tilde{c}_2(d, \alpha) |\boldsymbol{\xi}|^\alpha \mu_+ \|u\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad u \in L_2(\Omega), \quad \boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}. \quad (2.28)$$

*Доказательство.* Из (2.24) вытекает, что

$$\begin{aligned} a_2(\boldsymbol{\xi})[u, u] - a_2(\mathbf{0})[u, u] &= - \operatorname{Re} ((K(\boldsymbol{\xi}) - K(\mathbf{0}))u, u)_{L_2(\Omega)} \\ &= - \operatorname{Re} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} \int_{\tilde{\Omega}} d\mathbf{y} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_2(\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{n}) (e^{i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{n} \rangle} - 1) u(\mathbf{x}) \overline{u(\mathbf{y})}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Воспользуемся элементарным представлением

$$e^{i\lambda} = 1 + i\lambda + \frac{|\lambda|^\alpha F_p(\lambda)}{(1 + |\ln |\lambda||)^p}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad p > 1, \quad (2.30)$$

где  $F_p \in L_\infty(\mathbb{R})$ , и выполнена равномерная по  $\lambda$  оценка

$$|F_p(\lambda)| \leq \max \left\{ \sup_{0 < x \leq 1} \frac{x^{2-\alpha}}{2} (1 + |\ln x|)^p, \sup_{1 \leq x < \infty} \frac{(2+x)}{x^\alpha} (1 + |\ln x|)^p \right\} =: \mathfrak{c}(p, \alpha), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.31)$$

В силу (2.29) и (2.30) имеем

$$a_2(\boldsymbol{\xi})[u, u] - a_2(\mathbf{0})[u, u] = \sum_{j=1}^d \xi_j a_2^{(j)}[u, u] + \tilde{a}_2(\boldsymbol{\xi})[u, u], \quad (2.32)$$

где

$$\begin{aligned} a_2^{(j)}[u, u] &= - \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} \int_{\tilde{\Omega}} d\mathbf{y} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_2(\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{n}) (x_j - y_j + n_j) \operatorname{Re} (iu(\mathbf{x}) \overline{u(\mathbf{y})}) \\ &= - \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (x_j - y_j) \operatorname{Re} (iu(\mathbf{x}) \overline{u(\mathbf{y})}), \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_2(\boldsymbol{\xi})[u, u] = & - \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} \int_{\Omega} d\mathbf{y} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_2(\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{n}) \frac{|\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{n} \rangle|^\alpha}{(1 + |\ln |\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{n} \rangle||)^p} \\ & \times \operatorname{Re} (F_p(\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{n} \rangle) u(\mathbf{x}) \overline{u(\mathbf{y})}). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Соотношения (2.32), (2.33) доказывают представления (2.25) и (2.26).

Чтобы оценить форму (2.33), запишем ее в виде

$$a_2^{(j)}[u, u] = -\operatorname{Re} (i(K_{2,j}u, u)_{L_2(\Omega)}), \quad (2.35)$$

где

$$\begin{aligned} (K_{2,j}u)(\mathbf{y}) &= \int_{\Omega} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{b}_{2,j}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \\ \tilde{b}_{2,j}(\mathbf{z}) &:= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} b_2(\mathbf{z} + \mathbf{n}) (z_j + n_j). \end{aligned}$$

Норму интегрального оператора  $K_{2,j}$  можно оценить с помощью теста Шура (ср. (2.21)–(2.23)):

$$\|K_{2,j}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)}^2 \leq \left( \sup_{\mathbf{y} \in \Omega} \int_{\Omega} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) |\tilde{b}_{2,j}(\mathbf{x} - \mathbf{y})| d\mathbf{x} \right) \left( \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) |\tilde{b}_{2,j}(\mathbf{x} - \mathbf{y})| d\mathbf{y} \right). \quad (2.36)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{y} \in \Omega} \int_{\Omega} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) |\tilde{b}_{2,j}(\mathbf{x} - \mathbf{y})| d\mathbf{x} &\leq \sup_{\mathbf{y} \in \Omega} \mu_+ \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} \int_{\Omega} b_2(\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{n}) |x_j - y_j + n_j| d\mathbf{x} \\ &= \mu_+ \int_{\mathbb{R}^d} b_2(\mathbf{z}) |z_j| d\mathbf{z} \leq \mu_+ \int_{|\mathbf{z}| > 1} \frac{d\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha-1}} = \mu_+ \omega_d \int_1^\infty \frac{dr}{r^\alpha} = \mu_+ \frac{\omega_d}{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Второй супремум в (2.36) допускает такую же оценку. Следовательно,  $\|K_{2,j}\| \leq \mu_+ \frac{\omega_d}{\alpha-1}$ . Отсюда и из (2.35) вытекает оценка (2.27) с постоянной  $c_2(d, \alpha) = \frac{\omega_d}{\alpha-1}$ .

Перейдем к оценке формы (2.34), которую запишем в виде

$$\tilde{a}_2(\boldsymbol{\xi})[u, u] = -\operatorname{Re} (\tilde{K}_2(\boldsymbol{\xi})u, u)_{L_2(\Omega)}, \quad (2.37)$$

где

$$\begin{aligned} (\tilde{K}_2(\boldsymbol{\xi})u)(\mathbf{y}) &= \int_{\Omega} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) T(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) u(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \\ T(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{z}) &:= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} b_2(\mathbf{z} + \mathbf{n}) \frac{|\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{z} + \mathbf{n} \rangle|^\alpha F_p(\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{z} + \mathbf{n} \rangle)}{(1 + |\ln |\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{z} + \mathbf{n} \rangle||)^p}. \end{aligned}$$

Оценим норму интегрального оператора  $\tilde{K}_2(\boldsymbol{\xi})$  с помощью теста Шура:

$$\|\tilde{K}_2(\boldsymbol{\xi})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)}^2 \leq \left( \sup_{\mathbf{y} \in \Omega} \int_{\Omega} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) |T(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} - \mathbf{y})| d\mathbf{x} \right) \left( \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) |T(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} - \mathbf{y})| d\mathbf{y} \right). \quad (2.38)$$

С учетом (2.31) имеем:

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{y} \in \Omega} \int_{\Omega} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) |T(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} - \mathbf{y})| d\mathbf{x} &\leq \mathfrak{c}(p, \alpha) \mu_+ \int_{\mathbb{R}^d} b_2(\mathbf{z}) \frac{|\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{z} \rangle|^\alpha}{(1 + |\ln |\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{z} \rangle||)^p} d\mathbf{z} \\ &= \mathfrak{c}(p, \alpha) \mu_+ |\boldsymbol{\xi}|^\alpha \int_{|\mathbf{z}| > 1} \frac{|z_1|^\alpha d\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha} (1 + |\ln(|\boldsymbol{\xi}| |z_1|)|)^p} \leq \mathfrak{c}(p, \alpha) \mu_+ |\boldsymbol{\xi}|^\alpha \int_{|\mathbf{z}| > 1} \frac{d\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|^d (1 + |\ln(|\boldsymbol{\xi}| |z_1|)|)^p}. \end{aligned} \quad (2.39)$$



Здесь при  $\boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}$  мы выбрали систему координат, в которой первая ось сонаправлена с вектором  $\boldsymbol{\xi}$ ; тогда  $\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{z} \rangle = |\boldsymbol{\xi}|z_1$ . Чтобы оценить последний интеграл в (2.39), заметим, что цилиндр

$$\left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d : |z_1| < \frac{1}{\sqrt{2}}, |\mathbf{z}'| < \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

содержится в шаре  $B_1(\mathbf{0})$ . (Здесь  $\mathbf{z} = (z_1, \mathbf{z}')$ ,  $\mathbf{z}' = (z_2, \dots, z_n)$ .) Оценивая интеграл по внешности шара через интеграл по внешности цилиндра, получаем:

$$\begin{aligned} \int_{|\mathbf{z}|>1} \frac{d\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|^d(1+|\ln(|\boldsymbol{\xi}||z_1|)|)^p} &\leq \int_{|z_1|<\frac{1}{\sqrt{2}}} dz_1 \int_{|\mathbf{z}'|>\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{d\mathbf{z}'}{|\mathbf{z}|^d(1+|\ln(|\boldsymbol{\xi}||z_1|)|)^p} \\ &+ \int_{|z_1|>\frac{1}{\sqrt{2}}} dz_1 \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{d\mathbf{z}'}{|\mathbf{z}|^d(1+|\ln(|\boldsymbol{\xi}||z_1|)|)^p}. \end{aligned}$$

Очевидно, первый интеграл справа не превосходит величины

$$\sqrt{2} \int_{|\mathbf{z}'|>\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{d\mathbf{z}'}{|\mathbf{z}'|^d} = \sqrt{2} \omega_{d-1} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = 2\omega_{d-1}.$$

Оценим второй интеграл:

$$\begin{aligned} \int_{|z_1|>\frac{1}{\sqrt{2}}} dz_1 \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{d\mathbf{z}'}{|\mathbf{z}|^d(1+|\ln(|\boldsymbol{\xi}||z_1|)|)^p} &= \int_{|z_1|>\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dz_1}{(1+|\ln(|\boldsymbol{\xi}||z_1|)|)^p} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{d\mathbf{z}'}{(z_1^2 + |\mathbf{z}'|^2)^{d/2}} \\ &= 2 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\infty} \frac{dz_1}{z_1(1+|\ln(|\boldsymbol{\xi}||z_1|)|)^p} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{d\mathbf{w}'}{(1+|\mathbf{w}'|^2)^{d/2}} \leq 2\mathfrak{c}'_d \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\tau(1+|\ln \tau|)^p} = 2\mathfrak{c}'_d \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(1+|t|)^p} = \frac{4\mathfrak{c}'_d}{p-1}. \end{aligned}$$

Здесь выполнена замена  $\mathbf{z}' = |z_1|\mathbf{w}'$ , а затем замены  $\tau = |\boldsymbol{\xi}|z_1$ ,  $t = \ln \tau$ ; использовано обозначение

$$\mathfrak{c}'_d = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{d\mathbf{w}'}{(1+|\mathbf{w}'|^2)^{d/2}}. \quad (2.40)$$

В итоге получаем оценку

$$\int_{|\mathbf{z}|>1} \frac{d\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|^d(1+|\ln(|\boldsymbol{\xi}||z_1|)|)^p} \leq 2\omega_{d-1} + \frac{4\mathfrak{c}'_d}{p-1}.$$

Отсюда и из (2.39) следует неравенство

$$\sup_{\mathbf{y} \in \Omega} \int_{\Omega} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) |T(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} - \mathbf{y})| d\mathbf{x} \leq \hat{c}_2(p, d, \alpha) \mu_+ |\boldsymbol{\xi}|^\alpha, \quad \hat{c}_2(p, d, \alpha) = \mathfrak{c}(p, \alpha) \left( 2\omega_{d-1} + \frac{4\mathfrak{c}'_d}{p-1} \right).$$

Второй супремум в (2.38) допускает такую же оценку. Следовательно, норма  $\|\tilde{K}_2(\boldsymbol{\xi})\|$  оценивается через величину  $\hat{c}_2(p, d, \alpha) \mu_+ |\boldsymbol{\xi}|^\alpha$ . Тогда согласно (2.37) справедлива оценка

$$\tilde{a}_2(\boldsymbol{\xi})[u, u] \leq \hat{c}_2(p, d, \alpha) \mu_+ |\boldsymbol{\xi}|^\alpha \|u\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad u \in L_2(\Omega).$$

Выбирая  $p = 2$  в (2.30), отсюда получаем искомую оценку (2.28) с постоянной  $\tilde{c}_2(d, \alpha) = \hat{c}_2(2, d, \alpha)$ .  $\square$

**Замечание 2.6.** Отметим, что  $c_2(d, \alpha) \rightarrow \infty$  и  $\tilde{c}_2(d, \alpha) \rightarrow \infty$  при  $\alpha \rightarrow 1$ .

**2.4. Представление для квадратичной формы  $a(\xi)$ .** Комбинируя (2.1) и леммы 2.3, 2.5, получаем следующее утверждение.

**Лемма 2.7.** *Пусть выполнены условия (1.1), (1.2) и  $1 < \alpha < 2$ . Пусть форма  $a(\xi)$  определена в (1.8). Тогда справедливо представление*

$$a(\xi)[u, u] = a(\mathbf{0})[u, u] + \sum_{j=1}^d \xi_j a^{(j)}[u, u] + \tilde{a}(\xi)[u, u], \quad u \in \tilde{H}^\gamma(\Omega), \quad \xi \in \tilde{\Omega}.$$

Здесь

$$a^{(j)}[u, u] := - \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{(x_j - y_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+\alpha}} \operatorname{Re} \left( i u(\mathbf{x}) \overline{u(\mathbf{y})} \right), \quad u \in \tilde{H}^\gamma(\Omega). \quad (2.41)$$

Выполнены оценки

$$|a^{(j)}[u, u]| \leq c_3(d, \alpha) \left( a(\mathbf{0})[u, u] + \mu_+ \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right), \quad u \in \tilde{H}^\gamma(\Omega), \quad j = 1, \dots, d, \quad (2.42)$$

$$|\tilde{a}(\xi)[u, u]| \leq \tilde{c}_3(d, \alpha) |\xi|^\alpha \left( a(\mathbf{0})[u, u] + \mu_+ \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right), \quad u \in \tilde{H}^\gamma(\Omega), \quad \xi \in \tilde{\Omega}. \quad (2.43)$$

**Замечание 2.8.** *Постоянные  $c_3(d, \alpha)$ ,  $\tilde{c}_3(d, \alpha)$  выражаются через постоянные из лемм 2.3 и 2.5:  $c_3(d, \alpha) = c_1(d, \alpha) + c_2(d, \alpha)$ ,  $\tilde{c}_3(d, \alpha) = \tilde{c}_1(d, \alpha)(\pi\sqrt{d})^{2-\alpha} + \tilde{c}_2(d, \alpha)$ . Согласно замечаниям 2.4 и 2.6,  $c_3(d, \alpha) \rightarrow \infty$  и  $\tilde{c}_3(d, \alpha) \rightarrow \infty$  при  $\alpha \rightarrow 1$  и при  $\alpha \rightarrow 2$ .*

### § 3. ПОРОГОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОПЕРАТОРА ТИПА ЛЕВИ ВБЛИЗИ НИЖНЕГО КРАЯ СПЕКТРА

**3.1. Край спектра оператора  $\mathbb{A}(\xi; \alpha, \mu)$ .** Обозначим через  $\lambda_j(\xi)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , собственные значения оператора  $\mathbb{A}(\xi)$ , занумерованные в порядке неубывания с учетом кратностей. Через  $\lambda_j^0(\xi)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , обозначим последовательные собственные значения оператора  $\mathbb{A}_0(\xi)$ . Из (1.9) и вариационного принципа для нахождения собственных значений вытекают неравенства

$$\mu_- \lambda_j^0(\xi) \leq \lambda_j(\xi) \leq \mu_+ \lambda_j^0(\xi), \quad j \in \mathbb{N}, \quad \xi \in \tilde{\Omega}. \quad (3.1)$$

Благодаря диагонализации (1.14) собственные значения оператора  $\mathbb{A}_0(\xi)$  можно найти явно: это числа вида  $c_0(d, \alpha) |2\pi\mathbf{n} + \xi|^\alpha$ ,  $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$ , соответствующие собственные элементы — это функции  $e^{2\pi i \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle}$ . Первое собственное значение имеет вид

$$\lambda_1^0(\xi) = c_0(d, \alpha) |\xi|^\alpha, \quad \xi \in \tilde{\Omega}, \quad (3.2)$$

$\mathbf{1}_\Omega$  — собственная функция. Поскольку

$$|\xi| < |2\pi\mathbf{n} + \xi|, \quad \xi \in \operatorname{Int} \tilde{\Omega} = (-\pi, \pi)^d, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d \setminus \mathbf{0},$$

то при  $\xi \in (-\pi, \pi)^d$  первое собственное значение оператора  $\mathbb{A}_0(\xi)$  — простое и отвечающее ему собственное подпространство — это  $\mathcal{L}\{\mathbf{1}_\Omega\}$ . В силу (1.16), (1.17) справедливы соотношения

$$\lambda_2^0(\xi) = c_0(d, \alpha) \min_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d \setminus \mathbf{0}} |2\pi\mathbf{n} + \xi|^\alpha \geq c_0(d, \alpha) \pi^\alpha, \quad \xi \in \tilde{\Omega}, \quad (3.3)$$

$$\lambda_2^0(\mathbf{0}) = c_0(d, \alpha) (2\pi)^\alpha. \quad (3.4)$$

Из (3.1)–(3.4) вытекают оценки

$$\mu_- c_0(d, \alpha) |\xi|^\alpha \leq \lambda_1(\xi) \leq \mu_+ c_0(d, \alpha) |\xi|^\alpha, \quad \xi \in \tilde{\Omega}, \quad (3.5)$$

$$\lambda_2(\xi) \geq \mu_- c_0(d, \alpha) \pi^\alpha =: d_0, \quad \xi \in \tilde{\Omega}, \quad (3.6)$$

$$\lambda_2(\mathbf{0}) \geq \mu_- c_0(d, \alpha) (2\pi)^\alpha = 2^\alpha d_0. \quad (3.7)$$

Согласно лемме 1.4 нижний край спектра оператора  $\mathbb{A}(\mathbf{0}; \alpha, \mu)$  есть изолированное простое собственное значение  $\lambda_1(\mathbf{0}) = 0$ ; отвечающее ему собственное подпространство — это  $\mathcal{L}\{\mathbf{1}_\Omega\}$ . В

силу (3.7) расстояние от точки  $\lambda_1(\mathbf{0}) = 0$  до остального спектра оператора  $\mathbb{A}(\mathbf{0}; \alpha, \mu)$  не меньше величины  $2^\alpha d_0$ .

