

**ТЕОРЕТИКО-ОПЕРАТОРНЫЙ ПОДХОД
К УСРЕДНЕНИЮ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ:
ОПЕРАТОРНЫЕ ОЦЕНКИ ПРИ УЧЕТЕ КОРРЕКТОРОВ**

М. А. Дородный, Т. А. Суслина

Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., д. 7/9,
Санкт-Петербург, 199034, Россия

e-mail: mdorodni@yandex.ru

e-mail: t.suslina@spbu.ru

АННОТАЦИЯ

В $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ рассматривается самосопряженный сильно эллиптический дифференциальный оператор \mathcal{A}_ε второго порядка. Предполагается, что коэффициенты оператора \mathcal{A}_ε периодичны и зависят от \mathbf{x}/ε , где $\varepsilon > 0$. Изучается поведение операторов $\cos(\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}\tau)$ и $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}\tau)$ при малом ε и $\tau \in \mathbb{R}$. Результаты применяются к усреднению решений задачи Коши для гиперболического уравнения $\partial_\tau^2 \mathbf{u}_\varepsilon = -\mathcal{A}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon$ с начальными данными из специального класса. При фиксированном τ и $\varepsilon \rightarrow 0$ решение сходится в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ к решению усредненной задачи; погрешность имеет порядок $O(\varepsilon)$. При фиксированном τ получена аппроксимация решения $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau)$ по норме в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ с погрешностью $O(\varepsilon^2)$, а также аппроксимация решения по норме в пространстве Соболева $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ с погрешностью $O(\varepsilon)$. В этих аппроксимациях учитываются корректоры. Отслежена зависимость погрешностей от параметра τ .

Ключевые слова: периодические дифференциальные операторы, гиперболические уравнения, теория усреднения, операторные оценки погрешности.

Исследование выполнено при поддержке РНФ (проект 22-11-00092-П).

ПРЕПРИНТЫ

Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В. М. Бабич, Н. А. Вавилов, А. М. Вершик, М. А. Всемиров,
А. И. Генералов, И. А. Ибрагимов, Л. Ю. Колотилина,
Ю. В. Матиясевич, Н. Ю. Нецветаев, С. И. Репин, Г. А. Серегин.

ВВЕДЕНИЕ

Работа относится к теории усреднения (гомогенизации) периодических дифференциальных операторов (ДО). Задачам гомогенизации посвящена обширная литература; в первую очередь, укажем монографии [BeLP, BaPa, ZhKO]. Один из методов изучения задач усреднения периодических операторов в \mathbb{R}^d — это спектральный метод, основанный на масштабном преобразовании и теории Флоке–Блоха; см., например, [BeLP, гл. 4], [ZhKO, гл. 2], [Se], [Zh1], [COVa].

0.1. Класс операторов. Мы рассматриваем самосопряженные ДО второго порядка, действующие в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и допускающие факторизацию вида

$$\mathcal{A} = f(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f(\mathbf{x}). \quad (0.1)$$

Здесь $b(\mathbf{D}) = \sum_{l=1}^d b_l D_l$ — $(m \times n)$ -матричный ДО первого порядка, причем $m \geq n$ и символ $b(\boldsymbol{\xi})$ — матрица максимального ранга. Матрицы-функции $g(\mathbf{x})$ (размера $m \times m$) и $f(\mathbf{x})$ (размера $n \times n$) периодичны относительно некоторой решетки Γ ; $g(\mathbf{x})$ положительно определена и ограничена; $f, f^{-1} \in L_\infty$. Удобно сначала изучать более простой класс операторов вида

$$\hat{\mathcal{A}} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}). \quad (0.2)$$

Многие операторы математической физики допускают запись в виде (0.1) или (0.2); см. [BSu1] и [BSu3, гл. 4]. Простейший пример — это оператор акустики $\hat{\mathcal{A}} = -\operatorname{div} g(\mathbf{x}) \nabla = \mathbf{D}^* g(\mathbf{x}) \mathbf{D}$.

Введем теперь малый параметр $\varepsilon > 0$ и для всякой Γ -периодической функции $\varphi(\mathbf{x})$ положим $\varphi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \varphi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$. Рассмотрим операторы

$$\mathcal{A}_\varepsilon = f^\varepsilon(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon(\mathbf{x}), \quad (0.3)$$

$$\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}). \quad (0.4)$$

0.2. Операторные оценки погрешности для эллиптических и параболических задач в \mathbb{R}^d . В цикле статей [BSu1, BSu2, BSu3, BSu4] Бирмана и Суслиной был предложен и развит теоретико-операторный подход к задачам гомогенизации в \mathbb{R}^d (вариант спектрального метода). Этот подход основан на масштабном преобразовании, теории Флоке–Блоха и аналитической теории возмущений.

Обсудим результаты для более простого оператора (0.4). В [BSu1] была установлена оценка

$$\|(\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon + I)^{-1} - (\hat{\mathcal{A}}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon. \quad (0.5)$$

Здесь $\hat{\mathcal{A}}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ — эффективный оператор с постоянной эффективной матрицей g^0 . Аппроксимации резольвенты $(\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon + I)^{-1}$ по $(L_2 \rightarrow L_2)$ -норме с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ и по $(L_2 \rightarrow H^1)$ -норме с погрешностью $O(\varepsilon)$ (при учете корректоров) были получены в [BSu2, BSu3] и [BSu4] соответственно.

К усреднению параболических задач теоретико-операторный подход применялся в [Su1, Su2, Su3, V, VSu1, VSu2]. В [Su1, Su2] была установлена оценка

$$\|e^{-\tau \hat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-\tau \hat{\mathcal{A}}^0}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon(\tau + \varepsilon^2)^{-1/2}, \quad \tau > 0. \quad (0.6)$$

Аппроксимации полугруппы $e^{-\tau \hat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$ по $(L_2 \rightarrow L_2)$ -норме с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ и по $(L_2 \rightarrow H^1)$ -норме с погрешностью $O(\varepsilon)$ (при учете корректоров) были получены в [V] и [Su3] соответственно. Еще более точные аппроксимации резольвенты и полугруппы оператора $\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ были найдены в [VSu1, VSu2].

Теоретико-операторный подход применялся также к более общему классу операторов $\hat{\mathcal{B}}_\varepsilon$ со старшей частью $\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ и младшими членами: резольвента такого оператора изучалась в [Su4, Su5], а полугруппа — в [M1, M3].

Оценки вида (0.5), (0.6) называют *операторными оценками погрешности* в теории усреднения. Они точны по порядку. Другой подход к операторным оценкам погрешности (так

называемый метод сдвига) был предложен Жиковым и Пастуховой; см. [Zh2, ZhPas1, ZhPas2], а также обзор [ZhPas3].

0.3. Операторные оценки при усреднении нестационарных уравнений типа Шрёдингера и гиперболических уравнений. Ситуация с усреднением нестационарных уравнений типа Шрёдингера и гиперболического типа отличается от случая эллиптических и параболических задач. Теоретико-операторный подход применялся к нестационарным задачам в [BSu5]. Остановимся снова на результатах для более простого оператора (0.4). В операторных терминах, речь идет о приближении операторов $e^{-i\tau\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$, $\cos(\tau\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$ и $\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$ (где $\tau \in \mathbb{R}$) при малом ε . Оказалось, что невозможно аппроксимировать эти операторы по $(L_2 \rightarrow L_2)$ -норме, а потому тип операторной нормы пришлось изменить. В [BSu5] были установлены оценки

$$\|e^{-i\tau\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\hat{\mathcal{A}}^0}\|_{H^3(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(1 + |\tau|)\varepsilon, \quad (0.7)$$

$$\|\cos(\tau\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau(\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(1 + |\tau|)\varepsilon. \quad (0.8)$$

Для оператора $\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$ аналогичный результат был получен в работах Мешковой [M4, M5]:

$$\|\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\hat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \sin(\tau(\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(1 + |\tau|)\varepsilon, \quad (0.9)$$

вместе с аппроксимацией по “энергетической” норме:

$$\|\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\hat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \sin(\tau(\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) - \varepsilon \mathcal{K}_{\sin}^{(1)}(\tau, \varepsilon)\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C(1 + |\tau|)\varepsilon. \quad (0.10)$$

Здесь $\mathcal{K}_{\sin}^{(1)}(\tau, \varepsilon)$ — подходящий корректор. В рукописи [M2] была найдена аппроксимация оператора $\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$ по $(H^3 \rightarrow L_2)$ -норме при учете корректора с погрешностью $O(\varepsilon^2)$. Результаты с корректорами в [M2, M4, M5] удалось получить за счет присутствия “сглаживающего” множителя $\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}$ в приближаемом операторе. Для операторов $e^{-i\tau\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$ и $\cos(\tau\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$ получить аналоги таких результатов не удастся, о чем пойдет речь ниже.

Поясним метод на примере вывода оценки (0.8). Обозначим $\mathcal{H}_0 := -\Delta$. Ясно, что оценка (0.8) эквивалентна неравенству

$$\|(\cos(\tau\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau(\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}))(\mathcal{H}_0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(1 + |\tau|)\varepsilon. \quad (0.11)$$

За счет масштабного преобразования неравенство (0.11) эквивалентно оценке

$$\|(\cos(\varepsilon^{-1}\tau\hat{\mathcal{A}}^{1/2}) - \cos(\varepsilon^{-1}\tau(\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}))\varepsilon^2(\mathcal{H}_0 + \varepsilon^2 I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(1 + |\tau|)\varepsilon. \quad (0.12)$$

Далее, с помощью унитарного преобразования Гельфанда оператор $\hat{\mathcal{A}}$ раскладывается в прямой интеграл по операторам $\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$, действующим в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ (где Ω — ячейка решетки Γ). Оператор $\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ задается выражением $b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D} + \mathbf{k})$ с периодическими граничными условиями; спектр оператора $\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ дискретен. Семейство операторов $\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ изучается методами аналитической теории возмущений (относительно одномерного параметра $t = |\mathbf{k}|$). Для операторов $\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ удастся получить аналог неравенства (0.12) с постоянной, не зависящей от \mathbf{k} , что равносильно самой оценке (0.12).

Дальнейшему исследованию операторной экспоненты посвящены работы [Su6] и [D2]. В [Su6] было показано, что оценка (0.7) точна относительно типа операторной нормы: указаны условия на оператор, при которых оценка $\|e^{-i\tau\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\hat{\mathcal{A}}^0}\|_{H^s \rightarrow L_2} \leq C(\tau)\varepsilon$ заведомо неверна, если $s < 3$. В [D2] установлено, что оценка (0.7) точна и относительно зависимости от τ (при большом $|\tau|$): множитель $(1 + |\tau|)$ в правой части оценки нельзя заменить на $(1 + |\tau|)^\alpha$ с $\alpha < 1$. С другой стороны, в [Su6] были выделены дополнительные условия на оператор, при которых результат допускает усиление по типу операторной нормы: H^3 можно заменить на H^2 . А в [D2] было выяснено, что при тех же условиях возможно усиление и в другом смысле: множитель $(1 + |\tau|)$

можно заменить на $(1+|\tau|)^{1/2}$. В итоге при дополнительных условиях (которые автоматически выполнены для оператора акустики) была доказана оценка

$$\|e^{-i\tau\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\hat{\mathcal{A}}^0}\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon.$$

Гиперболические задачи изучались в статьях [DSu1, DSu2]. Было показано, что оценки (0.8)–(0.10) точны как относительно типа операторной нормы, так и относительно зависимости от τ , а при дополнительных условиях эти результаты допускают усиление:

$$\|\cos(\tau\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau(\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon, \quad (0.13)$$

$$\|\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\hat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \sin(\tau(\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon, \quad (0.14)$$

$$\|\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\hat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \sin(\tau(\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) - \varepsilon \mathcal{K}_{\sin}^{(1)}(\tau, \varepsilon)\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon. \quad (0.15)$$

Нестационарные задачи изучались и для более общего класса операторов $\hat{\mathcal{B}}_\varepsilon$ (с младшими членами): в [D1] исследована экспонента $e^{-i\tau\hat{\mathcal{B}}_\varepsilon}$, а в [M6] — гиперболические задачи. При этом в [M6] предложен другой подход, связанный с модификацией теоремы Троттера – Като.

0.4. Результаты с корректорами для операторной экспоненты. В недавних работах [Su7, Su8] был исследован вопрос о возможности за счет учета корректоров найти аппроксимации операторной экспоненты $e^{-i\tau\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$ по $(H^s \rightarrow L_2)$ -норме (с подходящим s) с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ и по $(H^s \rightarrow H^1)$ -норме с погрешностью $O(\varepsilon)$. Построить такие приближения для самой экспоненты $e^{-i\tau\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$ не удалось. Вместо этого были найдены подходящие аппроксимации для “подправленной” экспоненты — композиции операторов $e^{-i\tau\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$ и $(I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon)$. Здесь $\Lambda(\mathbf{x})$ — периодическое решение задачи на ячейке (см. (6.8)), а Π_ε — вспомогательный сглаживающий оператор. Получены оценки вида

$$\begin{aligned} \|e^{-i\tau\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon}(I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon) - e^{-i\tau\hat{\mathcal{A}}^0} - \varepsilon\mathcal{K}(\tau, \varepsilon)\|_{H^6(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq C(1+|\tau|)^2\varepsilon^2, \\ \|e^{-i\tau\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon}(I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon) - e^{-i\tau\hat{\mathcal{A}}^0} - \varepsilon\mathcal{K}_1(\tau, \varepsilon)\|_{H^4(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} &\leq C(1+|\tau|)\varepsilon. \end{aligned}$$

Здесь $\mathcal{K}(\tau, \varepsilon)$ и $\mathcal{K}_1(\tau, \varepsilon)$ — подходящие корректоры; они содержат быстро осциллирующий коэффициент Λ^ε , а потому зависят от ε . Была подтверждена точность этих результатов как по типу операторной нормы, так и в отношении зависимости оценок от τ . С другой стороны, при некоторых дополнительных предположениях результаты были усилены и в том, и в другом отношении.

0.5. Основные результаты. В настоящей работе мы даем обзор известных результатов об операторных оценках при усреднении гиперболических уравнений, а также получаем новые результаты о поведении операторов $\cos(\tau\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$ и $\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$ при малом ε .

Нас интересует, возможно ли при фиксированном τ за счет учета корректоров найти аппроксимации для этих операторов по $(H^s \rightarrow L_2)$ -норме (при подходящем s) с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ и по $(H^s \rightarrow H^1)$ -норме с погрешностью $O(\varepsilon)$. Для оператора $\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$ ответ положительный, о чем было сказано выше; помогает присутствие “сглаживающего” множителя $\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}$ в приближаемом операторе.

Построить такие приближения для операторного косинуса $\cos(\tau\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$ не удастся. Вместо этого мы находим подходящие аппроксимации для “подправленного” косинуса — композиции $\cos(\tau\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$ и $(I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon)$. Наши *основные новые результаты* — оценки вида

$$\|\cos(\tau\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})(I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon) - \cos(\tau(\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) - \varepsilon\mathcal{K}_{\cos}(\tau, \varepsilon)\|_{H^4(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(1+|\tau|)^2\varepsilon^2, \quad (0.16)$$

$$\|\cos(\tau\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})(I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon) - \cos(\tau(\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) - \varepsilon\mathcal{K}_{\cos}^{(1)}(\tau, \varepsilon)\|_{H^3(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C(1+|\tau|)\varepsilon. \quad (0.17)$$

Эффективный оператор и корректоры описываются в терминах спектральных характеристик оператора $\hat{\mathcal{A}}$ на краю спектра. Приблизить сам оператор $\cos(\tau\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$ с требуемой точностью

в тех же терминах не представляется возможным; причина в “проблемном” члене $\cos(\tau\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon$, который нельзя приблизить в пороговых терминах; см. обсуждение в п. 14.6.

Мы обсуждаем также аналогичные результаты для оператора $\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$: оценку (0.10), полученную в [M4, M5], и оценку

$$\|\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\hat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) - \varepsilon\mathcal{K}_{\sin}(\tau, \varepsilon)\|_{H^3(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(1 + |\tau|)^2\varepsilon^2, \quad (0.18)$$

которую получаем независимо от [M2] (с другим видом корректора).

С одной стороны, мы подтверждаем точность оценок (0.10), (0.16)–(0.18): выделено условие на оператор, при котором эти оценки нельзя улучшить ни в отношении типа операторной нормы, ни в отношении зависимости от τ . Это условие формулируется в спектральных терминах.

Рассмотрим операторное семейство $\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ и положим $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}$, $t = |\mathbf{k}|$, $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Это семейство аналитично по параметру t . При $t = 0$ число $\lambda_0 = 0$ является n -кратным собственным значением “невозмущенного” оператора $\hat{\mathcal{A}}(0)$. Тогда при малом t существуют вещественно аналитические ветви собственных значений $\lambda_l(t, \boldsymbol{\theta})$ ($l = 1, \dots, n$) оператора $\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$. При малом t справедливы сходящиеся степенные разложения

$$\lambda_l(t, \boldsymbol{\theta}) = \gamma_l(\boldsymbol{\theta})t^2 + \mu_l(\boldsymbol{\theta})t^3 + \nu_l(\boldsymbol{\theta})t^4 + \dots, \quad l = 1, \dots, n,$$

где $\gamma_l(\boldsymbol{\theta}) > 0$ и $\mu_l(\boldsymbol{\theta}), \nu_l(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}$. Условие, при котором обсуждаемые оценки нельзя усилить, состоит в том, что $\mu_l(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ при некоторых l и $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$.

С другой стороны, при некоторых дополнительных предположениях мы усиливаем результаты и получаем оценки

$$\|\cos(\tau\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})(I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon) - \cos(\tau(\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) - \varepsilon\mathcal{K}_{\cos}(\tau, \varepsilon)\|_{H^3(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(1 + |\tau|)\varepsilon^2, \quad (0.19)$$

$$\|\cos(\tau\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})(I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon) - \cos(\tau(\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) - \varepsilon\mathcal{K}_{\cos}^{(1)}(\tau, \varepsilon)\|_{H^{5/2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon, \quad (0.20)$$

$$\|\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\hat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) - \varepsilon\mathcal{K}_{\sin}(\tau, \varepsilon)\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(1 + |\tau|)\varepsilon^2. \quad (0.21)$$

При том же условии справедливы и оценки (0.13)–(0.15). При $n = 1$ достаточное условие, которое гарантирует усиленные оценки, состоит в том, что $\mu(\boldsymbol{\theta}) = \mu_1(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. В частности, это условие выполнено для оператора $\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon = \mathbf{D}^*g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D}$, если $g(\mathbf{x})$ — симметричная матрица с вещественными элементами. При $n \geq 2$ помимо условия равенства нулю всех коэффициентов $\mu_l(\boldsymbol{\theta})$ мы накладываем еще одно условие в терминах коэффициентов $\gamma_l(\boldsymbol{\theta})$. Простейший вариант этого условия состоит в том, что различные ветви $\gamma_l(\boldsymbol{\theta})$ не пересекаются друг с другом.

Далее, мы показываем, что усиленные результаты (0.13)–(0.15), (0.19)–(0.21) тоже точны: в случае, когда все коэффициенты $\mu_l(\boldsymbol{\theta})$ равны нулю, но $\nu_j(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ (при некоторых j и $\boldsymbol{\theta}_0$), эти оценки нельзя улучшить ни относительно типа нормы, ни относительно зависимости от τ .

С помощью интерполяции мы получаем также оценки в $(H^s \rightarrow L_2)$ - либо $(H^s \rightarrow H^1)$ -норме. Например, $(H^s \rightarrow L_2)$ -норма оператора из (0.16) оценивается через $O((1 + |\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2})$ при $2 \leq s \leq 4$. А в случае усиления $(H^s \rightarrow L_2)$ -норма этого оператора есть $O((1 + |\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3})$ при $3/2 \leq s \leq 3$.

Ясно, что полученные результаты дают квалифицированные оценки погрешности при малом ε и большом τ : в общей ситуации можно рассматривать $\tau = O(\varepsilon^{-\alpha})$ при $0 < \alpha < 1$, а в случае усиления можно рассматривать $\tau = O(\varepsilon^{-\alpha})$ при $0 < \alpha < 2$.

Для более общего оператора (0.3) аналоги результатов, описанных выше, получены для операторов $\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$ и $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$, окаймленных подходящими быстро осциллирующими множителями.

Результаты, сформулированные в операторных терминах, применяются затем к усреднению решений задачи Коши для гиперболических уравнений (с оператором $\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ либо \mathcal{A}_ε) с

начальными данными из специального класса. В частности, рассмотрены уравнение акустики и система теории упругости.

0.6. Метод. Результаты получены с помощью дальнейшего развития теоретико-операторного подхода. Мы следуем плану, намеченному выше в п. 0.3. В основе рассмотрений лежит абстрактная теоретико-операторная схема. Изучается семейство операторов $A(t) = X(t)^*X(t)$, $t \in \mathbb{R}$, в некотором гильбертовом пространстве \mathfrak{H} . Здесь $X(t) = X_0 + tX_1$. (Семейство $A(t)$ моделирует операторное семейство $\mathcal{A}(\mathbf{k}) = \mathcal{A}(t\boldsymbol{\theta})$, но параметр $\boldsymbol{\theta}$ в абстрактной постановке отсутствует.) Предполагается, что точка $\lambda_0 = 0$ является изолированным собственным значением оператора $A(0)$ кратности n . Тогда при $|t| \leq t_0$ возмущенный оператор $A(t)$ имеет на интервале $[0, \delta]$ ровно n собственных значений (мы контролируем δ и t_0 явно). Эти собственные значения и отвечающие им собственные элементы являются вещественно аналитическими функциями от t . Коэффициенты соответствующих степенных разложений называют *пороговыми характеристиками* оператора $A(t)$. Мы выделяем оператор S конечного ранга (так называемый *спектральный росток* семейства $A(t)$), действующий в подпространстве $\mathfrak{N} = \text{Ker } A(0)$. Спектральный росток несет информацию о пороговых характеристиках старшего порядка.

В терминах спектрального ростка удается найти подходящие аппроксимации в старшем порядке для операторов $\cos(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2})$ и $A(t)^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2})$. Нахождение более точных аппроксимаций с корректорами требует учета пороговых характеристик следующих порядков. Применение этих абстрактных результатов и приводит к требуемым оценкам для ДО.

Абстрактный материал, на котором основана настоящая работа, подготовлен в статье [DSu4].

0.7. План статьи. Статья состоит из трех глав. В главе 1 (§1–4) кратко излагается необходимый абстрактный теоретико-операторный материал.

В главе 2 (§5–13) изучаются периодические ДО вида (0.1), (0.2). В §5 описан класс операторов и разложение в прямой интеграл; соответствующее операторное семейство $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ включено в рамки абстрактной схемы. В §6 описаны эффективные характеристики оператора $\hat{\mathcal{A}}$. В §7 с помощью абстрактных теорем получены аппроксимации оператор-функций от $\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$, а в §8 подтверждена точность этих результатов. В §9 описаны эффективные характеристики оператора (0.1). Аппроксимации оператор-функций от $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ найдены в §10, а точность этих результатов обсуждается в §11. В §12 и §13 с помощью разложения в прямой интеграл выводятся аппроксимации оператор-функций от операторов $\hat{\mathcal{A}}$ и \mathcal{A} соответственно.

Глава 3 (§14–18) посвящена задачам гомогенизации. В §14 и §15 с помощью масштабного преобразования мы выводим основные результаты работы (аппроксимации оператор-функций от $\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ и \mathcal{A}_ε) из результатов главы 2. В §16 полученные результаты применяются к изучению решений задачи Коши для гиперболических уравнений. §17 и §18 посвящены применению общих результатов к конкретным уравнениям математической физики.

0.8. Обозначения. Пусть $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Символы $(\cdot, \cdot)_{\mathfrak{H}}$ и $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$ означают соответственно скалярное произведение и норму в \mathfrak{H} ; символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_*}$ означает норму ограниченного оператора из \mathfrak{H} в \mathfrak{H}_* . Иногда мы опускаем индексы. Через $I = I_{\mathfrak{H}}$ обозначается тождественный оператор в \mathfrak{H} . Если $A : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_*$ — линейный оператор, то через $\text{Dom } A$ и $\text{Ker } A$ обозначаются его область определения и ядро. Если \mathfrak{N} — подпространство в \mathfrak{H} , то \mathfrak{N}^\perp — его ортогональное дополнение. Если P — ортопроектор пространства \mathfrak{H} на \mathfrak{N} , то P^\perp — ортопроектор на \mathfrak{N}^\perp .

Символы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и $|\cdot|$ означают скалярное произведение и норму в \mathbb{C}^n ; $\mathbf{1}_n$ — единичная $(n \times n)$ -матрица. Если a — $(m \times n)$ -матрица, то символ $|a|$ означает норму матрицы a как линейного оператора из \mathbb{C}^n в \mathbb{C}^m .

Далее, используем обозначения $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $iD_j = \partial_j = \partial/\partial x_j$, $j = 1, \dots, d$; $\mathbf{D} = -i\nabla = (D_1, \dots, D_d)$. Классы L_p (где $1 \leq p \leq \infty$) и классы Соболева (порядка $s \geq 0$) \mathbb{C}^n -значных функций в области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ обозначаем через $L_p(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ и $H^s(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ соответственно. При $n = 1$ пишем просто $L_p(\mathcal{O})$, $H^s(\mathcal{O})$, но иногда применяем такие упрощенные обозначения и для классов вектор-функций или матриц-функций.

Через $C, \mathcal{C}, \mathbb{C}, \mathfrak{C}, c$ (возможно, с индексами и значками) обозначаются различные постоянные в оценках.

Краткое сообщение о результатах настоящей работы опубликовано в [DSu3].

ГЛАВА 1. АВСТРАКТНАЯ ТЕОРЕТИКО-ОПЕРАТОРНАЯ СХЕМА

В этой главе мы кратко излагаем необходимый абстрактный материал, заимствованный из [BSu1, BSu2, VSu1, Su6, D2, DSu4].

§ 1. КВАДРАТИЧНЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ СЕМЕЙСТВА

1.1. Операторы $X(t)$ и $A(t)$. Пусть \mathfrak{H} и \mathfrak{H}_* — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Предположим, что оператор $X_0 : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_*$ плотно определен и замкнут, а $X_1 : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_*$ ограничен. Введем замкнутый на $\text{Dom } X_0$ оператор $X(t) = X_0 + tX_1$, $t \in \mathbb{R}$. Рассмотрим семейство самосопряженных операторов $A(t) = X(t)^*X(t)$ в \mathfrak{H} . Оператор $A(t)$ порождается замкнутой квадратичной формой $\|X(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}^2$, $u \in \text{Dom } X_0$. Обозначим $\mathfrak{N} := \text{Ker } A(0) = \text{Ker } X_0$ и $\mathfrak{N}_* := \text{Ker } X_0^*$.

Предполагается, что точка $\lambda_0 = 0$ — изолированная точка спектра оператора $A(0)$, причем $0 < n := \dim \mathfrak{N} < \infty$, $n \leq n_ := \dim \mathfrak{N}_* \leq \infty$.*

Пусть d^0 — расстояние от точки $\lambda_0 = 0$ до остального спектра оператора $A(0)$. Через P и P_* обозначаются ортопроекторы пространства \mathfrak{H} на \mathfrak{N} и пространства \mathfrak{H}_* на \mathfrak{N}_* соответственно. Обозначим через $F(t; [a, b])$ спектральный проектор оператора $A(t)$ для промежутка $[a, b]$. Фиксируем число $\delta > 0$ такое, что $8\delta < d^0$. Выберем число $t_0 > 0$ так, чтобы

$$t_0 \leq \delta^{1/2} \|X_1\|^{-1}. \quad (1.1)$$

Как показано в [BSu1, гл. 1, предложение 1.2], $F(t; [0, \delta]) = F(t; [0, 3\delta])$ и $\text{rank } F(t; [0, \delta]) = n$ при $|t| \leq t_0$. Будем писать $F(t)$ вместо $F(t; [0, \delta])$.

1.2. Вспомогательные операторы. Следуя [BSu1, гл. 1, §1] и [BSu2, §1], введем вспомогательные операторы.

Обозначим $\mathcal{D} := \text{Dom } X_0 \cap \mathfrak{N}^\perp$. Пусть $\omega \in \mathfrak{N}$. Рассмотрим уравнение $X_0^*(X_0\phi + X_1\omega) = 0$ на $\phi \in \mathcal{D}$, которое понимается в слабом смысле:

$$(X_0\phi, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} = -(X_1\omega, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}.$$

Существует единственное решение $\phi = \phi(\omega)$. Введем оператор $Z : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$ формулой $Zu = \phi(Pu)$, $u \in \mathfrak{H}$. Отметим, что $PZ = 0$, а потому $Z^*P = 0$. Справедливы оценки

$$\|X_0Z\| \leq \|X_1\|, \quad \|Z\| \leq (8\delta)^{-1/2} \|X_1\|. \quad (1.2)$$

Определим оператор $R : \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}_*$ формулой $R := X_0Z + X_1$. Другое представление для R имеет вид $R = P_*X_1|_{\mathfrak{N}}$.