Положим

$$\delta_0(\alpha, \mu) := \pi \left( \frac{\mu_-}{3\mu_+} \right)^{1/\alpha}. \quad (3.8)$$

Очевидно,  $\delta_0(\alpha, \mu) < \pi$ , а потому шар  $|\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(\alpha, \mu)$  лежит внутри множества  $\tilde{\Omega}$ . Из оценок (3.5), (3.6) видно, что при  $|\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(\alpha, \mu)$  первое собственное значение оператора  $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; \alpha, \mu)$  находится на интервале  $[0, d_0/3]$ , а остальной спектр — на полуоси  $[d_0, \infty)$ . Мы пришли к следующему утверждению.

**Предложение 3.1.** *Пусть выполнены условия (1.1), (1.2) и  $1 < \alpha < 2$ . Пусть  $d_0 := \mu_- c_0(d, \alpha) \pi^\alpha$ , а число  $\delta_0(\alpha, \mu)$  определено в (3.8). При  $|\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(\alpha, \mu)$  спектр оператора  $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; \alpha, \mu)$  на отрезке  $[0, d_0/3]$  состоит из однократного собственного значения; на интервале  $(d_0/3, d_0)$  нет точек спектра оператора  $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; \alpha, \mu)$ .*

**3.2. Контур  $\Gamma$ . Резольвентное тождество.** Обозначим через  $F(\boldsymbol{\xi})$  спектральный проектор оператора  $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; \alpha, \mu)$ , отвечающий отрезку  $[0, d_0/3]$ . Пусть  $\Gamma$  — контур на комплексной плоскости, проходящий через середину интервала  $(d_0/3, d_0)$  и эквидистантно охватывающий отрезок  $[0, d_0/3]$ . Длина контура  $\Gamma$  равна

$$l_\Gamma = \frac{d_0(2\pi + 2)}{3}.$$

В силу предложения 3.1 и формулы Рисса справедливы представления

$$F(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) - \zeta I)^{-1} d\zeta, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(\alpha, \mu), \quad (3.9)$$

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})F(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) - \zeta I)^{-1} \zeta d\zeta, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(\alpha, \mu). \quad (3.10)$$

Здесь в интегралах направление обхода контура идет против часовой стрелки.

На основе (3.9) и (3.10) мы получаем приближения к операторам  $F(\boldsymbol{\xi})$  и  $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})F(\boldsymbol{\xi})$  при  $|\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(\alpha, \mu)$ . Для этого нам понадобится подходящий вариант резольвентного тождества для разности резольвент операторов  $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})$  и  $\mathbb{A}(\mathbf{0})$ . Обычное резольвентное тождество сейчас неприменимо, поскольку разность  $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) - \mathbb{A}(\mathbf{0})$  не определена.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} R(\boldsymbol{\xi}, \zeta) &:= (\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) - \zeta I)^{-1}, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(\alpha, \mu), \quad \zeta \in \Gamma; \\ R_0(\zeta) &:= R(\mathbf{0}, \zeta), \quad \zeta \in \Gamma. \end{aligned}$$

В силу предложения 3.1 обе резольвенты допускают на контуре  $\Gamma$  оценки

$$\|R(\boldsymbol{\xi}, \zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq 3d_0^{-1}, \quad \|R_0(\zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq 3d_0^{-1}, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(\alpha, \mu), \quad \zeta \in \Gamma. \quad (3.11)$$

Воспользуемся резольвентным тождеством для операторов, порожденных замкнутыми неотрицательными формами с общей областью определения; см. [6, гл. 1, §2]. Обозначим через  $\mathfrak{D}$  гильбертово пространство  $\text{Dom } a(\mathbf{0}) = \tilde{H}^\gamma(\Omega)$ , снабженное скалярным произведением

$$(u, v)_{\mathfrak{D}} := a(\mathbf{0})[u, v] + \mu_+(u, v)_{L_2(\Omega)}, \quad u, v \in \tilde{H}^\gamma(\Omega).$$

Сразу отметим очевидную оценку

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq \mu_+^{-1/2} \|u\|_{\mathfrak{D}}, \quad u \in \mathfrak{D}. \quad (3.12)$$

Форма  $a(\boldsymbol{\xi}) - a(\mathbf{0})$  непрерывна в  $\mathfrak{D}$ , а потому порождает непрерывный самосопряженный оператор  $\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})$  в  $\mathfrak{D}$ . Таким образом,

$$a(\boldsymbol{\xi})[u, v] - a(\mathbf{0})[u, v] = (\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})u, v)_{\mathfrak{D}}, \quad u, v \in \mathfrak{D}, \quad (3.13)$$

$$\|\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})\|_{\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}} = \sup_{0 \neq u \in \mathfrak{D}} \frac{|a(\boldsymbol{\xi})[u, u] - a(\mathbf{0})[u, u]|}{\|u\|_{\mathfrak{D}}^2}.$$

В силу леммы 2.1 отсюда следует оценка

$$\|\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})\|_{\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}} \leq \check{c}(d, \alpha)|\boldsymbol{\xi}|, \quad \boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}. \quad (3.14)$$

С учетом (3.12) справедливо также неравенство

$$\|\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})\|_{\mathfrak{D} \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mu_+^{-1/2} \check{c}(d, \alpha)|\boldsymbol{\xi}|, \quad \boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}. \quad (3.15)$$

Согласно [6, гл. 1, §2] имеет место резольвентное тождество

$$R(\boldsymbol{\xi}, \zeta) - R_0(\zeta) = -\Upsilon(\zeta)\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})R(\boldsymbol{\xi}, \zeta), \quad (3.16)$$

где

$$\Upsilon(\zeta) := I + (\zeta + \mu_+)R_0(\zeta). \quad (3.17)$$

С учетом (3.11), (3.17) и оценки  $|\zeta| \leq 2d_0/3$  при  $\zeta \in \Gamma$  получаем

$$\|\Upsilon(\zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq 1 + |\zeta + \mu_+| \|R_0(\zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq 3 + 3\mu_+ d_0^{-1}, \quad \zeta \in \Gamma. \quad (3.18)$$

Нам понадобятся также следующие оценки, установленные в [26, (3.40), (3.46)]:

$$\|R_0(\zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow \mathfrak{D}} \leq \mu_+^{-1/2} (3 + 3\mu_+ d_0^{-1}), \quad \zeta \in \Gamma, \quad (3.19)$$

$$\|R(\boldsymbol{\xi}, \zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow \mathfrak{D}} \leq \beta_0(d, \alpha) \mu_+^{-1/2} (3 + 3\mu_+ d_0^{-1}), \quad \zeta \in \Gamma, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(\alpha, \mu). \quad (3.20)$$

Здесь

$$\beta_0^2(d, \alpha) := \max\{2, 1 + 2c_0(d, \alpha)\pi^\alpha d^{\alpha/2}\}.$$

С помощью резольвентного тождества (3.16) и оценок для операторов  $R(\boldsymbol{\xi}, \zeta)$ ,  $R_0(\zeta)$ ,  $\Upsilon(\zeta)$ ,  $\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})$  в [26, (3.41), (3.47)] было проверено следующее утверждение.

**Лемма 3.2** ([26]). *При  $|\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(\alpha, \mu)$  и  $\zeta \in \Gamma$  справедливы оценки*

$$\|R(\boldsymbol{\xi}, \zeta) - R_0(\zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_1 |\boldsymbol{\xi}|,$$

$$\|R(\boldsymbol{\xi}, \zeta) - R_0(\zeta) + \Upsilon(\zeta)\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_2 |\boldsymbol{\xi}|^2,$$

где постоянные  $C_1, C_2$  заданы выражениями

$$C_1 = \check{c}(d, \alpha) \beta_0(d, \alpha) \mu_+^{-1} (3 + 3\mu_+ d_0^{-1})^2,$$

$$C_2 = \check{c}(d, \alpha)^2 \beta_0(d, \alpha) \mu_+^{-1} (3 + 3\mu_+ d_0^{-1})^2 (1 + (\mu_+ + 2d_0/3) \mu_+^{-1} (3 + 3\mu_+ d_0^{-1})).$$

Нам понадобится более точная аппроксимация резольвенты  $R(\boldsymbol{\xi}, \zeta)$  при малом  $|\boldsymbol{\xi}|$ .

**Лемма 3.3.** *При  $|\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(\alpha, \mu)$  и  $\zeta \in \Gamma$  справедливо представление*

$$R(\boldsymbol{\xi}, \zeta) = R_0(\zeta) - \Upsilon(\zeta)\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta) + \Upsilon(\zeta)\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})\Upsilon(\zeta)\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta) + Z(\boldsymbol{\xi}, \zeta), \quad (3.21)$$

где остаточный член  $Z(\boldsymbol{\xi}, \zeta)$  подчинен оценке

$$\|Z(\boldsymbol{\xi}, \zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_3 |\boldsymbol{\xi}|^3, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(\alpha, \mu), \quad \zeta \in \Gamma. \quad (3.22)$$

*Доказательство.* Итерируя тождество (3.16) дважды, получаем представление (3.21) с остаточным членом

$$Z(\boldsymbol{\xi}, \zeta) = -\Upsilon(\zeta)\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})\Upsilon(\zeta)\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})\Upsilon(\zeta)\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})R(\boldsymbol{\xi}, \zeta).$$

Используя (3.17), запишем этот член в виде

$$Z(\boldsymbol{\xi}, \zeta) = -\Upsilon(\zeta)\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})^3 R(\boldsymbol{\xi}, \zeta) - (\zeta + \mu_+)\Upsilon(\zeta) (\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})^2 + \mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})^2 R_0(\zeta)\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})) R(\boldsymbol{\xi}, \zeta) \\ - (\zeta + \mu_+)^2 \Upsilon(\zeta)\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})R(\boldsymbol{\xi}, \zeta).$$

Обозначим слагаемые в правой части через  $Z_l(\boldsymbol{\xi}, \zeta)$ ,  $l = 1, 2, 3$ . При условии  $|\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(\alpha, \mu)$ , учитывая (3.14), (3.15), (3.18)–(3.20), а также неравенство  $|\zeta| \leq 2d_0/3$  при  $\zeta \in \Gamma$ , получаем:

$$\begin{aligned} \|Z_1(\boldsymbol{\xi}, \zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq \|\Upsilon(\zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \|\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})\|_{\mathfrak{D} \rightarrow L_2(\Omega)} \|\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})\|_{\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}}^2 \|R(\boldsymbol{\xi}, \zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow \mathfrak{D}} \\ &\leq C_3^{(1)} |\boldsymbol{\xi}|^3, \quad C_3^{(1)} = \check{c}(d, \alpha)^3 \mu_+^{-1} \beta_0(d, \alpha) (3 + 3\mu_+ d_0^{-1})^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|Z_2(\boldsymbol{\xi}, \zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq 2|\zeta + \mu_+| \|\Upsilon(\zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \|\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})\|_{\mathfrak{D} \rightarrow L_2(\Omega)}^2 \|\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})\|_{\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}} \\ &\quad \times \|R_0(\zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow \mathfrak{D}} \|R(\boldsymbol{\xi}, \zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow \mathfrak{D}} \\ &\leq C_3^{(2)} |\boldsymbol{\xi}|^3, \quad C_3^{(2)} = 2\check{c}(d, \alpha)^3 \mu_+^{-2} \beta_0(d, \alpha) (3 + 3\mu_+ d_0^{-1})^3 (\mu_+ + 2d_0/3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|Z_3(\boldsymbol{\xi}, \zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq |\zeta + \mu_+|^2 \|\Upsilon(\zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \|\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})\|_{\mathfrak{D} \rightarrow L_2(\Omega)}^3 \\ &\quad \times \|R_0(\zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow \mathfrak{D}}^2 \|R(\boldsymbol{\xi}, \zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow \mathfrak{D}} \\ &\leq C_3^{(3)} |\boldsymbol{\xi}|^3, \quad C_3^{(3)} = \check{c}(d, \alpha)^3 \mu_+^{-3} \beta_0(d, \alpha) (3 + 3\mu_+ d_0^{-1})^4 (\mu_+ + 2d_0/3)^2. \end{aligned}$$

В итоге приходим к оценке (3.22) с постоянной  $C_3 = C_3^{(1)} + C_3^{(2)} + C_3^{(3)}$ .  $\square$

Далее, используя лемму 2.7, представим оператор  $\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})$  в виде

$$\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^d \xi_j \mathbb{T}_j + \tilde{\mathbb{T}}(\boldsymbol{\xi}), \quad (3.23)$$

где  $\mathbb{T}_j$  — самосопряженный оператор в пространстве  $\mathfrak{D}$ , порожденный формой  $a^{(j)}[u, u]$ , а  $\tilde{\mathbb{T}}(\boldsymbol{\xi})$  — самосопряженный оператор в пространстве  $\mathfrak{D}$ , порожденный формой  $\tilde{a}(\boldsymbol{\xi})[u, u]$ . Из (2.42) и (2.43) вытекают оценки

$$\|\mathbb{T}_j\|_{\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}} \leq c_3(d, \alpha), \quad j = 1, \dots, d, \quad (3.24)$$

$$\|\tilde{\mathbb{T}}(\boldsymbol{\xi})\|_{\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}} \leq \tilde{c}_3(d, \alpha) |\boldsymbol{\xi}|^\alpha, \quad \boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}. \quad (3.25)$$

С учетом (3.12) отсюда следуют также неравенства

$$\|\mathbb{T}_j\|_{\mathfrak{D} \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mu_+^{-1/2} c_3(d, \alpha), \quad j = 1, \dots, d, \quad (3.26)$$

$$\|\tilde{\mathbb{T}}(\boldsymbol{\xi})\|_{\mathfrak{D} \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mu_+^{-1/2} \tilde{c}_3(d, \alpha) |\boldsymbol{\xi}|^\alpha, \quad \boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}. \quad (3.27)$$

Используя лемму 3.3 и представление (3.23), выводим следующее утверждение.