Следуя [BSu1, гл. 1, п. 1.3], назовем оператор $S := R^*R : \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}$ *спектральным ростком* семейства $A(t)$ при $t = 0$. Для ростка справедливо также представление $S = PX_1^*P_*X_1|_{\mathfrak{N}}$. Спектральный росток называется *невыврожденным*, если $\text{Ker } S = \{0\}$. Отметим оценки $\|R\| \leq \|X_1\|$ и $\|S\| \leq \|X_1\|^2$.

Нам потребуются еще операторы Z_2 и R_2 (см. [VSu1, §1]). Пусть $\omega \in \mathfrak{N}$ и пусть $\psi = \psi(\omega) \in \mathcal{D}$ — (слабое) решение уравнения $X_0^*(X_0\psi + X_1Z\omega) = -P^\perp X_1^*R\omega$. Очевидно, условие разрешимости выполнено. Определим оператор $Z_2 : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$ соотношением $Z_2u = \psi(Pu)$, $u \in \mathfrak{H}$. Наконец, введем оператор $R_2 : \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{H}_*$ формулой $R_2 := X_0Z_2 + X_1Z$.

1.3. Аналитические ветви собственных значений и собственных векторов оператора $A(t)$. Согласно общей аналитической теории возмущений (см. [K]), при $|t| \leq t_0$ существуют вещественно аналитические функции $\lambda_l(t)$ (ветви собственных значений) и вещественно аналитические \mathfrak{H} -значные функции $\varphi_l(t)$ (ветви собственных векторов), такие что

$$A(t)\varphi_l(t) = \lambda_l(t)\varphi_l(t), \quad |t| \leq t_0, \quad l = 1, \dots, n, \quad (1.3)$$

причем набор $\varphi_l(t)$, $l = 1, \dots, n$, образует ортонормированный базис в $F(t)\mathfrak{H}$. Для достаточно малого t_* (где $0 < t_* \leq t_0$) при $|t| \leq t_*$ имеют место сходящиеся степенные разложения

$$\lambda_l(t) = \gamma_l t^2 + \mu_l t^3 + \nu_l t^4 + \dots, \quad \gamma_l \geq 0, \quad \mu_l, \nu_l \in \mathbb{R}, \quad l = 1, \dots, n, \quad (1.4)$$

$$\varphi_l(t) = \omega_l + t\psi_l^{(1)} + t^2\psi_l^{(2)} + \dots, \quad l = 1, \dots, n. \quad (1.5)$$

При этом элементы $\omega_l = \varphi_l(0)$, $l = 1, \dots, n$, образуют ортонормированный базис в \mathfrak{N} . Подставляя разложения (1.4), (1.5) в равенства (1.3) и сравнивая коэффициенты при t и при t^2 , приходим к соотношениям

$$\tilde{\omega}_l := \psi_l^{(1)} - Z\omega_l \in \mathfrak{N}, \quad l = 1, \dots, n, \quad (1.6)$$

$$S\omega_l = \gamma_l \omega_l, \quad l = 1, \dots, n. \quad (1.7)$$

(Ср. [BSu1, гл. 1, §1], [BSu2, §1].) Таким образом, числа γ_l и элементы ω_l являются собственными для ростка S . Справедливы представления

$$P = \sum_{l=1}^n (\cdot, \omega_l) \omega_l, \quad SP = \sum_{l=1}^n \gamma_l (\cdot, \omega_l) \omega_l.$$

1.4. Пороговые аппроксимации. Следующие утверждения были получены в [BSu1, гл. 1, теоремы 4.1, 4.3] и [BSu2, §2, §4], [BSu4, (2.23)]. Договоримся ниже через β_j обозначать абсолютные константы, причем считаем $\beta_j \geq 1$.

Теорема 1.1 ([BSu1]). В условиях п. 1.1 при $|t| \leq t_0$ справедливы оценки

$$\|F(t) - P\| \leq C_1 |t|, \quad C_1 = \beta_1 \delta^{-1/2} \|X_1\|, \quad (1.8)$$

$$\|A(t)F(t) - t^2 SP\| \leq C_2 |t|^3, \quad C_2 = \beta_2 \delta^{-1/2} \|X_1\|^3.$$

Теорема 1.2 ([BSu2], [BSu4]). В условиях п. 1.1 при $|t| \leq t_0$ справедливы оценки

$$\|F(t) - P - tF_1\| \leq C_3 t^2, \quad C_3 = \beta_3 \delta^{-1} \|X_1\|^2, \quad (1.9)$$

$$\|A(t)^{1/2}(F(t) - P - tF_1)\| \leq C'_3 t^2, \quad C'_3 = \beta'_3 \delta^{-1/2} \|X_1\|^2, \quad (1.10)$$

$$\|A(t)F(t) - t^2 SP - t^3 K\| \leq C_4 t^4, \quad C_4 = \beta_4 \delta^{-1} \|X_1\|^4.$$

Здесь оператор K допускает представление $K = K_0 + N = K_0 + N_0 + N_*$, где K_0 переводит \mathfrak{N} в \mathfrak{N}^\perp и \mathfrak{N}^\perp в \mathfrak{N} , а $N = N_0 + N_*$ переводит \mathfrak{N} в себя и \mathfrak{N}^\perp в $\{0\}$. В терминах коэффициентов степенных разложений операторы F_1 , K_0 , N_0 , N_* имеют вид

$$\begin{aligned} F_1 &= \sum_{l=1}^n ((\cdot, Z\omega_l)\omega_l + (\cdot, \omega_l)Z\omega_l), \quad K_0 = \sum_{l=1}^n \gamma_l ((\cdot, Z\omega_l)\omega_l + (\cdot, \omega_l)Z\omega_l), \\ N_0 &= \sum_{l=1}^n \mu_l (\cdot, \omega_l)\omega_l, \quad N_* = \sum_{l=1}^n \gamma_l ((\cdot, \tilde{\omega}_l)\omega_l + (\cdot, \omega_l)\tilde{\omega}_l). \end{aligned} \quad (1.11)$$

В инвариантных терминах справедливы представления $K_0 = ZSP + SPZ^*$,

$$F_1 = ZP + PZ^*, \quad N = Z^* X_1^* R P + (R P)^* X_1 Z. \quad (1.12)$$

Операторы F_1 , N и K удовлетворяют следующим оценкам:

$$\|F_1\| \leq (2\delta)^{-1/2} \|X_1\|, \quad \|N\| \leq (2\delta)^{-1/2} \|X_1\|^3, \quad \|K\| \leq 2(2\delta)^{-1/2} \|X_1\|^3. \quad (1.13)$$

Замечание 1.3. В базисе $\{\omega_l\}_{l=1}^n$ операторы N , N_0 , N_* (суженные на \mathfrak{N}) задаются матрицами размера $n \times n$. При этом оператор N_0 диагонален:

$$(N_0\omega_j, \omega_k) = \mu_j \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, n.$$

Матричные элементы оператора N_* имеют вид

$$(N_*\omega_j, \omega_k) = \gamma_k(\omega_j, \tilde{\omega}_k) + \gamma_j(\tilde{\omega}_j, \omega_k) = (\gamma_j - \gamma_k)(\tilde{\omega}_j, \omega_k), \quad j, k = 1, \dots, n.$$

Здесь мы учли соотношение (см. [BSu2, (1.18)])

$$(\tilde{\omega}_j, \omega_k) + (\omega_j, \tilde{\omega}_k) = 0, \quad j, k = 1, \dots, n. \quad (1.14)$$

Видно, что диагональные элементы для N_* обращаются в ноль. Более того, $(N_*\omega_j, \omega_k) = 0$, если $\gamma_j = \gamma_k$.

1.5. Условие невырожденности. Ниже мы предполагаем выполненным следующее дополнительное условие. Ср. [BSu1, гл. 1, п. 5.1].

Условие 1.4. Существует константа $c_* > 0$ такая, что

$$A(t) \geq c_* t^2 I, \quad |t| \leq t_0.$$

Из условия 1.4 следует, что $\lambda_l(t) \geq c_* t^2$, $l = 1, \dots, n$, при $|t| \leq t_0$. В силу (1.4) это влечет $\gamma_l \geq c_* > 0$, $l = 1, \dots, n$. Поэтому спектральный росток невырожден:

$$S \geq c_* I_{\mathfrak{N}}. \quad (1.15)$$

1.6. Разбиение собственных значений оператора $A(t)$ на кластеры. Материал этого пункта заимствован из [Su6, § 2]. Он содержателен при $n \geq 2$.

Предположим, что выполнено условие 1.4. Изменим обозначения, отслеживая кратности собственных значений оператора S . Обозначим количество различных собственных значений ростка через p . Занумеруем эти собственные значения в порядке возрастания и обозначим их через γ_j° , $j = 1, \dots, p$. Их кратности обозначим через k_1, \dots, k_p (имеем $k_1 + \dots + k_p = n$). Введем обозначения для собственных подпространств: $\mathfrak{N}_j := \text{Ker}(S - \gamma_j^\circ I_{\mathfrak{N}})$, $j = 1, \dots, p$. Тогда $\mathfrak{N} = \sum_{j=1}^p \oplus \mathfrak{N}_j$. Пусть P_j — ортопроектор пространства \mathfrak{H} на \mathfrak{N}_j . Тогда $P = \sum_{j=1}^p P_j$ и $P_j P_l = 0$ при $j \neq l$. Изменим и обозначения собственных векторов ростка (“зародышей” в (1.5)), разделяя их на p частей, так что $\omega_1^{(j)}, \dots, \omega_{k_j}^{(j)}$ отвечают собственному значению γ_j° и образуют ортонормированный базис в \mathfrak{N}_j .

Операторы N_0 и N_* допускают инвариантные представления:

$$N_0 = \sum_{j=1}^p P_j N P_j, \quad N_* = \sum_{1 \leq l, j \leq p: j \neq l} P_l N P_j. \quad (1.16)$$

Для каждой пары индексов (j, l) , $1 \leq j, l \leq p$, $j \neq l$, введем обозначение

$$c_{jl}^\circ := \min\{c_*, n^{-1}|\gamma_l^\circ - \gamma_j^\circ|\}. \quad (1.17)$$

Ясно, что найдется номер $i_0 = i_0(j, l)$, где $j \leq i_0 \leq l - 1$ при $j < l$ и $l \leq i_0 \leq j - 1$ при $l < j$, такой, что $\gamma_{i_0+1}^\circ - \gamma_{i_0}^\circ \geq c_{jl}^\circ$. Это означает, что между γ_j° и γ_l° в спектре оператора S имеется лакуна длины не меньше c_{jl}° . Возможно, выбор i_0 неоднозначен, в этом случае договоримся брать наименьшее возможное i_0 . Далее, выберем число $t_{jl}^{00} \leq t_0$ так, чтобы

$$t_{jl}^{00} \leq (4C_2)^{-1} c_{jl}^\circ = (4\beta_2)^{-1} \delta^{1/2} \|X_1\|^{-3} c_{jl}^\circ.$$

Положим $\Delta_{jl}^{(1)} := [\gamma_1^\circ - c_{jl}^\circ/4, \gamma_{i_0}^\circ + c_{jl}^\circ/4]$ и $\Delta_{jl}^{(2)} := [\gamma_{i_0+1}^\circ - c_{jl}^\circ/4, \gamma_p^\circ + c_{jl}^\circ/4]$. В [Su6, §2] показано, что при $|t| \leq t_{jl}^{00}$ оператор $A(t)$ имеет ровно $k_1 + \dots + k_{i_0}$ собственных значений (с учетом кратностей) на промежутке $t^2 \Delta_{jl}^{(1)}$ и ровно $k_{i_0+1} + \dots + k_p$ собственных значений на промежутке $t^2 \Delta_{jl}^{(2)}$.

1.7. Коэффициенты ν_l , $l = 1, \dots, n$. Для определенности будем считать нумерацию в (1.4), (1.5) такой, что $\gamma_1 \leq \dots \leq \gamma_n$. Коэффициенты ν_l и векторы ω_l , $l = 1, \dots, n$, в разложениях (1.4), (1.5) являются собственными числами и собственными элементами некоторой задачи; см. [D2, п. 1.8]. Нам понадобится описать эту задачу в случае, когда $\mu_l = 0$, $l = 1, \dots, n$, т. е. когда $N_0 = 0$. См. также [DSu2, предложение 1.7].

Предложение 1.5 ([D2]). Пусть $N_0 = 0$. Положим $N_1^0 := Z_2^* X_1^* R P + (R P)^* X_1 Z_2 + R_2^* R_2 P$. В обозначениях пункта 1.6 введем операторы $\mathcal{N}^{(q)}$, $q = 1, \dots, p$: оператор $\mathcal{N}^{(q)}$ действует в \mathfrak{N}_q и задается выражением

$$\mathcal{N}^{(q)} := P_q \left(N_1^0 - \frac{1}{2} Z^* Z S P - \frac{1}{2} S P Z^* Z \right) \Big|_{\mathfrak{N}_q} + \sum_{1 \leq j \leq p: j \neq q} (\gamma_q^\circ - \gamma_j^\circ)^{-1} P_q N P_j N \Big|_{\mathfrak{N}_q}.$$

Обозначим $i(q) = k_1 + \dots + k_{q-1} + 1$. Тогда

$$\mathcal{N}^{(q)} \omega_l = \nu_l \omega_l, \quad l = i(q), \dots, i(q) + k_q - 1.$$

§ 2. АППРОКСИМАЦИИ ОПЕРАТОРОВ $\cos(\varepsilon^{-1} \tau A(t)^{1/2}) P$ И $A(t)^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1} \tau A(t)^{1/2}) P$

2.1. Аппроксимации по операторной норме в \mathfrak{H} . Введем параметр $\varepsilon > 0$ и опишем поведение операторов $\cos(\varepsilon^{-1} \tau A(t)^{1/2}) P$ и $A(t)^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1} \tau A(t)^{1/2}) P$ при $\tau \in \mathbb{R}$ и малом ε . Удобно домножить эти операторы на “сглаживающий множитель” $\varepsilon^q (t^2 + \varepsilon^2)^{-q/2} P$, где $q > 0$. (Термин объясняется тем, что в приложениях к ДО такое домножение переходит в сглаживание.)

Положим

$$\mathfrak{D}_{\cos}^{(0)}(t, \tau) := \cos(\tau A(t)^{1/2}) P - \cos(\tau(t^2 S)^{1/2}) P, \quad (2.1)$$

$$\mathfrak{D}_{\sin}^{(0)}(t, \tau) := A(t)^{-1/2} \sin(\tau A(t)^{1/2}) P - (t^2 S)^{-1/2} \sin(\tau(t^2 S)^{1/2}) P. \quad (2.2)$$

В [BSu5, теорема 2.7] и [M5, теорема 2.3] был установлен следующий результат.

Теорема 2.1 ([BSu5], [M5]). При $\varepsilon > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $|t| \leq t_0$ для операторов (2.1) и (2.2) справедливы оценки

$$\|\mathfrak{D}_{\cos}^{(0)}(t, \varepsilon^{-1} \tau)\| \varepsilon^2 (t^2 + \varepsilon^2)^{-1} \leq C_5 (1 + |\tau|) \varepsilon,$$

$$\|\mathfrak{D}_{\sin}^{(0)}(t, \varepsilon^{-1} \tau)\| \varepsilon (t^2 + \varepsilon^2)^{-1/2} \leq C_6 (1 + |\tau|).$$

При дополнительных условиях результат допускает усиление; см. [DSu2, теоремы 3.2 и 3.3]. Напомним, что оператор N определен в (1.12), а N_0 определен в (1.16).

Теорема 2.2 ([DSu2]). Пусть $N = 0$. Тогда при $\varepsilon > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $|t| \leq t_0$ для операторов (2.1) и (2.2) справедливы оценки

$$\|\mathfrak{D}_{\cos}^{(0)}(t, \varepsilon^{-1} \tau)\| \varepsilon^{3/2} (t^2 + \varepsilon^2)^{-3/4} \leq C_7 (1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon,$$

$$\|\mathfrak{D}_{\sin}^{(0)}(t, \varepsilon^{-1} \tau)\| \varepsilon^{1/2} (t^2 + \varepsilon^2)^{-1/4} \leq C_8 (1 + |\tau|)^{1/2}.$$

Теорема 2.3 ([DSu2]). Пусть $n \geq 2$ и $N_0 = 0$. Положим

$$c^\circ := \min_{(j,l) \in \mathcal{Z}} c_{jl}^\circ, \quad \mathcal{Z} := \{(j, l): 1 \leq j, l \leq p, j \neq l, P_j N P_l \neq 0\}, \quad (2.3)$$

где числа c_{jl}° определены в (1.17). Пусть число $t^{00} \leq t_0$ подчинено условию

$$t^{00} \leq (4\beta_2)^{-1} \delta^{1/2} \|X_1\|^{-3} c^\circ. \quad (2.4)$$

Тогда при $\varepsilon > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $|t| \leq t^{00}$ для операторов (2.1) и (2.2) справедливы оценки

$$\|\mathfrak{D}_{\cos}^{(0)}(t, \varepsilon^{-1} \tau)\| \varepsilon^{3/2} (t^2 + \varepsilon^2)^{-3/4} \leq C_9 (1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon,$$

$$\|\mathfrak{D}_{\sin}^{(0)}(t, \varepsilon^{-1} \tau)\| \varepsilon^{1/2} (t^2 + \varepsilon^2)^{-1/4} \leq C_{10} (1 + |\tau|)^{1/2}.$$

2.2. Аппроксимации с корректором по операторной норме в \mathfrak{H} . Введем операторы

$$G_0(t) := \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \zeta^{1/2} (t^2 SP + \zeta I)^{-1} t^3 N (t^2 SP + \zeta I)^{-1} P d\zeta, \quad t \neq 0, \quad (2.5)$$

$$\tilde{G}_0(t) := -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \zeta^{-1/2} (t^2 SP + \zeta I)^{-1} t^3 N (t^2 SP + \zeta I)^{-1} P d\zeta, \quad t \neq 0, \quad (2.6)$$

в точке $t = 0$ доопределим: $G_0(0) = 0$ и $\tilde{G}_0(0) = 0$. Положим

$$\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(t, \tau) := \cos(\tau A(t)^{1/2})(I + tZ)P - (I + tZ) \cos(\tau(t^2 S)^{1/2} P)P, \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{\cos}^{(1)}(t, \tau) &:= \mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(t, \tau) \\ &+ \int_0^\tau \cos((\tau - \tilde{\tau})(t^2 S)^{1/2} P) G_0(t) \sin(\tilde{\tau}(t^2 S)^{1/2} P) P d\tilde{\tau} \\ &+ \int_0^\tau \sin((\tau - \tilde{\tau})(t^2 S)^{1/2} P) G_0(t) \cos(\tilde{\tau}(t^2 S)^{1/2} P) P d\tilde{\tau}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(t, \tau) := A(t)^{-1/2} \sin(\tau A(t)^{1/2})P - (I + tZ)(t^2 S)^{-1/2} \sin(\tau(t^2 S)^{1/2} P)P, \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{\sin}^{(1)}(t, \tau) &:= \mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(t, \tau) - \tilde{G}_0(t) \sin(\tau(t^2 S)^{1/2} P)P \\ &- \int_0^\tau (t^2 S)^{-1/2} \cos((\tau - \tilde{\tau})(t^2 S)^{1/2} P) G_0(t) \cos(\tilde{\tau}(t^2 S)^{1/2} P) P d\tilde{\tau} \\ &+ \int_0^\tau (t^2 S)^{-1/2} \sin((\tau - \tilde{\tau})(t^2 S)^{1/2} P) G_0(t) \sin(\tilde{\tau}(t^2 S)^{1/2} P) P d\tilde{\tau}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Замечание 2.4. В дальнейшем нам понадобятся оценки операторов (2.5), (2.6), вытекающие из (1.13) и (1.15):

$$\|G_0(t)\| \leq \frac{1}{2} (2\delta)^{-1/2} c_*^{-1/2} \|X_1\|^3 t^2, \quad (2.11)$$

$$\|\tilde{G}_0(t)\| \leq \frac{1}{2} (2\delta)^{-1/2} c_*^{-3/2} \|X_1\|^3. \quad (2.12)$$

В [DSu4, теорема 3.4] установлен следующий результат.

Теорема 2.5 ([DSu4]). *При $\varepsilon > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $|t| \leq t_0$ для операторов (2.8) и (2.10) справедливы оценки*

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{D}_{\cos}^{(1)}(t, \varepsilon^{-1}\tau)\| \varepsilon^4 (t^2 + \varepsilon^2)^{-2} &\leq C_{11} (1 + |\tau|)^2 \varepsilon^2, \\ \|\mathfrak{D}_{\sin}^{(1)}(t, \varepsilon^{-1}\tau)\| \varepsilon^3 (t^2 + \varepsilon^2)^{-3/2} &\leq C_{12} (1 + |\tau|)^2 \varepsilon. \end{aligned}$$

Замечание 2.6. Другой вариант аппроксимации с корректором для оператора $A(t)^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1} \tau A(t)^{1/2})$ получен в [M2], причем для более широкого класса операторов с включением “младших” членов.

При дополнительных предположениях результат допускает усиление; см. [DSu4, теоремы 3.6, 3.7].

Теорема 2.7 ([DSu4]). *Пусть $N = 0$. Тогда при $\varepsilon > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $|t| \leq t_0$ для операторов (2.7) и (2.9) справедливы оценки*

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(t, \varepsilon^{-1}\tau)\| \varepsilon^3 (t^2 + \varepsilon^2)^{-3/2} &\leq C_{13} (1 + |\tau|) \varepsilon^2, \\ \|\mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(t, \varepsilon^{-1}\tau)\| \varepsilon^2 (t^2 + \varepsilon^2)^{-1} &\leq C_{14} (1 + |\tau|) \varepsilon. \end{aligned}$$

Теорема 2.8 ([DSu4]). Пусть $n \geq 2$ и $N_0 = 0$. Тогда при $\varepsilon > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $|t| \leq t^0$ для операторов (2.8) и (2.10) справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{D}_{\cos}^{(1)}(t, \varepsilon^{-1}\tau)\| \varepsilon^3(t^2 + \varepsilon^2)^{-3/2} &\leq C_{15}(1 + |\tau|)\varepsilon^2, \\ \|\mathfrak{D}_{\sin}^{(1)}(t, \varepsilon^{-1}\tau)\| \varepsilon^2(t^2 + \varepsilon^2)^{-1} &\leq C_{16}(1 + |\tau|)\varepsilon. \end{aligned}$$

2.3. Аппроксимация по “энергетической” норме. В [DSu4, теорема 3.8] и [M5, теорема 2.4] установлен следующий результат.

Теорема 2.9 ([DSu4], [M5]). При $\varepsilon > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $|t| \leq t_0$ для операторов (2.7) и (2.9) справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|A(t)^{1/2}\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(t, \varepsilon^{-1}\tau)\| \varepsilon^3(t^2 + \varepsilon^2)^{-3/2} &\leq C_{17}(1 + |\tau|)\varepsilon^2, \\ \|A(t)^{1/2}\mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(t, \varepsilon^{-1}\tau)\| \varepsilon^2(t^2 + \varepsilon^2)^{-1} &\leq C_{18}(1 + |\tau|)\varepsilon. \end{aligned}$$

При дополнительных предположениях этот результат можно улучшить; см. [DSu4, теоремы 3.9, 3.10] и [DSu2, теоремы 3.5, 3.6].

Теорема 2.10 ([DSu4], [DSu2]). Пусть $N = 0$. Тогда при $\varepsilon > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $|t| \leq t_0$ для операторов (2.7) и (2.9) справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|A(t)^{1/2}\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(t, \varepsilon^{-1}\tau)\| \varepsilon^{5/2}(t^2 + \varepsilon^2)^{-5/4} &\leq C_{19}(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon^2, \\ \|A(t)^{1/2}\mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(t, \varepsilon^{-1}\tau)\| \varepsilon^{3/2}(t^2 + \varepsilon^2)^{-3/4} &\leq C_{20}(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon. \end{aligned}$$

Теорема 2.11 ([DSu4], [DSu2]). Пусть $n \geq 2$ и $N_0 = 0$. Тогда при $\varepsilon > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $|t| \leq t^0$ для операторов (2.7) и (2.9) справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|A(t)^{1/2}\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(t, \varepsilon^{-1}\tau)\| \varepsilon^{5/2}(t^2 + \varepsilon^2)^{-5/4} &\leq C_{21}(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon^2, \\ \|A(t)^{1/2}\mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(t, \varepsilon^{-1}\tau)\| \varepsilon^{3/2}(t^2 + \varepsilon^2)^{-3/4} &\leq C_{22}(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon. \end{aligned}$$

Замечание 2.12. В работах [BSu5, M5, DSu2, DSu4] найдены явные выражения для постоянных в оценках из теорем 2.1–2.3, 2.5, 2.7–2.11. Существенно следующее. Постоянные $C_5, C_6, C_7, C_8, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{17}, C_{18}, C_{19}, C_{20}$ из теорем 2.1, 2.2, 2.5, 2.7, 2.9, 2.10 оцениваются полиномами с (абсолютными) положительными коэффициентами от переменных $\delta^{-1/2}$ и $\|X_1\|$. Константы $C_9, C_{10}, C_{15}, C_{16}, C_{21}, C_{22}$ из теорем 2.3, 2.8, 2.11 оцениваются полиномами с положительными коэффициентами от тех же переменных, а также от $(c^\circ)^{-1}$ и n . Здесь постоянная c° определена согласно (1.17) и (2.3).

2.4. Подтверждение точности относительно сглаживающего множителя. Следующая теорема подтверждает, что теоремы 2.1, 2.5 и 2.9 в общем случае точны относительно сглаживающего множителя.

Теорема 2.13 ([DSu1, DSu2, DSu4]). Предположим, что $N_0 \neq 0$.

1°. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leq q_1 < 2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка

$$\|\mathfrak{D}_{\cos}^{(0)}(t, \varepsilon^{-1}\tau)\| \varepsilon^{q_1}(t^2 + \varepsilon^2)^{-q_1/2} \leq C(\tau)\varepsilon. \quad (2.13)$$

2°. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leq q_2 < 1$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка

$$\|\mathfrak{D}_{\sin}^{(0)}(t, \varepsilon^{-1}\tau)\| \varepsilon^{q_2}(t^2 + \varepsilon^2)^{-q_2/2} \leq C(\tau). \quad (2.14)$$

3°. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leq q_1 < 4$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка

$$\|\mathfrak{D}_{\cos}^{(1)}(t, \varepsilon^{-1}\tau)\| \varepsilon^{q_1}(t^2 + \varepsilon^2)^{-q_1/2} \leq C(\tau)\varepsilon^2. \quad (2.15)$$

4°. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leq q_2 < 3$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка

$$\|\mathfrak{D}_{\sin}^{(1)}(t, \varepsilon^{-1}\tau)\| \varepsilon^{q_2}(t^2 + \varepsilon^2)^{-q_2/2} \leq C(\tau)\varepsilon. \quad (2.16)$$

5°. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leq q_1 < 3$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка

$$\|A(t)^{1/2}\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(t, \varepsilon^{-1}\tau)\| \varepsilon^{q_1}(t^2 + \varepsilon^2)^{-q_1/2} \leq C(\tau)\varepsilon^2. \quad (2.17)$$

6°. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leq q_2 < 2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка

$$\|A(t)^{1/2}\mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(t, \varepsilon^{-1}\tau)\| \varepsilon^{q_2}(t^2 + \varepsilon^2)^{-q_2/2} \leq C(\tau)\varepsilon. \quad (2.18)$$

Утверждения 1°, 2° проверены в [DSu1, теорема 3.5], утверждения 3°, 4°, 5° — в [DSu4, теоремы 4.3, 4.5], утверждение 6° — в [DSu2, теорема 4.3].

Далее, оказывается, что теоремы 2.2, 2.3, 2.7, 2.8, 2.10, 2.11 (об усилении общих результатов при дополнительных предположениях) в свою очередь точны. Напомним, что оператор $\mathcal{N}^{(\ell)}$ определен в пункте 1.7.

Теорема 2.14 ([DSu2, DSu4]). Пусть $N_0 = 0$ и $\mathcal{N}^{(\ell)} \neq 0$ при некотором $\ell \in \{1, \dots, p\}$.

1°. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leq q_1 < 3/2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы (2.13) выполнялось при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$.

2°. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leq q_2 < 1/2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы (2.14) выполнялось при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$.

3°. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leq q_1 < 3$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы (2.15) выполнялось при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$.

4°. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leq q_2 < 2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы (2.16) выполнялось при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$.

5°. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leq q_1 < 5/2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы (2.17) выполнялось при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$.

6°. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leq q_2 < 3/2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы (2.18) выполнялось при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$.

Утверждения 1°, 2°, 6° установлены в [DSu2, теоремы 4.2, 4.4], утверждения 3°, 4°, 5° — в [DSu4, теоремы 4.4, 4.6].

2.5. Точность результатов относительно времени. Следующая теорема подтверждает, что теоремы 2.1, 2.5 и 2.9 в общем случае точны относительно зависимости оценок от τ (при большом $|\tau|$).

Теорема 2.15 ([DSu2, DSu4]). Предположим, что $N_0 \neq 0$.

1°. Пусть $q_1 \geq 2$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (2.13) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε .

2°. Пусть $q_2 \geq 1$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (2.14) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε .

3°. Пусть $q_1 \geq 4$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/\tau^2 = 0$ и выполнена оценка (2.15) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε .

4°. Пусть $q_2 \geq 3$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/\tau^2 = 0$ и выполнена оценка (2.16) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε .

5°. Пусть $q_1 \geq 3$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (2.17) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε .

6°. Пусть $q_2 \geq 2$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (2.18) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε .

Утверждения 1°, 2°, 6° проверены в [DSu2, теоремы 4.5, 4.6], утверждения 3°, 4°, 5° — в [DSu4, теоремы 4.11, 4.13].

Далее, теоремы 2.2, 2.3, 2.7, 2.8, 2.10, 2.11 (об усилении общих результатов при дополнительных предположениях) в свою очередь точны.

Теорема 2.16 ([DSu2, DSu4]). Пусть $N_0 = 0$ и $\mathcal{N}^{(\ell)} \neq 0$ при некотором $\ell \in \{1, \dots, p\}$.

1°. Пусть $q_1 \geq 3/2$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (2.13) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε .

2°. Пусть $q_2 \geq 1/2$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (2.14) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε .

3°. Пусть $q_1 \geq 3$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (2.15) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε .

4°. Пусть $q_2 \geq 2$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (2.16) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε .

5°. Пусть $q_1 \geq 5/2$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (2.17) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε .

6°. Пусть $q_2 \geq 3/2$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (2.18) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε .

Утверждения 1°, 2°, 6° установлены в [DSu2, теоремы 4.7, 4.8], утверждения 3°, 4°, 5° — в [DSu4, теоремы 4.12, 4.14].

§ 3. ОПЕРАТОР ВИДА $A(t) = M^* \hat{A}(t) M$

3.1. Операторное семейство вида $A(t) = M^* \hat{A}(t) M$. Пусть $\hat{\mathfrak{H}}$ — еще одно сепарабельное гильбертово пространство. Пусть $\hat{X}(t) = \hat{X}_0 + t\hat{X}_1: \hat{\mathfrak{H}} \rightarrow \hat{\mathfrak{H}}_*$ — семейство операторов того же вида, что и $X(t)$, причем для $\hat{X}(t)$ выполнены предположения п. 1.1. Пусть $M: \hat{\mathfrak{H}} \rightarrow \hat{\mathfrak{H}}$ — изоморфизм. Предположим, что $M \text{Dom } X_0 = \text{Dom } \hat{X}_0$ и $X(t) = \hat{X}(t)M$, а тогда и $X_0 = \hat{X}_0 M$, $X_1 = \hat{X}_1 M$. В $\hat{\mathfrak{H}}$ введем семейство самосопряженных операторов $\hat{A}(t) = \hat{X}(t)^* \hat{X}(t)$. Очевидно,

$$A(t) = M^* \hat{A}(t) M. \quad (3.1)$$

Все объекты, отвечающие семейству $\hat{A}(t)$, далее помечаются значком “ $\hat{}$ ”. Отметим, что $\hat{\mathfrak{N}} = M\mathfrak{N}$ и $\hat{\mathfrak{N}}_* = \mathfrak{N}_*$. В пространстве $\hat{\mathfrak{H}}$ рассмотрим положительно определенный оператор $Q := (MM^*)^{-1}$. Пусть $Q_{\hat{\mathfrak{N}}}$ — блок оператора Q в $\hat{\mathfrak{N}}$, т. е. $Q_{\hat{\mathfrak{N}}} = \hat{P}Q|_{\hat{\mathfrak{N}}}$. Очевидно, $Q_{\hat{\mathfrak{N}}}$ — изоморфизм в $\hat{\mathfrak{N}}$.

Как показано в [Su2, предложение 1.2], ортопроектор P в \mathfrak{H} на \mathfrak{N} и ортопроектор \hat{P} в $\hat{\mathfrak{H}}$ на $\hat{\mathfrak{N}}$ связаны соотношением

$$P = M^{-1}(Q_{\hat{\mathfrak{N}}})^{-1}\hat{P}(M^*)^{-1}. \quad (3.2)$$

Пусть $\hat{S}: \hat{\mathfrak{N}} \rightarrow \hat{\mathfrak{N}}$ — спектральный росток семейства $\hat{A}(t)$ при $t = 0$, а S — росток семейства $A(t)$. В [BSu1, гл. 1, п. 1.5] установлено следующее тождество:

$$S = PM^* \hat{S} M|_{\mathfrak{N}}. \quad (3.3)$$

Мы предполагаем, что для $A(t)$ выполнено условие 1.4. Тогда росток S (как и \hat{S}) невырожден.

3.2. Вспомогательные операторы. Введем оператор \hat{Z}_Q , действующий в $\hat{\mathfrak{H}}$ и сопоставляющий элементу $\hat{u} \in \hat{\mathfrak{H}}$ слабое решение $\hat{\phi}_Q \in \text{Dom } \hat{X}_0$ задачи

$$\hat{X}_0^*(\hat{X}_0 \hat{\phi}_Q + \hat{X}_1 \hat{\omega}) = 0, \quad Q \hat{\phi}_Q \perp \hat{\mathfrak{N}},$$

где $\hat{\omega} = \hat{P}\hat{u}$. Как показано в [BSu2, §6], оператор Z для семейства $A(t)$ и оператор \hat{Z}_Q связаны соотношением

$$\hat{Z}_Q = MZM^{-1}\hat{P}. \quad (3.4)$$

Далее, положим

$$\widehat{N}_Q := \widehat{Z}_Q^* \widehat{X}_1^* \widehat{R} \widehat{P} + (\widehat{R} \widehat{P})^* \widehat{X}_1 \widehat{Z}_Q. \quad (3.5)$$

Согласно [BSu2, §6], оператор N для семейства $A(t)$ и введенный оператор (3.5) связаны соотношением

$$\widehat{N}_Q = \widehat{P}(M^*)^{-1} N M^{-1} \widehat{P}. \quad (3.6)$$

Отметим оценки

$$\|\widehat{X}_0 \widehat{Z}_Q\| \leq \|X_0 Z\| \|M^{-1}\| \leq \|X_1\| \|M^{-1}\|, \quad (3.7)$$

$$\|\widehat{Z}_Q\| \leq \|Z\| \|M\| \|M^{-1}\| \leq (8\delta)^{-1/2} \|X_1\| \|M\| \|M^{-1}\|, \quad (3.8)$$

$$\|\widehat{N}_Q\| \leq \|N\| \|M^{-1}\|^2 \leq (2\delta)^{-1/2} \|X_1\|^3 \|M^{-1}\|^2, \quad (3.9)$$

вытекающие из (1.2), (1.13), (3.4) и (3.6).

Напомним, что $N = N_0 + N_*$ и определим операторы

$$\widehat{N}_{0,Q} := \widehat{P}(M^*)^{-1} N_0 M^{-1} \widehat{P}, \quad \widehat{N}_{*,Q} := \widehat{P}(M^*)^{-1} N_* M^{-1} \widehat{P}. \quad (3.10)$$

Тогда $\widehat{N}_Q = \widehat{N}_{0,Q} + \widehat{N}_{*,Q}$. Следующая лемма доказана в [Su6, лемма 5.1].

Лемма 3.1 ([Su6]). *Пусть выполнены предположения п. 3.1. Пусть операторы N и N_0 определены в (1.12) и (1.16), а операторы \widehat{N}_Q и $\widehat{N}_{0,Q}$ определены в (3.5) и (3.10). Тогда условие $N = 0$ равносильно равенству $\widehat{N}_Q = 0$. Условие $N_0 = 0$ равносильно равенству $\widehat{N}_{0,Q} = 0$.*

Пусть $\widehat{\omega} \in \widehat{\mathfrak{H}}$ и пусть $\widehat{\psi}_Q = \widehat{\psi}_Q(\widehat{\omega}) \in \text{Dom } \widehat{X}_0$ — (слабое) решение задачи

$$\widehat{X}_0^*(\widehat{X}_0 \widehat{\psi}_Q + \widehat{X}_1 \widehat{Z}_Q \widehat{\omega}) = -\widehat{X}_1^* \widehat{R} \widehat{\omega} + Q Q_{\widehat{\mathfrak{H}}}^{-1} \widehat{P} \widehat{X}_1^* \widehat{R} \widehat{\omega}, \quad Q \widehat{\psi}_Q \perp \widehat{\mathfrak{H}}.$$

Ясно, что правая часть уравнения принадлежит $\widehat{\mathfrak{H}}^\perp = \text{Ran } \widehat{X}_0^*$, а потому условие разрешимости выполнено. Определим оператор $\widehat{Z}_{2,Q} : \widehat{\mathfrak{H}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{H}}$ равенством $\widehat{Z}_{2,Q} \widehat{u} = \widehat{\psi}_Q(\widehat{P} \widehat{u})$, $\widehat{u} \in \widehat{\mathfrak{H}}$. Далее, определим оператор $\widehat{R}_{2,Q} : \widehat{\mathfrak{H}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{H}}_*$ формулой $\widehat{R}_{2,Q} := \widehat{X}_0 \widehat{Z}_{2,Q} + \widehat{X}_1 \widehat{Z}_Q$. Положим

$$\widehat{N}_{1,Q}^0 := \widehat{Z}_{2,Q}^* \widehat{X}_1^* \widehat{R} \widehat{P} + (\widehat{R} \widehat{P})^* \widehat{X}_1 \widehat{Z}_{2,Q} + \widehat{R}_{2,Q}^* \widehat{R}_{2,Q} \widehat{P}. \quad (3.11)$$

В [VSu1, п. 6.3] установлены следующие тождества:

$$\begin{aligned} \widehat{Z}_{2,Q} &= M Z_2 M^{-1} \widehat{P}, \quad \widehat{R}_{2,Q} = R_2 M^{-1}|_{\widehat{\mathfrak{H}}}, \\ \widehat{N}_{1,Q}^0 &= \widehat{P}(M^*)^{-1} N_1^0 M^{-1} \widehat{P}. \end{aligned}$$

3.3. Связь операторов и коэффициентов степенных разложений. Укажем связь коэффициентов степенных разложений (1.4), (1.5) и операторов \widehat{S} и $Q_{\widehat{\mathfrak{H}}}$; см. [BSu3, пп. 1.6, 1.7]. Положим $\zeta_l := M \omega_l \in \widehat{\mathfrak{H}}$, $l = 1, \dots, n$. Тогда из (1.7) и (3.2), (3.3) видно, что

$$\widehat{S} \zeta_l = \gamma_l Q_{\widehat{\mathfrak{H}}} \zeta_l, \quad l = 1, \dots, n. \quad (3.12)$$

Набор ζ_1, \dots, ζ_n образует базис в $\widehat{\mathfrak{H}}$, ортонормированный с весом $Q_{\widehat{\mathfrak{H}}}$:

$$(Q_{\widehat{\mathfrak{H}}} \zeta_l, \zeta_j) = \delta_{lj}, \quad l, j = 1, \dots, n. \quad (3.13)$$

Операторы $\widehat{N}_{0,Q}$ и $\widehat{N}_{*,Q}$ можно описать в терминах коэффициентов степенных разложений (1.4) и (1.5); ср. (1.11). Положим $\tilde{\zeta}_l := M \tilde{\omega}_l \in \widehat{\mathfrak{H}}$, $l = 1, \dots, n$, где элементы $\tilde{\omega}_l$ определены в (1.6). Тогда

$$\begin{aligned} \widehat{N}_{0,Q} &= \sum_{k=1}^n \mu_k(\cdot, Q_{\widehat{\mathfrak{H}}} \zeta_k) Q_{\widehat{\mathfrak{H}}} \zeta_k, \\ \widehat{N}_{*,Q} &= \sum_{k=1}^n \gamma_k \left((\cdot, Q_{\widehat{\mathfrak{H}}} \tilde{\zeta}_k) Q_{\widehat{\mathfrak{H}}} \zeta_k + (\cdot, Q_{\widehat{\mathfrak{H}}} \zeta_k) Q_{\widehat{\mathfrak{H}}} \tilde{\zeta}_k \right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Замечание 3.2. В силу (3.13) и (3.14) выполнены соотношения

$$\begin{aligned} (\hat{N}_{0,Q}\zeta_j, \zeta_l) &= \mu_l \delta_{jl}, \quad j, l = 1, \dots, n, \\ (\hat{N}_{*,Q}\zeta_j, \zeta_l) &= \gamma_l(\zeta_j, Q_{\hat{\mathfrak{N}}}\tilde{\zeta}_l) + \gamma_j(Q_{\hat{\mathfrak{N}}}\tilde{\zeta}_j, \zeta_l), \quad j, l = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Соотношения (1.14) влекут $(Q_{\hat{\mathfrak{N}}}\tilde{\zeta}_j, \zeta_l) + (\zeta_j, Q_{\hat{\mathfrak{N}}}\tilde{\zeta}_l) = 0$, $j, l = 1, \dots, n$. Отсюда видно, что $(\hat{N}_{*,Q}\zeta_j, \zeta_l) = 0$, если $\gamma_j = \gamma_l$.

Перейдем к обозначениям из п. 1.6. Напомним, что различные собственные значения ростка S обозначаются через γ_j° , $j = 1, \dots, p$, а соответствующие собственные подпространства через \mathfrak{N}_j . Векторы $\omega_i^{(j)}$, $i = 1, \dots, k_j$, образуют ортонормированный базис в \mathfrak{N}_j . Тогда те же числа γ_j° , $j = 1, \dots, p$, — это различные собственные значения задачи (3.12), а

$$M\mathfrak{N}_j = \text{Ker}(\hat{S} - \gamma_j^\circ Q_{\hat{\mathfrak{N}}}) =: \hat{\mathfrak{N}}_{j,Q}$$

— соответствующие собственные подпространства. Векторы $\zeta_i^{(j)} = M\omega_i^{(j)}$, $i = 1, \dots, k_j$, образуют базис в $\hat{\mathfrak{N}}_{j,Q}$, ортонормированный с весом $Q_{\hat{\mathfrak{N}}}$. Через \mathcal{P}_j обозначим “косой” проектор на $\hat{\mathfrak{N}}_{j,Q}$, ортогональный относительно скалярного произведения $(Q_{\hat{\mathfrak{N}}}\cdot, \cdot)$, т. е. $\mathcal{P}_j = \sum_{i=1}^{k_j} (\cdot, Q_{\hat{\mathfrak{N}}}\zeta_i^{(j)})\zeta_i^{(j)}$, $j = 1, \dots, p$. Легко видеть, что $\mathcal{P}_j = MP_jM^{-1}\hat{P}$. Используя (1.16), (3.6) и (3.10), нетрудно получить инвариантные представления

$$\hat{N}_{0,Q} = \sum_{j=1}^p \mathcal{P}_j^* \hat{N}_Q \mathcal{P}_j, \quad \hat{N}_{*,Q} = \sum_{1 \leq l, j \leq p: l \neq j} \mathcal{P}_l^* \hat{N}_Q \mathcal{P}_j. \quad (3.15)$$

3.4. Коэффициенты ν_l . Коэффициенты ν_l из разложений (1.4) и векторы $\zeta_l = M\omega_l$, $l = 1, \dots, n$, являются собственными значениями и собственными элементами некоторой задачи; см. [D2, п. 3.4]. Нам понадобится описать эту задачу в случае, когда $\mu_l = 0$, $l = 1, \dots, n$, т. е. $\hat{N}_{0,Q} = 0$. См. также [DSu2, предложение 5.3].

Предложение 3.3 ([D2]). Пусть $\hat{N}_{0,Q} = 0$. Пусть оператор $\hat{N}_{1,Q}^0$ определен в (3.11). Пусть $\gamma_1^\circ, \dots, \gamma_p^\circ$ — различные собственные значения задачи (3.12), а k_1, \dots, k_p — их кратности. Пусть $\hat{\mathfrak{N}}_{q,Q} = \text{Ker}(\hat{S} - \gamma_q^\circ Q_{\hat{\mathfrak{N}}})$ и $\hat{P}_{q,Q}$ — ортопроектор пространства $\hat{\mathfrak{H}}$ на $\hat{\mathfrak{N}}_{q,Q}$, $q = 1, \dots, p$. Введем операторы $\hat{N}_Q^{(q)}$, $q = 1, \dots, p$: оператор $\hat{N}_Q^{(q)}$ действует в $\hat{\mathfrak{N}}_{q,Q}$ и задается выражением

$$\begin{aligned} \hat{N}_Q^{(q)} &:= \hat{P}_{q,Q} \left(\hat{N}_{1,Q}^0 - \frac{1}{2} \hat{Z}_Q^* Q \hat{Z}_Q Q^{-1} \hat{S} \hat{P} - \frac{1}{2} \hat{S} \hat{P} Q^{-1} \hat{Z}_Q^* Q \hat{Z}_Q \right) \Big|_{\hat{\mathfrak{N}}_{q,Q}} \\ &+ \sum_{j=1, \dots, p: j \neq q} (\gamma_q^\circ - \gamma_j^\circ)^{-1} \hat{P}_{q,Q} \hat{N}_Q \hat{P}_{j,Q} Q^{-1} \hat{P}_{j,Q} \hat{N}_Q \Big|_{\hat{\mathfrak{N}}_{q,Q}}. \end{aligned}$$

Обозначим $i(q) = k_1 + \dots + k_{q-1} + 1$. Пусть ν_l — коэффициенты при t^4 из разложений (1.4), а ω_l — зародыши из разложений (1.5), и пусть $\zeta_l = M\omega_l$, $l = 1, \dots, n$. Обозначим $Q_{\hat{\mathfrak{N}}_{q,Q}} = \hat{P}_{q,Q} Q \Big|_{\hat{\mathfrak{N}}_{q,Q}}$. Тогда

$$\hat{N}_Q^{(q)} \zeta_l = \nu_l Q_{\hat{\mathfrak{N}}_{q,Q}} \zeta_l, \quad l = i(q), i(q) + 1, \dots, i(q) + k_q - 1.$$

§ 4. АППРОКСИМАЦИИ ОКАЙМЛЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ $\cos(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2})$ и $A(t)^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2})$

4.1. Аппроксимации по операторной норме в $\hat{\mathfrak{H}}$ в старшем порядке. Пусть выполнены условия пункта 3.1. Опишем аппроксимации операторов $\cos(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2})$ и $A(t)^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2})$ для семейства $A(t)$ вида (3.1) в терминах ростка \hat{S} оператора $\hat{A}(t)$ и изоморфизма M . При этом оказывается удобным окаймить рассматриваемые операторы подходящими множителями.

Положим $M_0 := (Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1/2}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_{\cos}^{(0)}(t, \tau) &:= M \cos(\tau A(t)^{1/2}) M^{-1} \widehat{P} - M_0 \cos(\tau(t^2 M_0 \widehat{S} M_0)^{1/2}) M_0^{-1} \widehat{P}, \\ \mathbb{D}_{\sin}^{(0)}(t, \tau) &:= M A(t)^{-1/2} \sin(\tau A(t)^{1/2}) M^{-1} \widehat{P} \\ &\quad - M_0(t^2 M_0 \widehat{S} M_0)^{-1/2} \sin(\tau(t^2 M_0 \widehat{S} M_0)^{1/2}) M_0^{-1} \widehat{P}, \\ \widetilde{\mathbb{D}}_{\sin}^{(0)}(t, \tau) &:= M A(t)^{-1/2} \sin(\tau A(t)^{1/2}) M^* \widehat{P} \\ &\quad - M_0(t^2 M_0 \widehat{S} M_0)^{-1/2} \sin(\tau(t^2 M_0 \widehat{S} M_0)^{1/2}) M_0 \widehat{P}.\end{aligned}$$

В [BSu5, теорема 3.4], [M5, теорема 3.3] и [DSu1, теорема 4.3] установлен следующий результат; он легко выводится из теоремы 2.1.

Теорема 4.1 ([BSu5], [M5], [DSu1]). *При $\varepsilon > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $|t| \leq t_0$ справедливы оценки*

$$\begin{aligned}\|\mathbb{D}_{\cos}^{(0)}(t, \varepsilon^{-1} \tau)\| \varepsilon^2 (t^2 + \varepsilon^2)^{-1} &\leq \|M\| \|M^{-1}\| C_5 (1 + |\tau|) \varepsilon, \\ \|\mathbb{D}_{\sin}^{(0)}(t, \varepsilon^{-1} \tau)\| \varepsilon (t^2 + \varepsilon^2)^{-1/2} &\leq \|M\| \|M^{-1}\| C_6 (1 + |\tau|), \\ \|\widetilde{\mathbb{D}}_{\sin}^{(0)}(t, \varepsilon^{-1} \tau)\| \varepsilon (t^2 + \varepsilon^2)^{-1/2} &\leq \|M\|^2 C_6 (1 + |\tau|) + \widetilde{C},\end{aligned}$$

где $\widetilde{C} := \|M\|^2 (\delta^{-1/2} + C_1 c_*^{-1/2})$.

Усиление этого результата при дополнительных предположениях получено в [DSu2, теоремы 5.6 и 5.7] на основе теорем 2.2, 2.3 и леммы 3.1. Напомним, что оператор \widehat{N}_Q определен в (3.5), а оператор $\widehat{N}_{0,Q}$ определен в (3.15).

Теорема 4.2 ([DSu2]). *Пусть $\widehat{N}_Q = 0$. Тогда при $\varepsilon > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $|t| \leq t_0$ справедливы оценки*

$$\begin{aligned}\|\mathbb{D}_{\cos}^{(0)}(t, \varepsilon^{-1} \tau)\| \varepsilon^{3/2} (t^2 + \varepsilon^2)^{-3/4} &\leq \|M\| \|M^{-1}\| C_7 (1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon, \\ \|\mathbb{D}_{\sin}^{(0)}(t, \varepsilon^{-1} \tau)\| \varepsilon^{1/2} (t^2 + \varepsilon^2)^{-1/4} &\leq \|M\| \|M^{-1}\| C_8 (1 + |\tau|)^{1/2}, \\ \|\widetilde{\mathbb{D}}_{\sin}^{(0)}(t, \varepsilon^{-1} \tau)\| \varepsilon^{1/2} (t^2 + \varepsilon^2)^{-1/4} &\leq \|M\|^2 C_8 (1 + |\tau|)^{1/2} + \widetilde{C}.\end{aligned}$$

Теорема 4.3 ([DSu2]). *Пусть $n \geq 2$ и $\widehat{N}_{0,Q} = 0$. Тогда при $\varepsilon > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $|t| \leq t^{00}$ справедливы оценки*

$$\begin{aligned}\|\mathbb{D}_{\cos}^{(0)}(t, \varepsilon^{-1} \tau)\| \varepsilon^{3/2} (t^2 + \varepsilon^2)^{-3/4} &\leq \|M\| \|M^{-1}\| C_9 (1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon, \\ \|\mathbb{D}_{\sin}^{(0)}(t, \varepsilon^{-1} \tau)\| \varepsilon^{1/2} (t^2 + \varepsilon^2)^{-1/4} &\leq \|M\| \|M^{-1}\| C_{10} (1 + |\tau|)^{1/2}, \\ \|\widetilde{\mathbb{D}}_{\sin}^{(0)}(t, \varepsilon^{-1} \tau)\| \varepsilon^{1/2} (t^2 + \varepsilon^2)^{-1/4} &\leq \|M\|^2 C_{10} (1 + |\tau|)^{1/2} + \widetilde{C}.\end{aligned}$$

4.2. Аппроксимации при учете корректоров. Положим

$$\widehat{G}_{0,Q}(t) := \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \zeta^{1/2} Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}(t^2 \widehat{S} + \zeta Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1} t^3 \widehat{N}_Q(t^2 \widehat{S} + \zeta Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1} Q_{\widehat{\mathfrak{N}}} \widehat{P} d\zeta, \quad (4.1)$$

$$\widehat{\widehat{G}}_{0,Q}(t) := -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \zeta^{-1/2} Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}(t^2 \widehat{S} + \zeta Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1} t^3 \widehat{N}_Q(t^2 \widehat{S} + \zeta Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1} Q_{\widehat{\mathfrak{N}}} \widehat{P} d\zeta, \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(t, \tau) &:= M \cos(\tau A(t)^{1/2}) M^{-1} (I + t \widehat{Z}_Q) \widehat{P} \\ &\quad - (I + t \widehat{Z}_Q) M_0 \cos(\tau(t^2 M_0 \widehat{S} M_0)^{1/2}) M_0^{-1} \widehat{P},\end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_{0,\sin}^{(1)}(t, \tau) &:= M A(t)^{-1/2} \sin(\tau A(t)^{1/2}) M^{-1} \widehat{P} \\ &\quad - (I + t \widehat{Z}_Q) M_0 (t^2 M_0 \widehat{S} M_0)^{-1/2} \sin(\tau(t^2 M_0 \widehat{S} M_0)^{1/2}) M_0^{-1} \widehat{P},\end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}_{\cos}^{(1)}(t, \tau) &:= \mathbb{D}_{0, \cos}^{(1)}(t, \tau) \\
&+ \int_0^\tau M_0 \cos((\tau - \tilde{\tau})(t^2 M_0 \hat{S} M_0)^{1/2}) M_0 \hat{G}_{0, Q}(t) M_0 \sin(\tilde{\tau}(t^2 M_0 \hat{S} M_0)^{1/2}) M_0^{-1} \hat{P} d\tilde{\tau} \\
&+ \int_0^\tau M_0 \sin((\tau - \tilde{\tau})(t^2 M_0 \hat{S} M_0)^{1/2}) M_0 \hat{G}_{0, Q}(t) M_0 \cos(\tilde{\tau}(t^2 M_0 \hat{S} M_0)^{1/2}) M_0^{-1} \hat{P} d\tilde{\tau}, \quad (4.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}_{\sin}^{(1)}(t, \tau) &:= \mathbb{D}_{0, \sin}^{(1)}(t, \tau) - M_0^2 \hat{\tilde{G}}_{0, Q}(t) M_0 \sin(\tau(t^2 M_0 \hat{S} M_0)^{1/2}) M_0^{-1} \hat{P} \\
&- \int_0^\tau M_0 (t^2 M_0 \hat{S} M_0)^{-1/2} \cos((\tau - \tilde{\tau})(t^2 M_0 \hat{S} M_0)^{1/2}) M_0 \hat{G}_{0, Q}(t) M_0 \cos(\tilde{\tau}(t^2 M_0 \hat{S} M_0)^{1/2}) M_0^{-1} \hat{P} d\tilde{\tau} \\
&+ \int_0^\tau M_0 (t^2 M_0 \hat{S} M_0)^{-1/2} \sin((\tau - \tilde{\tau})(t^2 M_0 \hat{S} M_0)^{1/2}) M_0 \hat{G}_{0, Q}(t) M_0 \sin(\tilde{\tau}(t^2 M_0 \hat{S} M_0)^{1/2}) M_0^{-1} \hat{P} d\tilde{\tau}. \quad (4.6)
\end{aligned}$$

Замечание 4.4. Как показано в [DSu4, лемма 6.5], операторы $G_0(t)$, $\tilde{G}_0(t)$ для семейства $A(t)$ вида (3.1) и операторы (4.1), (4.2) связаны соотношениями

$$\hat{G}_{0, Q}(t) = \hat{P}(M^*)^{-1} G_0(t) M^{-1} \hat{P}, \quad \hat{\tilde{G}}_{0, Q}(t) = \hat{P}(M^*)^{-1} \tilde{G}_0(t) M^{-1} \hat{P}.$$

Отсюда и из неравенств (2.11), (2.12) вытекают оценки

$$\|\hat{G}_{0, Q}(t)\| \leq \frac{1}{2} (2\delta)^{-1/2} c_*^{-1/2} \|X_1\|^3 \|M^{-1}\|^2 t^2, \quad (4.7)$$

$$\|\hat{\tilde{G}}_{0, Q}(t)\| \leq \frac{1}{2} (2\delta)^{-1/2} c_*^{-3/2} \|X_1\|^3 \|M^{-1}\|^2. \quad (4.8)$$

Следующий результат установлен в [DSu4, теорема 6.9]; он легко выводится из теоремы 2.5.