**Лемма 3.4.** При  $|\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(\alpha, \mu)$  и  $\zeta \in \Gamma$  справедливо представление

$$R(\boldsymbol{\xi}, \zeta) = R_0(\zeta) - \Upsilon(\zeta) \mathbb{T}(\boldsymbol{\xi}) R_0(\zeta) + \sum_{j,k=1}^d \xi_j \xi_k \Upsilon(\zeta) \mathbb{T}_j \Upsilon(\zeta) \mathbb{T}_k R_0(\zeta) + Z(\boldsymbol{\xi}, \zeta) + \tilde{Z}(\boldsymbol{\xi}, \zeta), \quad (3.28)$$

где оператор  $Z(\boldsymbol{\xi}, \zeta)$  подчинен оценке (3.22), а оператор  $\tilde{Z}(\boldsymbol{\xi}, \zeta)$  удовлетворяет оценке

$$\|\tilde{Z}(\boldsymbol{\xi}, \zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_4 |\boldsymbol{\xi}|^{1+\alpha}, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(\alpha, \mu), \quad \zeta \in \Gamma. \quad (3.29)$$

*Доказательство.* Подставляя (3.23) в третье слагаемое в (3.21) и учитывая (3.17), получаем представление (3.28) при

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(\boldsymbol{\xi}, \zeta) &= \sum_{j=1}^d \xi_j \Upsilon(\zeta) \mathbb{T}_j \Upsilon(\zeta) \tilde{\mathbb{T}}(\boldsymbol{\xi}) R_0(\zeta) + \Upsilon(\zeta) \tilde{\mathbb{T}}(\boldsymbol{\xi}) \Upsilon(\zeta) \mathbb{T}(\boldsymbol{\xi}) R_0(\zeta) \\ &= \sum_{j=1}^d \xi_j \Upsilon(\zeta) \mathbb{T}_j \tilde{\mathbb{T}}(\boldsymbol{\xi}) R_0(\zeta) + (\zeta + \mu_+) \sum_{j=1}^d \xi_j \Upsilon(\zeta) \mathbb{T}_j R_0(\zeta) \tilde{\mathbb{T}}(\boldsymbol{\xi}) R_0(\zeta) \\ &\quad + \Upsilon(\zeta) \tilde{\mathbb{T}}(\boldsymbol{\xi}) \mathbb{T}(\boldsymbol{\xi}) R_0(\zeta) + (\zeta + \mu_+) \Upsilon(\zeta) \tilde{\mathbb{T}}(\boldsymbol{\xi}) R_0(\zeta) \mathbb{T}(\boldsymbol{\xi}) R_0(\zeta). \end{aligned}$$

Обозначим слагаемые в правой части через  $\tilde{Z}_l(\boldsymbol{\xi}, \zeta)$ ,  $l = 1, 2, 3, 4$ . При условии  $|\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(\alpha, \mu)$ , учитывая (3.14), (3.15), (3.18), (3.19), (3.25)–(3.27), а также неравенство  $|\zeta| \leq 2d_0/3$  при  $\zeta \in \Gamma$ , получаем:

$$\begin{aligned}
\|\tilde{Z}_1(\boldsymbol{\xi}, \zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq \sum_{j=1}^d |\xi_j| \|\Upsilon(\zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \|\mathbb{T}_j\|_{\mathfrak{D} \rightarrow L_2(\Omega)} \|\tilde{\mathbb{T}}(\boldsymbol{\xi})\|_{\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}} \|R_0(\zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow \mathfrak{D}} \\
&\leq C_4^{(1)} |\boldsymbol{\xi}|^{1+\alpha}, \quad C_4^{(1)} = \sqrt{d} c_3(d, \alpha) \tilde{c}_3(d, \alpha) \mu_+^{-1} (3 + 3\mu_+ d_0^{-1})^2, \\
\|\tilde{Z}_2(\boldsymbol{\xi}, \zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq |\zeta + \mu_+| \sum_{j=1}^d |\xi_j| \|\Upsilon(\zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \|\mathbb{T}_j\|_{\mathfrak{D} \rightarrow L_2(\Omega)} \|\tilde{\mathbb{T}}(\boldsymbol{\xi})\|_{\mathfrak{D} \rightarrow L_2(\Omega)} \|R_0(\zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow \mathfrak{D}}^2 \\
&\leq C_4^{(2)} |\boldsymbol{\xi}|^{1+\alpha}, \quad C_4^{(2)} = \sqrt{d} c_3(d, \alpha) \tilde{c}_3(d, \alpha) \mu_+^{-2} (3 + 3\mu_+ d_0^{-1})^3 (\mu_+ + 2d_0/3), \\
\|\tilde{Z}_3(\boldsymbol{\xi}, \zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq \|\Upsilon(\zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \|\tilde{\mathbb{T}}(\boldsymbol{\xi})\|_{\mathfrak{D} \rightarrow L_2(\Omega)} \|\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})\|_{\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}} \|R_0(\zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow \mathfrak{D}} \\
&\leq C_4^{(3)} |\boldsymbol{\xi}|^{1+\alpha}, \quad C_4^{(3)} = \check{c}(d, \alpha) \tilde{c}_3(d, \alpha) \mu_+^{-1} (3 + 3\mu_+ d_0^{-1})^2, \\
\|\tilde{Z}_4(\boldsymbol{\xi}, \zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq |\zeta + \mu_+| \|\Upsilon(\zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \|\tilde{\mathbb{T}}(\boldsymbol{\xi})\|_{\mathfrak{D} \rightarrow L_2(\Omega)} \|\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})\|_{\mathfrak{D} \rightarrow L_2(\Omega)} \|R_0(\zeta)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow \mathfrak{D}}^2 \\
&\leq C_4^{(4)} |\boldsymbol{\xi}|^{1+\alpha}, \quad C_4^{(4)} = \check{c}(d, \alpha) \tilde{c}_3(d, \alpha) \mu_+^{-2} (3 + 3\mu_+ d_0^{-1})^3 (\mu_+ + 2d_0/3).
\end{aligned}$$

В итоге получаем (3.29) с постоянной  $C_4 = C_4^{(1)} + C_4^{(2)} + C_4^{(3)} + C_4^{(4)}$ .  $\square$

**3.3. Пороговые аппроксимации.** Через  $\mathfrak{N}$  обозначим ядро  $\text{Ker } \mathbb{A}(\mathbf{0}; \alpha, \mu) = \mathcal{L}\{\mathbf{1}_\Omega\}$ ; через  $P$  обозначим ортопроектор на  $\mathfrak{N}$ ; имеем  $P = (\cdot, \mathbf{1}_\Omega) \mathbf{1}_\Omega$ . С помощью формул Рисса (3.9), (3.10) и леммы 3.2 в [26, предложения 3.4, 3.5] получено следующее утверждение.

**Предложение 3.5** ([26]). *Пусть выполнены условия (1.1), (1.2) и  $1 < \alpha < 2$ . Тогда справедливы оценки*

$$\begin{aligned}
\|F(\boldsymbol{\xi}) - P\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq C_5 |\boldsymbol{\xi}|, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(\alpha, \mu), \\
\|\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})F(\boldsymbol{\xi}) - \mu_+ P \mathbb{T}(\boldsymbol{\xi}) P\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq C_6 |\boldsymbol{\xi}|^2, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(\alpha, \mu),
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Константы  $C_5, C_6$  имеют вид  $C_5 = (2\pi)^{-1} l_\Gamma C_1$ ,  $C_6 = (3\pi)^{-1} l_\Gamma d_0 C_2$  и контролируются в терминах величин  $d, \alpha, \mu_-, \mu_+$ .

Нам понадобится более точная аппроксимация оператора  $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})F(\boldsymbol{\xi})$ .

**Предложение 3.6.** *Пусть выполнены условия (1.1), (1.2) и  $1 < \alpha < 2$ . Тогда при  $|\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(\alpha, \mu)$  справедливо представление*

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})F(\boldsymbol{\xi}) = \mu_+ P \mathbb{T}(\boldsymbol{\xi}) P + \sum_{j,k=1}^d \xi_j \xi_k G_{jk} + \Phi(\boldsymbol{\xi}), \tag{3.31}$$

где

$$G_{jk} = -\mu_+ P \mathbb{T}_j P^\perp \mathbb{T}_k P - \mu_+^2 P \mathbb{T}_j R_0^\perp(0) \mathbb{T}_k P, \quad j, k = 1, \dots, d. \tag{3.32}$$

Здесь  $R_0^\perp(0) = P^\perp \mathbb{A}(\mathbf{0})^{-1} P^\perp$ , где под  $\mathbb{A}(\mathbf{0})^{-1}$  подразумевается оператор, обратный к  $\mathbb{A}(\mathbf{0})|_{\mathfrak{N}^\perp}$ , корректно определенный как ограниченный оператор из  $\mathfrak{N}^\perp$  в  $\mathfrak{N}^\perp$ . Справедливы оценки

$$\|G_{jk}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_7, \quad j, k = 1, \dots, d, \tag{3.33}$$

$$\|\Phi(\boldsymbol{\xi})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_8 |\boldsymbol{\xi}|^{1+\alpha}, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(\alpha, \mu). \tag{3.34}$$

Постоянные  $C_7, C_8$  контролируются в терминах величин  $d, \alpha, \mu_-, \mu_+$ .

*Доказательство.* Применяя формулу Рисса (3.10) и представление (3.28), получаем

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})F(\boldsymbol{\xi}) = G_0 + G_1(\boldsymbol{\xi}) + \sum_{j,k=1}^d \xi_j \xi_k G_{jk} + \Phi(\boldsymbol{\xi}), \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(\alpha, \mu), \quad (3.35)$$

где

$$G_0 = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} R_0(\zeta) \zeta d\zeta, \quad (3.36)$$

$$G_1(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \Upsilon(\zeta) \mathbb{T}(\boldsymbol{\xi}) R_0(\zeta) \zeta d\zeta, \quad (3.37)$$

$$G_{jk} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \Upsilon(\zeta) \mathbb{T}_j \Upsilon(\zeta) \mathbb{T}_k R_0(\zeta) \zeta d\zeta, \quad (3.38)$$

$$\Phi(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (Z(\boldsymbol{\xi}, \zeta) + \tilde{Z}(\boldsymbol{\xi}, \zeta)) \zeta d\zeta. \quad (3.39)$$

Из (3.10) при  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$  следует, что

$$G_0 = \mathbb{A}(\mathbf{0})P = 0. \quad (3.39)$$

Оператор (3.37) легко оценить, используя (3.17)–(3.19), (3.24) и (3.26):

$$\|G_{jk}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq (3 + 3\mu_+ d_0^{-1})^2 c_3^2 \mu_+^{-1} (1 + (\mu_+ + 2d_0/3)(3 + 3\mu_+ d_0^{-1})\mu_+^{-1}) \frac{l_{\Gamma} d_0}{3\pi} =: C_7.$$

Это доказывает оценку (3.33).

Оператор (3.38) оценим с помощью (3.22) и (3.29): при  $|\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(\alpha, \mu)$  выполнено

$$\|\Phi(\boldsymbol{\xi})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq (C_3 |\boldsymbol{\xi}|^3 + C_4 |\boldsymbol{\xi}|^{1+\alpha}) \frac{l_{\Gamma} d_0}{3\pi} \leq \frac{2(\pi+1)d_0^2}{9\pi} (C_3(\pi\sqrt{d})^{2-\alpha} + C_4) |\boldsymbol{\xi}|^{1+\alpha},$$

что доказывает (3.34) с постоянной  $C_8 = \frac{2(\pi+1)d_0^2}{9\pi} (C_3(\pi\sqrt{d})^{2-\alpha} + C_4)$ .

Чтобы вычислить интегралы в (3.36) и (3.37), используем разложение резольвенты оператора  $\mathbb{A}(\mathbf{0})$ :

$$R_0(\zeta) = R_0(\zeta)P + R_0(\zeta)P^{\perp} = -\frac{1}{\zeta}P + R_0(\zeta)P^{\perp}, \quad \zeta \in \Gamma. \quad (3.40)$$

Подставим разложение (3.40) в контурный интеграл (3.36) и воспользуемся тем, что оператор-функция  $R_0^{\perp}(\zeta) := R_0(\zeta)P^{\perp}$  голоморфна внутри контура  $\Gamma$ . Получаем

$$\begin{aligned} G_1(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \left( I + (\zeta + \mu_+) \left( -\frac{1}{\zeta}P + R_0^{\perp}(\zeta) \right) \right) \mathbb{T}(\boldsymbol{\xi}) \left( -\frac{1}{\zeta}P + R_0^{\perp}(\zeta) \right) \zeta d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{1}{\zeta} \mu_+ P \mathbb{T}(\boldsymbol{\xi}) P d\zeta = \mu_+ P \mathbb{T}(\boldsymbol{\xi}) P. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Ср. [26, предложение 3.5].

Аналогичным образом вычисляем интеграл в (3.37):

$$\begin{aligned} G_{jk} &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \left( I + (\zeta + \mu_+) \left( -\frac{1}{\zeta}P + R_0^{\perp}(\zeta) \right) \right) \mathbb{T}_j \left( I + (\zeta + \mu_+) \left( -\frac{1}{\zeta}P + R_0^{\perp}(\zeta) \right) \right) \\ &\quad \times \mathbb{T}_k \left( -\frac{1}{\zeta}P + R_0^{\perp}(\zeta) \right) \zeta d\zeta. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Учтем, что выполнены тождества

$$P \mathbb{T}_j P = 0, \quad j = 1, \dots, d. \quad (3.43)$$

Действительно, согласно (2.41) имеем  $a^{(j)}[\mathbf{1}_{\Omega}, \mathbf{1}_{\Omega}] = 0$ , а тогда

$$P \mathbb{T}_j P = (\mathbb{T}_j \mathbf{1}_{\Omega}, \mathbf{1}_{\Omega})_{L_2(\Omega)} P = \mu_+^{-1} a^{(j)}[\mathbf{1}_{\Omega}, \mathbf{1}_{\Omega}] P = 0.$$

В силу (3.42) и (3.43) получаем:

$$\begin{aligned} G_{jk} &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{1}{\zeta} (\mu_+ P \mathbb{T}_j P^\perp \mathbb{T}_k P + \mu_+^2 P \mathbb{T}_j R_0^\perp(\zeta) \mathbb{T}_k P) d\zeta \\ &= -\mu_+ P \mathbb{T}_j P^\perp \mathbb{T}_k P - \mu_+^2 P \mathbb{T}_j R_0^\perp(0) \mathbb{T}_k P. \end{aligned} \quad (3.44)$$

В итоге, из (3.35), (3.39), (3.41), (3.44) вытекает представление (3.31), (3.32).  $\square$

**Замечание 3.7.** Согласно определению оператора  $\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})$  (см. (3.13)) с учетом того, что  $P$  — ортопроектор на  $\text{Ker } \mathbb{A}(\mathbf{0})$ , а потому  $a(\mathbf{0})[\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})Pu, Pv] = 0$ , имеем

$$a(\boldsymbol{\xi})[Pu, Pv] - a(\mathbf{0})[Pu, Pv] = \mu_+(\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})Pu, Pv)_{L_2(\Omega)}, \quad u, v \in L_2(\Omega). \quad (3.45)$$

Это означает, что оператор  $\mu_+ P \mathbb{T}(\boldsymbol{\xi}) P$  ограничен в  $L_2(\Omega)$  и отвечает форме в левой части (3.45).

**Предложение 3.8.** Пусть операторы  $G_{jk}$ ,  $j, k = 1, \dots, d$ , определены в (3.32). Справедливо представление

$$G_{jk} = g_{jk}P, \quad j, k = 1, \dots, d, \quad (3.46)$$

$$g_{jk} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{(x_j - y_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+\alpha}} (v_k(\mathbf{x}) - v_k(\mathbf{y})), \quad j, k = 1, \dots, d, \quad (3.47)$$

где  $v_k \in \tilde{H}^\gamma(\Omega)$  удовлетворяет равенству  $\int_{\Omega} v_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$  и тождеству

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \frac{\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+\alpha}} (v_k(\mathbf{x}) - v_k(\mathbf{y}) + x_k - y_k) (\overline{\eta(\mathbf{x})} - \overline{\eta(\mathbf{y})}) = 0, \quad \eta \in \tilde{H}^\gamma(\Omega). \quad (3.48)$$

*Доказательство.* Согласно (3.32), имеем

$$G_{jk} = -\mu_+ P \mathbb{T}_j (P^\perp + \mu_+ R_0^\perp(0)) \mathbb{T}_k P = g_{jk}P, \quad (3.49)$$

$$g_{jk} := -\mu_+ (\mathbb{T}_j (P^\perp + \mu_+ R_0^\perp(0)) \mathbb{T}_k \mathbf{1}_\Omega, \mathbf{1}_\Omega)_{L_2(\Omega)} = i\mu_+ (\mathbb{T}_j v_k, \mathbf{1}_\Omega)_{L_2(\Omega)}, \quad (3.50)$$

где введено обозначение

$$v_k := i(P^\perp + \mu_+ R_0^\perp(0)) \mathbb{T}_k \mathbf{1}_\Omega. \quad (3.51)$$

Заметим, что полуторалинейная форма  $a^{(j)}[v, w]$ , отвечающая квадратичной форме (2.41), имеет вид

$$a^{(j)}[v, w] := -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{(x_j - y_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+\alpha}} \left( i v(\mathbf{x}) \overline{w(\mathbf{y})} - i v(\mathbf{y}) \overline{w(\mathbf{x})} \right), \quad v, w \in \tilde{H}^\gamma(\Omega). \quad (3.52)$$

В силу определения оператора  $\mathbb{T}_j$  имеем:

$$a(\mathbf{0})[\mathbb{T}_j v_k, \mathbf{1}_\Omega] + \mu_+ (\mathbb{T}_j v_k, \mathbf{1}_\Omega)_{L_2(\Omega)} = a^{(j)}[v_k, \mathbf{1}_\Omega].$$

Первое слагаемое слева обращается в ноль, поскольку  $\mathbb{A}(\mathbf{0})\mathbf{1}_\Omega = 0$ . Следовательно,

$$\mu_+ (\mathbb{T}_j v_k, \mathbf{1}_\Omega)_{L_2(\Omega)} = a^{(j)}[v_k, \mathbf{1}_\Omega].$$

Отсюда и из (3.50), (3.52) вытекает равенство

$$g_{jk} = i a^{(j)}[v_k, \mathbf{1}_\Omega] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{(x_j - y_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+\alpha}} (v_k(\mathbf{x}) - v_k(\mathbf{y})), \quad j, k = 1, \dots, d.$$

Вместе с (3.49) это доказывает (3.46) и (3.47).



Остается выяснить, решением какой задачи является функция (3.51). Ясно, что  $v_k \in \tilde{H}^\gamma(\Omega)$ ,  $\int_\Omega v_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$ , и при любой пробной функции  $\eta \in \tilde{H}^\gamma(\Omega)$ ,  $\int_\Omega \eta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$ , выполнено

$$\begin{aligned} a(\mathbf{0})[v_k, \eta] &= ia(\mathbf{0})[P^\perp \mathbb{T}_k \mathbf{1}_\Omega, \eta] + i\mu_+ a(\mathbf{0})[R_0^\perp(0) \mathbb{T}_k \mathbf{1}_\Omega, \eta] \\ &= ia(\mathbf{0})[\mathbb{T}_k \mathbf{1}_\Omega, \eta] + i\mu_+ (\mathbb{T}_k \mathbf{1}_\Omega, \eta)_{L_2(\Omega)} = ia^{(k)}[\mathbf{1}_\Omega, \eta]. \end{aligned}$$

Мы воспользовались равенством  $a(\mathbf{0})[P \mathbb{T}_k \mathbf{1}_\Omega, \eta] = 0$ , а затем определением оператора  $\mathbb{T}_k$ . Расшифровка равенства  $a(\mathbf{0})[v_k, \eta] = ia^{(k)}[\mathbf{1}_\Omega, \eta]$  и приводит к тождеству (3.48) при  $\eta \in \tilde{H}^\gamma(\Omega)$ ,  $\int_\Omega \eta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$ . Фактически это тождество выполнено при всех  $\eta \in \tilde{H}^\gamma(\Omega)$ , поскольку при  $\eta = \mathbf{1}_\Omega$  оно очевидно.  $\square$

**3.4. Анализ оператора  $\mu_+ P \mathbb{T}(\xi) P$ .** Согласно равенству  $P = (\cdot, \mathbf{1}_\Omega) \mathbf{1}_\Omega$  с учетом замечания 3.7 имеем

$$\mu_+ P \mathbb{T}(\xi) P = \rho(\xi) P, \quad (3.53)$$

где

$$\rho(\xi) = a(\xi)[\mathbf{1}_\Omega, \mathbf{1}_\Omega] - a(\mathbf{0})[\mathbf{1}_\Omega, \mathbf{1}_\Omega] = a(\xi)[\mathbf{1}_\Omega, \mathbf{1}_\Omega] = \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{1 - \cos(\langle \xi, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+\alpha}}. \quad (3.54)$$

Разложим периодическую функцию  $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  в ряд Фурье:

$$\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d} \hat{\mu}_{\mathbf{m}, \mathbf{l}} e^{2\pi i(\langle \mathbf{m}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{l}, \mathbf{y} \rangle)}. \quad (3.55)$$

Коэффициенты ряда (3.55) заданы выражениями

$$\hat{\mu}_{\mathbf{m}, \mathbf{l}} = \int_{\Omega} \int_{\Omega} d\mathbf{x} d\mathbf{y} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) e^{-2\pi i(\langle \mathbf{m}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{l}, \mathbf{y} \rangle)}, \quad \mathbf{m}, \mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d.$$

Из условия симметрии  $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mu(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  следует, что  $\hat{\mu}_{\mathbf{m}, \mathbf{l}} = \hat{\mu}_{\mathbf{l}, \mathbf{m}}$ ,  $\mathbf{m}, \mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d$ . Положим

$$\mu^0 := \hat{\mu}_{\mathbf{0}, \mathbf{0}} = \int_{\Omega} \int_{\Omega} d\mathbf{x} d\mathbf{y} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (3.56)$$

В [26, лемма 3.7] получено следующее утверждение.

**Лемма 3.9** ([26]). *Функция  $\rho(\xi)$ , определенная выражением (3.54), допускает представление*

$$\begin{aligned} \rho(\xi) &= \mu^0 c_0(d, \alpha) |\xi|^\alpha + \rho_*(\xi), \\ \rho_*(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mu_*(\mathbf{z}) \frac{1 - \cos(\langle \xi, \mathbf{z} \rangle)}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha}} d\mathbf{z}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

где  $\mu^0$  определено в (3.56), а  $\mu_*$  —  $\mathbb{Z}^d$ -периодическая четная функция с нулевым средним, определенная выражением  $\mu_*(\mathbf{z}) := \int_{\Omega} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{z} + \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \mu^0$ . Для функции  $\mu_*$  справедливы оценки

$$\mu_- - \mu^0 \leq \mu_*(\mathbf{z}) \leq \mu_+ - \mu^0$$

и представление

$$\mu_*(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}} \hat{\mu}_{\mathbf{m}, -\mathbf{m}} \cos(2\pi \langle \mathbf{m}, \mathbf{z} \rangle).$$

Оценка для функции  $\rho_*(\xi)$  получена в [26, лемма 3.8].

**Лемма 3.10** ([26]). *Пусть выполнены условия (1.1), (1.2) и  $1 < \alpha < 2$ . Функция  $\rho_*(\xi)$ , определенная выражением (3.57), при  $\xi \in \tilde{\Omega}$  допускает оценку*

$$|\rho_*(\xi)| \leq C_9 |\xi|^2.$$

Постоянная  $C_9$  контролируется в терминах величин  $d, \alpha, \mu_+$ .

Нам понадобится выделить в функции  $\rho_*(\xi)$  квадратичные члены и оценить остаток.

**Лемма 3.11.** Пусть выполнены условия (1.1), (1.2) и  $1 < \alpha < 2$ . Функция  $\rho_*(\xi)$ , определенная выражением (3.57), при  $\xi \in \tilde{\Omega}$  допускает представление

$$\rho_*(\xi) = \langle g_* \xi, \xi \rangle + \tilde{\rho}_*(\xi).$$

Квадратичная форма  $\langle g_* \xi, \xi \rangle$  определяется выражением

$$\langle g_* \xi, \xi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mu_*(\mathbf{z}) \langle \xi, \mathbf{z} \rangle^2}{2|\mathbf{z}|^{d+\alpha}} d\mathbf{z},$$

где интеграл справа понимается в смысле следующей регуляризации:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mu_*(\mathbf{z}) \langle \xi, \mathbf{z} \rangle^2}{2|\mathbf{z}|^{d+\alpha}} d\mathbf{z} := \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d_{\Omega+\mathbf{n}}} \int \frac{\mu_*(\mathbf{z}) \langle \xi, \mathbf{z} \rangle^2}{2|\mathbf{z}|^{d+\alpha}} d\mathbf{z}.$$

Ряд справа сходится абсолютно. Справедливы оценки

$$|g_*| \leq c_4(d, \alpha) \mu_+, \quad (3.58)$$

$$|\tilde{\rho}_*(\xi)| \leq C_{10} |\xi|^{1+\alpha}, \quad \xi \in \tilde{\Omega}. \quad (3.59)$$

Здесь  $|g_*|$  — норма матрицы  $g_*$ . Постоянная  $C_{10}$  контролируется в терминах величин  $d, \alpha, \mu_+$ .

*Доказательство.* Выберем число  $R = R(d, \alpha)$  из условия

$$\left( \frac{R}{R - \sqrt{d}} \right)^{d+\alpha} = 2,$$

то есть

$$R(d, \alpha) = \frac{\sqrt{d} 2^{\frac{1}{d+\alpha}}}{2^{\frac{1}{d+\alpha}} - 1}.$$

Пусть  $\Sigma_0$  — множество индексов  $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$ , для которых ячейка  $\Omega + \mathbf{n}$  имеет непустое пересечение с шаром  $B_R(\mathbf{0})$ , и  $\Sigma_1 = \mathbb{Z}^d \setminus \Sigma_0$ . Нетрудно убедиться, что  $R > 2\sqrt{2d}$  и выполнено

$$\frac{|\mathbf{z}_1|^{d+\alpha}}{|\mathbf{z}_2|^{d+\alpha}} \leq 2, \quad \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \Omega + \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} \in \Sigma_1. \quad (3.60)$$

Представим функцию  $\rho_*(\xi)$  в виде

$$\rho_*(\xi) = \rho_*^{(0)}(\xi) + \rho_*^{(1)}(\xi), \quad (3.61)$$

где

$$\rho_*^{(0)}(\xi) := \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma_0} \int \mu_*(\mathbf{z}) \frac{1 - \cos(\langle \xi, \mathbf{z} \rangle)}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha}} d\mathbf{z}, \quad (3.62)$$

$$\rho_*^{(1)}(\xi) := \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma_1} \int \mu_*(\mathbf{z}) \frac{1 - \cos(\langle \xi, \mathbf{z} \rangle)}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha}} d\mathbf{z}. \quad (3.63)$$

При рассмотрении функции  $\rho_*^{(0)}(\xi)$  используем элементарную оценку

$$\left| 1 - \cos \lambda - \frac{\lambda^2}{2} \right| \leq \frac{\lambda^4}{24}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Отсюда и из (3.62) следует представление

$$\rho_*^{(0)}(\xi) := \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma_0} \int \mu_*(\mathbf{z}) \frac{\langle \xi, \mathbf{z} \rangle^2}{2|\mathbf{z}|^{d+\alpha}} d\mathbf{z} + \tilde{\rho}_*^{(0)}(\xi), \quad (3.64)$$

где остаточный член  $\tilde{\rho}_*^{(0)}(\xi)$  допускает оценку

$$|\tilde{\rho}_*^{(0)}(\xi)| \leq |\xi|^4 \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma_0 \Omega + \mathbf{n}} \int \frac{d\mathbf{z}}{24|\mathbf{z}|^{d+\alpha-4}} \leq |\xi|^4 \mu_+ \int_{|\mathbf{z}| < R + \sqrt{d}} \frac{d\mathbf{z}}{24|\mathbf{z}|^{d+\alpha-4}} = |\xi|^4 \mu_+ \frac{\omega_d (R + \sqrt{d})^{4-\alpha}}{24(4-\alpha)}.$$

Таким образом,

$$|\tilde{\rho}_*^{(0)}(\xi)| \leq c_5(d, \alpha) \mu_+ |\xi|^4, \quad \xi \in \tilde{\Omega}, \quad c_5(d, \alpha) = \frac{\omega_d (R + \sqrt{d})^{4-\alpha}}{24(4-\alpha)}. \quad (3.65)$$

Перейдем к рассмотрению функции  $\rho_*^{(1)}(\xi)$ . Обозначим

$$\varphi_\xi(\mathbf{z}) := \frac{1 - \cos(\langle \xi, \mathbf{z} \rangle)}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha}}.$$

Преобразуем функцию (3.63), учитывая, что  $\mu_*(\mathbf{z})$  —  $\mathbb{Z}^d$ -периодическая функция и  $\int_\Omega \mu_*(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = 0$ . Имеем:

$$\begin{aligned} \rho_*^{(1)}(\xi) &= \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma_1 \Omega + \mathbf{n}} \int \mu_*(\mathbf{z}) \varphi_\xi(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma_1 \Omega + \mathbf{n}} \int \mu_*(\mathbf{z}) (\varphi_\xi(\mathbf{z}) - \varphi_\xi(\mathbf{n})) d\mathbf{z} \\ &= \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma_1 \Omega + \mathbf{n}} \int d\mathbf{z} \mu_*(\mathbf{z}) \sum_{j=1}^d (z_j - n_j) \int_0^1 \partial_j \varphi_\xi(\mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n})) dt. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Поскольку

$$\partial_j \varphi_\xi(\mathbf{z}) = \frac{\xi_j \sin(\langle \xi, \mathbf{z} \rangle)}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha}} - \frac{(d+\alpha) z_j (1 - \cos(\langle \xi, \mathbf{z} \rangle))}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha+2}},$$

получаем:

$$\begin{aligned} \rho_*^{(1)}(\xi) &= \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma_1 \Omega + \mathbf{n}} \int d\mathbf{z} \mu_*(\mathbf{z}) \langle \mathbf{z} - \mathbf{n}, \xi \rangle \int_0^1 \frac{\sin(\langle \xi, \mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n}) \rangle)}{|\mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n})|^{d+\alpha}} dt \\ &\quad - (d+\alpha) \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma_1 \Omega + \mathbf{n}} \int d\mathbf{z} \mu_*(\mathbf{z}) \sum_{j=1}^d (z_j - n_j) \int_0^1 \frac{(n_j + t(z_j - n_j))(1 - \cos(\langle \xi, \mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n}) \rangle))}{|\mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n})|^{d+\alpha+2}} dt. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Воспользуемся элементарными представлениями

$$\sin \lambda = \lambda + \frac{|\lambda|^\alpha F_{s,p}(\lambda)}{(1 + |\ln |\lambda||)^p}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad p > 1, \quad (3.68)$$

$$1 - \cos \lambda = \frac{\lambda^2}{2} + \frac{|\lambda|^{1+\alpha} F_{c,p}(\lambda)}{(1 + |\ln |\lambda||)^p}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad p > 1, \quad (3.69)$$

где  $F_{s,p}, F_{c,p} \in L_\infty(\mathbb{R})$ , причем

$$|F_{s,p}(\lambda)| \leq \max \left\{ \sup_{0 < x \leq 1} \frac{x^{3-\alpha}}{6} (1 + |\ln x|)^p, \sup_{1 \leq x < \infty} \frac{(1+x)}{x^\alpha} (1 + |\ln x|)^p \right\} =: \mathbf{c}_s(p, \alpha), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (3.70)$$

$$|F_{c,p}(\lambda)| \leq \max \left\{ \sup_{0 < x \leq 1} \frac{x^{3-\alpha}}{24} (1 + |\ln x|)^p, \sup_{1 \leq x < \infty} \frac{(4+x^2)}{2x^{1+\alpha}} (1 + |\ln x|)^p \right\} =: \mathbf{c}_c(p, \alpha), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3.71)$$

Тогда из (3.67) вытекает представление

$$\rho_*^{(1)}(\xi) = \hat{\rho}_*^{(1)}(\xi) + \tilde{\rho}_*^{(1)}(\xi), \quad (3.72)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_*^{(1)}(\xi) = & \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma_1 \Omega + \mathbf{n}} \int d\mathbf{z} \mu_*(\mathbf{z}) \langle \mathbf{z} - \mathbf{n}, \xi \rangle \int_0^1 \frac{\langle \xi, \mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n}) \rangle}{|\mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n})|^{d+\alpha}} dt \\ & - (d + \alpha) \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma_1 \Omega + \mathbf{n}} \int d\mathbf{z} \mu_*(\mathbf{z}) \sum_{j=1}^d (z_j - n_j) \int_0^1 \frac{(n_j + t(z_j - n_j)) \langle \xi, \mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n}) \rangle^2}{2|\mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n})|^{d+\alpha+2}} dt \end{aligned} \quad (3.73)$$

и

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_*^{(1)}(\xi) = & \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma_1 \Omega + \mathbf{n}} \int d\mathbf{z} \mu_*(\mathbf{z}) \langle \mathbf{z} - \mathbf{n}, \xi \rangle \int_0^1 \frac{|\langle \xi, \mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n}) \rangle|^\alpha F_{s,p}(\langle \xi, \mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n}) \rangle)}{|\mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n})|^{d+\alpha} (1 + |\ln |\langle \xi, \mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n}) \rangle||)^p} dt \\ & - (d + \alpha) \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma_1 \Omega + \mathbf{n}} \int d\mathbf{z} \mu_*(\mathbf{z}) \sum_{j=1}^d (z_j - n_j) \\ & \times \int_0^1 \frac{(n_j + t(z_j - n_j)) |\langle \xi, \mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n}) \rangle|^{1+\alpha} F_{c,p}(\langle \xi, \mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n}) \rangle)}{|\mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n})|^{d+\alpha+2} (1 + |\ln |\langle \xi, \mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n}) \rangle||)^p} dt. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Убедимся, что функцию (3.73) можно записать в виде

$$\hat{\rho}_*^{(1)}(\xi) = \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma_1 \Omega + \mathbf{n}} \int \frac{\mu_*(\mathbf{z}) \langle \xi, \mathbf{z} \rangle^2}{2|\mathbf{z}|^{d+\alpha}} d\mathbf{z}. \quad (3.75)$$

С этой целью преобразуем правую часть (3.75). Обозначим

$$\psi_\xi(\mathbf{z}) := \frac{\langle \xi, \mathbf{z} \rangle^2}{2|\mathbf{z}|^{d+\alpha}}.$$

По аналогии с (3.66) имеем:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega + \mathbf{n}} \mu_*(\mathbf{z}) \frac{\langle \xi, \mathbf{z} \rangle^2}{2|\mathbf{z}|^{d+\alpha}} d\mathbf{z} &= \int_{\Omega + \mathbf{n}} \mu_*(\mathbf{z}) (\psi_\xi(\mathbf{z}) - \psi_\xi(\mathbf{n})) d\mathbf{z} \\ &= \int_{\Omega + \mathbf{n}} d\mathbf{z} \mu_*(\mathbf{z}) \sum_{j=1}^d (z_j - n_j) \int_0^1 \partial_j \psi_\xi(\mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n})) dt. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\partial_j \psi_\xi(\mathbf{z}) = \frac{\xi_j \langle \xi, \mathbf{z} \rangle}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha}} - \frac{(d + \alpha) z_j \langle \xi, \mathbf{z} \rangle^2}{2|\mathbf{z}|^{d+\alpha+2}},$$

получаем:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega + \mathbf{n}} \mu_*(\mathbf{z}) \frac{\langle \xi, \mathbf{z} \rangle^2}{2|\mathbf{z}|^{d+\alpha}} d\mathbf{z} &= \int_{\Omega + \mathbf{n}} d\mathbf{z} \mu_*(\mathbf{z}) \langle \mathbf{z} - \mathbf{n}, \xi \rangle \int_0^1 \frac{\langle \xi, \mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n}) \rangle}{|\mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n})|^{d+\alpha}} dt \\ &\quad - (d + \alpha) \int_{\Omega + \mathbf{n}} d\mathbf{z} \mu_*(\mathbf{z}) \sum_{j=1}^d (z_j - n_j) \int_0^1 \frac{(n_j + t(z_j - n_j)) \langle \xi, \mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n}) \rangle^2}{2|\mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n})|^{d+\alpha+2}} dt. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Отсюда и из (3.73) вытекает представление (3.75).