Теорема 4.5 ([DSu4]). При $\varepsilon > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $|t| \leq t_0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{D}_{\cos}^{(1)}(t, \varepsilon^{-1} \tau)\| \varepsilon^4 (t^2 + \varepsilon^2)^{-2} &\leq \|M\| \|M^{-1}\| C_{11} (1 + |\tau|)^2 \varepsilon^2, \\
\|\mathbb{D}_{\sin}^{(1)}(t, \varepsilon^{-1} \tau)\| \varepsilon^3 (t^2 + \varepsilon^2)^{-3/2} &\leq \|M\| \|M^{-1}\| C_{12} (1 + |\tau|)^2 \varepsilon.
\end{aligned}$$

Замечание 4.6. Другой вариант аппроксимации с корректором для окаймленного оператора $A(t)^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1} \tau A(t)^{1/2})$ получен в [M2], причем для более широкого класса операторов с включением “младших” членов.

Усиление этого результата при дополнительных предположениях получено в [DSu4, теоремы 6.11, 6.12] на основе теорем 2.7, 2.8 и леммы 3.1.

Теорема 4.7 ([DSu4]). Пусть $\hat{N}_Q = 0$. Тогда при $\varepsilon > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $|t| \leq t_0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{D}_{0, \cos}^{(1)}(t, \varepsilon^{-1} \tau)\| \varepsilon^3 (t^2 + \varepsilon^2)^{-3/2} &\leq \|M\| \|M^{-1}\| C_{13} (1 + |\tau|) \varepsilon^2, \\
\|\mathbb{D}_{0, \sin}^{(1)}(t, \varepsilon^{-1} \tau)\| \varepsilon^2 (t^2 + \varepsilon^2)^{-1} &\leq \|M\| \|M^{-1}\| C_{14} (1 + |\tau|) \varepsilon.
\end{aligned}$$

Теорема 4.8 ([DSu4]). Пусть $\hat{N}_{0, Q} = 0$. Тогда при $\varepsilon > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $|t| \leq t^{00}$ справедливы оценки

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{D}_{\cos}^{(1)}(t, \varepsilon^{-1} \tau)\| \varepsilon^3 (t^2 + \varepsilon^2)^{-3/2} &\leq \|M\| \|M^{-1}\| C_{15} (1 + |\tau|) \varepsilon^2, \\
\|\mathbb{D}_{\sin}^{(1)}(t, \varepsilon^{-1} \tau)\| \varepsilon^2 (t^2 + \varepsilon^2)^{-1} &\leq \|M\| \|M^{-1}\| C_{16} (1 + |\tau|) \varepsilon.
\end{aligned}$$

4.3. Аппроксимация по “энергетической” норме. Следующий результат установлен в [DSu4, теорема 6.14] и [M5, теорема 3.3] на основе теоремы 2.9.

Теорема 4.9 ([DSu4], [M5]). При $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $|t| \leq t_0$ выполнены оценки

$$\begin{aligned}
\|\hat{A}(t)^{1/2} \mathbb{D}_{0, \cos}^{(1)}(t, \varepsilon^{-1} \tau)\| \varepsilon^3 (t^2 + \varepsilon^2)^{-3/2} &\leq \|M^{-1}\| C_{17} (1 + |\tau|) \varepsilon^2, \\
\|A(t)^{1/2} \mathbb{D}_{0, \sin}^{(1)}(t, \varepsilon^{-1} \tau)\| \varepsilon^2 (t^2 + \varepsilon^2)^{-1} &\leq \|M^{-1}\| C_{18} (1 + |\tau|) \varepsilon.
\end{aligned}$$

Усиление этого результата при дополнительных предположениях получено в [DSu4, теоремы 6.15, 6.16] и [DSu2, теоремы 5.10, 5.11] с помощью теорем 2.10, 2.11 и леммы 3.1.

Теорема 4.10 ([DSu4], [DSu2]). Пусть $\hat{N}_Q = 0$. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $|t| \leq t_0$ выполнены оценки

$$\begin{aligned} \|\hat{A}(t)^{1/2} \mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(t, \varepsilon^{-1}\tau)\| \varepsilon^{5/2} (t^2 + \varepsilon^2)^{-5/4} &\leq \|M^{-1}\| C_{19} (1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon^2, \\ \|\hat{A}(t)^{1/2} \mathbb{D}_{0,\sin}^{(1)}(t, \varepsilon^{-1}\tau)\| \varepsilon^{3/2} (t^2 + \varepsilon^2)^{-3/4} &\leq \|M^{-1}\| C_{20} (1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon. \end{aligned}$$

Теорема 4.11 ([DSu4], [DSu2]). Пусть $\hat{N}_{0,Q} = 0$. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $|t| \leq t^{00}$ выполнены оценки

$$\begin{aligned} \|\hat{A}(t)^{1/2} \mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(t, \varepsilon^{-1}\tau)\| \varepsilon^{5/2} (t^2 + \varepsilon^2)^{-5/4} &\leq \|M^{-1}\| C_{21} (1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon^2, \\ \|\hat{A}(t)^{1/2} \mathbb{D}_{0,\sin}^{(1)}(t, \varepsilon^{-1}\tau)\| \varepsilon^{3/2} (t^2 + \varepsilon^2)^{-3/4} &\leq \|M^{-1}\| C_{22} (1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon. \end{aligned}$$

4.4. Подтверждение точности относительно сглаживающего множителя. Следующая теорема подтверждает, что теоремы 4.1, 4.5 и 4.9 в общем случае точны относительно сглаживающего множителя.

Теорема 4.12 ([DSu1, DSu4, DSu2]). Предположим, что $\hat{N}_{0,Q} \neq 0$.

1°. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leq q_1 < 2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка

$$\|\mathbb{D}_{\cos}^{(0)}(t, \varepsilon^{-1}\tau)\| \varepsilon^{q_1} (t^2 + \varepsilon^2)^{-q_1/2} \leq C(\tau) \varepsilon. \quad (4.9)$$

2°. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leq q_2 < 1$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка

$$\|\mathbb{D}_{\sin}^{(0)}(t, \varepsilon^{-1}\tau)\| \varepsilon^{q_2} (t^2 + \varepsilon^2)^{-q_2/2} \leq C(\tau). \quad (4.10)$$

3°. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leq q_2 < 1$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка

$$\|\tilde{\mathbb{D}}_{\sin}^{(0)}(t, \varepsilon^{-1}\tau)\| \varepsilon^{q_2} (t^2 + \varepsilon^2)^{-q_2/2} \leq C(\tau). \quad (4.11)$$

4°. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leq q_1 < 4$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка

$$\|\mathbb{D}_{\cos}^{(1)}(t, \varepsilon^{-1}\tau)\| \varepsilon^{q_1} (t^2 + \varepsilon^2)^{-q_1/2} \leq C(\tau) \varepsilon^2. \quad (4.12)$$

5°. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leq q_2 < 3$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка

$$\|\mathbb{D}_{\sin}^{(1)}(t, \varepsilon^{-1}\tau)\| \varepsilon^{q_2} (t^2 + \varepsilon^2)^{-q_2/2} \leq C(\tau) \varepsilon. \quad (4.13)$$

6°. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leq q_1 < 3$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка

$$\|\hat{A}(t)^{1/2} \mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(t, \varepsilon^{-1}\tau)\| \varepsilon^{q_1} (t^2 + \varepsilon^2)^{-q_1/2} \leq C(\tau) \varepsilon^2. \quad (4.14)$$

7°. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leq q_2 < 2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка

$$\|\hat{A}(t)^{1/2} \mathbb{D}_{0,\sin}^{(1)}(t, \varepsilon^{-1}\tau)\| \varepsilon^{q_2} (t^2 + \varepsilon^2)^{-q_2/2} \leq C(\tau) \varepsilon. \quad (4.15)$$

Утверждения 1°, 2°, 3° проверены в [DSu1, теорема 4.6], [DSu2, теорема 6.1], утверждения 4°, 5°, 6° — в [DSu4, теоремы 7.3, 7.5], утверждение 7° — в [DSu2, теорема 6.1].

Далее, теоремы 4.2, 4.3, 4.7, 4.8, 4.10, 4.11 (об усилении общих результатов при дополнительных предположениях) в свою очередь точны.

Теорема 4.13 ([DSu2, DSu4]). Предположим, что $\hat{N}_{0,Q} = 0$ и $\hat{N}_Q^{(\ell)} \neq 0$ при некотором $\ell \in \{1, \dots, p\}$.

1°. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leq q_1 < 3/2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы (4.9) выполнялось при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$.

2°. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leq q_2 < 1/2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы (4.10) выполнялось при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$.

3°. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leq q_2 < 1/2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы (4.11) выполнялось при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$.

4°. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leq q_1 < 3$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы (4.12) выполнялось при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$.

5°. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leq q_2 < 2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы (4.13) выполнялось при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$.

6°. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leq q_1 < 5/2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы (4.14) выполнялось при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$.

7°. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leq q_2 < 3/2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы (4.15) выполнялось при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$.

Утверждения 1°, 2°, 3°, 7° установлены в [DSu2, теорема 6.2], утверждения 4°, 5°, 6° — в [DSu4, теоремы 7.4, 7.6].

4.5. Подтверждение точности результатов относительно времени. Следующая теорема подтверждает, что теоремы 4.1, 4.5 и 4.9 в общем случае точны относительно зависимости оценок от τ (при большом $|\tau|$).

Теорема 4.14 ([DSu2, DSu4]). Предположим, что $\hat{N}_{0,Q} \neq 0$.

1°. Пусть $q_1 \geq 2$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и оценка (4.9) выполняется при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε .

2°. Пусть $q_2 \geq 1$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и оценка (4.10) выполняется при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε .

3°. Пусть $q_2 \geq 1$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и оценка (4.11) выполняется при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε .

4°. Пусть $q_1 \geq 4$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/\tau^2 = 0$ и оценка (4.12) выполняется при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε .

5°. Пусть $q_2 \geq 3$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/\tau^2 = 0$ и оценка (4.13) выполняется при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε .

6°. Пусть $q_1 \geq 3$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и оценка (4.14) выполняется при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε .

7°. Пусть $q_2 \geq 2$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и оценка (4.15) выполняется при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε .

Утверждения 1°, 2°, 3°, 7° проверены в [DSu2, теорема 6.3], утверждения 4°, 5°, 6° — в [DSu4, теоремы 7.11, 7.13].

Далее, теоремы 4.2, 4.3, 4.7, 4.8, 4.10, 4.11 (об усилении общих результатов при дополнительных предположениях) в свою очередь точны.

Теорема 4.15 ([DSu2, DSu4]). Предположим, что $\hat{N}_{0,Q} = 0$ и $\hat{N}_Q^{(\ell)} \neq 0$ при некотором $\ell \in \{1, \dots, p\}$.

1°. Пусть $q_1 \geq 3/2$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и оценка (4.9) выполняется при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε .

2°. Пусть $q_2 \geq 1/2$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и оценка (4.10) выполняется при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε .

3°. Пусть $q_2 \geq 1/2$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и оценка (4.11) выполняется при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε .

4°. Пусть $q_1 \geq 3$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (4.12) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε .

5°. Пусть $q_2 \geq 2$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (4.13) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε .

6°. Пусть $q_1 \geq 5/2$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и оценка (4.14) выполняется при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε .

7°. Пусть $q_2 \geq 3/2$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и оценка (4.15) выполняется при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε .

Утверждения 1°, 2°, 3°, 7° установлены в [DSu2, теорема 6.4], утверждения 4°, 5°, 6° — в [DSu4, теоремы 7.12, 7.14].

ГЛАВА 2. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$

§ 5. КЛАСС ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$

5.1. Решетки. Ряд Фурье. Пусть Γ — решетка в \mathbb{R}^d , порожденная базисом $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d$, т. е. $\Gamma = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{a} = \sum_{j=1}^d n_j \mathbf{a}_j, n_j \in \mathbb{Z}\}$. Введем элементарную ячейку этой решетки:

$$\Omega := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{x} = \sum_{j=1}^d \xi_j \mathbf{a}_j, 0 < \xi_j < 1\}.$$

Базис $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d$, двойственный по отношению к $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d$, определяется из соотношений $\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{a}_j \rangle = 2\pi \delta_{ij}$. Этот базис порождает решетку $\tilde{\Gamma}$, двойственную к решетке Γ . Обозначим через $\tilde{\Omega}$ центральную зону Бриллюэна решетки $\tilde{\Gamma}$:

$$\tilde{\Omega} = \{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{k}| < |\mathbf{k} - \mathbf{b}|, 0 \neq \mathbf{b} \in \tilde{\Gamma}\}. \quad (5.1)$$

Будем пользоваться обозначениями $|\Omega| = \text{mes } \Omega$, $|\tilde{\Omega}| = \text{mes } \tilde{\Omega}$ и отметим, что $|\Omega||\tilde{\Omega}| = (2\pi)^d$. Пусть r_0 — радиус шара, вписанного в $\text{clos } \tilde{\Omega}$, и пусть $r_1 := \max_{\mathbf{k} \in \partial \tilde{\Omega}} |\mathbf{k}|$. Отметим, что

$$2r_0 = \min |\mathbf{b}|, \quad 0 \neq \mathbf{b} \in \tilde{\Gamma}. \quad (5.2)$$

С решеткой Γ связано дискретное преобразование Фурье

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = |\Omega|^{-1/2} \sum_{\mathbf{b} \in \tilde{\Gamma}} \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}} e^{i\langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (5.3)$$

которое унитарно отображает $l_2(\tilde{\Gamma}; \mathbb{C}^n)$ на $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$:

$$\int_{\Omega} |\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{b} \in \tilde{\Gamma}} |\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}}|^2. \quad (5.4)$$

Через $\tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$ обозначается подпространство тех функций из $H^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$, Γ -периодическое продолжение которых на \mathbb{R}^d принадлежит $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Имеет место равенство

$$\int_{\Omega} |(\mathbf{D} + \mathbf{k})\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{b} \in \tilde{\Gamma}} |\mathbf{b} + \mathbf{k}|^2 |\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}}|^2, \quad \mathbf{v} \in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n), \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d, \quad (5.5)$$

причем сходимость ряда в правой части (5.5) равносильна включению $\mathbf{v} \in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$. Из (5.1), (5.4) и (5.5) следует оценка

$$\int_{\Omega} |(\mathbf{D} + \mathbf{k})\mathbf{v}|^2 d\mathbf{x} \geq \sum_{\mathbf{b} \in \tilde{\Gamma}} |\mathbf{k}|^2 |\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}}|^2 = |\mathbf{k}|^2 \int_{\Omega} |\mathbf{v}|^2 d\mathbf{x}, \quad \mathbf{v} \in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n), \mathbf{k} \in \tilde{\Omega}. \quad (5.6)$$

5.2. Преобразование Гельфанда. На функциях из класса Шварца $\mathbf{v} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ преобразование Гельфанда \mathcal{U} определяется формулой

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = (\mathcal{U}\mathbf{v})(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = |\tilde{\Omega}|^{-1/2} \sum_{\mathbf{a} \in \Gamma} e^{-i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} + \mathbf{a} \rangle} \mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{a}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mathbf{k} \in \tilde{\Omega}.$$

При этом $\|\tilde{\mathbf{v}}\|_{L_2(\tilde{\Omega} \times \Omega)} = \|\mathbf{v}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ и \mathcal{U} продолжается по непрерывности до унитарного отображения

$$\mathcal{U} : L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \rightarrow \int_{\tilde{\Omega}} \oplus L_2(\Omega; \mathbb{C}^n) d\mathbf{k} =: \mathcal{H}.$$

Включение $\mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ равносильно тому, что $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \cdot) \in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$ при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и

$$\int_{\tilde{\Omega}} \int_{\Omega} (|(\mathbf{D} + \mathbf{k})\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \mathbf{x})|^2 + |\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \mathbf{x})|^2) d\mathbf{x} d\mathbf{k} < \infty.$$

Оператор умножения на ограниченную Γ -периодическую функцию в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ под действием \mathcal{U} переходит в умножение на ту же функцию в слоях прямого интеграла \mathcal{H} . Действие ДО $b(\mathbf{D})$ первого порядка на $\mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ переходит в послойное действие оператора $b(\mathbf{D} + \mathbf{k})$ на $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \cdot) \in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$.

5.3. Факторизованные операторы \mathcal{A} второго порядка. Пусть $b(\mathbf{D}) = \sum_{l=1}^d b_l D_l$, где b_l — постоянные $(m \times n)$ -матрицы (вообще говоря, с комплексными элементами). Предполагается, что $m \geq n$. Рассмотрим символ $b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{l=1}^d b_l \xi_l$ и предположим, что $\text{rank } b(\boldsymbol{\xi}) = n$ при $0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$. Это равносильно тому, что для некоторых $\alpha_0, \alpha_1 > 0$ выполнены неравенства

$$\alpha_0 \mathbf{1}_n \leq b(\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta}) \leq \alpha_1 \mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad 0 < \alpha_0 \leq \alpha_1 < \infty. \quad (5.7)$$

Отметим, что из (5.7) вытекают оценки для норм матриц b_l :

$$|b_l| \leq \alpha_1^{1/2}, \quad l = 1, \dots, d. \quad (5.8)$$

Пусть $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, — Γ -периодическая $(n \times n)$ -матричнозначная функция и $h(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, — Γ -периодическая $(m \times m)$ -матричнозначная функция, причем

$$f, f^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d); \quad h, h^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d). \quad (5.9)$$

Рассмотрим ДО $\mathcal{X} = hb(\mathbf{D})f : L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$, заданный на области определения

$$\text{Dom } \mathcal{X} = \left\{ \mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) : f\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \right\}.$$

Оператор \mathcal{X} замкнут. Самосопряженный оператор $\mathcal{A} = \mathcal{X}^* \mathcal{X}$ в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ порождается замкнутой квадратичной формой $\mathbf{a}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \|\mathcal{X}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2$, $\mathbf{u} \in \text{Dom } \mathcal{X}$. Формально,

$$\mathcal{A} = f(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f(\mathbf{x}), \quad (5.10)$$

где $g(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})^* h(\mathbf{x})$. Используя преобразование Фурье и (5.7), (5.9), легко проверить оценки

$$\alpha_0 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1} \|\mathbf{D}(f\mathbf{u})\|_{L_2}^2 \leq \mathbf{a}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leq \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|\mathbf{D}(f\mathbf{u})\|_{L_2}^2, \quad \mathbf{u} \in \text{Dom } \mathcal{X}. \quad (5.11)$$

5.4. Операторы $\mathcal{A}(\mathbf{k})$. Положим

$$\mathfrak{H} = L_2(\Omega; \mathbb{C}^n), \quad \mathfrak{H}_* = L_2(\Omega; \mathbb{C}^m) \quad (5.12)$$

и рассмотрим замкнутый оператор $\mathcal{X}(\mathbf{k}) : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_*$, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$, заданный соотношениями

$$\mathcal{X}(\mathbf{k}) = hb(\mathbf{D} + \mathbf{k})f, \quad \text{Dom } \mathcal{X}(\mathbf{k}) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathfrak{H} : f\mathbf{u} \in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n) \right\} =: \mathfrak{d}.$$

Самосопряженный оператор $\mathcal{A}(\mathbf{k}) = \mathcal{X}(\mathbf{k})^* \mathcal{X}(\mathbf{k}) : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$ порождается замкнутой квадратичной формой $\mathbf{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|_{\mathfrak{H}_*}^2$, $\mathbf{u} \in \mathfrak{d}$. Формально можно записать

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}) = f(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D} + \mathbf{k}) f(\mathbf{x}).$$

Используя разложение функции $\mathbf{v} = f\mathbf{u}$ в ряд Фурье (5.3) и условия (5.7), (5.9), легко проверить оценки

$$\alpha_0 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1} \|(\mathbf{D} + \mathbf{k})f\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leq \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|(\mathbf{D} + \mathbf{k})f\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{D}. \quad (5.13)$$

Из нижней оценки (5.13) и из (5.6) вытекает, что

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}) \geq c_* |\mathbf{k}|^2 I, \quad \mathbf{k} \in \tilde{\Omega}, \quad (5.14)$$

$$c_* = \alpha_0 \|f^{-1}\|_{L_\infty}^{-2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1}. \quad (5.15)$$

Положим

$$\mathfrak{N} := \text{Ker } \mathcal{A}(0) = \text{Ker } \mathcal{X}(0). \quad (5.16)$$

Соотношения (5.13) при $\mathbf{k} = 0$ показывают, что

$$\mathfrak{N} = \{\mathbf{u} \in L_2(\Omega; \mathbb{C}^n) : f\mathbf{u} = \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n\}, \quad \dim \mathfrak{N} = n. \quad (5.17)$$

Как видно из (5.2) и (5.5) при $\mathbf{k} = 0$, для функции $\mathbf{v} \in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$ такой, что $\int_\Omega \mathbf{v} d\mathbf{x} = 0$, т. е. $\hat{\mathbf{v}}_0 = 0$, выполнено

$$\|\mathbf{D}\mathbf{v}\|_{L_2(\Omega)}^2 \geq 4r_0^2 \|\mathbf{v}\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad \mathbf{v} \in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n), \quad \int_\Omega \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \quad (5.18)$$

Из (5.18) и из нижней оценки (5.13) при $\mathbf{k} = 0$ следует, что расстояние d^0 от точки $\lambda_0 = 0$ до остального спектра оператора $\mathcal{A}(0)$ подчинено оценке

$$d^0 \geq 4c_* r_0^2. \quad (5.19)$$

5.5. Зонные функции. Обозначим через $E_j(\mathbf{k})$, $j \in \mathbb{N}$, последовательные (с учетом кратностей) собственные значения оператора $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ (зонные функции):

$$E_1(\mathbf{k}) \leq E_2(\mathbf{k}) \leq \dots \leq E_j(\mathbf{k}) \leq \dots, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d.$$

Зонные функции $E_j(\mathbf{k})$ непрерывны и $\tilde{\Gamma}$ -периодичны. Как показано в [BSu1, гл. 2, п. 2.2] (на основании вариационных соображений), зонные функции удовлетворяют следующим оценкам:

$$\begin{aligned} E_j(\mathbf{k}) &\geq c_* |\mathbf{k}|^2, \quad \mathbf{k} \in \text{clos } \tilde{\Omega}, \quad j = 1, \dots, n, \\ E_{n+1}(\mathbf{k}) &\geq c_* r_0^2, \quad \mathbf{k} \in \text{clos } \tilde{\Omega}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

5.6. Прямой интеграл для оператора \mathcal{A} . Под действием преобразования Гельфанда \mathcal{U} оператор \mathcal{A} раскладывается в прямой интеграл:

$$\mathcal{U}\mathcal{A}\mathcal{U}^{-1} = \int_{\tilde{\Omega}} \oplus \mathcal{A}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (5.21)$$

Это означает следующее. Пусть $\mathbf{u} \in \text{Dom } \mathcal{X}$, тогда

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \cdot) \in \mathfrak{D} \quad \text{при п.в. } \mathbf{k} \in \tilde{\Omega}, \quad (5.22)$$

$$\mathfrak{a}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \int_{\tilde{\Omega}} \mathfrak{a}(\mathbf{k}) [\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \cdot), \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \cdot)] d\mathbf{k}. \quad (5.23)$$

Обратно, если для $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{H}$ выполнено (5.22) и интеграл в (5.23) конечен, тогда $\mathbf{u} \in \text{Dom } \mathcal{X}$ и выполнено (5.23).

Из (5.21) следует, что спектр оператора \mathcal{A} совпадает с объединением зон $\text{Ran } E_j$, $j \in \mathbb{N}$. Из (5.16), (5.17) видно, что $\min_{\mathbf{k}} E_j(\mathbf{k}) = E_j(0) = 0$, $j = 1, \dots, n$, т. е. первые n спектральных зон оператора \mathcal{A} перекрываются и имеют общий нижний край $\lambda_0 = 0$, а $(n+1)$ -ая зона отделена от нуля (см. (5.20)).

5.7. Включение операторов $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ в абстрактную схему. Если $d > 1$, то операторы $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ зависят от многомерного параметра \mathbf{k} . Следуя [BSu1, гл. 2], введем одномерный параметр $t = |\mathbf{k}|$. Будем использовать схему главы 1. При этом все построения будут зависеть от дополнительного параметра $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}| \in \mathbb{S}^{d-1}$ и мы должны следить за равномерностью оценок по $\boldsymbol{\theta}$. Пространства \mathfrak{H} и \mathfrak{H}_* определены в (5.12). Положим $X(t) = X(t, \boldsymbol{\theta}) := \mathcal{X}(t\boldsymbol{\theta})$. При этом выполнено $X(t, \boldsymbol{\theta}) = X_0 + tX_1(\boldsymbol{\theta})$, где $X_0 = h(\mathbf{x})b(\mathbf{D})f(\mathbf{x})$, $\text{Dom } X_0 = \mathfrak{d}$, а $X_1(\boldsymbol{\theta})$ — ограниченный оператор умножения на матрицу $h(\mathbf{x})b(\boldsymbol{\theta})f(\mathbf{x})$. Далее, положим $A(t) = A(t, \boldsymbol{\theta}) := \mathcal{A}(t\boldsymbol{\theta})$. Ядро $\mathfrak{N} = \text{Ker } X_0 = \text{Ker } \mathcal{A}(0)$ определено в (5.17), $\dim \mathfrak{N} = n$. Число d^0 удовлетворяет оценке (5.19). Как было показано в [BSu1, гл. 2, §3], условие $n \leq n_* = \dim \text{Ker } X_0^*$ также выполнено. Более того, либо $n_* = n$ (если $m = n$), либо $n_* = \infty$ (если $m > n$). Таким образом, все предположения абстрактной схемы выполнены.

Следуя пункту 1.1, мы должны фиксировать число $\delta > 0$ такое, что $\delta < d^0/8$. Учитывая (5.15) и (5.19), положим

$$\delta = \frac{1}{4}c_*r_0^2 = \frac{1}{4}\alpha_0\|f^{-1}\|_{L_\infty}^{-2}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1}r_0^2. \quad (5.24)$$

Отметим, что в силу (5.7) и (5.9) справедлива оценка

$$\|X_1(\boldsymbol{\theta})\| \leq \alpha_1^{1/2}\|h\|_{L_\infty}\|f\|_{L_\infty}, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}. \quad (5.25)$$

Для t_0 (см. (1.1)) примем следующее значение:

$$t_0 = \delta^{1/2}\alpha_1^{-1/2}\|h\|_{L_\infty}^{-1}\|f\|_{L_\infty}^{-1} = \frac{r_0}{2}\alpha_0^{1/2}\alpha_1^{-1/2}(\|h\|_{L_\infty}\|h^{-1}\|_{L_\infty}\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty})^{-1}. \quad (5.26)$$

Очевидно, $t_0 \leq r_0/2$. Следовательно, шар $|\mathbf{k}| \leq t_0$ целиком лежит внутри $\tilde{\Omega}$. Важно, что величины c_* , δ , t_0 (см. (5.15), (5.24), (5.26)) не зависят от $\boldsymbol{\theta}$.

В силу (5.14) выполнено условие 1.4. Росток $S(\boldsymbol{\theta})$ оператора $A(t, \boldsymbol{\theta})$ невырожден равномерно по $\boldsymbol{\theta}$ (ср. (1.15)):

$$S(\boldsymbol{\theta}) \geq c_*I_{\mathfrak{N}}. \quad (5.27)$$

§ 6. ЭФФЕКТИВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОПЕРАТОРА $\hat{\mathcal{A}}$

6.1. Оператор $A(t, \boldsymbol{\theta})$ в случае $f = \mathbf{1}_n$. Особую роль играет оператор \mathcal{A} при $f = \mathbf{1}_n$. Условимся в этом случае отмечать все объекты шляпкой “ $\hat{}$ ”. Тогда для оператора

$$\hat{\mathcal{A}} = b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x})b(\mathbf{D}) \quad (6.1)$$

семейство $\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^*g(\mathbf{x})b(\mathbf{D} + \mathbf{k})$ обозначается $\hat{A}(t, \boldsymbol{\theta})$. Ядро (5.17) принимает вид

$$\hat{\mathfrak{N}} = \{\mathbf{u} \in L_2(\Omega; \mathbb{C}^n) : \mathbf{u} = \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n\}, \quad (6.2)$$

т. е. $\hat{\mathfrak{N}}$ состоит из постоянных вектор-функций. Ортопроектор \hat{P} пространства $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ на подпространство (6.2) есть оператор усреднения по ячейке:

$$\hat{P}\mathbf{u} = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (6.3)$$

В случае $f = \mathbf{1}_n$ постоянные (5.15), (5.24) и (5.26) принимают вид

$$\hat{c}_* = \alpha_0\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1}, \quad (6.4)$$

$$\hat{\delta} = \frac{1}{4}\alpha_0\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1}r_0^2, \quad (6.5)$$

$$\hat{t}_0 = \frac{r_0}{2}\alpha_0^{1/2}\alpha_1^{-1/2}(\|g\|_{L_\infty}\|g^{-1}\|_{L_\infty})^{-1/2}. \quad (6.6)$$

Неравенство (5.25) превращается в

$$\|\hat{X}_1(\boldsymbol{\theta})\| \leq \alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}. \quad (6.7)$$

6.2. Вспомогательные операторы. Операторы $\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta})$, $\widehat{R}(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$ для семейства $\widehat{A}(t, \boldsymbol{\theta})$ (в абстрактных терминах определенные в п. 1.2) теперь зависят от $\boldsymbol{\theta}$. Они были найдены в [BSu3, п. 4.1] и [BSu1, гл. 3, §1].

Пусть $\Lambda \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ — Γ -периодическая $(n \times m)$ -матричнозначная функция, удовлетворяющая уравнению

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) = 0, \quad \int_{\Omega} \Lambda(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \quad (6.8)$$

Тогда операторы $\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta}) : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$ и $\widehat{R}(\boldsymbol{\theta}) : \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}_*$ представимы в виде

$$\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta}) = [\Lambda]b(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}, \quad \widehat{R}(\boldsymbol{\theta}) = [h(b(\mathbf{D})\Lambda + \mathbf{1}_m)]b(\boldsymbol{\theta}). \quad (6.9)$$

Здесь и ниже квадратные скобки обозначают оператор умножения на функцию. Спектральный росток $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{R}(\boldsymbol{\theta})^* \widehat{R}(\boldsymbol{\theta})$ семейства $\widehat{A}(t, \boldsymbol{\theta})$, действующий в \mathfrak{N} , имеет вид

$$\widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta}), \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad (6.10)$$

где $b(\boldsymbol{\theta})$ — символ оператора $b(\mathbf{D})$, а g^0 — так называемая *эффективная матрица*. Она определяется в терминах матрицы $\Lambda(\mathbf{x})$:

$$\widetilde{g}(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m), \quad (6.11)$$

$$g^0 = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \widetilde{g}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (6.12)$$

Выясняется, что матрица g^0 положительно определена.

На основании (6.8) легко проверить оценку

$$\|g^{1/2}b(\mathbf{D})\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leq |\Omega|^{1/2}\|g\|_{L_{\infty}}^{1/2}. \quad (6.13)$$

6.3. Эффективный оператор. Рассмотрим символ

$$\widehat{S}(\mathbf{k}) := t^2 \widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) = b(\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d. \quad (6.14)$$

Отметим оценку $\widehat{S}(\mathbf{k}) \geq \widehat{c}_* |\mathbf{k}|^2 \mathbf{1}_n$, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$, вытекающую из (5.27) (при $f = \mathbf{1}_n$). Выражение (6.14) является символом ДО

$$\widehat{\mathcal{A}}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}), \quad (6.15)$$

действующего в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и называемого *эффективным оператором* для оператора $\widehat{\mathcal{A}}$.

Пусть $\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})$ — операторное семейство в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$, отвечающее оператору (6.15). Тогда $\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) = b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{D} + \mathbf{k})$ при периодических граничных условиях. Отсюда с учетом (6.3) и (6.14) вытекает тождество

$$\widehat{S}(\mathbf{k})\widehat{P} = \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\widehat{P}. \quad (6.16)$$

Оценка вида (5.14) при $g = g^0$ и $f = \mathbf{1}_n$ с учетом (6.19) дает

$$\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) \geq \widehat{c}_* |\mathbf{k}|^2 I, \quad \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}. \quad (6.17)$$

6.4. Свойства эффективной матрицы. Следующие свойства матрицы g^0 были проверены в [BSu1, гл. 3, теорема 1.5].

Предложение 6.1 ([BSu1]). *Для эффективной матрицы справедливы оценки*

$$\underline{g} \leq g^0 \leq \bar{g}, \quad (6.18)$$

где

$$\bar{g} := |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \underline{g} := \left(|\Omega|^{-1} \int_{\Omega} g(\mathbf{x})^{-1} d\mathbf{x} \right)^{-1}.$$

В случае $m = n$ всегда выполнено $g^0 = \underline{g}$.

Оценки (6.18) известны в теории усреднения для конкретных ДО как вилка Фойгта–Рейсса. Отметим также неравенства, вытекающие из (6.18):

$$|g^0| \leq \|g\|_{L_\infty}, \quad |(g^0)^{-1}| \leq \|g^{-1}\|_{L_\infty}. \quad (6.19)$$

Теперь выделим условия, при которых реализуется верхняя или нижняя грань в (6.18), см. [BSu1, гл. 3, предложения 1.6, 1.7].

Предложение 6.2 ([BSu1]). *Равенство $g^0 = \bar{g}$ равносильно соотношениям*

$$b(\mathbf{D})^* \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad (6.20)$$

где $\mathbf{g}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \dots, m$, — столбцы матрицы $g(\mathbf{x})$.

Предложение 6.3 ([BSu1]). *Равенство $g^0 = \underline{g}$ равносильно представлениям*

$$\mathbf{l}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{l}_k^0 + b(\mathbf{D})\mathbf{w}_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{l}_k^0 \in \mathbb{C}^m, \quad \mathbf{w}_k \in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n), \quad k = 1, \dots, m, \quad (6.21)$$

где $\mathbf{l}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \dots, m$, — столбцы матрицы $g(\mathbf{x})^{-1}$.

6.5. Аналитические ветви собственных значений и собственных элементов.

Аналитические (по t) ветви собственных значений $\hat{\lambda}_l(t, \boldsymbol{\theta})$ и собственных элементов $\hat{\varphi}_l(t, \boldsymbol{\theta})$ оператора $\hat{A}(t, \boldsymbol{\theta})$ допускают степенные разложения вида (1.4), (1.5) с коэффициентами, зависящими от $\boldsymbol{\theta}$ (интервал сходимости $t = |\mathbf{k}| \leq t_*(\boldsymbol{\theta})$ мы не контролируем):

$$\hat{\lambda}_l(t, \boldsymbol{\theta}) = \hat{\gamma}_l(\boldsymbol{\theta})t^2 + \hat{\mu}_l(\boldsymbol{\theta})t^3 + \hat{\nu}_l(\boldsymbol{\theta})t^4 + \dots, \quad l = 1, \dots, n, \quad (6.22)$$

$$\hat{\varphi}_l(t, \boldsymbol{\theta}) = \hat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}) + t\hat{\psi}_l^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) + \dots, \quad l = 1, \dots, n. \quad (6.23)$$

Согласно (1.7) числа $\hat{\gamma}_l(\boldsymbol{\theta})$ и элементы $\hat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta})$ являются собственными значениями и собственными элементами роста:

$$b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta}) \hat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\gamma}_l(\boldsymbol{\theta}) \hat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}), \quad l = 1, \dots, n.$$

6.6. Оператор $\hat{N}(\boldsymbol{\theta})$. Опишем теперь оператор N (в абстрактных терминах определенный в (1.12)). Как проверено в [BSu3, §4], для семейства $\hat{A}(t, \boldsymbol{\theta})$ этот оператор принимает вид

$$\hat{N}(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* L(\boldsymbol{\theta}) b(\boldsymbol{\theta}) \hat{P}, \quad (6.24)$$

где $L(\boldsymbol{\theta})$ — $(m \times m)$ -матричнозначная функция, заданная соотношением

$$L(\boldsymbol{\theta}) = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} (\Lambda(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta})^* \tilde{g}(\mathbf{x}) + \tilde{g}(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta}) \Lambda(\mathbf{x})) d\mathbf{x}.$$

Здесь $\Lambda(\mathbf{x})$ — Γ -периодическое решение задачи (6.8), а $\tilde{g}(\mathbf{x})$ — матрица-функция (6.11).

Отметим, что эрмитова матричнозначная функция $L(\mathbf{k}) := tL(\boldsymbol{\theta})$, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$, однородна первой степени. Положим $\hat{N}(\mathbf{k}) := t^3 \hat{N}(\boldsymbol{\theta})$, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$. Тогда

$$\hat{N}(\mathbf{k}) = b(\mathbf{k})^* L(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}) \hat{P}. \quad (6.25)$$

Матрица-функция $b(\mathbf{k})^* L(\mathbf{k}) b(\mathbf{k})$ является однородным многочленом третьей степени от $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$.

В [BSu3, §4] указаны некоторые достаточные условия, при которых оператор (6.24) обращается в ноль.

Предложение 6.4 ([BSu3]). *Пусть выполнено хотя бы одно из следующих предположений:*

1°. *Оператор \hat{A} имеет вид $\hat{A} = \mathbf{D}^* g(\mathbf{x}) \mathbf{D}$, где $g(\mathbf{x})$ — симметричная матрица с вещественными элементами.*

2°. *Выполнены соотношения (6.20), т. е. $g^0 = \bar{g}$.*

3°. *Выполнены соотношения (6.21), т. е. $g^0 = \underline{g}$. (В частности, это автоматически выполнено, если $m = n$.)*

Тогда $\hat{N}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

С другой стороны, в [BSu3, пп. 10.4, 13.2, 14.6] приведены примеры операторов $\hat{\mathcal{A}}$, для которых оператор $\hat{N}(\theta)$ отличен от нуля. Это пример скалярного эллиптического оператора (случай $n = 1$) с комплексной эрмитовой матрицей коэффициентов, а также пример матричного оператора с вещественными коэффициентами. См. также [Su6, пример 8.7], [DSu1, п. 14.3]. Напомним (см. замечание 1.3), что справедливо представление $\hat{N}(\theta) = \hat{N}_0(\theta) + \hat{N}_*(\theta)$, где оператор $\hat{N}_0(\theta)$ диагонален в базисе $\{\hat{\omega}_l(\theta)\}_{l=1}^n$, а оператор $\hat{N}_*(\theta)$ имеет нулевые диагональные элементы. При этом

$$(\hat{N}(\theta)\hat{\omega}_l(\theta), \hat{\omega}_l(\theta))_{L_2(\Omega)} = (\hat{N}_0(\theta)\hat{\omega}_l(\theta), \hat{\omega}_l(\theta))_{L_2(\Omega)} = \hat{\mu}_l(\theta), \quad l = 1, \dots, n.$$

В [BSu3, п. 4.3] установлено следующее утверждение.

Предложение 6.5. Пусть $b(\theta)$ и $g(\mathbf{x})$ — матрицы с вещественными элементами. Пусть в разложениях (6.23) для аналитических ветвей собственных векторов оператора $\hat{A}(t, \theta)$ “зародыши” $\hat{\omega}_l(\theta)$, $l = 1, \dots, n$, можно выбрать вещественными. Тогда в (6.22) выполнено $\hat{\mu}_l(\theta) = 0$, $l = 1, \dots, n$, т. е. $\hat{N}_0(\theta) = 0$.

В рассматриваемом “вещественном” случае росток $\hat{S}(\theta)$ представляет собой симметричную вещественную матрицу. Ясно, что в случае простого собственного значения $\hat{\gamma}_j(\theta)$ ростка зародыш $\hat{\omega}_j(\theta)$ определяется однозначно с точностью до фазового множителя, и его всегда можно выбрать вещественным. Мы получаем следующее следствие.

Следствие 6.6. Пусть $b(\theta)$ и $g(\mathbf{x})$ — матрицы с вещественными элементами и пусть спектр ростка $\hat{S}(\theta)$ простой. Тогда $\hat{N}_0(\theta) = 0$.

Однако, как показывают примеры [Su6, пример 8.7], [DSu1, п. 14.3], в “вещественном” случае не всегда возможно выбрать векторы $\hat{\omega}_l(\theta)$ вещественными. Может случиться, что $\hat{N}_0(\theta) \neq 0$ в некоторых точках θ .

6.7. Операторы $\hat{Z}_2(\theta)$, $\hat{R}_2(\theta)$ и $\hat{N}_1^0(\theta)$. Опишем операторы Z_2 , R_2 и N_1^0 (в абстрактных терминах определенные в пп. 1.2 и 1.7) для семейства $\hat{A}(t, \theta)$. Пусть $\Lambda_l^{(2)}(\mathbf{x})$ — Γ -периодическая $(n \times m)$ -матрица-функция, являющаяся решением задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) (b(\mathbf{D}) \Lambda_l^{(2)}(\mathbf{x}) + b_l \Lambda(\mathbf{x})) = b_l^* (g^0 - \tilde{g}(\mathbf{x})), \quad \int_{\Omega} \Lambda_l^{(2)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

Положим $\Lambda^{(2)}(\mathbf{x}; \theta) := \sum_{l=1}^d \Lambda_l^{(2)}(\mathbf{x}) \theta_l$. Как проверено в [VSu2, п. 6.3],

$$\hat{Z}_2(\theta) = [\Lambda^{(2)}(\cdot; \theta)] b(\theta) \hat{P}, \quad \hat{R}_2(\theta) = [h(b(\mathbf{D}) \Lambda^{(2)}(\cdot; \theta) + b(\theta) \Lambda)] b(\theta).$$

Наконец, в [VSu2, п. 6.4] было получено представление

$$\hat{N}_1^0(\theta) = b(\theta)^* L_2(\theta) b(\theta) \hat{P}, \quad (6.26)$$

где

$$\begin{aligned} L_2(\theta) = & |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} (\Lambda^{(2)}(\mathbf{x}; \theta)^* b(\theta)^* \tilde{g}(\mathbf{x}) + \tilde{g}(\mathbf{x})^* b(\theta) \Lambda^{(2)}(\mathbf{x}; \theta)) d\mathbf{x} \\ & + |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} (b(\mathbf{D}) \Lambda^{(2)}(\mathbf{x}; \theta) + b(\theta) \Lambda(\mathbf{x}))^* g(\mathbf{x}) (b(\mathbf{D}) \Lambda^{(2)}(\mathbf{x}; \theta) + b(\theta) \Lambda(\mathbf{x})) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

6.8. Кратности собственных значений ростка. В данном пункте считаем, что $n \geq 2$. Перейдем к обозначениям, принятым в п. 1.6, следя за кратностями собственных значений спектрального ростка $\hat{S}(\theta)$. Вообще говоря, количество $p(\theta)$ различных собственных значений $\hat{\gamma}_1^o(\theta), \dots, \hat{\gamma}_{p(\theta)}^o(\theta)$ спектрального ростка $\hat{S}(\theta)$ и их кратности $k_1(\theta), \dots, k_{p(\theta)}(\theta)$ зависят от параметра $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$. При каждом фиксированном θ через $\hat{P}_j(\theta)$ обозначим ортопроектор в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ на собственное подпространство $\hat{\mathfrak{N}}_j(\theta)$ ростка $\hat{S}(\theta)$, отвечающее собственному значению $\hat{\gamma}_j^o(\theta)$. Справедливы инвариантные представления для операторов $\hat{N}_0(\theta)$ и $\hat{N}_*(\theta)$:

$$\hat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^{p(\boldsymbol{\theta})} \hat{P}_j(\boldsymbol{\theta}) \hat{N}(\boldsymbol{\theta}) \hat{P}_j(\boldsymbol{\theta}), \quad (6.28)$$

$$\hat{N}_*(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{1 \leq j, l \leq p(\boldsymbol{\theta}): j \neq l} \hat{P}_j(\boldsymbol{\theta}) \hat{N}(\boldsymbol{\theta}) \hat{P}_l(\boldsymbol{\theta}). \quad (6.29)$$

6.9. Коэффициенты $\hat{\nu}_l(\boldsymbol{\theta})$. Коэффициенты $\hat{\nu}_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = 1, \dots, n$, в разложениях (6.22) являются собственными значениями некоторой задачи. Нам понадобится описать эту задачу в случае, когда $\hat{\mu}_l(\boldsymbol{\theta}) = 0$, $l = 1, \dots, n$, т. е. $\hat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$. Применяя предложение 1.5, приходим к следующему утверждению. См. также [DSu2, предложение 8.7].

Предложение 6.7. Пусть $\hat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$. Пусть $\hat{\gamma}_1^\circ(\boldsymbol{\theta}), \dots, \hat{\gamma}_{p(\boldsymbol{\theta})}^\circ(\boldsymbol{\theta})$ — различные собственные значения оператора (6.10), а $k_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, k_{p(\boldsymbol{\theta})}(\boldsymbol{\theta})$ — их кратности. Пусть $\hat{P}_q(\boldsymbol{\theta})$ — ортопроектор пространства $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ на подпространство $\hat{\mathfrak{N}}_q(\boldsymbol{\theta}) = \text{Ker}(\hat{S}(\boldsymbol{\theta}) - \hat{\gamma}_q^\circ(\boldsymbol{\theta}) I_{\hat{\mathfrak{N}}})$, $q = 1, \dots, p(\boldsymbol{\theta})$. Пусть операторы $\hat{Z}(\boldsymbol{\theta})$ и $\hat{N}_1^0(\boldsymbol{\theta})$ определены в (6.9) и (6.26), (6.27) соответственно. Введем операторы $\hat{N}^{(q)}(\boldsymbol{\theta})$, $q = 1, \dots, p(\boldsymbol{\theta})$: оператор $\hat{N}^{(q)}(\boldsymbol{\theta})$ действует в $\hat{\mathfrak{N}}_q(\boldsymbol{\theta})$ и задается выражением

$$\begin{aligned} \hat{N}^{(q)}(\boldsymbol{\theta}) := & \hat{P}_q(\boldsymbol{\theta}) \left(\hat{N}_1^0(\boldsymbol{\theta}) - \frac{1}{2} \hat{Z}(\boldsymbol{\theta})^* \hat{Z}(\boldsymbol{\theta}) \hat{S}(\boldsymbol{\theta}) \hat{P} - \frac{1}{2} \hat{S}(\boldsymbol{\theta}) \hat{P} \hat{Z}(\boldsymbol{\theta})^* \hat{Z}(\boldsymbol{\theta}) \right) \Big|_{\hat{\mathfrak{N}}_q(\boldsymbol{\theta})} \\ & + \sum_{j=1, \dots, p(\boldsymbol{\theta}): j \neq q} (\hat{\gamma}_q^\circ(\boldsymbol{\theta}) - \hat{\gamma}_j^\circ(\boldsymbol{\theta}))^{-1} \hat{P}_q(\boldsymbol{\theta}) \hat{N}(\boldsymbol{\theta}) \hat{P}_j(\boldsymbol{\theta}) \hat{N}(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\hat{\mathfrak{N}}_q(\boldsymbol{\theta})}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Обозначим $i(q, \boldsymbol{\theta}) = k_1(\boldsymbol{\theta}) + \dots + k_{q-1}(\boldsymbol{\theta}) + 1$. Пусть $\hat{\nu}_l(\boldsymbol{\theta})$ — коэффициенты при t^4 из разложений (6.22), а $\hat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta})$ — зародыши из (6.23), $l = 1, \dots, n$. Тогда

$$\hat{N}^{(q)}(\boldsymbol{\theta}) \hat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\nu}_l(\boldsymbol{\theta}) \hat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}), \quad l = i(q, \boldsymbol{\theta}), i(q, \boldsymbol{\theta}) + 1, \dots, i(q, \boldsymbol{\theta}) + k_q(\boldsymbol{\theta}) - 1.$$

§ 7. АППРОКСИМАЦИИ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ ОТ ОПЕРАТОРА $\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$

В этом параграфе мы получаем аппроксимации операторов $\cos(\varepsilon^{-1} \tau \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2})$ и $\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1} \tau \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2})$ при малом ε .

7.1. Аппроксимации по операторной норме в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$. Рассмотрим оператор $\mathcal{H}_0 = -\Delta$ в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. При разложении в прямой интеграл оператору \mathcal{H}_0 отвечает семейство операторов $\mathcal{H}_0(\mathbf{k})$, действующих в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$. Оператор $\mathcal{H}_0(\mathbf{k})$ задается дифференциальным выражением $|\mathbf{D} + \mathbf{k}|^2$ при периодических граничных условиях. Введем обозначение

$$\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon) := \varepsilon^2 (\mathcal{H}_0(\mathbf{k}) + \varepsilon^2 I)^{-1}. \quad (7.1)$$

Отметим очевидное тождество

$$\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{q/2} \hat{P} = \varepsilon^q (t^2 + \varepsilon^2)^{-q/2} \hat{P}, \quad q > 0. \quad (7.2)$$

Заметим, что при $|\mathbf{k}| > \hat{t}_0$ справедливо неравенство

$$\left\| \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{q/2} \hat{P} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq (\hat{t}_0)^{-q} \varepsilon^q, \quad \varepsilon > 0, \mathbf{k} \in \tilde{\Omega}, |\mathbf{k}| > \hat{t}_0. \quad (7.3)$$

Далее, используя дискретное преобразование Фурье, получаем оценку

$$\left\| \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{q/2} (I - \hat{P}) \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \sup_{0 \neq \mathbf{b} \in \tilde{\Gamma}} \varepsilon^q (|\mathbf{b} + \mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-q/2} \leq r_0^{-q} \varepsilon^q, \quad \varepsilon > 0, \mathbf{k} \in \tilde{\Omega}. \quad (7.4)$$

Здесь учтено, что $|\mathbf{b} + \mathbf{k}| \geq r_0$ при $0 \neq \mathbf{b} \in \tilde{\Gamma}$ и $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ (см. (5.1)).

Положим

$$\mathfrak{D}_{\cos}^{(0)}(\mathbf{k}, \tau) := \cos(\tau \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}) - \cos(\tau \hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}), \quad (7.5)$$

$$\mathfrak{D}_{\sin}^{(0)}(\mathbf{k}, \tau) := \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\tau \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}) - \hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\tau \hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}). \quad (7.6)$$

Мы применим к оператору $\hat{A}(t, \boldsymbol{\theta}) = \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ теоремы из §2. Согласно замечанию 2.12 мы можем отследить зависимость постоянных в оценках от данных задачи. Отметим, что \hat{c}_* , $\hat{\delta}$ и \hat{t}_0 не зависят от $\boldsymbol{\theta}$ (см. (6.4)–(6.6)). Согласно (6.7) норму $\|\hat{X}_1(\boldsymbol{\theta})\|$ можно заменить на $\alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2}$. Поэтому постоянные из теоремы 2.1 (примененной к оператору $\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$) не будут зависеть от $\boldsymbol{\theta}$. Они будут зависеть только от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Следующий результат установлен в [BSu5, теорема 7.2] и [M5, (7.32)].

Теорема 7.1 ([BSu5], [M5]). *При $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ выполнены оценки*

$$\|\mathfrak{D}_{\cos}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \hat{\mathcal{C}}_1(1 + |\tau|)\varepsilon,$$

$$\|\mathfrak{D}_{\sin}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \hat{\mathcal{C}}_2(1 + |\tau|).$$

Постоянные $\hat{\mathcal{C}}_1$ и $\hat{\mathcal{C}}_2$ зависят лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Теорема 7.1 выводится из теоремы 2.1 и соотношений (6.16), (7.2)–(7.4). Следует учесть также очевидные оценки

$$\|\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq 1, \quad (7.7)$$

$$\|\mathfrak{D}_{\cos}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq 2, \quad \|\mathfrak{D}_{\sin}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq 2\varepsilon^{-1}|\tau|. \quad (7.8)$$

Теперь мы усиливаем результат теоремы 7.1 при дополнительных предположениях. Наложим следующее условие.

Условие 7.2. Пусть оператор $\hat{N}(\boldsymbol{\theta})$ определен в (6.24). Предположим, что $\hat{N}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Из теоремы 2.2 выводится следующий результат, установленный в [DSu2, теорема 9.4].

Теорема 7.3 ([DSu2]). Пусть выполнено условие 7.2. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ выполнены оценки

$$\|\mathfrak{D}_{\cos}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/4}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \hat{\mathcal{C}}_3(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon,$$

$$\|\mathfrak{D}_{\sin}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{1/4}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \hat{\mathcal{C}}_4(1 + |\tau|)^{1/2}.$$

Постоянные $\hat{\mathcal{C}}_3$, $\hat{\mathcal{C}}_4$ зависят лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Теперь мы отказываемся от предположения $\hat{N}(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$, но взамен предположим, что $\hat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta}$. При этом считаем, что $\hat{N}(\boldsymbol{\theta}) = \hat{N}_*(\boldsymbol{\theta}) \neq 0$ при некотором $\boldsymbol{\theta}$. (Иначе применима теорема 7.3.) Нам хотелось бы применить “абстрактный” факт (теорему 2.3). Однако, возникает дополнительное осложнение, связанное с тем, что в некоторых точках $\boldsymbol{\theta}$ может меняться кратность спектра ростка $\hat{S}(\boldsymbol{\theta})$. При приближении к таким точкам расстояние между какой-то парой различных собственных значений ростка стремится к нулю и мы не можем выбрать величины \hat{c}_{jl}° , \hat{t}_{jl}^{00} не зависящими от $\boldsymbol{\theta}$. Поэтому мы вынуждены накладывать дополнительные условия. Заботиться надо только о тех собственных значениях, для которых соответствующее слагаемое в представлении (6.29) отлично от нуля. Из-за того, что количество различных собственных значений ростка и их кратности могут зависеть от $\boldsymbol{\theta}$, при формулировке дополнительного условия удобнее пользоваться исходной нумерацией собственных значений $\hat{\gamma}_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, \hat{\gamma}_n(\boldsymbol{\theta})$ ростка $\hat{S}(\boldsymbol{\theta})$ (каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность), условившись нумеровать их в порядке неубывания:

$$\hat{\gamma}_1(\boldsymbol{\theta}) \leq \hat{\gamma}_2(\boldsymbol{\theta}) \leq \dots \leq \hat{\gamma}_n(\boldsymbol{\theta}).$$

При каждом θ через $\hat{P}^{(k)}(\theta)$ обозначим ортопроектор пространства $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ на собственное подпространство оператора $\hat{S}(\theta)$, отвечающее собственному значению $\hat{\gamma}_k(\theta)$. Ясно, что при каждом θ оператор $\hat{P}^{(k)}(\theta)$ совпадает с одним из проекторов $\hat{P}_j(\theta)$, введенных в п. 6.8 (но номер j может зависеть от θ и меняется в точках перемены кратности спектра ростка).

Условие 7.4. 1°. Оператор $\hat{N}_0(\theta)$, определенный в (6.28), равен нулю: $\hat{N}_0(\theta) = 0$ при всех $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$. 2°. Для каждой пары индексов (k, r) , $1 \leq k, r \leq n$, $k \neq r$, такой что $\hat{\gamma}_k(\theta_0) = \hat{\gamma}_r(\theta_0)$ при некотором $\theta_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$, выполнено $\hat{P}^{(k)}(\theta)\hat{N}(\theta)\hat{P}^{(r)}(\theta) = 0$ при всех $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Условие 2° может быть переформулировано: мы требуем, чтобы для ненулевых (тождественно) “блоков” $\hat{P}^{(k)}(\theta)\hat{N}(\theta)\hat{P}^{(r)}(\theta)$ оператора $\hat{N}(\theta)$ соответствующие ветви собственных значений $\hat{\gamma}_k(\theta)$ и $\hat{\gamma}_r(\theta)$ не пересекались. Разумеется, выполнение условия 7.4 гарантируется следующим более сильным условием.

Условие 7.5. 1°. Оператор $\hat{N}_0(\theta)$, определенный в (6.28), равен нулю: $\hat{N}_0(\theta) = 0$ при всех $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$. 2°. Количество p различных собственных значений спектрального ростка $\hat{S}(\theta)$ не зависит от $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Замечание 7.6. Предположение пункта 2° условия 7.5 заведомо выполнено, если спектр ростка $\hat{S}(\theta)$ простой при всех $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Итак, предполагаем выполненным условие 7.4. Нас интересуют только пары индексов из множества

$$\hat{\mathcal{K}} := \{(k, r) : 1 \leq k, r \leq n, k \neq r, \hat{P}^{(k)}(\theta)\hat{N}(\theta)\hat{P}^{(r)}(\theta) \neq 0\}.$$

Введем обозначение

$$\hat{c}_{kr}^\circ(\theta) := \min\{\hat{c}_*, n^{-1}|\hat{\gamma}_k(\theta) - \hat{\gamma}_r(\theta)|\}, \quad (k, r) \in \hat{\mathcal{K}}.$$

Поскольку оператор $\hat{S}(\theta)$ непрерывно зависит от $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$ (это многочлен второй степени), то из теории возмущений дискретного спектра следует, что $\hat{\gamma}_j(\theta)$ — непрерывные функции на сфере \mathbb{S}^{d-1} . В силу условия 7.4(2°) при $(k, r) \in \hat{\mathcal{K}}$ выполнено $|\hat{\gamma}_k(\theta) - \hat{\gamma}_r(\theta)| > 0$ при всех $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$, а тогда

$$\hat{c}_{kr}^\circ := \min_{\theta \in \mathbb{S}^{d-1}} \hat{c}_{kr}^\circ(\theta) > 0, \quad (k, r) \in \hat{\mathcal{K}}.$$

Положим

$$\hat{c}^\circ := \min_{(k, r) \in \hat{\mathcal{K}}} \hat{c}_{kr}^\circ. \quad (7.9)$$

Ясно, что число (7.9) — это реализация величины (2.3), выбранная не зависящей от θ . Число, подчиненное (2.4), при условии 7.4 также можно выбрать не зависящим от $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$. С учетом (6.5) и (6.7) положим

$$\hat{t}^{00} = (8\beta_2)^{-1}r_0\alpha_1^{-3/2}\alpha_0^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{-3/2}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1/2}\hat{c}^\circ,$$

где \hat{c}° определено в (7.9). (Условие $\hat{t}^{00} \leq \hat{t}_0$ выполнено, поскольку $\hat{c}^\circ \leq \|\hat{S}(\theta)\| \leq \alpha_1\|g\|_{L_\infty}$.)