Сопоставляя (3.61), (3.64), (3.72) и (3.75), приходим к представлению

$$\rho_*(\xi) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d_{\Omega+\mathbf{n}}} \int \mu_*(\mathbf{z}) \frac{\langle \xi, \mathbf{z} \rangle^2}{2|\mathbf{z}|^{d+\alpha}} d\mathbf{z} + \tilde{\rho}_*(\xi), \quad (3.77)$$

где

$$\tilde{\rho}_*(\xi) = \tilde{\rho}_*^{(0)}(\xi) + \tilde{\rho}_*^{(1)}(\xi). \quad (3.78)$$

Убедимся, что ряд в (3.77) сходится абсолютно. Имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma_0} \left| \int_{\Omega+\mathbf{n}} \mu_*(\mathbf{z}) \frac{\langle \xi, \mathbf{z} \rangle^2}{2|\mathbf{z}|^{d+\alpha}} d\mathbf{z} \right| &\leq \mu_+ |\xi|^2 \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma_0} \int_{\Omega+\mathbf{n}} \frac{d\mathbf{z}}{2|\mathbf{z}|^{d+\alpha-2}} \\ &\leq \mu_+ |\xi|^2 \int_{|\mathbf{z}| \leq R+\sqrt{d}} \frac{d\mathbf{z}}{2|\mathbf{z}|^{d+\alpha-2}} = \mu_+ |\xi|^2 \omega_d \frac{(R+\sqrt{d})^{2-\alpha}}{2(2-\alpha)}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Далее, с учетом (3.60) и (3.76) получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma_1} \left| \int_{\Omega+\mathbf{n}} \mu_*(\mathbf{z}) \frac{\langle \xi, \mathbf{z} \rangle^2}{2|\mathbf{z}|^{d+\alpha}} d\mathbf{z} \right| &\leq \mu_+ |\xi|^2 (d+\alpha+2) \sqrt{d} \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma_1} \int_{\Omega+\mathbf{n}} \frac{d\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha-1}} \\ &\leq \mu_+ |\xi|^2 (d+\alpha+2) \sqrt{d} \int_{|\mathbf{z}| > R} \frac{d\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha-1}} = \mu_+ |\xi|^2 \frac{\omega_d (d+\alpha+2) \sqrt{d}}{(\alpha-1) R^{\alpha-1}}. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Из (3.79) и (3.80) вытекает оценка

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d_{\Omega+\mathbf{n}}} \left| \int \mu_*(\mathbf{z}) \frac{\langle \xi, \mathbf{z} \rangle^2}{2|\mathbf{z}|^{d+\alpha}} d\mathbf{z} \right| &\leq \mu_+ c_4(d, \alpha) |\xi|^2, \\ c_4(d, \alpha) &= \omega_d \left( \frac{(R(d, \alpha) + \sqrt{d})^{2-\alpha}}{2(2-\alpha)} + \frac{(d+\alpha+2) \sqrt{d}}{(\alpha-1) R(d, \alpha)^{\alpha-1}} \right). \end{aligned}$$

Это доказывает оценку (3.58).

Остается оценить форму (3.74). С учетом (3.70), (3.71) получаем:

$$\begin{aligned} |\tilde{\rho}_*^{(1)}(\xi)| &\leq \mu_+ (\mathfrak{c}_s(p, \alpha) + (d+\alpha) \mathfrak{c}_c(p, \alpha)) \sqrt{d} |\xi|^{1+\alpha} \\ &\times \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma_1} \int_{\Omega+\mathbf{n}} d\mathbf{z} \int_0^1 \frac{|\langle \hat{\xi}, \mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n}) \rangle|^\alpha}{|\mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n})|^{d+\alpha} (1 + |\ln |\langle \xi, \mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n}) \rangle||)^p} dt, \quad \hat{\xi} := \frac{\xi}{|\xi|}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

(Достаточно считать, что  $\xi \neq \mathbf{0}$ , так как  $\tilde{\rho}_*^{(1)}(\mathbf{0}) = 0$ .)

Запишем  $\mathbf{z}$  в виде  $\mathbf{z} = \langle \hat{\xi}, \mathbf{z} \rangle \hat{\xi} + \mathbf{z}_\perp$  и заметим, что цилиндр

$$\mathcal{C}_R := \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d : |\langle \hat{\xi}, \mathbf{z} \rangle| \leq \frac{R}{\sqrt{2}}, |\mathbf{z}_\perp| < \frac{R}{\sqrt{2}} \right\}$$

содержится в шаре  $B_R(\mathbf{0})$ . Поэтому  $(\Omega + \mathbf{n}) \subset \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{C}_R$  при  $\mathbf{n} \in \Sigma_1$ . Далее разберем два случая.

Случай 1. Пусть  $|\xi| \leq \min \left\{ \frac{1}{6\sqrt{d}}, \frac{1}{\sqrt{2}R} \right\} =: \delta_1(d, \alpha)$ . Разобьем множество  $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{C}_R$  на три части:

$$\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{C}_R = \Xi_1 \cup \Xi_2 \cup \Xi_3,$$

где

$$\begin{aligned}\Xi_1 &:= \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d : |\langle \widehat{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{z} \rangle| \leq \frac{R}{\sqrt{2}}, |\mathbf{z}_\perp| \geq \frac{R}{\sqrt{2}} \right\}, \\ \Xi_2 &:= \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d : \frac{R}{\sqrt{2}} < |\langle \widehat{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{z} \rangle| \leq \frac{1}{2|\boldsymbol{\xi}|}, \mathbf{z}_\perp \in \mathbb{R}^{d-1} \right\}, \\ \Xi_3 &:= \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d : |\langle \widehat{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{z} \rangle| > \frac{1}{2|\boldsymbol{\xi}|}, \mathbf{z}_\perp \in \mathbb{R}^{d-1} \right\}.\end{aligned}$$

Пусть  $\Sigma_1^{(1)}$  — множество индексов  $\mathbf{n} \in \Sigma_1$ , для которых ячейка  $\Omega + \mathbf{n}$  имеет непустое пересечение с  $\Xi_1$ , пусть  $\Sigma_1^{(2)}$  — множество индексов  $\mathbf{n} \in \Sigma_1$ , для которых ячейка  $\Omega + \mathbf{n}$  целиком содержится в  $\Xi_2$ . Очевидно,  $\Sigma_1^{(1)} \cap \Sigma_1^{(2)} = \emptyset$ . Пусть  $\Sigma_1^{(3)} = \Sigma_1 \setminus (\Sigma_1^{(1)} \cup \Sigma_1^{(2)})$ .

Полагая  $\tilde{z}_1 = \langle \widehat{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{z} \rangle$  и учитывая (3.60), имеем:

$$\begin{aligned}& \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma_1^{(1)} \Omega + \mathbf{n}} \int d\mathbf{z} \int_0^1 \frac{|\langle \widehat{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n}) \rangle|^\alpha}{|\mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n})|^{d+\alpha} (1 + |\ln |\langle \widehat{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n}) \rangle||)^p} dt \\ & \leq \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma_1^{(1)} \Omega + \mathbf{n}} \int d\mathbf{z} \int_0^1 \frac{dt}{|\mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n})|^d} \leq \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma_1^{(1)} \Omega + \mathbf{n}} \int \frac{2d\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|^d} \\ & \leq \int_{|\tilde{z}_1| \leq \frac{R}{\sqrt{2}} + \sqrt{d}} d\tilde{z}_1 \int_{|\mathbf{z}_\perp| \geq \frac{R}{\sqrt{2}} - \sqrt{d}} \frac{2d\mathbf{z}_\perp}{|\mathbf{z}_\perp|^d} = 4\omega_{d-1} \left( \frac{R}{\sqrt{2}} + \sqrt{d} \right) \left( \frac{R}{\sqrt{2}} - \sqrt{d} \right)^{-1} =: c_6^{(1)}(d, \alpha).\end{aligned}\tag{3.82}$$

Далее, при  $\mathbf{n} \in \Sigma_1^{(2)}$  и  $\mathbf{z} \in \Omega + \mathbf{n}$  с учетом неравенства  $|\langle \widehat{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{z} \rangle| = |\tilde{z}_1| > \frac{R}{\sqrt{2}} > \sqrt{d}$  выполнено

$$|\langle \widehat{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n}) \rangle| \leq |\langle \widehat{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{z} \rangle| + (1-t)|\langle \widehat{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{n} - \mathbf{z} \rangle| \leq |\tilde{z}_1| + \sqrt{d} \leq 2|\tilde{z}_1|.$$

Поскольку  $|\tilde{z}_1| \leq (2|\boldsymbol{\xi}|)^{-1}$ , то

$$|\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n}) \rangle| \leq 2|\boldsymbol{\xi}||\tilde{z}_1| \leq 1,$$

а тогда

$$|\ln |\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n}) \rangle|| \geq |\ln 2|\boldsymbol{\xi}||\tilde{z}_1|.$$

Мы учли, что функция  $|\ln \lambda|$  монотонно убывает при  $0 < \lambda \leq 1$ . Из приведенных неравенств и из (3.60) следует, что

$$\begin{aligned}
& \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma_1^{(2)} \Omega + \mathbf{n}} \int d\mathbf{z} \int_0^1 \frac{|\langle \widehat{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n}) \rangle|^\alpha}{|\mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n})|^{d+\alpha} (1 + |\ln |\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n}) \rangle||)^p} dt \\
& \leq \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma_1^{(2)} \Omega + \mathbf{n}} \int \frac{2(2|\langle \widehat{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{z} \rangle|)^\alpha d\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha} (1 + |\ln 2|\boldsymbol{\xi}||\widetilde{z}_1|)^p} \\
& \leq \int_{\frac{R}{\sqrt{2}} \leq |\widetilde{z}_1| \leq \frac{1}{2|\boldsymbol{\xi}|}} \frac{2(2|\widetilde{z}_1|)^\alpha d\widetilde{z}_1}{(1 + |\ln 2|\boldsymbol{\xi}||\widetilde{z}_1|)^p} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{d\mathbf{z}_\perp}{(\widetilde{z}_1^2 + |\mathbf{z}_\perp|^2)^{(d+\alpha)/2}} \\
& = 2^{1+\alpha} \mathfrak{c}'(d, \alpha) \int_{\frac{R}{\sqrt{2}} \leq |\widetilde{z}_1| \leq \frac{1}{2|\boldsymbol{\xi}|}} \frac{d\widetilde{z}_1}{|\widetilde{z}_1| (1 + |\ln 2|\boldsymbol{\xi}||\widetilde{z}_1|)^p} \\
& = 2^{1+\alpha} \mathfrak{c}'(d, \alpha) \int_{\sqrt{2}R|\boldsymbol{\xi}| \leq |s| \leq 1} \frac{ds}{|s| (1 + |\ln |s||)^p} \\
& \leq 2^{1+\alpha} \mathfrak{c}'(d, \alpha) \cdot 2 \int_{-\infty}^0 \frac{d\tau}{(1 + |\tau|)^p} = 2^{2+\alpha} \frac{\mathfrak{c}'(d, \alpha)}{p-1} = c_6^{(2)}(p, d, \alpha),
\end{aligned} \tag{3.83}$$

где

$$\mathfrak{c}'(d, \alpha) := \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{d\mathbf{w}'}{(1 + |\mathbf{w}'|^2)^{(d+\alpha)/2}}.$$

Мы выполнили замены  $s = 2|\boldsymbol{\xi}|\widetilde{z}_1$ ,  $\tau = \ln |s|$ .

При  $\mathbf{n} \in \Sigma_1^{(3)}$  и  $\mathbf{z} \in \Omega + \mathbf{n}$  с учетом неравенства  $|\langle \widehat{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{z} \rangle| = |\widetilde{z}_1| > \frac{1}{2|\boldsymbol{\xi}|} - \sqrt{d} \geq 2\sqrt{d}$  (ввиду ограничения  $|\boldsymbol{\xi}| \leq \frac{1}{6\sqrt{d}}$ ) выполнено

$$|\langle \widehat{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n}) \rangle| \geq |\langle \widehat{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{z} \rangle| - (1-t)|\langle \widehat{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{n} - \mathbf{z} \rangle| \geq |\widetilde{z}_1| - \sqrt{d} \geq \frac{1}{2}|\widetilde{z}_1| \geq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2|\boldsymbol{\xi}|} - \sqrt{d} \right) \geq \frac{1}{6|\boldsymbol{\xi}|}.$$

Следовательно,

$$|\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n}) \rangle| \geq \frac{1}{2}|\boldsymbol{\xi}||\widetilde{z}_1| \geq \frac{1}{6}.$$

Тогда

$$1 + |\ln |\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n}) \rangle|| \geq (1 + \ln 6)^{-1} \left( 1 + \ln \frac{1}{2}|\boldsymbol{\xi}||\widetilde{z}_1| \right). \tag{3.84}$$

Здесь мы воспользовались элементарным неравенством

$$1 + |\ln \lambda_1| \leq (1 + \ln 6) (1 + |\ln \lambda_2|), \quad \frac{1}{6} \leq \lambda_1 \leq \lambda_2.$$

Учитывая (3.60) и (3.84), имеем:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma_1^{(3)} \Omega + \mathbf{n}} \int d\mathbf{z} \int_0^1 \frac{|\langle \widehat{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n}) \rangle|^\alpha}{|\mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n})|^{d+\alpha} (1 + |\ln |\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n}) \rangle||)^p} dt \\
& \leq \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma_1^{(3)} \Omega + \mathbf{n}} \int \frac{2(1 + \ln 6)^p d\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|^d (1 + |\ln \frac{1}{2} |\boldsymbol{\xi}| |\tilde{z}_1| |)^p} \\
& \leq 2(1 + \ln 6)^p \int_{|\tilde{z}_1| \geq \frac{1}{2|\boldsymbol{\xi}|} - \sqrt{d}} \frac{d\tilde{z}_1}{(1 + |\ln \frac{1}{2} |\boldsymbol{\xi}| |\tilde{z}_1| |)^p} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{d\mathbf{z}_\perp}{(\tilde{z}_1^2 + |\mathbf{z}_\perp|^2)^{d/2}} \\
& = 2(1 + \ln 6)^p \mathbf{c}'_d \int_{|\tilde{z}_1| \geq \frac{1}{2|\boldsymbol{\xi}|} - \sqrt{d}} \frac{d\tilde{z}_1}{|\tilde{z}_1| (1 + |\ln \frac{1}{2} |\boldsymbol{\xi}| |\tilde{z}_1| |)^p} \\
& = 2(1 + \ln 6)^p \mathbf{c}'_d \int_{|s| \geq \frac{1}{4} - |\boldsymbol{\xi}| \frac{\sqrt{d}}{2}} \frac{ds}{|s| (1 + |\ln |s||)^p} \leq 4(1 + \ln 6)^p \mathbf{c}'_d \int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau}{(1 + |\tau|)^p} \\
& = \frac{8}{p-1} (1 + \ln 6)^p \mathbf{c}'_d =: c_6^{(3)}(p, d).
\end{aligned} \tag{3.85}$$

Мы выполнили замены  $s = \frac{1}{2} |\boldsymbol{\xi}| \tilde{z}_1$ ,  $\tau = \ln |s|$ ; константа  $\mathbf{c}'_d$  определена в (2.40).

В итоге, из (3.81)–(3.83) и (3.85) вытекает оценка

$$|\tilde{\rho}_*^{(1)}(\boldsymbol{\xi})| \leq \mu_+ c_6(p, d, \alpha) |\boldsymbol{\xi}|^{1+\alpha}, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_1(d, \alpha), \tag{3.86}$$

где

$$c_6(p, d, \alpha) = (\mathbf{c}_s(p, \alpha) + (d + \alpha) \mathbf{c}_c(p, \alpha)) \sqrt{d} \left( c_6^{(1)}(d, \alpha) + c_6^{(2)}(p, d, \alpha) + c_6^{(3)}(p, d) \right).$$

Случай 2. Пусть  $|\boldsymbol{\xi}| > \delta_1(d, \alpha)$ . Этот случай проще: пусть  $\Sigma_1^{(1)}$  определено как прежде и пусть  $\Sigma_1^{(4)} = \Sigma_1 \setminus \Sigma_1^{(1)}$ . Оценка (3.82) сохраняет силу.

При  $\mathbf{n} \in \Sigma_1^{(4)}$  и  $\mathbf{z} \in \Omega + \mathbf{n}$  с учетом неравенства  $|\langle \widehat{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{z} \rangle| = |\tilde{z}_1| \geq \frac{R}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{d}$  выполнено

$$|\langle \widehat{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n}) \rangle| \geq |\tilde{z}_1| - \sqrt{d} > \frac{1}{2} |\tilde{z}_1| > \sqrt{d}.$$

Следовательно,

$$|\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n}) \rangle| > \frac{1}{2} |\boldsymbol{\xi}| |\tilde{z}_1| > \sqrt{d} \delta_1(d, \alpha).$$

Тогда

$$1 + |\ln |\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n}) \rangle|| \geq (1 + |\ln(\sqrt{d} \delta_1)|)^{-1} \left( 1 + \left| \ln \left( \frac{1}{2} |\boldsymbol{\xi}| |\tilde{z}_1| \right) \right| \right).$$



По аналогии с (3.85) получаем

$$\begin{aligned}
& \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma_1^{(4)} \Omega + \mathbf{n}} \int d\mathbf{z} \int_0^1 \frac{|\langle \widehat{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n}) \rangle|^\alpha}{|\mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n})|^{d+\alpha} (1 + |\ln |\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n}) \rangle||)^p} dt \\
& \leq \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma_1^{(4)} \Omega + \mathbf{n}} \int \frac{2(1 + |\ln(\sqrt{d}\delta_1)|)^p d\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|^d (1 + |\ln(\frac{1}{2}|\boldsymbol{\xi}||\tilde{z}_1|)|)^p} \\
& \leq 2(1 + |\ln(\sqrt{d}\delta_1)|)^p \int_{|\tilde{z}_1| \geq \frac{R}{\sqrt{2}}} \frac{d\tilde{z}_1}{(1 + |\ln(\frac{1}{2}|\boldsymbol{\xi}||\tilde{z}_1|)|)^p} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{d\mathbf{z}_\perp}{(\tilde{z}_1^2 + |\mathbf{z}_\perp|^2)^{d/2}} \\
& = 2(1 + |\ln(\sqrt{d}\delta_1)|)^p \mathfrak{c}'_d \int_{|\tilde{z}_1| \geq \frac{R}{\sqrt{2}}} \frac{d\tilde{z}_1}{|\tilde{z}_1| (1 + |\ln(\frac{1}{2}|\boldsymbol{\xi}||\tilde{z}_1|)|)^p} \\
& \leq 4(1 + |\ln(\sqrt{d}\delta_1)|)^p \mathfrak{c}'_d \int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau}{(1 + |\tau|)^p} = \frac{8}{p-1} (1 + |\ln(\sqrt{d}\delta_1)|)^p \mathfrak{c}'_d =: c_6^{(4)}(p, d, \alpha).
\end{aligned} \tag{3.87}$$

Из (3.81), (3.82) и (3.87) вытекает оценка

$$|\tilde{\rho}_*^{(1)}(\boldsymbol{\xi})| \leq \mu_+ \check{c}_6(p, d, \alpha) |\boldsymbol{\xi}|^{1+\alpha}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}, \quad |\boldsymbol{\xi}| > \delta_1(d, \alpha), \tag{3.88}$$

где

$$\check{c}_6(p, d, \alpha) = (\mathfrak{c}_s(p, \alpha) + (d + \alpha)\mathfrak{c}_c(p, \alpha)) \sqrt{d} \left( c_6^{(1)}(d, \alpha) + c_6^{(4)}(p, d, \alpha) \right).$$

Сопоставляя (3.86) и (3.88), получаем

$$|\tilde{\rho}_*^{(1)}(\boldsymbol{\xi})| \leq \mu_+ \max\{c_6(p, d, \alpha), \check{c}_6(p, d, \alpha)\} |\boldsymbol{\xi}|^{1+\alpha}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}. \tag{3.89}$$

Выбирая  $p = 2$  в (3.68), (3.69) и комбинируя (3.65), (3.78), (3.89), приходим к искомой оценке (3.59) с постоянной

$$C_{10} = \mu_+ \left( c_5(d, \alpha) (\pi\sqrt{d})^{3-\alpha} + \max\{c_6(2, d, \alpha), \check{c}_6(2, d, \alpha)\} \right) =: \mu_+ c_7(d, \alpha).$$

Это завершает доказательство леммы.  $\square$

Теперь из предложений 3.6, 3.8, равенства (3.53) и лемм 3.9, 3.11 вытекает следующее утверждение.

**Предложение 3.12.** Пусть выполнены условия (1.1), (1.2) и  $1 < \alpha < 2$ . Тогда при  $|\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(\alpha, \mu)$  справедлива оценка

$$\left\| \mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})F(\boldsymbol{\xi}) - (\mu^0 c_0(d, \alpha) |\boldsymbol{\xi}|^\alpha + \langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle) P \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_{11} |\boldsymbol{\xi}|^{1+\alpha}. \tag{3.90}$$

Здесь  $\mu^0$  определено в (3.56), а  $g^0 = \{g_{jk}^0\}$  — симметричная матрица с вещественными элементами, заданными соотношениями

$$\begin{aligned}
g_{jk}^0 &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \frac{\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+\alpha}} ((x_j - y_j)(v_k(\mathbf{x}) - v_k(\mathbf{y})) + (x_k - y_k)(v_j(\mathbf{x}) - v_j(\mathbf{y}))) \\
&+ \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{z} \frac{\mu_*(\mathbf{z}) z_j z_k}{2|\mathbf{z}|^{d+\alpha}}, \quad j, k = 1, \dots, d,
\end{aligned} \tag{3.91}$$

последний интеграл понимается в регуляризованном смысле, как сумма интегралов по ячейкам  $\Omega + \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$ . Квадратичная форма  $\langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle$  допускает оценку

$$|\langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle| \leq C_{12} |\boldsymbol{\xi}|^2. \tag{3.92}$$

Постоянные  $C_{11} = C_8 + C_{10}$  и  $C_{12} = dC_7 + c_4\mu_+$  контролируются через  $d$ ,  $\alpha$ ,  $\mu_-$ ,  $\mu_+$ .

**Замечание 3.13.** Матрица  $g^0$  может быть не знакоопределенной.

#### § 4. АППРОКСИМАЦИЯ РЕЗОЛЬВЕНТЫ $(\mathbb{A} + \varepsilon^\alpha I)^{-1}$

**4.1. Аппроксимация резольвенты оператора  $\mathbb{A}(\xi)$ .** В [26, теорема 4.2] на основании предложения 3.5, равенства (3.53) и лемм 3.9, 3.10 получено следующее утверждение.

**Теорема 4.1** ([26]). Пусть выполнены условия (1.1), (1.2) и  $1 < \alpha < 2$ . Тогда при  $\varepsilon > 0$  и  $|\xi| \leq \delta_0(\alpha, \mu)$  справедлива оценка

$$\|(\mathbb{A}(\xi) + \varepsilon^\alpha I)^{-1} - (\mu^0 c_0(d, \alpha) |\xi|^\alpha + \varepsilon^\alpha)^{-1} P\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_{13} \varepsilon^{2-2\alpha}.$$

Здесь  $\mu^0$  определено в (3.56). Величина  $C_{13}$  контролируется в терминах параметров  $d, \alpha, \mu_-, \mu_+$ .

Для получения более точного приближения мы опираемся на предложение 3.12. Будем считать  $|\xi|$  настолько малым, что выполнено

$$|\langle g^0 \xi, \xi \rangle| \leq \frac{\mu^0 c_0}{2} |\xi|^\alpha.$$

С учетом (3.92) достаточно предположить, что

$$|\xi| \leq \delta_2, \quad \delta_2(d, \alpha, \mu) := \left( \frac{\mu^0 c_0}{2C_{12}} \right)^{1/(2-\alpha)}. \quad (4.1)$$

Из предложения 1.5 и (4.1) вытекают оценки

$$\|(\mathbb{A}(\xi) + \varepsilon^\alpha I)^{-1}\| \leq (\mu_- c_0(d, \alpha) |\xi|^\alpha + \varepsilon^\alpha)^{-1}, \quad \varepsilon > 0, \quad \xi \in \tilde{\Omega}; \quad (4.2)$$

$$(\mu^0 c_0 |\xi|^\alpha + \langle g^0 \xi, \xi \rangle + \varepsilon^\alpha)^{-1} \leq \left( \frac{1}{2} \mu_- c_0(d, \alpha) |\xi|^\alpha + \varepsilon^\alpha \right)^{-1}, \quad \varepsilon > 0, \quad |\xi| \leq \delta_2. \quad (4.3)$$

**Предложение 4.2.** Пусть выполнены условия (1.1), (1.2) и  $1 < \alpha < 2$ . Положим

$$\delta_* = \delta_*(d, \alpha, \mu) := \min\{\delta_0(\alpha, \mu), \delta_2(d, \alpha, \mu)\},$$

где  $\delta_0(\alpha, \mu)$  определено в (3.8), а  $\delta_2(d, \alpha, \mu)$  — в (4.1). Обозначим

$$\Sigma(\xi, \varepsilon) := (\mathbb{A}(\xi) + \varepsilon^\alpha I)^{-1} F(\xi) - (\mu^0 c_0 |\xi|^\alpha + \langle g^0 \xi, \xi \rangle + \varepsilon^\alpha)^{-1} P, \quad |\xi| \leq \delta_*, \quad \varepsilon > 0. \quad (4.4)$$

Здесь  $\mu^0$  определено в (3.56), а  $g^0$  — матрица с элементами (3.91). Справедлива оценка

$$\|\Sigma(\xi, \varepsilon)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_{14} \varepsilon^{1-\alpha}, \quad |\xi| \leq \delta_*, \quad \varepsilon > 0. \quad (4.5)$$

*Доказательство.* Справедливо очевидное тождество

$$\begin{aligned} \Sigma(\xi, \varepsilon) &= F(\xi)(\mathbb{A}(\xi) + \varepsilon^\alpha I)^{-1}(F(\xi) - P) + (F(\xi) - P)(\mu^0 c_0 |\xi|^\alpha + \langle g^0 \xi, \xi \rangle + \varepsilon^\alpha)^{-1} P \\ &\quad - F(\xi)(\mathbb{A}(\xi) + \varepsilon^\alpha I)^{-1}(\mathbb{A}(\xi)F(\xi) - (\mu^0 c_0 |\xi|^\alpha + \langle g^0 \xi, \xi \rangle)P)(\mu^0 c_0 |\xi|^\alpha + \langle g^0 \xi, \xi \rangle + \varepsilon^\alpha)^{-1} P. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.30), (3.90), (4.2), (4.3) вытекает оценка

$$\begin{aligned} \|\Sigma(\xi, \varepsilon)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq \frac{C_5 |\xi|}{\mu_- c_0 |\xi|^\alpha + \varepsilon^\alpha} + \frac{C_5 |\xi|}{\frac{1}{2} \mu_- c_0 |\xi|^\alpha + \varepsilon^\alpha} + \frac{C_{11} |\xi|^{1+\alpha}}{(\mu_- c_0 |\xi|^\alpha + \varepsilon^\alpha)(\frac{1}{2} \mu_- c_0 |\xi|^\alpha + \varepsilon^\alpha)} \\ &\leq \left( \frac{C_5}{(\mu_- c_0)^{1/\alpha}} + \frac{C_5}{(\frac{1}{2} \mu_- c_0)^{1/\alpha}} + \frac{C_{11}}{\mu_- c_0 (\frac{1}{2} \mu_- c_0)^{1/\alpha}} \right) \varepsilon^{1-\alpha} =: C_{14} \varepsilon^{1-\alpha}, \end{aligned}$$

при  $|\xi| \leq \delta_*$  и  $\varepsilon > 0$ . □

**Теорема 4.3.** Пусть выполнены условия (1.1), (1.2) и  $1 < \alpha < 2$ . Тогда при  $\varepsilon > 0$  и  $|\xi| \leq \delta_*(d, \alpha, \mu)$  справедлива оценка

$$\left\| (\mathbb{A}(\xi) + \varepsilon^\alpha I)^{-1} - (\mu^0 c_0 |\xi|^\alpha + \langle g^0 \xi, \xi \rangle + \varepsilon^\alpha)^{-1} P \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_{15} \varepsilon^{1-\alpha}. \quad (4.6)$$

Здесь  $\mu^0$  определено в (3.56), а  $g^0$  — матрица с элементами (3.91). Величина  $C_{15}$  контролируется в терминах параметров  $d, \alpha, \mu_-, \mu_+$ .

*Доказательство.* Из определения  $F(\xi)$  и предложения 3.1 следует очевидное неравенство

$$\|(\mathbb{A}(\xi) + \varepsilon^\alpha I)^{-1}(I - F(\xi))\| \leq \frac{1}{d_0}, \quad |\xi| \leq \delta_0(\alpha, \mu), \quad \varepsilon > 0. \quad (4.7)$$

Из (4.4), (4.5) и (4.7) вытекает оценка (4.6) с постоянной  $C_{15} = C_{14} + d_0^{-1/\alpha}$ .  $\square$

Далее, воспользуемся элементарным представлением

$$\begin{aligned} (\mu^0 c_0 |\xi|^\alpha + \langle g^0 \xi, \xi \rangle + \varepsilon^\alpha)^{-1} &= (\mu^0 c_0 |\xi|^\alpha + \varepsilon^\alpha)^{-1} \left( 1 + \frac{\langle g^0 \xi, \xi \rangle}{\mu^0 c_0 |\xi|^\alpha + \varepsilon^\alpha} \right)^{-1} \\ &= (\mu^0 c_0 |\xi|^\alpha + \varepsilon^\alpha)^{-1} \sum_{m=0}^N \left( -\frac{\langle g^0 \xi, \xi \rangle}{\mu^0 c_0 |\xi|^\alpha + \varepsilon^\alpha} \right)^m + J_N(\xi, \varepsilon), \end{aligned} \quad (4.8)$$

где

$$J_N(\xi, \varepsilon) = \left( -\frac{\langle g^0 \xi, \xi \rangle}{\mu^0 c_0 |\xi|^\alpha + \varepsilon^\alpha} \right)^{N+1} (\mu^0 c_0 |\xi|^\alpha + \langle g^0 \xi, \xi \rangle + \varepsilon^\alpha)^{-1}, \quad (4.9)$$

считая, что  $2 - \frac{1}{N} < \alpha < 2$ . Оценим член (4.9) с помощью (3.92) и (4.3):

$$|J_N(\xi, \varepsilon)| \leq \left( \frac{C_{12}}{\mu^0 c_0} \right)^{N+1} \frac{|\xi|^{(N+1)(2-\alpha)}}{\frac{1}{2}\mu_- c_0 |\xi|^\alpha + \varepsilon^\alpha}.$$

При  $2 - \frac{1}{N} < \alpha \leq 2 - \frac{1}{N+1}$  имеем:

$$\begin{aligned} |J_N(\xi, \varepsilon)| &\leq \left( \frac{C_{12}}{\mu^0 c_0} \right)^{N+1} \frac{|\xi|^{(N+1)(2-\alpha)-1}}{(\frac{1}{2}\mu_- c_0)^{1/\alpha}} \varepsilon^{1-\alpha} \leq \mathfrak{C}_N \varepsilon^{1-\alpha}, \quad 2 - \frac{1}{N} < \alpha \leq 2 - \frac{1}{N+1}, \\ \mathfrak{C}_N &= \left( \frac{C_{12}}{\mu^0 c_0} \right)^{N+1} \frac{\delta_*^{(N+1)(2-\alpha)-1}}{(\frac{1}{2}\mu_- c_0)^{1/\alpha}}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

При  $2 - \frac{1}{N+1} < \alpha < 2$  получаем:

$$\begin{aligned} |J_N(\xi, \varepsilon)| &\leq \mathfrak{C}'_N \varepsilon^{(N+1)(2-\alpha)-\alpha}, \quad 2 - \frac{1}{N+1} < \alpha < 2, \\ \mathfrak{C}'_N &= \left( \frac{C_{12}}{\mu^0 c_0} \right)^{N+1} \frac{1}{(\frac{1}{2}\mu_- c_0)^{(N+1)(2-\alpha)/\alpha}}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Из теоремы 4.3 и соотношений (4.8), (4.10), (4.11) вытекает следующий результат.