Замечание 7.7. В отличие от числа \hat{t}_0 (см. (6.6)), которое контролируется только через r_0 , α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$ и $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, величина \hat{t}^{00} зависит от спектральной характеристики ростка — минимального расстояния между его различными собственными значениями $\hat{\gamma}_k(\theta)$ и $\hat{\gamma}_r(\theta)$ (где $(k, r) \in \hat{\mathcal{K}}$).

При условии 7.4 из теоремы 2.3 выводим следующий результат (см. [DSu2, теорема 9.9]). Следует учитывать, что сейчас константы в оценках будут зависеть не только от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 , но и от \hat{c}° и n ; см. замечание 2.12.

Теорема 7.8 ([DSu2]). Пусть выполнено условие 7.4 (или более сильное условие 7.5). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ выполнены оценки

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{D}_{\cos}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/4}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq \widehat{\mathcal{C}}_5(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon, \\ \|\mathfrak{D}_{\sin}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{1/4}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq \widehat{\mathcal{C}}_6(1 + |\tau|)^{1/2}. \end{aligned}$$

Постоянные $\widehat{\mathcal{C}}_5$, $\widehat{\mathcal{C}}_6$ зависят от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 , а также от n и $\widehat{\mathcal{C}}^\circ$.

7.2. Более точная аппроксимация по операторной норме в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$. В силу (6.9) имеем

$$t\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta})\widehat{P} = \Lambda b(\mathbf{k})\widehat{P} = \Lambda b(\mathbf{D} + \mathbf{k})\widehat{P}. \quad (7.10)$$

Из (6.25) следует, что

$$t^3\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})\widehat{P} = \widehat{N}(\mathbf{k})\widehat{P} = b(\mathbf{k})^*L(\mathbf{k})b(\mathbf{k})\widehat{P} = b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^*L(\mathbf{D} + \mathbf{k})b(\mathbf{D} + \mathbf{k})\widehat{P}. \quad (7.11)$$

Отметим, что из (1.2), (1.13) и (6.7) вытекают оценки

$$\|\widehat{X}_0\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \|\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta})\| \leq \alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}, \quad (7.12)$$

$$\|\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq (8\widehat{\delta})^{-1/2}\|\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta})\| \leq (8\widehat{\delta})^{-1/2}\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2} =: C_{\widehat{Z}}, \quad (7.13)$$

$$\|\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq (2\widehat{\delta})^{-1/2}\|\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta})\|^3 \leq (2\widehat{\delta})^{-1/2}\alpha_1^{3/2}\|g\|_{L_\infty}^{3/2} =: C_{\widehat{N}}. \quad (7.14)$$

Положим

$$\widehat{G}_0(\mathbf{k}) := \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \zeta^{1/2} (\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) + \zeta I)^{-1} b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* L(\mathbf{D} + \mathbf{k}) b(\mathbf{D} + \mathbf{k}) (\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) + \zeta I)^{-1} d\zeta, \quad (7.15)$$

$$\widehat{\widehat{G}}_0(\mathbf{k}) := -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \zeta^{-1/2} (\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) + \zeta I)^{-1} b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* L(\mathbf{D} + \mathbf{k}) b(\mathbf{D} + \mathbf{k}) (\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) + \zeta I)^{-1} d\zeta. \quad (7.16)$$

В силу (6.16) и (7.11) операторы (2.5) и (2.6) сейчас зависят от $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}$ и совпадают с $\widehat{G}_0(\mathbf{k})\widehat{P}$ и $\widehat{\widehat{G}}_0(\mathbf{k})\widehat{P}$ соответственно. Из (2.11), (2.12) с учетом (6.7) вытекают оценки

$$\begin{aligned} \|\widehat{G}_0(\mathbf{k})\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq \frac{1}{2}(2\widehat{\delta})^{-1/2}\widehat{\mathcal{C}}_*^{-1/2}\|\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta})\|^3|\mathbf{k}|^2 \\ &\leq \frac{1}{2}(2\widehat{\delta})^{-1/2}\widehat{\mathcal{C}}_*^{-1/2}\alpha_1^{3/2}\|g\|_{L_\infty}^{3/2}|\mathbf{k}|^2 =: C_{\widehat{G}_0}|\mathbf{k}|^2, \end{aligned} \quad (7.17)$$

$$\begin{aligned} \|\widehat{\widehat{G}}_{0,Q}(\mathbf{k})\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq \frac{1}{2}(2\widehat{\delta})^{-1/2}\widehat{\mathcal{C}}_*^{-3/2}\|\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta})\|^3 \\ &\leq \frac{1}{2}(2\widehat{\delta})^{-1/2}\widehat{\mathcal{C}}_*^{-3/2}\alpha_1^{3/2}\|g\|_{L_\infty}^{3/2} =: C_{\widehat{\widehat{G}}_0}. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Положим

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) &:= \cos(\varepsilon^{-1}\tau \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2})(I + \Lambda b(\mathbf{D} + \mathbf{k})\widehat{P}) \\ &\quad - (I + \Lambda b(\mathbf{D} + \mathbf{k})\widehat{P}) \cos(\varepsilon^{-1}\tau \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}), \end{aligned} \quad (7.19)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) &:= \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}) \\ &\quad - (I + \Lambda b(\mathbf{D} + \mathbf{k})\widehat{P}) \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}), \end{aligned} \quad (7.20)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) &:= \mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \\ &\quad + \varepsilon^{-1} \int_0^\tau \cos(\varepsilon^{-1}(\tau - \tilde{\tau}) \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}) \widehat{G}_0(\mathbf{k}) \sin(\varepsilon^{-1}\tilde{\tau} \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}) d\tilde{\tau} \\ &\quad + \varepsilon^{-1} \int_0^\tau \sin(\varepsilon^{-1}(\tau - \tilde{\tau}) \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}) \widehat{G}_0(\mathbf{k}) \cos(\varepsilon^{-1}\tilde{\tau} \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}) d\tilde{\tau}, \end{aligned} \quad (7.21)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) &:= \mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) - \widehat{\widehat{G}}_0(\mathbf{k}) \sin(\varepsilon^{-1}\tau \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}) \\ &\quad - \varepsilon^{-1} \int_0^\tau \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{-1/2} \cos(\varepsilon^{-1}(\tau - \tilde{\tau}) \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}) \widehat{G}_0(\mathbf{k}) \cos(\varepsilon^{-1}\tilde{\tau} \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}) d\tilde{\tau} \\ &\quad + \varepsilon^{-1} \int_0^\tau \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}(\tau - \tilde{\tau}) \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}) \widehat{G}_0(\mathbf{k}) \sin(\varepsilon^{-1}\tilde{\tau} \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}) d\tilde{\tau}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Операторы (7.19), (7.20) ограничены, а операторы (7.21), (7.22) в общем случае определены на $\widetilde{H}^2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ и $\widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$ соответственно. Представим операторы (7.19)–(7.22) в виде

$$\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) = \mathfrak{D}_{\cos}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) + \mathfrak{G}_{\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau), \quad (7.23)$$

$$\mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) = \mathfrak{D}_{\sin}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) + \mathfrak{G}_{\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau), \quad (7.24)$$

$$\mathfrak{D}_{\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) = \mathfrak{D}_{\cos}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) + \mathfrak{G}_{\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) + \mathfrak{G}_{\cos}^{(2)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau), \quad (7.25)$$

$$\mathfrak{D}_{\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) = \mathfrak{D}_{\sin}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) + \mathfrak{G}_{\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) + \mathfrak{G}_{\sin}^{(2)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) + \mathfrak{G}_{\sin}^{(3)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau), \quad (7.26)$$

где $\mathfrak{D}_{\cos}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)$ и $\mathfrak{D}_{\sin}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)$ определены согласно (7.5), (7.6) и

$$\mathfrak{G}_{\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) := \cos(\varepsilon^{-1}\tau \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}) \Lambda b(\mathbf{D} + \mathbf{k}) \widehat{P} - \Lambda b(\mathbf{D} + \mathbf{k}) \widehat{P} \cos(\varepsilon^{-1}\tau \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}), \quad (7.27)$$

$$\mathfrak{G}_{\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) := -\Lambda b(\mathbf{D} + \mathbf{k}) \widehat{P} \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}), \quad (7.28)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{\cos}^{(2)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) &:= \varepsilon^{-1} \int_0^\tau \cos(\varepsilon^{-1}(\tau - \tilde{\tau}) \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}) \widehat{G}_0(\mathbf{k}) \sin(\varepsilon^{-1}\tilde{\tau} \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}) d\tilde{\tau} \\ &\quad + \varepsilon^{-1} \int_0^\tau \sin(\varepsilon^{-1}(\tau - \tilde{\tau}) \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}) \widehat{G}_0(\mathbf{k}) \cos(\varepsilon^{-1}\tilde{\tau} \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}) d\tilde{\tau}, \end{aligned} \quad (7.29)$$

$$\mathfrak{G}_{\sin}^{(2)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) := -\widehat{\widehat{G}}_0(\mathbf{k}) \sin(\varepsilon^{-1}\tau \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}), \quad (7.30)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{\sin}^{(3)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) &:= -\varepsilon^{-1} \int_0^\tau \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{-1/2} \cos(\varepsilon^{-1}(\tau - \tilde{\tau}) \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}) \widehat{G}_0(\mathbf{k}) \cos(\varepsilon^{-1}\tilde{\tau} \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}) d\tilde{\tau} \\ &\quad + \varepsilon^{-1} \int_0^\tau \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}(\tau - \tilde{\tau}) \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}) \widehat{G}_0(\mathbf{k}) \sin(\varepsilon^{-1}\tilde{\tau} \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}) d\tilde{\tau}. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Из (7.10), (7.13), (7.17), (7.18), (7.23)–(7.31) с учетом элементарного неравенства $|\sin x|/|x| \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$, и (6.17) следует, что при $\varepsilon > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{G}_{\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq 2C_{\widehat{Z}}|\mathbf{k}|, \\ \|\mathfrak{G}_{\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq \widehat{c}_*^{-1/2}C_{\widehat{Z}}, \\ \|\mathfrak{G}_{\cos}^{(2)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq 2\varepsilon^{-1}|\tau|C_{\widehat{G}_0}|\mathbf{k}|^2, \\ \|\mathfrak{G}_{\sin}^{(2)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq C_{\widehat{G}_0}, \\ \|\mathfrak{G}_{\sin}^{(3)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq 2\varepsilon^{-1}|\tau|\widehat{c}_*^{-1/2}C_{\widehat{G}_0}|\mathbf{k}|, \\ \|\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq 2(1 + C_{\widehat{Z}}|\mathbf{k}|), \end{aligned} \quad (7.32)$$

$$\|\mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq 2\varepsilon^{-1}|\tau| + \widehat{c}_*^{-1/2}C_{\widehat{Z}}, \quad (7.33)$$

$$\|\mathfrak{D}_{\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq 2(1 + C_{\widehat{Z}}|\mathbf{k}| + \varepsilon^{-1}|\tau|C_{\widehat{G}_0}|\mathbf{k}|^2), \quad (7.34)$$

$$\|\mathfrak{D}_{\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq 2\varepsilon^{-1}|\tau| + \widehat{c}_*^{-1/2}C_{\widehat{Z}} + C_{\widehat{G}_0} + 2\varepsilon^{-1}|\tau|\widehat{c}_*^{-1/2}C_{\widehat{G}_0}|\mathbf{k}|. \quad (7.35)$$

С учетом (6.16), (7.10), (7.11) ясно, что операторы (2.7)–(2.10) сейчас зависят от $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}$, τ и совпадают с операторами $\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \tau)\widehat{P}$, $\mathfrak{D}_{\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \tau)\widehat{P}$, $\mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \tau)\widehat{P}$ и $\mathfrak{D}_{\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \tau)\widehat{P}$, соответственно.

Теорема 7.9. Пусть операторы $\mathfrak{D}_{\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)$, $\mathfrak{D}_{\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)$ определены в (7.21), (7.22). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ справедливы оценки

$$\|\mathfrak{D}_{\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^2\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \widehat{C}_7(1 + |\tau|)^2\varepsilon^2, \quad (7.36)$$

$$\|\mathfrak{D}_{\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \widehat{C}_8(1 + |\tau|)^2\varepsilon. \quad (7.37)$$

Константы \widehat{C}_7 и \widehat{C}_8 зависят лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Доказательство. Применяя теорему 2.5 с учетом замечания 2.12 и равенства (7.2), получаем

$$\|\mathfrak{D}_{\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^2\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \widehat{C}_7'(1 + |\tau|)^2\varepsilon^2, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, |\mathbf{k}| \leq \widehat{t}_0, \quad (7.38)$$

$$\|\mathfrak{D}_{\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2}\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \widehat{C}_8'(1 + |\tau|)^2\varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, |\mathbf{k}| \leq \widehat{t}_0. \quad (7.39)$$

Константы \widehat{C}_7' и \widehat{C}_8' зависят лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 . Оценки при $|\mathbf{k}| > \widehat{t}_0$ тривиальны. Воспользуемся (7.2), (7.34) и (7.35):

$$\begin{aligned} &\|\mathfrak{D}_{\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2}\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ &\leq 2(1 + C_{\widehat{Z}}|\mathbf{k}| + \varepsilon^{-1}|\tau|C_{\widehat{G}_0}|\mathbf{k}|^2)\varepsilon^3(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-3/2} \\ &\leq 2((\widehat{t}_0)^{-2} + C_{\widehat{Z}}(\widehat{t}_0)^{-1} + C_{\widehat{G}_0}(\widehat{t}_0)^{-1}|\tau|)\varepsilon^2, \end{aligned} \quad (7.40)$$

$$\varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, \mathbf{k} \in \tilde{\Omega}, |\mathbf{k}| > \widehat{t}_0,$$

$$\begin{aligned} &\|\mathfrak{D}_{\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ &\leq \left(2\varepsilon^{-1}|\tau| + \widehat{c}_*^{-1/2}C_{\widehat{Z}} + C_{\widehat{G}_0} + 2\varepsilon^{-1}|\tau|\widehat{c}_*^{-1/2}C_{\widehat{G}_0}|\mathbf{k}|\right)\varepsilon^2(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-1} \\ &\leq \left(2|\tau|(\widehat{t}_0)^{-2} + \widehat{c}_*^{-1/2}C_{\widehat{Z}}(\widehat{t}_0)^{-1} + C_{\widehat{G}_0}(\widehat{t}_0)^{-1} + 2|\tau|\widehat{c}_*^{-1/2}C_{\widehat{G}_0}(\widehat{t}_0)^{-1}\right)\varepsilon, \end{aligned} \quad (7.41)$$

$$\varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, \mathbf{k} \in \tilde{\Omega}, |\mathbf{k}| > \widehat{t}_0.$$

Теперь оценим оператор

$$\begin{aligned} & \mathfrak{D}_{\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2} (I - \hat{P}) \\ &= \mathfrak{D}_{\cos}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2} (I - \hat{P}) + \mathfrak{G}_{\cos}^{(2)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2} (I - \hat{P}). \end{aligned}$$

Норма первого слагаемого не превосходит $2r_0^{-2}\varepsilon^2$ в силу (7.4), (7.7) и (7.8). Второе слагаемое легко оценить, используя дискретное преобразование Фурье и (7.29). Его норма равна

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \neq \mathbf{b} \in \tilde{\Gamma}} \varepsilon^{-1} \left| \int_0^\tau \cos(\varepsilon^{-1}(\tau - \tilde{\tau}) \hat{S}(\mathbf{b} + \mathbf{k})^{1/2}) \hat{G}_0^{\mathbf{b}}(\mathbf{k}) \sin(\varepsilon^{-1} \tilde{\tau} \hat{S}(\mathbf{b} + \mathbf{k})^{1/2}) d\tilde{\tau} \right. \\ & \quad \left. + \int_0^\tau \sin(\varepsilon^{-1}(\tau - \tilde{\tau}) \hat{S}(\mathbf{b} + \mathbf{k})^{1/2}) \hat{G}_0^{\mathbf{b}}(\mathbf{k}) \cos(\varepsilon^{-1} \tilde{\tau} \hat{S}(\mathbf{b} + \mathbf{k})^{1/2}) d\tilde{\tau} \right| \varepsilon^3 (|\mathbf{b} + \mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-3/2}, \end{aligned}$$

где

$$\hat{G}_0^{\mathbf{b}}(\mathbf{k}) := \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \zeta^{1/2} (\hat{S}(\mathbf{b} + \mathbf{k}) + \zeta I)^{-1} b(\mathbf{b} + \mathbf{k})^* L(\mathbf{b} + \mathbf{k}) b(\mathbf{b} + \mathbf{k}) (\hat{S}(\mathbf{b} + \mathbf{k}) + \zeta I)^{-1} d\zeta.$$

Нетрудно убедиться, что $|\hat{G}_0^{\mathbf{b}}(\mathbf{k})| \leq C_{\hat{G}_0} |\mathbf{b} + \mathbf{k}|^2$. Отсюда с учетом неравенства $|\mathbf{b} + \mathbf{k}| \geq r_0$ при $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и $0 \neq \mathbf{b} \in \tilde{\Gamma}$ получаем, что рассматриваемый супремум не превосходит величины $2C_{\hat{G}_0} r_0^{-1} |\tau| \varepsilon^2$. Таким образом,

$$\|\mathfrak{D}_{\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2} (I - \hat{P})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq 2(r_0^{-2} + C_{\hat{G}_0} r_0^{-1} |\tau|) \varepsilon^2. \quad (7.42)$$

Аналогичным образом, используя элементарное неравенство $|\sin x|/|x| \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$, и дискретное преобразование Фурье, нетрудно вывести оценку

$$\begin{aligned} & \|\mathfrak{D}_{\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon) (I - \hat{P})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ & \leq (2|\tau| r_0^{-2} + C_{\hat{G}_0} r_0^{-1} + 2|\tau| \hat{c}_*^{-1/2} C_{\hat{G}_0} r_0^{-1}) \varepsilon. \end{aligned} \quad (7.43)$$

Сопоставляя (7.38)–(7.43) и учитывая (7.7), приходим к оценкам (7.36), (7.37). \square

Теперь на основании теорем 2.7, 2.8 мы усиливаем результат при дополнительных предположениях.

Теорема 7.10. Пусть операторы $\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)$, $\mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)$ определены в (7.19), (7.20). Пусть выполнено условие 7.2. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ справедливы оценки

$$\|\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \hat{\mathcal{C}}_9 (1 + |\tau|) \varepsilon^2, \quad (7.44)$$

$$\|\mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \hat{\mathcal{C}}_{10} (1 + |\tau|) \varepsilon. \quad (7.45)$$

Постоянные $\hat{\mathcal{C}}_9$ и $\hat{\mathcal{C}}_{10}$ зависят лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Доказательство. Применяя теорему 2.7, с учетом замечания 2.12 и равенства (7.2) получаем

$$\|\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2} \hat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \hat{\mathcal{C}}_9' (1 + |\tau|) \varepsilon^2, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, |\mathbf{k}| \leq \hat{t}_0, \quad (7.46)$$

$$\|\mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon) \hat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \hat{\mathcal{C}}_{10}' (1 + |\tau|) \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, |\mathbf{k}| \leq \hat{t}_0, \quad (7.47)$$

где константы $\hat{\mathcal{C}}_9'$ и $\hat{\mathcal{C}}_{10}'$ зависят лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Аналогично (7.40) и (7.41), используя (7.32), (7.33), получаем оценки при $|\mathbf{k}| > \hat{t}_0$:

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2}\hat{P}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} &\leq 2((\hat{t}_0)^{-2} + C_{\hat{Z}}(\hat{t}_0)^{-1})\varepsilon^2, \\ \varepsilon &> 0, \tau \in \mathbb{R}, \mathbf{k} \in \tilde{\Omega}, |\mathbf{k}| > \hat{t}_0, \end{aligned} \quad (7.48)$$

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)\hat{P}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} &\leq (2|\tau|(\hat{t}_0)^{-2} + \hat{c}_*^{-1/2}C_{\hat{Z}}(\hat{t}_0)^{-1})\varepsilon, \\ \varepsilon &> 0, \tau \in \mathbb{R}, \mathbf{k} \in \tilde{\Omega}, |\mathbf{k}| > \hat{t}_0. \end{aligned} \quad (7.49)$$

Наконец, учитывая равенства

$$\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)(I - \hat{P}) = \mathfrak{D}_{\cos}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)(I - \hat{P}), \quad \mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)(I - \hat{P}) = \mathfrak{D}_{\sin}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)(I - \hat{P}),$$

и оценки (7.4), (7.8), имеем

$$\|\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2}(I - \hat{P})\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} \leq 2r_0^{-2}\varepsilon^2, \quad (7.50)$$

$$\|\mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)(I - \hat{P})\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} \leq 2|\tau|r_0^{-2}\varepsilon. \quad (7.51)$$

В итоге, оценка (7.44) следует из (7.46), (7.48) и (7.50), а оценка (7.45) — из (7.47), (7.49) и (7.51). \square

Из теоремы 2.8, аналогов оценок (7.40), (7.41) при $|\mathbf{k}| > \hat{t}^{00}$ и (7.42), (7.43) выводим следующий результат. Следует учитывать, что сейчас константы в оценках будут зависеть не только от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 , но также и от \hat{c}° и n ; см. замечание 2.12.

Теорема 7.11. Пусть операторы $\mathfrak{D}_{\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)$, $\mathfrak{D}_{\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)$ определены в (7.21), (7.22). Пусть выполнено условие 7.4 (или более сильное условие 7.5). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{D}_{\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} &\leq \hat{C}_{11}(1 + |\tau|)\varepsilon^2, \\ \|\mathfrak{D}_{\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} &\leq \hat{C}_{12}(1 + |\tau|)\varepsilon. \end{aligned}$$

Постоянные \hat{C}_{11} и \hat{C}_{12} зависят от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, r_0$, а также от \hat{c}° и n .

7.3. Аппроксимация по энергетической норме. Из (7.10) и (7.19) вытекает оценка

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\hat{P}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} &\leq 2\|\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}(\hat{P} + t\hat{Z}(\boldsymbol{\theta})\hat{P})\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} \\ &= 2\|(\hat{X}_0 + t\hat{X}_1(\boldsymbol{\theta}))(\hat{P} + t\hat{Z}(\boldsymbol{\theta})\hat{P})\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} \\ &= 2\|t\hat{X}_1(\boldsymbol{\theta})\hat{P} + t\hat{X}_0\hat{Z}(\boldsymbol{\theta})\hat{P} + t^2\hat{X}_1(\boldsymbol{\theta})\hat{Z}(\boldsymbol{\theta})\hat{P}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

С учетом (6.7), (7.12) и (7.13) отсюда следует оценка

$$\|\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\hat{P}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} \leq \hat{C}'_{13}|\mathbf{k}| + \hat{C}''_{13}|\mathbf{k}|^2 \quad (7.52)$$

при $\varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}$ и $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$, где $\hat{C}'_{13} = 4\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}$, $\hat{C}''_{13} = 2\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}C_{\hat{Z}}$.

Из теоремы 2.9 выводим следующий результат.

Теорема 7.12. Пусть оператор $\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)$ определен в (7.19). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ выполнена оценка

$$\|\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} \leq \hat{C}_{14}(1 + |\tau|)\varepsilon^2. \quad (7.53)$$

Постоянная \hat{C}_{14} зависит лишь от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Доказательство. Применяя теорему 2.9 и учитывая замечание 2.12, получаем

$$\left\| \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2} \hat{P} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \hat{\mathcal{C}}_{14}' (1 + |\tau|) \varepsilon^2, \quad (7.54)$$

$$\varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, |\mathbf{k}| \leq \hat{t}_0.$$

Постоянная $\hat{\mathcal{C}}_{14}'$ зависит лишь от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

При $|\mathbf{k}| > \hat{t}_0$ оценки тривиальны. В силу (7.2) и (7.52) имеем:

$$\left\| \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon) \hat{P} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq (\hat{\mathcal{C}}_{13}' |\mathbf{k}| + \hat{\mathcal{C}}_{13}'' |\mathbf{k}|^2) \frac{\varepsilon^2}{|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2} \quad (7.55)$$

$$\leq (\hat{\mathcal{C}}_{13}' (\hat{t}_0)^{-1} + \hat{\mathcal{C}}_{13}'') \varepsilon^2, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, \mathbf{k} \in \tilde{\Omega}, |\mathbf{k}| > \hat{t}_0.$$

Далее, из (7.19) вытекает оценка

$$\begin{aligned} & \left\| \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon) (I - \hat{P}) \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ & \leq 2 \left\| \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon) (I - \hat{P}) \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ & = 2 \left\| g^{1/2} b(\mathbf{D} + \mathbf{k}) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon) (I - \hat{P}) \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ & \leq 2\alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \sup_{0 \neq \mathbf{b} \in \tilde{\Gamma}} \frac{|\mathbf{b} + \mathbf{k}| \varepsilon^2}{|\mathbf{b} + \mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2} \\ & \leq 2\alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} r_0^{-1} \varepsilon^2, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, \mathbf{k} \in \tilde{\Omega}. \end{aligned} \quad (7.56)$$

Сопоставляя (7.54), (7.55) и (7.56) и учитывая (7.7), приходим к искомой оценке (7.53). \square

Теперь на основании теорем 2.10 и 2.11 мы усилим результат теоремы 7.12 при дополнительных предположениях.

Теорема 7.13. Пусть оператор $\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)$ определен в (7.19). Пусть выполнено условие 7.2. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ справедлива оценка

$$\left\| \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{5/4} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \hat{\mathcal{C}}_{15}' (1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon^2. \quad (7.57)$$

Постоянная $\hat{\mathcal{C}}_{15}'$ зависит лишь от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Доказательство. Применяя теорему 2.10 и учитывая замечание 2.12, получаем

$$\left\| \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{5/4} \hat{P} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \hat{\mathcal{C}}_{15}' (1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon^2, \quad (7.58)$$

$$\varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, |\mathbf{k}| \leq \hat{t}_0.$$

Постоянная $\hat{\mathcal{C}}_{15}'$ зависит лишь от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Вместе с (7.55) и (7.56) это влечет (7.57). \square

Теорема 7.14. Пусть оператор $\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)$ определен в (7.19). Пусть выполнено условие 7.4 (или более сильное условие 7.5). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ справедлива оценка

$$\left\| \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{5/4} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \hat{\mathcal{C}}_{16}' (1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon^2. \quad (7.58)$$

Постоянная $\hat{\mathcal{C}}_{16}'$ зависит от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, r_0$, а также от n и $\hat{\mathcal{C}}^\circ$.

Доказательство. Применяя теорему 2.11 и учитывая замечание 2.12, получаем

$$\left\| \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{5/4} \hat{P} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \hat{\mathcal{C}}'_{16} (1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon^2, \quad (7.59)$$

$$\varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, |\mathbf{k}| \leq \hat{t}^{00}.$$

Постоянная $\hat{\mathcal{C}}'_{16}$ зависит от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, r_0$, а также от n и \hat{c}^∞ .

Аналогично (7.55) имеем:

$$\left\| \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon) \hat{P} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq (\hat{\mathcal{C}}'_{13} (\hat{t}^{00})^{-1} + \hat{\mathcal{C}}''_{13}) \varepsilon^2, \quad (7.60)$$

$$\varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, \mathbf{k} \in \tilde{\Omega}, |\mathbf{k}| > \hat{t}^{00}.$$

Заметим, что неравенство (7.56) сохраняет силу (оно справедливо без каких-либо дополнительных условий). Вместе с (7.59) и (7.60) это влечет искомую оценку (7.58). \square

В завершение этого параграфа приведем результаты из [М5, (7.36)], [DSu2, теоремы 9.12, 9.13] об аппроксимации оператора $\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2})$ по энергетической норме. Эти результаты выводятся из теорем 2.9, 2.10, 2.11.

Теорема 7.15 ([М5]). Пусть оператор $\mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)$ определен в (7.20). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ справедлива оценка

$$\left\| \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon) \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \hat{\mathcal{C}}_{17} (1 + |\tau|) \varepsilon.$$

Постоянная $\hat{\mathcal{C}}_{17}$ зависит лишь от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Теорема 7.16 ([DSu2]). Пусть оператор $\mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)$ определен в (7.20). Пусть выполнено условие 7.2. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ справедлива оценка

$$\left\| \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/4} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \hat{\mathcal{C}}_{18} (1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon.$$

Постоянная $\hat{\mathcal{C}}_{18}$ зависит лишь от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Теорема 7.17 ([DSu2]). Пусть оператор $\mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)$ определен в (7.20). Пусть выполнено условие 7.4 (или более сильное условие 7.5). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ справедлива оценка

$$\left\| \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/4} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \hat{\mathcal{C}}_{19} (1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon.$$

Постоянная $\hat{\mathcal{C}}_{19}$ зависит от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, r_0$, а также от n и \hat{c}^∞ .