**Теорема 4.4.** Пусть выполнены условия (1.1), (1.2). Пусть  $N \in \mathbb{N}$  и  $1 - \frac{1}{N} < \alpha < 2$ . Тогда при  $\varepsilon > 0$  и  $|\xi| \leq \delta_*(d, \alpha, \mu)$  справедлива оценка

$$\begin{aligned} \left\| (\mathbb{A}(\xi) + \varepsilon^\alpha I)^{-1} - (\mu^0 c_0 |\xi|^\alpha + \varepsilon^\alpha)^{-1} P - \sum_{m=1}^N K_m(\xi, \varepsilon) P \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ \leq C_{16}(N) \begin{cases} \varepsilon^{1-\alpha}, & 2 - \frac{1}{N} < \alpha \leq 2 - \frac{1}{N+1}, \\ \varepsilon^{(N+1)(2-\alpha)-\alpha}, & 2 - \frac{1}{N+1} < \alpha < 2. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Здесь  $\mu^0$  определено в (3.56),  $g^0$  — матрица с элементами (3.91), функции  $K_m(\xi, \varepsilon)$  заданы соотношениями

$$K_m(\xi, \varepsilon) := (-1)^m \langle g^0 \xi, \xi \rangle^m (\mu^0 c_0 |\xi|^\alpha + \varepsilon^\alpha)^{-m-1}, \quad m = 1, \dots, N.$$

Величина  $C_{16}(N)$  контролируется в терминах параметров  $d, \alpha, \mu_-, \mu_+, N$ .

Введем *эффективный оператор* — самосопряженный оператор в  $L_2(\mathbb{R}^d)$ , порожденный формой вида (1.3) с постоянным коэффициентом  $\mu^0$ , определенным в (3.56):

$$\mathbb{A}^0 := \mathbb{A}(\alpha, \mu^0) = \mu^0 \mathbb{A}_0(\alpha) = \mu^0 c_0(d, \alpha)(-\Delta)^\gamma, \quad \text{Dom } \mathbb{A}^0 = H^\alpha(\mathbb{R}^d). \quad (4.13)$$

С помощью унитарного преобразования Гельфанда оператор  $\mathbb{A}^0$  раскладывается в прямой интеграл:

$$\mathbb{A}^0 = \mathcal{G}^* \left( \int_{\tilde{\Omega}} \oplus \mathbb{A}^0(\xi) d\xi \right) \mathcal{G}. \quad (4.14)$$

Здесь

$$\mathbb{A}^0(\xi) = \mathbb{A}(\xi; \alpha, \mu^0) = \mu^0 \mathbb{A}_0(\xi; \alpha) = \mu^0 c_0(d, \alpha) |\mathbf{D} + \xi|^\alpha, \quad \text{Dom } \mathbb{A}^0(\xi) = \tilde{H}^\alpha(\Omega); \quad (4.15)$$

см. (1.12).

На основании теоремы 4.1 в [26, теорема 4.3] получен следующий результат.

**Теорема 4.5** ([26]). Пусть выполнены условия (1.1), (1.2) и  $1 < \alpha < 2$ . Тогда при  $\varepsilon > 0$  и  $\xi \in \tilde{\Omega}$  справедлива оценка

$$\|(\mathbb{A}(\xi) + \varepsilon^\alpha I)^{-1} - (\mathbb{A}^0(\xi) + \varepsilon^\alpha I)^{-1}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_1(\alpha, \mu) \varepsilon^{2-2\alpha}.$$

Постоянная  $C_1(\alpha, \mu)$  контролируется в терминах параметров  $d, \alpha, \mu_-, \mu_+$ .

Мы получаем более точную аппроксимацию резольвенты  $(\mathbb{A}(\xi) + \varepsilon^\alpha I)^{-1}$  с помощью теоремы 4.4. Для этого, считая, что  $2 - \frac{1}{N} < \alpha < 2$ , введем *корректоры*  $\mathbb{K}_m(\varepsilon)$ ,  $m = 1, \dots, N$ , — ограниченные операторы в  $L_2(\mathbb{R}^d)$ , заданные соотношениями

$$\mathbb{K}_m(\varepsilon) := (\text{div } g^0 \nabla)^m (\mathbb{A}^0 + \varepsilon^\alpha I)^{-m-1}, \quad m = 1, \dots, N. \quad (4.16)$$

Заметим, что  $\mathbb{K}_m(\varepsilon)$  представляет собой псевдодифференциальный оператор (ПДО) отрицательного порядка, поскольку  $2m < (m+1)\alpha$  при  $m = 1, \dots, N$  в силу условия  $\alpha > 2 - \frac{1}{N}$ . С помощью преобразования Гельфанда оператор  $\mathbb{K}_m(\varepsilon)$  раскладывается в прямой интеграл:

$$\mathbb{K}_m(\varepsilon) = \mathcal{G}^* \left( \int_{\tilde{\Omega}} \oplus \mathbb{K}_m(\xi, \varepsilon) d\xi \right) \mathcal{G}, \quad m = 1, \dots, N. \quad (4.17)$$

Здесь

$$\mathbb{K}_m(\xi, \varepsilon) := (-1)^m ((\mathbf{D} + \xi)^* g^0 (\mathbf{D} + \xi))^m (\mathbb{A}^0(\xi) + \varepsilon^\alpha I)^{-m-1}, \quad \text{Dom } \mathbb{K}_m(\xi, \varepsilon) = L_2(\Omega). \quad (4.18)$$

**Теорема 4.6.** Пусть выполнены условия (1.1), (1.2). Пусть  $N \in \mathbb{N}$  и  $2 - \frac{1}{N} < \alpha < 2$ . Тогда при  $\varepsilon > 0$  и  $\xi \in \tilde{\Omega}$  справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \left\| (\mathbb{A}(\xi) + \varepsilon^\alpha I)^{-1} - (\mathbb{A}^0(\xi) + \varepsilon^\alpha I)^{-1} - \sum_{m=1}^N \mathbb{K}_m(\xi, \varepsilon) \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ & \leq C_2(N, \alpha, \mu) \begin{cases} \varepsilon^{1-\alpha}, & 2 - \frac{1}{N} < \alpha \leq 2 - \frac{1}{N+1}, \\ \varepsilon^{(N+1)(2-\alpha)-\alpha}, & 2 - \frac{1}{N+1} < \alpha < 2. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Здесь операторы  $\mathbb{A}^0(\xi)$  и  $\mathbb{K}_m(\xi, \varepsilon)$ ,  $m = 1, \dots, N$ , определены в (4.15) и (4.18) соответственно. Постоянная  $C_2(N, \alpha, \mu)$  контролируется в терминах параметров  $d, \alpha, \mu_-, \mu_+, N$ .

*Доказательство.* При  $|\xi| \leq \delta_*$  воспользуемся оценкой (4.12). При  $|\xi| > \delta_*$  оценки тривиальны: каждый член под знаком нормы в (4.12) можно оценить по-отдельности. В силу (4.2)

$$\|(\mathbb{A}(\xi) + \varepsilon^\alpha I)^{-1}\| \leq (\mu_- c_0 \delta_*^\alpha)^{-1}, \quad \varepsilon > 0, \quad \xi \in \tilde{\Omega}, \quad |\xi| > \delta_*.$$

Очевидно, что

$$(\mu^0 c_0 |\xi|^\alpha + \varepsilon^\alpha)^{-1} \leq (\mu_- c_0 \delta_*^\alpha)^{-1}, \quad \varepsilon > 0, \quad \xi \in \tilde{\Omega}, \quad |\xi| > \delta_*.$$

При  $2 - \frac{1}{N} < \alpha \leq 2 - \frac{1}{N+1}$  нам нужна оценка

$$\|(\mathbb{A}(\xi) + \varepsilon^\alpha I)^{-1}\| \leq (\mu_- c_0 \delta_*^\alpha)^{-1/\alpha} (\mu_- c_0 |\xi|^\alpha + \varepsilon^\alpha)^{1/\alpha-1} \leq (\mu_- c_0)^{-1/\alpha} \delta_*^{-1} \varepsilon^{1-\alpha},$$

а при  $2 - \frac{1}{N+1} < \alpha < 2$  — оценка

$$\begin{aligned} \|(\mathbb{A}(\xi) + \varepsilon^\alpha I)^{-1}\| &\leq (\mu_- c_0 \delta_*^\alpha)^{-(N+1)(2-\alpha)/\alpha} (\mu_- c_0 |\xi|^\alpha + \varepsilon^\alpha)^{(N+1)(2-\alpha)/\alpha-1} \\ &\leq (\mu_- c_0)^{-(N+1)(2-\alpha)/\alpha} \delta_*^{-(N+1)(2-\alpha)} \varepsilon^{(N+1)(2-\alpha)-\alpha}. \end{aligned}$$

(Мы учли, что  $(N+1)(2-\alpha) < \alpha$  при сделанном предположении.) Точно так же оценивается и оператор  $(\mu^0 c_0 |\xi|^\alpha + \varepsilon^\alpha)^{-1} P$ .

Оценим теперь  $|K_m(\xi, \varepsilon)|$ ,  $m = 1, \dots, N$ , при  $|\xi| \geq \delta_*$ . При  $2 - \frac{1}{N} < \alpha \leq 2 - \frac{1}{N+1}$  с учетом (3.92) имеем:

$$\begin{aligned} |K_m(\xi, \varepsilon)| &\leq \frac{C_{12}^m |\xi|^{2m}}{(\mu_- c_0 |\xi|^\alpha)^{2m/\alpha}} (\mu_- c_0 |\xi|^\alpha + \varepsilon^\alpha)^{-m-1+2m/\alpha} \\ &= \frac{C_{12}^m}{(\mu_- c_0)^{2m/\alpha}} (\mu_- c_0 |\xi|^\alpha + \varepsilon^\alpha)^{1/\alpha-1} (\mu_- c_0 \delta_*^\alpha)^{-m+(2m-1)/\alpha} \\ &\leq \frac{C_{12}^m}{(\mu_- c_0)^{m+1/\alpha} \delta_*^{m(2-\alpha)-1}} \varepsilon^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Аналогично, при  $2 - \frac{1}{N+1} < \alpha < 2$  получаем оценку

$$\begin{aligned} |K_m(\xi, \varepsilon)| &\leq \frac{C_{12}^m}{(\mu_- c_0)^{2m/\alpha}} (\mu_- c_0 |\xi|^\alpha + \varepsilon^\alpha)^{(N+1)(2-\alpha)/\alpha-1} (\mu_- c_0 \delta_*^\alpha)^{-m+2m/\alpha-(N+1)(2-\alpha)/\alpha} \\ &\leq \frac{C_{12}^m}{(\mu_- c_0)^{m+(N+1)(2-\alpha)/\alpha} \delta_*^{(2-\alpha)(N+1-m)}} \varepsilon^{(N+1)(2-\alpha)-\alpha}. \end{aligned}$$

Из приведенных соотношений следует, что справедлив аналог оценки (4.12) при  $\xi \in \tilde{\Omega}$ ,  $|\xi| \geq \delta_*$ . В итоге при всех  $\xi \in \tilde{\Omega}$  и  $\varepsilon > 0$  установлена оценка

$$\begin{aligned} \left\| (\mathbb{A}(\xi) + \varepsilon^\alpha I)^{-1} - (\mu^0 c_0 |\xi|^\alpha + \varepsilon^\alpha)^{-1} P - \sum_{m=1}^N K_m(\xi, \varepsilon) P \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ \leq \tilde{C}_{16}(N) \begin{cases} \varepsilon^{1-\alpha}, & 2 - \frac{1}{N} < \alpha \leq 2 - \frac{1}{N+1}, \\ \varepsilon^{(N+1)(2-\alpha)-\alpha}, & 2 - \frac{1}{N+1} < \alpha < 2. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Постоянная  $\tilde{C}_{16}(N)$  зависит от  $d$ ,  $\alpha$ ,  $\mu_-$ ,  $\mu_+$ ,  $N$ .

Далее, справедливо очевидное равенство

$$\mathbb{A}^0(\xi) P = \mu^0 c_0 |\xi|^\alpha P,$$

а потому

$$(\mathbb{A}^0(\xi) + \varepsilon^\alpha I)^{-1} P = (\mu^0 c_0 |\xi|^\alpha + \varepsilon^\alpha)^{-1} P.$$

Аналогично,

$$\mathbb{K}_m(\xi, \varepsilon) P = K_m(\xi, \varepsilon) P, \quad m = 1, \dots, N.$$

Перепишем (4.20) в виде

$$\begin{aligned} & \left\| (\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^\alpha I)^{-1} - (\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^\alpha I)^{-1} P - \sum_{m=1}^N \mathbb{K}_m(\boldsymbol{\xi}, \varepsilon) P \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ & \leq \tilde{C}_{16} \begin{cases} \varepsilon^{1-\alpha}, & 2 - \frac{1}{N} < \alpha \leq 2 - \frac{1}{N+1}, \\ \varepsilon^{(N+1)(2-\alpha)-\alpha}, & 2 - \frac{1}{N+1} < \alpha < 2, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.21)$$

при  $\varepsilon > 0$  и  $\boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}$ .

С помощью дискретного преобразования Фурье имеем

$$\left\| (\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^\alpha I)^{-1} (I - P) \right\| = \sup_{0 \neq \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} (\mu^0 c_0 |2\pi \mathbf{n} + \boldsymbol{\xi}|^\alpha + \varepsilon^\alpha)^{-1} \leq (\mu_- c_0 \pi^\alpha + \varepsilon^\alpha)^{-1}.$$

Мы учли (1.14) и очевидное неравенство  $|2\pi \mathbf{n} + \boldsymbol{\xi}| \geq \pi$  при  $\boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}$  и  $0 \neq \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$ . При  $2 - \frac{1}{N} < \alpha \leq 2 - \frac{1}{N+1}$  отсюда выводим неравенство

$$\left\| (\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^\alpha I)^{-1} (I - P) \right\| \leq (\mu_- c_0 \pi^\alpha)^{-1/\alpha} (\mu_- c_0 \pi^\alpha + \varepsilon^\alpha)^{1/\alpha-1} \leq (\mu_- c_0)^{-1/\alpha} \pi^{-1} \varepsilon^{1-\alpha},$$

а при  $2 - \frac{1}{N+1} < \alpha < 2$  получаем неравенство

$$\begin{aligned} \left\| (\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^\alpha I)^{-1} (I - P) \right\| & \leq (\mu_- c_0 \pi^\alpha)^{-(N+1)(2-\alpha)/\alpha} (\mu_- c_0 \pi^\alpha + \varepsilon^\alpha)^{(N+1)(2-\alpha)/\alpha-1} \\ & \leq (\mu_- c_0)^{-(N+1)(2-\alpha)/\alpha} \pi^{-(N+1)(2-\alpha)} \varepsilon^{(N+1)(2-\alpha)-\alpha}. \end{aligned}$$

Аналогично, с помощью дискретного преобразования Фурье оценим норму  $\|\mathbb{K}_m(\boldsymbol{\xi}, \varepsilon)(I - P)\|$  при  $m = 1, \dots, N$ :

$$\begin{aligned} \|\mathbb{K}_m(\boldsymbol{\xi}, \varepsilon)(I - P)\| & = \sup_{0 \neq \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} |\langle g^0(2\pi \mathbf{n} + \boldsymbol{\xi}), 2\pi \mathbf{n} + \boldsymbol{\xi} \rangle|^m (\mu^0 c_0 |2\pi \mathbf{n} + \boldsymbol{\xi}|^\alpha + \varepsilon^\alpha)^{-m-1} \\ & \leq \frac{C_{12}^m}{(\mu_- c_0)^{2m/\alpha}} (\mu_- c_0 \pi^\alpha + \varepsilon^\alpha)^{-m-1+2m/\alpha}. \end{aligned}$$

При  $2 - \frac{1}{N} < \alpha \leq 2 - \frac{1}{N+1}$  отсюда выводим неравенство

$$\begin{aligned} \|\mathbb{K}_m(\boldsymbol{\xi}, \varepsilon)(I - P)\| & \leq \frac{C_{12}^m}{(\mu_- c_0)^{2m/\alpha}} (\mu_- c_0 \pi^\alpha)^{-m+(2m-1)/\alpha} (\mu_- c_0 \pi^\alpha + \varepsilon^\alpha)^{1/\alpha-1} \\ & \leq \frac{C_{12}^m}{(\mu_- c_0)^{m+1/\alpha} \pi^{1-m(2-\alpha)}} \varepsilon^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

При  $2 - \frac{1}{N+1} < \alpha < 2$  получаем неравенство

$$\begin{aligned} \|\mathbb{K}_m(\boldsymbol{\xi}, \varepsilon)(I - P)\| & \leq \frac{C_{12}^m}{(\mu_- c_0)^{2m/\alpha}} (\mu_- c_0 \pi^\alpha)^{-m+2m/\alpha-(N+1)(2-\alpha)/\alpha} (\mu_- c_0 \pi^\alpha + \varepsilon^\alpha)^{(N+1)(2-\alpha)/\alpha-1} \\ & \leq \frac{C_{12}^m}{(\mu_- c_0)^{m+(N+1)(2-\alpha)/\alpha} \pi^{(N+1-m)(2-\alpha)}} \varepsilon^{(N+1)(2-\alpha)-\alpha}. \end{aligned}$$

В итоге, из приведенных оценок для норм операторов  $(\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^\alpha I)^{-1} (I - P)$  и  $\mathbb{K}_m(\boldsymbol{\xi}, \varepsilon)(I - P)$ ,  $m = 1, \dots, N$ , и из (4.21) вытекает искомое неравенство (4.19).  $\square$

**4.2. Аппроксимация резольвенты  $(\mathbb{A} + \varepsilon^\alpha I)^{-1}$ .** В [26, теорема 4.4] с помощью разложений операторов  $\mathbb{A}$  и  $\mathbb{A}^0$  в прямые интегралы (см. (1.13), (4.14)) из теоремы 4.5 выводился следующий результат.