§ 8. ПОДТВЕРЖДЕНИЕ ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБ АППРОКСИМАЦИЯХ ОПЕРАТОРОВ $\cos(\varepsilon^{-1}\tau \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2})$ И $\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2})$

8.1. Точность относительно сглаживающего множителя. В утверждениях настоящего параграфа мы накладываем одно из следующих двух условий.

Условие 8.1. Пусть оператор $\hat{N}_0(\boldsymbol{\theta})$ определен в (6.28). Предположим, что $\hat{N}_0(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ в некоторой точке $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Условие 8.2. Пусть операторы $\hat{N}_0(\boldsymbol{\theta})$ и $\hat{N}^{(\ell)}(\boldsymbol{\theta})$ определены в (6.28) и (6.30) соответственно. Предположим, что $\hat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$ и для некоторого $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ и некоторого $\ell \in \{1, \dots, p(\boldsymbol{\theta}_0)\}$ выполнено $\hat{N}^{(\ell)}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$.

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 8.3. Пусть число $\hat{\delta}$ определено в (6.5), а \hat{t}_0 определено в (6.6). Пусть $\hat{F}(\mathbf{k}) = \hat{F}(t, \boldsymbol{\theta})$ — спектральный проектор оператора $\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ для промежутка $[0, \hat{\delta}]$. Пусть операторы $\hat{G}_0(\mathbf{k})$, $\hat{\hat{G}}_0(\mathbf{k})$ определены в (7.15), (7.16). Тогда при $|\mathbf{k}| \leq \hat{t}_0$, $|\mathbf{k}_0| \leq \hat{t}_0$ справедливы соотношения

$$\|\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\hat{F}(\mathbf{k}) - \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}_0)\hat{F}(\mathbf{k}_0)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \hat{C}'|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|, \quad (8.1)$$

$$\|\cos(\tau\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2})\hat{F}(\mathbf{k}) - \cos(\tau\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}_0)^{1/2})\hat{F}(\mathbf{k}_0)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \hat{C}''(\tau)|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|, \quad (8.2)$$

$$\|\sin(\tau\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2})\hat{F}(\mathbf{k}) - \sin(\tau\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}_0)^{1/2})\hat{F}(\mathbf{k}_0)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \hat{C}'''(\tau)|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|, \quad (8.3)$$

$$\|\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\tau\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2})\hat{F}(\mathbf{k}) - \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}_0)^{-1/2} \sin(\tau\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}_0)^{1/2})\hat{F}(\mathbf{k}_0)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \hat{C}''''(\tau)|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|, \quad (8.4)$$

$$\|\hat{G}_0(\mathbf{k})\hat{P} - \hat{G}_0(\mathbf{k}_0)\hat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \hat{C}''''|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|, \quad (8.5)$$

$$\lim_{|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| \rightarrow 0} \|\hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{-1/2} \hat{G}_0(\mathbf{k})\hat{P} - \hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}_0)^{-1/2} \hat{G}_0(\mathbf{k}_0)\hat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} = 0, \quad (8.6)$$

$$\lim_{|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| \rightarrow 0} \|\hat{\hat{G}}_0(\mathbf{k}) \sin(\tau\hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2})\hat{P} - \hat{\hat{G}}_0(\mathbf{k}_0) \sin(\tau\hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}_0)^{1/2})\hat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} = 0. \quad (8.7)$$

Доказательство. Оценка (8.1) была проверена в [Su6, лемма 9.9], а (8.2), (8.4) — в [DSu1, лемма 7.9]. Оценка (8.3) проверяется точно так же, как и (8.2).

Докажем (8.5). Справедливы тождества

$$\begin{aligned} & (\hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) + \zeta I)^{-1} \hat{P} - (\hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}_0) + \zeta I)^{-1} \hat{P} \\ &= -(\hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) + \zeta I)^{-1} (\hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) - \hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}_0)) (\hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}_0) + \zeta I)^{-1} \hat{P} \end{aligned} \quad (8.8)$$

и

$$\begin{aligned} & (\hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) + \zeta I)^{-1} \hat{N}(\mathbf{k}) (\hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) + \zeta I)^{-1} \hat{P} - (\hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}_0) + \zeta I)^{-1} \hat{N}(\mathbf{k}_0) (\hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}_0) + \zeta I)^{-1} \hat{P} \\ &= ((\hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) + \zeta I)^{-1} - (\hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}_0) + \zeta I)^{-1}) \hat{N}(\mathbf{k}) (\hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) + \zeta I)^{-1} \hat{P} \\ &+ (\hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}_0) + \zeta I)^{-1} (\hat{N}(\mathbf{k}) - \hat{N}(\mathbf{k}_0)) (\hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) + \zeta I)^{-1} \hat{P} \\ &+ (\hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}_0) + \zeta I)^{-1} \hat{N}(\mathbf{k}_0) ((\hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) + \zeta I)^{-1} - (\hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}_0) + \zeta I)^{-1}) \hat{P}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Из (6.17) вытекает оценка

$$\|(\hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) + \zeta I)^{-1} \hat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq (\hat{c}_* |\mathbf{k}|^2 + \zeta)^{-1}. \quad (8.10)$$

Далее, в силу (8.1) (применительно к $\hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})$), (8.8) и (8.10) имеем

$$\begin{aligned} & \|(\hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) + \zeta I)^{-1} \hat{P} - (\hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}_0) + \zeta I)^{-1} \hat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ & \leq (\hat{c}_* |\mathbf{k}|^2 + \zeta)^{-1} (\hat{c}_* |\mathbf{k}_0|^2 + \zeta)^{-1} \hat{C}' |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Так как $\hat{N}(\mathbf{k})$ — однородный многочлен третьей степени от \mathbf{k} (см. (6.25)), то

$$\|\hat{N}(\mathbf{k}) - \hat{N}(\mathbf{k}_0)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C(|\mathbf{k}|^2 + |\mathbf{k}_0|^2) |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| \quad (8.12)$$

с некоторой константой C . Применяя (7.11), (7.14), (7.15), (8.9)–(8.12) и равенства

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \zeta^{1/2} (\hat{c}_* |\mathbf{k}|^2 + \zeta)^{-1} (\hat{c}_* |\mathbf{k}_0|^2 + \zeta)^{-1} d\zeta = \frac{1}{\hat{c}_*^{1/2} (|\mathbf{k}| + |\mathbf{k}_0|)}, \\ & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \zeta^{1/2} (\hat{c}_* |\mathbf{k}|^2 + \zeta)^{-2} (\hat{c}_* |\mathbf{k}_0|^2 + \zeta)^{-1} d\zeta = \frac{1}{2\hat{c}_*^{3/2} |\mathbf{k}| (|\mathbf{k}| + |\mathbf{k}_0|)^2}, \end{aligned}$$

получаем оценку

$$\begin{aligned} \|\widehat{G}_0(\mathbf{k})\widehat{P} - \widehat{G}_0(\mathbf{k}_0)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq C\widehat{c}_*^{-1/2} \cdot \frac{(|\mathbf{k}|^2 + |\mathbf{k}_0|^2)|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|}{|\mathbf{k}| + |\mathbf{k}_0|} \\ &\quad + \widehat{C}'C_{\widehat{N}}\widehat{c}_*^{-3/2} \cdot \frac{(|\mathbf{k}|^2 + |\mathbf{k}_0|^2)|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|}{2(|\mathbf{k}| + |\mathbf{k}_0|)^2}, \end{aligned}$$

откуда следует (8.5) при $\widehat{C}'''' = 2C\widehat{c}_*^{-1/2}\widehat{t}_0 + \frac{1}{2}\widehat{C}'C_{\widehat{N}}\widehat{c}_*^{-3/2}$.

Перейдем к доказательству соотношения (8.6). Очевидно,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) &:= \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\widehat{G}_0(\mathbf{k})\widehat{P} - \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}_0)^{-1/2}\widehat{G}_0(\mathbf{k}_0)\widehat{P} \\ &= (\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\widehat{P} - \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}_0)^{-1/2}\widehat{P})\widehat{G}_0(\mathbf{k})\widehat{P} + \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}_0)^{-1/2}(\widehat{G}_0(\mathbf{k}) - \widehat{G}_0(\mathbf{k}_0))\widehat{P} \\ &=: \mathcal{I}_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) + \mathcal{I}_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0). \end{aligned}$$

Оценим оператор $\mathcal{I}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$. Достаточно считать, что $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_0$ (так как при $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ это нулевой оператор). Для определенности будем считать, что $|\mathbf{k}| < |\mathbf{k}_0|$ и $\mathbf{k}_0 \neq 0$. (Иначе поменяем ролями \mathbf{k} и \mathbf{k}_0 .)

В силу (6.17) и (8.5) оператор $\mathcal{I}_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$ подчинен оценке

$$\|\mathcal{I}_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \widehat{c}_*^{-1/2}\widehat{C}'''' \frac{|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|}{|\mathbf{k}_0|}. \quad (8.13)$$

Для рассмотрения члена $\mathcal{I}_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$ воспользуемся представлением

$$\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\widehat{P} - \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}_0)^{-1/2}\widehat{P} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \zeta^{-1/2} ((\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) + \zeta I)^{-1} - (\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}_0) + \zeta I)^{-1}) \widehat{P} d\zeta. \quad (8.14)$$

Из (8.11) и (8.14) с учетом равенства

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \zeta^{-1/2} (\widehat{c}_*|\mathbf{k}|^2 + \zeta)^{-1} (\widehat{c}_*|\mathbf{k}_0|^2 + \zeta)^{-1} d\zeta = \frac{1}{\widehat{c}_*^{3/2}|\mathbf{k}||\mathbf{k}_0|(|\mathbf{k}| + |\mathbf{k}_0|)}, \quad (8.15)$$

получаем

$$\|\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\widehat{P} - \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}_0)^{-1/2}\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \widehat{C}'\widehat{c}_*^{-3/2} \frac{|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|}{|\mathbf{k}||\mathbf{k}_0|(|\mathbf{k}| + |\mathbf{k}_0|)}. \quad (8.16)$$

В силу (7.17) и (8.16) выполнено неравенство

$$\|\mathcal{I}_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \widehat{C}'\widehat{c}_*^{-3/2}C_{\widehat{G}_0} \frac{|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|}{|\mathbf{k}_0|}. \quad (8.17)$$

В итоге неравенства (8.13) и (8.17) влекут

$$\|\mathcal{I}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \check{C}' \frac{|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|}{|\mathbf{k}_0|}, \quad \check{C}' = \widehat{c}_*^{-1/2}\widehat{C}'''' + \widehat{C}'\widehat{c}_*^{-3/2}C_{\widehat{G}_0}. \quad (8.18)$$

С другой стороны, из (6.17) и (7.17) с учетом $|\mathbf{k}| < |\mathbf{k}_0|$ следует неравенство

$$\|\mathcal{I}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \widehat{c}_*^{-1/2}C_{\widehat{G}_0}(|\mathbf{k}| + |\mathbf{k}_0|) \leq \check{C}''|\mathbf{k}_0|, \quad \check{C}'' = 2\widehat{c}_*^{-1/2}C_{\widehat{G}_0}. \quad (8.19)$$

Зададимся числом $\eta > 0$. В силу (8.19) при $|\mathbf{k}_0| < \eta(\check{C}'')^{-1}$ выполнено неравенство $\|\mathcal{I}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} < \eta$.

Пусть теперь $|\mathbf{k}_0| \geq \eta(\check{C}'')^{-1}$. Тогда из (8.18) вытекает оценка

$$\|\mathcal{I}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \check{C}'\check{C}''\eta^{-1}|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|.$$

Следовательно, при $|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| < \eta^2(\check{C}'\check{C}'')^{-1}$ выполнено $\|\mathcal{I}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} < \eta$.

Из сказанного следует, что $\|\mathcal{I}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \rightarrow 0$ при $|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| \rightarrow 0$.

Перейдем к доказательству соотношения (8.7). Используя (7.11), (7.14), (7.16), (8.9)–(8.12), (8.15), а также равенство

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \zeta^{-1/2} (\widehat{c}_* |\mathbf{k}|^2 + \zeta)^{-2} (\widehat{c}_* |\mathbf{k}_0|^2 + \zeta)^{-1} d\zeta = \frac{2|\mathbf{k}| + |\mathbf{k}_0|}{2\widehat{c}_*^{5/2} |\mathbf{k}|^3 |\mathbf{k}_0| (|\mathbf{k}| + |\mathbf{k}_0|)^2},$$

получаем

$$\begin{aligned} & \|\widehat{\widehat{G}}_0(\mathbf{k})\widehat{P} - \widehat{\widehat{G}}_0(\mathbf{k}_0)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \tilde{C}' \cdot \frac{(|\mathbf{k}|^2 + |\mathbf{k}_0|^2)|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|}{|\mathbf{k}||\mathbf{k}_0|(|\mathbf{k}| + |\mathbf{k}_0|)} \\ & + \frac{1}{2}\tilde{C}'' \left(\frac{(2|\mathbf{k}| + |\mathbf{k}_0|)|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|}{|\mathbf{k}_0|(|\mathbf{k}| + |\mathbf{k}_0|)^2} + \frac{(2|\mathbf{k}_0| + |\mathbf{k}|)|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|}{|\mathbf{k}|(|\mathbf{k}| + |\mathbf{k}_0|)^2} \right), \end{aligned} \quad (8.20)$$

где $\tilde{C}' = C\widehat{c}_*^{-3/2}$, $\tilde{C}'' = \widehat{C}'C_{\widehat{N}}\widehat{c}_*^{-5/2}$. Далее, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0, \tau) &:= \widehat{\widehat{G}}_0(\mathbf{k}) \sin(\tau \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}) \widehat{P} - \widehat{\widehat{G}}_0(\mathbf{k}_0) \sin(\tau \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}_0)^{1/2}) \widehat{P} \\ &= (\widehat{\widehat{G}}_0(\mathbf{k}) - \widehat{\widehat{G}}_0(\mathbf{k}_0)) \sin(\tau \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}) \widehat{P} \\ &+ \widehat{\widehat{G}}_0(\mathbf{k}_0) (\sin(\tau \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}) - \sin(\tau \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}_0)^{1/2})) \widehat{P} =: \mathcal{J}_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0, \tau) + \mathcal{J}_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0, \tau). \end{aligned} \quad (8.21)$$

Оценим оператор $\mathcal{J}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0, \tau)$. Достаточно рассмотреть случай $\tau \neq 0$ (так как при $\tau = 0$ это нулевой оператор). Далее, по той же причине достаточно считать, что $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_0$. Для определенности будем считать, что $|\mathbf{k}| < |\mathbf{k}_0|$ и $\mathbf{k}_0 \neq 0$. (Иначе поменяем ролями \mathbf{k} и \mathbf{k}_0 .)

Второе слагаемое в правой части (8.21) оценим с помощью (7.18) и (8.3) (для $\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})$):

$$\|\mathcal{J}_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0, \tau)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_{\widehat{\widehat{G}}_0} \widehat{C}'''(\tau) |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|. \quad (8.22)$$

Использование (6.16) и элементарного неравенства $|\sin x| \leq |x|$, $x \in \mathbb{R}$, дает

$$\|\sin(\tau \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}) \widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} |\tau| |\mathbf{k}| =: \tilde{C}''' |\tau| |\mathbf{k}|. \quad (8.23)$$

С одной стороны, оператор $\mathcal{J}_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0, \tau)$ можно оценить с помощью (7.18) и (8.23):

$$\|\mathcal{J}_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0, \tau)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq 2C_{\widehat{\widehat{G}}_0} \tilde{C}''' |\tau| |\mathbf{k}|. \quad (8.24)$$

С другой стороны, из (8.20) с учетом условия $|\mathbf{k}| < |\mathbf{k}_0|$ вытекает оценка

$$\|\mathcal{J}_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0, \tau)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \left(\frac{2\tilde{C}'}{|\mathbf{k}|} + \frac{\tilde{C}''}{|\mathbf{k}|^2} \right) |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|. \quad (8.25)$$

Зададимся числом $\eta > 0$. В силу (8.22) при $|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| < \eta(2C_{\widehat{\widehat{G}}_0} \widehat{C}'''(\tau))^{-1}$ выполнено неравенство $\|\mathcal{J}_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0, \tau)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} < \eta/2$.

Далее, в силу (8.24) при $|\mathbf{k}| < \eta(4C_{\widehat{\widehat{G}}_0} \tilde{C}''' |\tau|)^{-1}$ выполнено $\|\mathcal{J}_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0, \tau)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} < \eta/2$.

Пусть теперь $|\mathbf{k}| \geq \eta(4C_{\widehat{\widehat{G}}_0} \tilde{C}''' |\tau|)^{-1}$. Тогда из (8.25) вытекает оценка

$$\|\mathcal{J}_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0, \tau)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C(\eta, \tau) |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|,$$

где

$$C(\eta, \tau) = 8\tilde{C}'C_{\widehat{\widehat{G}}_0} \tilde{C}''' |\tau| \eta^{-1} + 16\tilde{C}''' (C_{\widehat{\widehat{G}}_0} \tilde{C}''' |\tau|)^2 \eta^{-2}.$$

Поэтому при $|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| < \eta(2C(\eta, \tau))^{-1}$ выполнено $\|\mathcal{J}_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0, \tau)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} < \eta/2$.

Из сказанного следует, что $\|\mathcal{J}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0, \tau)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \rightarrow 0$ при $|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| \rightarrow 0$. \square

Следующее утверждение подтверждает точность теорем 7.1, 7.9, 7.12, 7.15.

Теорема 8.4. Пусть выполнено условие 8.1.

1°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_1 < 2$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)$, чтобы при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка

$$\|\mathfrak{D}_{\cos}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{q_1/2}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon. \quad (8.26)$$

2°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_2 < 1$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)$, чтобы при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка

$$\|\mathfrak{D}_{\sin}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{q_2/2}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mathcal{C}(\tau). \quad (8.27)$$

3°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_1 < 4$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)$, чтобы при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка

$$\|\mathfrak{D}_{\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{q_1/2}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon^2. \quad (8.28)$$

4°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_2 < 3$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)$, чтобы при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка

$$\|\mathfrak{D}_{\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{q_2/2}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon. \quad (8.29)$$

5°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_1 < 3$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)$, чтобы при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка

$$\|\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{q_1/2}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon^2. \quad (8.30)$$

6°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_2 < 2$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)$, чтобы при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка

$$\|\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{q_2/2}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon. \quad (8.31)$$

Доказательство. Утверждения 1°, 2°, 6° установлены в [DSu1, теорема 7.8], [DSu2, теорема 10.6] на основании абстрактной теоремы 2.13(1°, 2°, 6°).

Докажем утверждение 3°. Достаточно считать, что $2 \leq q_1 < 4$. Рассуждаем от противного. Предположим, что для некоторых $\tau \neq 0$ и $2 \leq q_1 < 4$ найдется постоянная $\mathcal{C}(\tau)$ такая, что выполнена оценка (8.28) при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$. Домножая оператор под знаком нормы в (8.28) на \hat{P} и используя (7.2), убеждаемся, что выполнена оценка

$$\|\mathfrak{D}_{\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\hat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \frac{\varepsilon^{q_1}}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{q_1/2}} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon^2 \quad (8.32)$$

при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

С учетом (7.21) и (7.29) оператор под знаком нормы в (8.32) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\hat{P} &= \cos(\varepsilon^{-1}\tau\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2})(I + \Lambda b(\mathbf{k})\hat{P})\hat{P} \\ &- (I + \Lambda b(\mathbf{k})\hat{P})\cos(\varepsilon^{-1}\tau\hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2})\hat{P} + \mathfrak{G}_{\cos}^{(2)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\hat{P}. \end{aligned} \quad (8.33)$$

В силу (7.10) имеем: $\Lambda b(\mathbf{k})\hat{P} = t\hat{Z}(\boldsymbol{\theta})\hat{P}$. Поэтому первое слагаемое в правой части (8.33) можно записать в виде $\cos(\varepsilon^{-1}\tau\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2})(\hat{P} + t\hat{Z}(\boldsymbol{\theta})\hat{P})$.

Пусть $|\mathbf{k}| \leq \hat{t}_0$. В силу (1.9) и (1.12)

$$\|\hat{F}(\mathbf{k})\hat{P} - (\hat{P} + t\hat{Z}(\boldsymbol{\theta})\hat{P})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \hat{C}_3|\mathbf{k}|^2. \quad (8.34)$$

Из (8.32)–(8.34) вытекает, что для некоторой постоянной $\check{\mathcal{C}}(\tau)$ выполнено неравенство

$$\|\check{\mathfrak{D}}_{\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \frac{\varepsilon^{q_1}}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{q_1/2}} \leq \check{\mathcal{C}}(\tau)\varepsilon^2 \quad (8.35)$$

при почти всех \mathbf{k} в шаре $|\mathbf{k}| \leq \hat{t}_0$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$. Здесь

$$\check{\mathfrak{D}}_{\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) = \cos(\varepsilon^{-1}\tau \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}) \hat{F}(\mathbf{k}) \hat{P} - (I + \Lambda b(\mathbf{k}) \hat{P}) \cos(\varepsilon^{-1}\tau \hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}) \hat{P} + \mathfrak{G}_{\cos}^{(2)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \hat{P}.$$

Из леммы 8.3 (а именно, из неравенств (8.2), (8.5) и неравенств (8.2), (8.3) для $\hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})$) следует, что при фиксированных τ и ε оператор $\check{\mathfrak{D}}_{\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)$ непрерывен по \mathbf{k} в шаре $|\mathbf{k}| \leq \hat{t}_0$. Следовательно, оценка (8.35) справедлива при всех значениях \mathbf{k} из данного шара. В частности, она верна в точке $\mathbf{k} = t\theta_0$, если $t \leq \hat{t}_0$. Применяя снова (8.34), получаем, что для некоторой постоянной $\tilde{\mathcal{C}}(\tau)$ справедлива оценка

$$\|\check{\mathfrak{D}}_{\cos}^{(1)}(t\theta_0, \varepsilon^{-1}\tau) \hat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \frac{\varepsilon^{q_1}}{(t^2 + \varepsilon^2)^{q_1/2}} \leq \tilde{\mathcal{C}}(\tau) \varepsilon^2 \quad (8.36)$$

при всех $t \leq \hat{t}_0$ и достаточно малом ε .

Оценка (8.36) отвечает абстрактной оценке (2.15). Поскольку $\hat{N}_0(\theta_0) \neq 0$ в силу условия 8.1, то выполнены условия теоремы 2.13. Утверждение 3° этой теоремы приводит нас к противоречию.

Перейдем к доказательству утверждения 4°. Рассуждаем от противного. Предположим, что для некоторых $\tau \neq 0$ и $1 \leq q_2 < 3$ найдется постоянная $\mathcal{C}(\tau)$ такая, что выполнена оценка (8.29) при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$. Домножая оператор под знаком нормы в (8.29) на \hat{P} и используя (7.2), убеждаемся, что выполнена оценка

$$\|\check{\mathfrak{D}}_{\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \hat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \frac{\varepsilon^{q_2}}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{q_2/2}} \leq \mathcal{C}(\tau) \varepsilon \quad (8.37)$$

при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

С учетом (7.22), (7.30), (7.31) оператор под знаком нормы в (8.37) имеет вид

$$\begin{aligned} \check{\mathfrak{D}}_{\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \hat{P} &= \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}) \hat{P} \\ &- (I + \Lambda b(\mathbf{k}) \hat{P}) \hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau \hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}) \hat{P} \\ &+ \mathfrak{G}_{\sin}^{(2)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \hat{P} + \mathfrak{G}_{\sin}^{(3)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \hat{P}. \end{aligned} \quad (8.38)$$

Из (1.8) и неравенства $\|\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{-1/2} \hat{F}(\mathbf{k})^\perp\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq (3\hat{\delta})^{-1/2}$ получаем, что

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{-1/2} \hat{F}(\mathbf{k})^\perp \sin(\varepsilon^{-1}\tau \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}) (\hat{P} - \hat{F}(\mathbf{k})) \hat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \varepsilon^{q_2} (|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-q_2/2} \\ \leq (3\hat{\delta})^{-1/2} \hat{C}_1 |\mathbf{k}| \varepsilon^{q_2} (|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-q_2/2} \leq (3\hat{\delta})^{-1/2} \hat{C}_1 \varepsilon. \end{aligned} \quad (8.39)$$

Из (8.37)–(8.39) вытекает, что для некоторой постоянной $\check{\mathcal{C}}(\tau) > 0$ выполнено неравенство

$$\|\check{\mathfrak{D}}_{\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \frac{\varepsilon^{q_2}}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{q_2/2}} \leq \check{\mathcal{C}}(\tau) \varepsilon \quad (8.40)$$

при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$. Здесь

$$\begin{aligned} \check{\mathfrak{D}}_{\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) &= \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}) \hat{F}(\mathbf{k}) \hat{P} \\ &- (I + \Lambda b(\mathbf{k}) \hat{P}) \hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau \hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}) \hat{P} \\ &+ \mathfrak{G}_{\sin}^{(2)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \hat{P} + \mathfrak{G}_{\sin}^{(3)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \hat{P}. \end{aligned}$$

Пусть $|\mathbf{k}| \leq \hat{t}_0$. Из леммы 8.3 (а именно, из (8.4)–(8.7) и неравенств (8.2), (8.3) для $\hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})$) следует, что при фиксированных τ и ε оператор $\check{\mathfrak{D}}_{\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)$ непрерывен по \mathbf{k} в шаре $|\mathbf{k}| \leq \hat{t}_0$. Следовательно, оценка (8.40) справедлива при всех значениях \mathbf{k} из данного шара. В частности,

она верна в точке $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}_0$, если $t \leq \hat{t}_0$. Применяя снова (8.39), получаем, что для некоторой постоянной $\tilde{\mathcal{C}}(\tau) > 0$ справедлива оценка

$$\|\mathfrak{D}_{\sin}^{(1)}(t\boldsymbol{\theta}_0, \varepsilon^{-1}\tau)\hat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \frac{\varepsilon^{q_2}}{(t^2 + \varepsilon^2)^{q_2/2}} \leq \tilde{\mathcal{C}}(\tau)\varepsilon \quad (8.41)$$

при всех $t \leq \hat{t}_0$ и достаточно малом ε .

Оценка (8.41) отвечает абстрактной оценке (2.16). Утверждение 4° теоремы 2.13 приводит нас к противоречию.

Перейдем к доказательству утверждения 5°. Рассуждаем от противного. Предположим, что для некоторых $\tau \neq 0$ и $2 \leq q_1 < 3$ найдется постоянная $\mathcal{C}(\tau)$ такая, что выполнена оценка (8.30) при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$. Домножая оператор под знаком нормы в (8.30) на \hat{P} и используя (7.2), убеждаемся, что выполнена оценка

$$\|\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\hat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \frac{\varepsilon^{q_1}}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{q_1/2}} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon^2 \quad (8.42)$$

при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

В силу (7.10) и (7.19) оценка (8.42) перепишется в виде

$$\begin{aligned} & \|\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} (\cos(\varepsilon^{-1}\tau \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2})(\hat{P} + t\hat{Z}(\boldsymbol{\theta})\hat{P}) \\ & - (\hat{P} + t\hat{Z}(\boldsymbol{\theta})\hat{P}) \cos(\varepsilon^{-1}\tau \hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2})\hat{P})\| \frac{\varepsilon^{q_1}}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{q_1/2}} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon^2 \end{aligned} \quad (8.43)$$

при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Пусть $|\mathbf{k}| \leq \hat{t}_0$. В силу (1.10) и (1.12)

$$\|\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} (\hat{F}(\mathbf{k})\hat{P} - \hat{P} - t\hat{Z}(\boldsymbol{\theta})\hat{P})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \hat{\mathcal{C}}'_3 |\mathbf{k}|^2. \quad (8.44)$$

Из (8.43) и (8.44) вытекает, что для некоторой постоянной $\check{\mathcal{C}}(\tau) > 0$ выполнено неравенство

$$\|\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} (\cos(\varepsilon^{-1}\tau \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2})\hat{F}(\mathbf{k})\hat{P} - \hat{F}(\mathbf{k})\hat{P} \cos(\varepsilon^{-1}\tau \hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2})\hat{P})\| \frac{\varepsilon^{q_1}}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{q_1/2}} \leq \check{\mathcal{C}}(\tau)\varepsilon^2 \quad (8.45)$$

при почти всех \mathbf{k} в шаре $|\mathbf{k}| \leq \hat{t}_0$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$. Из леммы 8.3 следует, что при фиксированных τ и ε оператор под знаком нормы в (8.45) непрерывен по \mathbf{k} в шаре $|\mathbf{k}| \leq \hat{t}_0$. Следовательно, оценка (8.45) справедлива при всех значениях \mathbf{k} из данного шара. В частности, она верна в точке $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}_0$, если $t \leq \hat{t}_0$. Применяя снова (8.44), получаем, что для некоторой постоянной $\check{\mathcal{C}}'(\tau) > 0$ справедлива оценка

$$\|\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(t\boldsymbol{\theta}_0, \varepsilon^{-1}\tau)\hat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \frac{\varepsilon^{q_1}}{(t^2 + \varepsilon^2)^{q_1/2}} \leq \check{\mathcal{C}}'(\tau)\varepsilon^2 \quad (8.46)$$

при всех $t \leq \hat{t}_0$ и достаточно малом ε .