**Теорема 4.7** ([26]). *Пусть выполнены условия (1.1), (1.2) и  $1 < \alpha < 2$ . Тогда при  $\varepsilon > 0$  справедлива оценка*

$$\left\| (\mathbb{A} + \varepsilon^\alpha I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + \varepsilon^\alpha I)^{-1} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_1(\alpha, \mu) \varepsilon^{2-2\alpha}.$$

Здесь  $\mathbb{A}^0$  — эффективный оператор, определенный в (4.13). Постоянная  $C_1(\alpha, \mu)$  контролируется в терминах параметров  $d, \alpha, \mu_-, \mu_+$ .

Мы получаем более точное приближение резольвенты  $(\mathbb{A} + \varepsilon^\alpha I)^{-1}$  на основе теоремы 4.6.

**Теорема 4.8.** Пусть выполнены условия (1.1), (1.2). Пусть  $N \in \mathbb{N}$  и  $1 - \frac{1}{N} < \alpha < 2$ . Тогда при  $\varepsilon > 0$  справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \left\| (\mathbb{A} + \varepsilon^\alpha I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + \varepsilon^\alpha I)^{-1} - \sum_{m=1}^N \mathbb{K}_m(\varepsilon) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq C_2(N, \alpha, \mu) \begin{cases} \varepsilon^{1-\alpha}, & 2 - \frac{1}{N} < \alpha \leq 2 - \frac{1}{N+1}, \\ \varepsilon^{(N+1)(2-\alpha)-\alpha}, & 2 - \frac{1}{N+1} < \alpha < 2. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Здесь  $\mathbb{A}^0$  — эффективный оператор, определенный в (4.13). Корректоры  $\mathbb{K}_m(\varepsilon)$ ,  $m = 1, \dots, N$ , определены в (4.16). Постоянная  $C_2(N, \alpha, \mu)$  контролируется в терминах параметров  $d$ ,  $\alpha$ ,  $\mu_-$ ,  $\mu_+$ ,  $N$ .

*Доказательство.* Из разложений (1.13), (4.14) и (4.17) следует, что оператор под знаком нормы в (4.22) с помощью преобразования Гельфанда раскладывается в прямой интеграл по операторам  $(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^\alpha I)^{-1} - (\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^\alpha I)^{-1} - \sum_{m=1}^N \mathbb{K}_m(\boldsymbol{\xi}, \varepsilon)$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} & \left\| (\mathbb{A} + \varepsilon^\alpha I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + \varepsilon^\alpha I)^{-1} - \sum_{m=1}^N \mathbb{K}_m(\varepsilon) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & = \sup_{\boldsymbol{\xi} \in \Omega} \left\| (\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^\alpha I)^{-1} - (\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^\alpha I)^{-1} - \sum_{m=1}^N \mathbb{K}_m(\boldsymbol{\xi}, \varepsilon) \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Поэтому оценка (4.22) вытекает из (4.19).  $\square$

## § 5. УСРЕДНЕНИЕ ОПЕРАТОРА ТИПА ЛЕВИ

**5.1. Основной результат.** Предполагая выполненными условия (1.1), (1.2) и  $1 < \alpha < 2$ , рассмотрим семейство операторов  $\mathbb{A}_\varepsilon := \mathbb{A}(\alpha, \mu^\varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ , в  $L_2(\mathbb{R}^d)$ . Здесь  $\mu^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \mu(\mathbf{x}/\varepsilon, \mathbf{y}/\varepsilon)$ . Тем самым,  $\mathbb{A}_\varepsilon$  — самосопряженный оператор в  $L_2(\mathbb{R}^d)$ , порожденный замкнутой квадратичной формой

$$a_\varepsilon[u, u] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} d\mathbf{y} \mu^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+\alpha}}, \quad u \in H^\gamma(\mathbb{R}^d), \quad \varepsilon > 0.$$

Пусть эффективный оператор  $\mathbb{A}^0$  в  $L_2(\mathbb{R}^d)$  определен в (4.13). Напомним, что эффективный коэффициент  $\mu^0$  определен в (3.56).

Введем масштабное преобразование (семейство унитарных операторов):

$$T_\varepsilon u(\mathbf{x}) := \varepsilon^{d/2} u(\varepsilon \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d), \quad \varepsilon > 0.$$

Нетрудно проверить равенство

$$\mathbb{A}_\varepsilon = \varepsilon^{-\alpha} T_\varepsilon^* \mathbb{A} T_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Следовательно,

$$(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} = T_\varepsilon^* \varepsilon^\alpha (\mathbb{A} + \varepsilon^\alpha I)^{-1} T_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (5.1)$$

Для эффективного оператора также выполнено тождество

$$\mathbb{A}^0 = \varepsilon^{-\alpha} T_\varepsilon^* \mathbb{A}^0 T_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

а потому

$$(\mathbb{A}^0 + I)^{-1} = T_\varepsilon^* \varepsilon^\alpha (\mathbb{A}^0 + \varepsilon^\alpha I)^{-1} T_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (5.2)$$

Из (5.1) и (5.2) с учетом унитарности оператора  $T_\varepsilon$  вытекает равенство

$$\|(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} = \varepsilon^\alpha \|(\mathbb{A} + \varepsilon^\alpha I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + \varepsilon^\alpha I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Отсюда и из теоремы 4.5 вытекает следующий результат; см. [26, теорема 6.1].

**Теорема 5.1** ([26]). Пусть выполнены условия (1.1), (1.2) и  $1 < \alpha < 2$ . Тогда при  $\varepsilon > 0$  справедлива оценка

$$\|(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_1(\alpha, \mu) \varepsilon^{2-\alpha}. \quad (5.3)$$

Здесь  $\mathbb{A}^0$  — эффективный оператор, определенный в (4.13). Постоянная  $C_1(\alpha, \mu)$  контролируется через величины  $d$ ,  $\alpha$ ,  $\mu_-$ ,  $\mu_+$ .

Мы получаем более точную аппроксимацию резольвенты  $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$  на основе теоремы 4.8.

**Теорема 5.2.** Пусть выполнены условия (1.1), (1.2). Пусть  $N \in \mathbb{N}$  и  $1 - \frac{1}{N} < \alpha < 2$ . Тогда при  $\varepsilon > 0$  справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \left\| (\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + I)^{-1} - \sum_{m=1}^N \varepsilon^{m(2-\alpha)} \mathbb{K}_m \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq C_2(N, \alpha, \mu) \begin{cases} \varepsilon, & 2 - \frac{1}{N} < \alpha \leq 2 - \frac{1}{N+1}, \\ \varepsilon^{(N+1)(2-\alpha)}, & 2 - \frac{1}{N+1} < \alpha < 2. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Здесь  $\mathbb{A}^0$  — эффективный оператор, определенный в (4.13). Корректоры  $\mathbb{K}_m$ ,  $m = 1, \dots, N$ , заданы соотношениями

$$\mathbb{K}_m := (\operatorname{div} g^0 \nabla)^m (\mathbb{A}^0 + I)^{-m-1}, \quad m = 1, \dots, N.$$

Постоянная  $C_2(N, \alpha, \mu)$  контролируется через величины  $d$ ,  $\alpha$ ,  $\mu_-$ ,  $\mu_+$ ,  $N$ .

*Доказательство.* Корректоры  $\mathbb{K}_m$  связаны масштабным преобразованием с операторами (4.16):

$$\mathbb{K}_m = T_\varepsilon^* \varepsilon^{-m(2-\alpha)+\alpha} \mathbb{K}_m(\varepsilon) T_\varepsilon, \quad m = 1, \dots, N, \quad \varepsilon > 0. \quad (5.5)$$

Из (5.1), (5.2) и (5.5) с учетом унитарности оператора  $T_\varepsilon$  вытекает равенство

$$\begin{aligned} & \left\| (\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + I)^{-1} - \sum_{m=1}^N \varepsilon^{m(2-\alpha)} \mathbb{K}_m \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & = \varepsilon^\alpha \left\| (\mathbb{A} + \varepsilon^\alpha I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + \varepsilon^\alpha I)^{-1} - \sum_{m=1}^N \mathbb{K}_m(\varepsilon) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Отсюда и из теоремы 4.8 вытекает искомая оценка (5.4).  $\square$

**5.2. Заключительные замечания.** 1. Из теоремы 5.2 следует, что погрешность  $O(\varepsilon^{2-\alpha})$  в оценке (5.3) из теоремы 5.1 является точной по порядку.

2. При фиксированном  $1 < \alpha < 2$  можно выбрать  $N \in \mathbb{N}$  так, чтобы  $2 - \frac{1}{N} < \alpha \leq 2 - \frac{1}{N+1}$ . Тогда при учете первых  $N$  корректоров мы получаем приближение резольвенты  $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$  с погрешностью  $O(\varepsilon)$ .

3. Из выражений для постоянных в оценках видно, что постоянная  $C_1(\alpha, \mu)$  контролируется через величины  $d$ ,  $\alpha$ ,  $\mu_-$ ,  $\mu_+$ ; постоянная  $C_2(N, \alpha, \mu)$  зависит от тех же параметров и от  $N$ . При этом  $C_1(\alpha, \mu) \rightarrow \infty$ ,  $C_2(N, \alpha, \mu) \rightarrow \infty$  при  $\alpha \rightarrow 1$  или  $\alpha \rightarrow 2$ .

4. Теоремы 5.1, 5.2 сохраняют силу, если решетку периодов  $\mathbb{Z}^d$  заменить на произвольную решетку в  $\mathbb{R}^d$ . Тогда постоянные в оценках (5.3) и (5.4) будут зависеть еще и от параметров решетки.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Allaire G., Conca C., *Bloch wave homogenization and spectral asymptotic analysis*, J. Math. Pures Appl. **77** (1998), 153–208.
- [2] Allaire G., Conca C., Vanninathan M., *The Bloch transform and applications*, ESAIM: Proceedings **3** (1998), 65–84.
- [3] Barlow M., Bass R., Chen Z.-Q., Kassmann M., *Nonlocal Dirichlet forms and symmetric jump processes*, Transactions of the AMS **361** (2009), no. 4, 1963–1999.



- [4] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.
- [5] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publishing Co., Amsterdam–New York, 1978.
- [6] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), вып. 5, 1–108.
- [7] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учётом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), вып. 6, 1–104.
- [8] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учётом корректора. Приближение решений в классе Соболева  $H^1(\mathbb{R}^d)$* , Алгебра и анализ **18** (2006), вып. 6, 1–130.
- [9] Braides A., Piatnitski A., *Homogenization of quadratic convolution energies in periodically perforated domains*, Adv. Calc. Var. (2019), <https://doi.org/10.1515/acv-2019-0083>.
- [10] Conca C., Orive R., Vanninathan M., *Bloch approximation in homogenization and applications*, SIAM J. Math. Anal. **33** (2002), no. 5, 1166–1198.
- [11] Cont R., Tankov P., *Financial modelling with jump processes*, Chapman and Hall/CRC Financial Mathematics Series, FL, 2004.
- [12] Edwards A. M., Phillips R. A., Watkins N. W., Freeman M. P., Murphy E. J., Afanasyev V., Buldyrev S. V., Da Luz M. G. E., Raposo E. P., Stanley H. E., Viswanathan G. M., *Revisiting Lévy flight search patterns of wandering albatrosses, bumblebees and deer*, Nature **449** (2007), 1044–1048.
- [13] Жиков В. В., *Спектральный подход к асимптотическим задачам диффузии*, Дифференциальные уравнения **25** (1989), вып. 1, 44–50.
- [14] Жиков В. В., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Докл. РАН **403** (2005), вып. 3, 305–308.
- [15] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1993.
- [16] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys. **12** (2005), no. 4, 515–524.
- [17] Жиков В. В., Пастухова С. Е., *Операторные оценки в теории усреднения*, Успехи матем. наук **71** (2016), вып. 3, 27–122.
- [18] Humphries N., Sims D., *Optimal foraging strategies: Lévy walks balance searching and patch exploitation under a very broad range of conditions*, J. Theoret. Biol. **358** (2014), 179–193.
- [19] Kassmann M., Piatnitski A., Zhizhina E., *Homogenization of Lévy-type operators with oscillating coefficients*, SIAM J. Math. Anal. **51** (2019), no. 5, 3641–3665.
- [20] Kondratiev Yu., Molchanov S., Pirogov S., Zhizhina E., *On ground state of some non local Schrödinger operators*, Appl. Anal. **96** (2017), no. 8, 1390–1400.
- [21] Nualart D., Schoutens W., *Backward stochastic differential equations and Feynman-Kac formula for Lévy processes, with applications in finance*, Bernoulli **7** (2001), 761–776.
- [22] Piatnitski A., Zhizhina E., *Periodic homogenization of nonlocal operators with a convolution-type kernel*, SIAM J. Math. Anal. **49** (2017), no. 1, 64–81.
- [23] Piatnitski A., Zhizhina E., *Homogenization of biased convolution type operators*, Asymptot. Anal. **115** (2019), no. 3-4, 241–262.
- [24] Piatnitski A., Sloushch V., Suslina T., Zhizhina E., *On operator estimates in homogenization of nonlocal operators of convolution type*, J. Diff. Equ. **352** (2023), 153–188.
- [25] Piatnitski A. L., Sloushch V. A., Suslina T. A., Zhizhina E. A., *On the homogenization of nonlocal convolution type operators*, Russian J. Math. Phys. **31** (2024), no. 1, 137–145.
- [26] Piatnitski A., Sloushch V., Suslina T., Zhizhina E., *Operator estimates in homogenization of Lévy-type operators with periodic coefficients*, Preprint (2024), arXiv:2412.20408.
- [27] Sato K. i., *Lévy processes and infinitely divisible distributions*, Cambridge Stud. Adv. Math. 68, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.
- [28] Севостьянова Е. В., *Асимптотическое разложение решения эллиптического уравнения второго порядка с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами*, Мат. сб. **115** (1981), вып. 2, 204–222.
- [29] Скриганов М. М., *Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов*, Тр. МИАН СССР **171** (1985), 3–122.
- [30] Суслина Т. А., *Теоретико-операторный подход к усреднению уравнений типа Шрёдингера с периодическими коэффициентами*, Успехи матем. наук **78** (2023), вып. 6.
- [31] Uchaikin V. V., Zolotarev V. M., *Chance and stability. Stable distributions and their applications*, in Modern Probability and Statistics, VSP, Utrecht, 1999.
- [32] Wołczyński W. A., *Lévy processes in the physical sciences*, in Lévy Processes, Birkhäuser, Boston, MA, 2001, pp. 241–266.