Оценка (8.46) отвечает абстрактной оценке (2.17). Поскольку $\hat{N}_0(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ в силу условия 8.1, то выполнены условия теоремы 2.13. Утверждение 5° этой теоремы приводит к противоречию. \square

Аналогичным образом из теоремы 2.14 выводится следующий результат, который подтверждает точность теорем 7.3, 7.8, 7.10, 7.11, 7.13, 7.14, 7.16, 7.17 (об усилении общих результатов при дополнительных предположениях).

Теорема 8.5. Пусть выполнено условие 8.2.

1°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_1 < 3/2$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)$, чтобы при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка (8.26).

2°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_2 < 1/2$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)$, чтобы при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка (8.27).

3°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_1 < 3$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка (8.28).

4°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_2 < 2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка (8.29).

5°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_1 < 5/2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка (8.30).

6°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_2 < 3/2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка (8.31).

Утверждения 1°, 2°, 6° ранее были получены в [DSu2, теоремы 10.5, 10.7].

8.2. Точность результатов относительно времени. В этом пункте мы подтверждаем точность результатов § 7 относительно зависимости оценок от τ (при большом $|\tau|$).

По аналогии с доказательством теоремы 8.4 из теоремы 2.15 выводится следующее утверждение, подтверждающее точность теорем 7.1, 7.9, 7.12, 7.15.

Теорема 8.6. Пусть выполнено условие 8.1.

1°. Пусть $q_1 \geq 2$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (8.26) при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

2°. Пусть $q_2 \geq 1$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (8.27) при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

3°. Пусть $q_1 \geq 4$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/\tau^2 = 0$ и выполнена оценка (8.28) при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

4°. Пусть $q_2 \geq 3$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/\tau^2 = 0$ и выполнена оценка (8.29) при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

5°. Пусть $q_1 \geq 3$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (8.30) при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

6°. Пусть $q_2 \geq 2$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (8.31) при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Утверждения 1°, 2°, 6° ранее были получены в [DSu2, теоремы 10.8, 10.10].

Из теоремы 2.16 выводится следующее утверждение, подтверждающее точность теорем 7.3, 7.8, 7.10, 7.11, 7.13, 7.14, 7.16, 7.17.

Теорема 8.7. Пусть выполнено условие 8.2.

1°. Пусть $q_1 \geq 3/2$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (8.26) при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

2°. Пусть $q_2 \geq 1/2$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (8.27) при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

3°. Пусть $q_1 \geq 3$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (8.28) при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

4°. Пусть $q_2 \geq 2$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (8.29) при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

5°. Пусть $q_1 \geq 5/2$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (8.30) при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

6°. Пусть $q_2 \geq 3/2$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (8.31) при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Утверждения 1°, 2°, 6° ранее были получены в [DSu2, теоремы 10.9, 10.11].

§ 9. ЭФФЕКТИВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОПЕРАТОРА $\mathcal{A}(\mathbf{k})$

9.1. Применение схемы §3 к оператору $\mathcal{A}(\mathbf{k})$. Оператор $\mathcal{A}(\mathbf{k}) = f^* \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) f$ изучается на основании схемы §3. Сейчас $\mathfrak{H} = \hat{\mathfrak{H}} = L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$, $\mathfrak{H}_* = L_2(\Omega; \mathbb{C}^m)$, роль оператора $A(t)$ играет $A(t, \boldsymbol{\theta}) = \mathcal{A}(\mathbf{k})$, роль оператора $\hat{A}(t)$ играет $\hat{A}(t, \boldsymbol{\theta}) = \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$. В качестве изоморфизма M выступает оператор умножения на матричнозначную функцию $f(\mathbf{x})$. Оператор Q является оператором умножения на матрицу-функцию $Q(\mathbf{x}) = (f(\mathbf{x})f(\mathbf{x})^*)^{-1}$. Блок оператора Q в подпространстве $\hat{\mathfrak{N}}$ (см. (6.2)) — это оператор умножения на постоянную матрицу

$$\overline{Q} = (\underline{f}f^*)^{-1} = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} (f(\mathbf{x})f(\mathbf{x})^*)^{-1} d\mathbf{x}.$$

Далее, M_0 есть оператор умножения на постоянную матрицу

$$f_0 = (\overline{Q})^{-1/2} = (\underline{f}f^*)^{1/2}. \quad (9.1)$$

Отметим элементарные неравенства

$$|f_0| \leq \|f\|_{L_\infty}, \quad |f_0^{-1}| \leq \|f^{-1}\|_{L_\infty}. \quad (9.2)$$

В $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ определим оператор

$$\mathcal{A}^0 := f_0 \hat{\mathcal{A}}^0 f_0 = f_0 b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) f_0. \quad (9.3)$$

Пусть $\mathcal{A}^0(\mathbf{k})$ — соответствующее операторное семейство в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$. Тогда

$$\mathcal{A}^0(\mathbf{k}) = f_0 \hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) f_0 = f_0 b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{D} + \mathbf{k}) f_0$$

при периодических граничных условиях. Оценка вида (5.14) в случае оператора $\mathcal{A}^0(\mathbf{k})$ с постоянными коэффициентами с учетом (6.19) и (9.2) дает

$$\mathcal{A}^0(\mathbf{k}) \geq c_* |\mathbf{k}|^2 I, \quad \mathbf{k} \in \tilde{\Omega}. \quad (9.4)$$

С учетом (6.16) имеем

$$f_0 \hat{S}(\mathbf{k}) f_0 \hat{P} = \mathcal{A}^0(\mathbf{k}) \hat{P}. \quad (9.5)$$

9.2. Аналитические ветви собственных значений и собственных элементов. Согласно (3.3), спектральный росток $S(\boldsymbol{\theta})$ оператора $A(t, \boldsymbol{\theta})$, действующий в подпространстве \mathfrak{N} (см. (5.17)), представляется в виде $S(\boldsymbol{\theta}) = P f^* b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta}) f|_{\mathfrak{N}}$, где P — ортопроектор пространства $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ на \mathfrak{N} . Положим $S(\mathbf{k}) := t^2 S(\boldsymbol{\theta}) = P f^* b(\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{k}) f|_{\mathfrak{N}}$.

Аналитические (по t) ветви собственных значений $\lambda_l(t, \boldsymbol{\theta})$ и собственных элементов $\varphi_l(t, \boldsymbol{\theta})$ оператора $A(t, \boldsymbol{\theta})$ допускают степенные разложения вида (1.4), (1.5) с коэффициентами, зависящими от $\boldsymbol{\theta}$:

$$\lambda_l(t, \boldsymbol{\theta}) = \gamma_l(\boldsymbol{\theta}) t^2 + \mu_l(\boldsymbol{\theta}) t^3 + \nu_l(\boldsymbol{\theta}) t^4 + \dots, \quad l = 1, \dots, n, \quad (9.6)$$

$$\varphi_l(t, \boldsymbol{\theta}) = \omega_l(\boldsymbol{\theta}) + t \psi_l^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) + \dots, \quad l = 1, \dots, n. \quad (9.7)$$

При этом $\omega_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, \omega_n(\boldsymbol{\theta})$ образуют ортонормированный базис в подпространстве \mathfrak{N} , а векторы $\zeta_l(\boldsymbol{\theta}) = f \omega_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = 1, \dots, n$, образуют базис в $\hat{\mathfrak{N}}$ (см. (6.2)), ортонормированный с весом: $(\overline{Q} \zeta_l(\boldsymbol{\theta}), \zeta_j(\boldsymbol{\theta})) = \delta_{jl}$, $j, l = 1, \dots, n$.

Числа $\gamma_l(\boldsymbol{\theta})$ и элементы $\omega_l(\boldsymbol{\theta})$ являются собственными для спектрального ростка $S(\boldsymbol{\theta})$. Согласно (3.12) числа $\gamma_l(\boldsymbol{\theta})$ и элементы $\zeta_l(\boldsymbol{\theta})$ являются собственными значениями и собственными элементами следующей обобщенной спектральной задачи:

$$b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta}) \zeta_l(\boldsymbol{\theta}) = \gamma_l(\boldsymbol{\theta}) \bar{Q} \zeta_l(\boldsymbol{\theta}), \quad l = 1, \dots, n. \quad (9.8)$$

9.3. Вспомогательные операторы. Операторы \hat{Z}_Q , \hat{N}_Q (определенные в абстрактных терминах в п. 3.2) сейчас зависят от $\boldsymbol{\theta}$. Для их описания введем Γ -периодическое решение $\Lambda_Q(\mathbf{x})$ задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) (b(\mathbf{D}) \Lambda_Q(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) = 0, \quad \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}) \Lambda_Q(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

Ясно, что $\Lambda_Q(\mathbf{x})$ отличается от периодического решения $\Lambda(\mathbf{x})$ задачи (6.8) на постоянное слагаемое:

$$\Lambda_Q(\mathbf{x}) = \Lambda(\mathbf{x}) + \Lambda_Q^0, \quad \Lambda_Q^0 = -(\bar{Q})^{-1}(\bar{Q}\Lambda).$$

Как проверено в [BSu3, §5], операторы $\hat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})$ и $\hat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})$ принимают вид

$$\hat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta}) = [\Lambda_Q] b(\boldsymbol{\theta}) \hat{P}, \quad (9.9)$$

$$\hat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* L_Q(\boldsymbol{\theta}) b(\boldsymbol{\theta}) \hat{P}, \quad (9.10)$$

где $L_Q(\boldsymbol{\theta})$ — $(m \times m)$ -матрица, заданная соотношением

$$L_Q(\boldsymbol{\theta}) = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} (\Lambda_Q(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta})^* \tilde{g}(\mathbf{x}) + \tilde{g}(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta}) \Lambda_Q(\mathbf{x})) d\mathbf{x}.$$

Отметим, что эрмитова матрица-функция $L_Q(\mathbf{k}) := t L_Q(\boldsymbol{\theta})$, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$, однородна первой степени. Положим $\hat{N}_Q(\mathbf{k}) := t^3 \hat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})$. Тогда

$$\hat{N}_Q(\mathbf{k}) = b(\mathbf{k})^* L_Q(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}) \hat{P}. \quad (9.11)$$

В [BSu3, §5] указаны некоторые достаточные условия, при которых оператор (9.10) обращается в ноль.

Предложение 9.1 ([BSu3]). Пусть выполнено хотя бы одно из следующих предположений:
1°. Оператор \mathcal{A} имеет вид $\mathcal{A} = f(\mathbf{x})^* \mathbf{D}^* g(\mathbf{x}) \mathbf{D} f(\mathbf{x})$, где $g(\mathbf{x})$ — симметричная матрица с вещественными элементами.

2°. Выполнены соотношения (6.20), т. е. $g^0 = \bar{g}$.

Тогда $\hat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Напомним (см. п. 3.2), что справедливо представление $\hat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) = \hat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) + \hat{N}_{*,Q}(\boldsymbol{\theta})$. Согласно (3.14)

$$\hat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{l=1}^n \mu_l(\boldsymbol{\theta}) (\cdot, \bar{Q} \zeta_l(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)} \bar{Q} \zeta_l(\boldsymbol{\theta}).$$

При этом

$$(\hat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) \zeta_l(\boldsymbol{\theta}), \zeta_l(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)} = (\hat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) \zeta_l(\boldsymbol{\theta}), \zeta_l(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)} = \mu_l(\boldsymbol{\theta}), \quad l = 1, \dots, n.$$

В [BSu3, §5] проверено следующее утверждение.

Предложение 9.2. Пусть $b(\boldsymbol{\theta})$, $g(\mathbf{x})$ и $Q(\mathbf{x})$ — матрицы с вещественными элементами. Пусть в разложениях (9.7) для аналитических ветвей собственных векторов оператора $A(t, \boldsymbol{\theta})$ “зародыши” $\omega_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = 1, \dots, n$, можно выбрать так, чтобы векторы $\zeta_l(\boldsymbol{\theta}) = f \omega_l(\boldsymbol{\theta})$ оказались вещественными. Тогда $\mu_l(\boldsymbol{\theta}) = 0$, $l = 1, \dots, n$, т. е. $\hat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$.

В рассматриваемом “вещественном” случае росток $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$ представляет собой симметричную вещественную матрицу; матрица \overline{Q} тоже вещественна и симметрична. Ясно, что в случае простого собственного значения $\gamma_j(\boldsymbol{\theta})$ задачи (9.8) собственный вектор $\zeta_j(\boldsymbol{\theta}) = f\omega_j(\boldsymbol{\theta})$ определяется однозначно с точностью до фазового множителя, и его всегда можно выбрать вещественным. Мы получаем следующий результат.

Следствие 9.3. Пусть $b(\boldsymbol{\theta})$, $g(\mathbf{x})$ и $Q(\mathbf{x})$ — матрицы с вещественными элементами. Пусть задача (9.8) имеет простой спектр. Тогда $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$.

Опишем операторы $\widehat{Z}_{2,Q}$, $\widehat{R}_{2,Q}$ и $\widehat{N}_{1,Q}^0$ (в абстрактных терминах определенные в п. 3.2) для семейства $A(t, \boldsymbol{\theta})$. Пусть $\Lambda_{l,Q}^{(2)}(\mathbf{x})$ — Γ -периодическое решение задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) (b(\mathbf{D}) \Lambda_{l,Q}^{(2)}(\mathbf{x}) + b_l \Lambda_Q(\mathbf{x})) = -b_l^* \widetilde{g}(\mathbf{x}) + Q(\mathbf{x}) (\overline{Q})^{-1} b_l^* g^0, \quad \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}) \Lambda_{l,Q}^{(2)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

Положим $\Lambda_Q^{(2)}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) := \sum_{l=1}^d \Lambda_{l,Q}^{(2)}(\mathbf{x}) \theta_l$. Как проверено в [VSu2, п. 8.4],

$$\widehat{Z}_{2,Q}(\boldsymbol{\theta}) = [\Lambda_Q^{(2)}(\cdot; \boldsymbol{\theta})] b(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P}, \quad \widehat{R}_{2,Q}(\boldsymbol{\theta}) = [h(b(\mathbf{D}) \Lambda_Q^{(2)}(\cdot; \boldsymbol{\theta}) + b(\boldsymbol{\theta}) \Lambda_Q)] b(\boldsymbol{\theta}).$$

Наконец, в [VSu2, п. 8.5] было получено представление

$$\widehat{N}_{1,Q}^0(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* L_{2,Q}(\boldsymbol{\theta}) b(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P}, \quad (9.12)$$

где

$$\begin{aligned} L_{2,Q}(\boldsymbol{\theta}) &= |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} (\Lambda_Q^{(2)}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta})^* \widetilde{g}(\mathbf{x}) + \widetilde{g}(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta}) \Lambda_Q^{(2)}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})) d\mathbf{x} \\ &+ |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} (b(\mathbf{D}) \Lambda_Q^{(2)}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) + b(\boldsymbol{\theta}) \Lambda_Q(\mathbf{x}))^* g(\mathbf{x}) (b(\mathbf{D}) \Lambda_Q^{(2)}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) + b(\boldsymbol{\theta}) \Lambda_Q(\mathbf{x})) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

9.4. Кратности собственных значений ростка. В данном пункте считаем, что $n \geq 2$. Перейдем к обозначениям, принятым в п. 1.6. Вообще говоря, количество $p(\boldsymbol{\theta})$ различных собственных значений $\gamma_1^\circ(\boldsymbol{\theta}), \dots, \gamma_{p(\boldsymbol{\theta})}^\circ(\boldsymbol{\theta})$ спектрального ростка $S(\boldsymbol{\theta})$ (или задачи (9.8)) и их кратности $k_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, k_{p(\boldsymbol{\theta})}(\boldsymbol{\theta})$ зависят от параметра $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Через $\mathfrak{N}_j(\boldsymbol{\theta})$ обозначим собственное подпространство ростка $S(\boldsymbol{\theta})$, отвечающее собственному значению $\gamma_j^\circ(\boldsymbol{\theta})$. Тогда $f\mathfrak{N}_j(\boldsymbol{\theta}) = \text{Ker}(\widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) - \gamma_j^\circ(\boldsymbol{\theta}) \overline{Q}) =: \widehat{\mathfrak{N}}_{j,Q}(\boldsymbol{\theta})$ — собственное подпространство задачи (9.8), отвечающее тому же значению $\gamma_j^\circ(\boldsymbol{\theta})$. Введем обозначение $\mathcal{P}_j(\boldsymbol{\theta})$ для “косого” проектора пространства $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ на подпространство $\widehat{\mathfrak{N}}_{j,Q}(\boldsymbol{\theta})$; $\mathcal{P}_j(\boldsymbol{\theta})$ ортогонален относительно скалярного произведения с весом \overline{Q} . Согласно (3.15) справедливы инвариантные представления для операторов $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{N}_{*,Q}(\boldsymbol{\theta})$:

$$\begin{aligned} \widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{j=1}^{p(\boldsymbol{\theta})} \mathcal{P}_j(\boldsymbol{\theta})^* \widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) \mathcal{P}_j(\boldsymbol{\theta}), \\ \widehat{N}_{*,Q}(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{1 \leq j, l \leq p(\boldsymbol{\theta}): j \neq l} \mathcal{P}_j(\boldsymbol{\theta})^* \widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) \mathcal{P}_l(\boldsymbol{\theta}). \end{aligned} \quad (9.13)$$

9.5. Коэффициенты $\nu_l(\boldsymbol{\theta})$. Применяя предложение 3.3, приходим к следующему утверждению. См. также [DSu2, предложение 11.4].

Предложение 9.4. Пусть $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$. Пусть $\gamma_1^\circ(\boldsymbol{\theta}), \dots, \gamma_{p(\boldsymbol{\theta})}^\circ(\boldsymbol{\theta})$ — различные собственные значения задачи (9.8), а $k_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, k_{p(\boldsymbol{\theta})}(\boldsymbol{\theta})$ — их кратности. Пусть $\widehat{P}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta})$ — ортопроектор пространства $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ на подпространство $\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta}) = \text{Ker}(\widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) - \gamma_q^\circ(\boldsymbol{\theta}) \overline{Q})$, $q = 1, \dots, p(\boldsymbol{\theta})$. Пусть операторы $\widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})$, $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{N}_{1,Q}^0(\boldsymbol{\theta})$ определены в (9.9), (9.10) и (9.12) соответственно.

Введем операторы $\widehat{N}_Q^{(q)}(\boldsymbol{\theta})$, $q = 1, \dots, p(\boldsymbol{\theta})$: оператор $\widehat{N}_Q^{(q)}(\boldsymbol{\theta})$ действует в $\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta})$ и задается выражением

$$\begin{aligned} \widehat{N}_Q^{(q)}(\boldsymbol{\theta}) &:= \widehat{P}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta}) \widehat{N}_{1,Q}^0(\boldsymbol{\theta})|_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta})} \\ &\quad - \frac{1}{2} \widehat{P}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta}) \left(\widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})^* Q \widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta}) Q^{-1} \widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P} + \widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P} Q^{-1} \widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})^* Q \widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta}) \right) |_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta})} \\ &\quad + \sum_{j=1, \dots, p(\boldsymbol{\theta}): j \neq q} (\gamma_q^\circ(\boldsymbol{\theta}) - \gamma_j^\circ(\boldsymbol{\theta}))^{-1} \widehat{P}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta}) \widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P}_{j,Q}(\boldsymbol{\theta}) Q^{-1} \widehat{P}_{j,Q}(\boldsymbol{\theta}) \widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) |_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta})}. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Обозначим $i(q, \boldsymbol{\theta}) = k_1(\boldsymbol{\theta}) + \dots + k_{q-1}(\boldsymbol{\theta}) + 1$. Пусть $\nu_l(\boldsymbol{\theta})$ — коэффициенты при t^4 из разложений (9.6), $\omega_l(\boldsymbol{\theta})$ — зародыши из (9.7), и пусть $\zeta_l(\boldsymbol{\theta}) = f\omega_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = 1, \dots, n$. Обозначим $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta})} = \widehat{P}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta}) Q|_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta})}$. Тогда

$$\widehat{N}_Q^{(q)}(\boldsymbol{\theta}) \zeta_l(\boldsymbol{\theta}) = \nu_l(\boldsymbol{\theta}) Q_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta})} \zeta_l(\boldsymbol{\theta}), \quad l = i(q, \boldsymbol{\theta}), i(q, \boldsymbol{\theta}) + 1, \dots, i(q, \boldsymbol{\theta}) + k_q(\boldsymbol{\theta}) - 1.$$

§ 10. АППРОКСИМАЦИИ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ ОТ ОПЕРАТОРА $\mathcal{A}(\mathbf{k})$

В этом параграфе мы получаем аппроксимации окаймленных операторов $\cos(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})$ и $\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})$.

10.1. Аппроксимации по операторной норме в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$. Положим

$$\mathbb{D}_{\cos}^{(0)}(\mathbf{k}, \tau) := f \cos(\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}) f^{-1} - f_0 \cos(\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2}) f_0^{-1}, \quad (10.1)$$

$$\mathbb{D}_{\sin}^{(0)}(\mathbf{k}, \tau) := f \mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}) f^{-1} - f_0 \mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2}) f_0^{-1}, \quad (10.2)$$

$$\widetilde{\mathbb{D}}_{\sin}^{(0)}(\mathbf{k}, \tau) := f \mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}) f^* - f_0 \mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2}) f_0. \quad (10.3)$$

Мы применим к оператору $A(t, \boldsymbol{\theta}) = \mathcal{A}(\mathbf{k})$ теоремы из § 4. В силу замечания 2.12 мы можем отследить зависимость постоянных в оценках от данных задачи. Заметим, что c_* , δ и t_0 не зависят от $\boldsymbol{\theta}$ (см. (5.15), (5.24), (5.26)). Согласно (5.25) норму $\|X_1(\boldsymbol{\theta})\|$ можно заменить на $\alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|f\|_{L_\infty}$. Поэтому постоянные из теоремы 4.1 (примененной к оператору $\mathcal{A}(\mathbf{k})$) не будут зависеть от $\boldsymbol{\theta}$; они зависят только от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Теорема 10.1 ([BSu5], [M5], [DSu1]). *При $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ справедливы оценки*

$$\|\mathbb{D}_{\cos}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_1(1 + |\tau|)\varepsilon, \quad (10.4)$$

$$\|\mathbb{D}_{\sin}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_2(1 + |\tau|), \quad (10.5)$$

$$\|\widetilde{\mathbb{D}}_{\sin}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \widetilde{C}_2(1 + |\tau|). \quad (10.6)$$

Постоянные C_1 , C_2 , \widetilde{C}_2 зависят от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Теорема 10.1 выводится из теоремы 4.1 и соотношений (7.2)–(7.4), (9.5). Следует учесть также очевидные оценки

$$\|\mathbb{D}_{\cos}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq 2\|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty}, \quad (10.7)$$

$$\|\mathbb{D}_{\sin}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq 2\varepsilon^{-1} |\tau| \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty}, \quad (10.8)$$

$$\|\widetilde{\mathbb{D}}_{\sin}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq 2\varepsilon^{-1} |\tau| \|f\|_{L_\infty}^2.$$

Ранее оценки (10.4)–(10.6) были получены в [BSu5, теорема 8.2], [M5, (7.32)] и [DSu1, теорема 9.1] соответственно.

Теперь мы усиливаем результат теоремы 10.1 при дополнительных предположениях. Наложим следующее условие.

Условие 10.2. Пусть оператор $\hat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})$ определен в (9.10). Предположим, что $\hat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Из теоремы 4.2 выводится следующий результат, установленный в [DSu2, теорема 12.4].

Теорема 10.3 ([DSu2]). Пусть выполнено условие 10.2. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ выполнены оценки

$$\begin{aligned} \|\mathbb{D}_{\cos}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/4}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq C_3(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon, \\ \|\tilde{\mathbb{D}}_{\sin}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{1/4}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq C_4(1 + |\tau|)^{1/2}. \end{aligned} \quad (10.9)$$

Постоянные C_3, C_4 зависят от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Замечание 10.4. При выводе оценки (10.9) используется неравенство

$$\|\tilde{\mathbb{D}}_{\sin}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)(I - \hat{P})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C;$$

см. [DSu2, (12.11)]. Аналога оценки (10.9) для оператора $\mathbb{D}_{\sin}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)$ получить не удастся из-за отсутствия нужной оценки для $\|\mathbb{D}_{\sin}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)(I - \hat{P})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)}$. По той же причине в условиях теоремы 10.8 нет аналога оценки (10.12) для $\mathbb{D}_{\sin}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)$.

Теперь мы отказываемся от условия 10.2, но вместо этого предположим, что $\hat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta}$. При этом считаем, что $\hat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) = \hat{N}_{*,Q}(\boldsymbol{\theta}) \neq 0$ при некотором $\boldsymbol{\theta}$. (Иначе применима теорема 10.3.) Как и в п. 7.1, чтобы применить абстрактную теорему 4.3, приходится накладывать дополнительные условия. Будем использовать исходную нумерацию собственных значений $\gamma_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, \gamma_n(\boldsymbol{\theta})$ ростка $S(\boldsymbol{\theta})$, условившись нумеровать их в порядке неубывания:

$$\gamma_1(\boldsymbol{\theta}) \leq \gamma_2(\boldsymbol{\theta}) \leq \dots \leq \gamma_n(\boldsymbol{\theta}). \quad (10.10)$$

Как уже отмечалось, числа (10.10) являются в то же время собственными значениями обобщенной спектральной задачи (9.8). При каждом $\boldsymbol{\theta}$ через $\mathcal{P}^{(k)}(\boldsymbol{\theta})$ обозначим косой (ортогональный с весом \bar{Q}) проектор пространства $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ на собственное подпространство задачи (9.8), отвечающее собственному значению $\gamma_k(\boldsymbol{\theta})$. Ясно, что при каждом $\boldsymbol{\theta}$ оператор $\mathcal{P}^{(k)}(\boldsymbol{\theta})$ совпадает с одним из проекторов $\mathcal{P}_j(\boldsymbol{\theta})$, введенных в п. 9.4 (но номер j может зависеть от $\boldsymbol{\theta}$ и меняется в точках перемены кратности спектра ростка).

Условие 10.5. 1°. Оператор $\hat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta})$, определенный в (9.13), равен нулю: $\hat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. 2°. Для каждой пары индексов (k, r) , $1 \leq k, r \leq n$, $k \neq r$, такой что $\gamma_k(\boldsymbol{\theta}_0) = \gamma_r(\boldsymbol{\theta}_0)$ при некотором $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$, выполнено $(\mathcal{P}^{(k)}(\boldsymbol{\theta}))^* \hat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) \mathcal{P}^{(r)}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Разумеется, выполнение условия 10.5 гарантируется следующим более сильным условием.

Условие 10.6. 1°. Оператор $\hat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta})$, определенный в (9.13), равен нулю: $\hat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. 2°. Количество p различных собственных значений обобщенной спектральной задачи (9.8) не зависит от $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Замечание 10.7. Предположение пункта 2° условия 10.6 заведомо выполнено, если спектр задачи (9.8) простой при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Итак, предполагаем выполненным условие 10.5. Нас интересуют только пары индексов из множества

$$\mathcal{K} := \{(k, r) : 1 \leq k, r \leq n, k \neq r, (\mathcal{P}^{(k)}(\boldsymbol{\theta}))^* \hat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) \mathcal{P}^{(r)}(\boldsymbol{\theta}) \neq 0\}.$$

Введем обозначение

$$c_{kr}^\circ(\boldsymbol{\theta}) := \min\{c_*, n^{-1}|\gamma_k(\boldsymbol{\theta}) - \gamma_r(\boldsymbol{\theta})|\}, \quad (k, r) \in \mathcal{K}.$$

Поскольку оператор $S(\boldsymbol{\theta})$ непрерывно зависит от $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$, то из теории возмущений дискретного спектра следует, что $\gamma_j(\boldsymbol{\theta})$ — непрерывные функции на сфере \mathbb{S}^{d-1} . В силу пункта

2° условия 10.5 при $(k, r) \in \mathcal{K}$ выполнено неравенство $|\gamma_k(\boldsymbol{\theta}) - \gamma_r(\boldsymbol{\theta})| > 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$, а тогда

$$c_{kr}^\circ := \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}} c_{kr}^\circ(\boldsymbol{\theta}) > 0, \quad (k, r) \in \mathcal{K}.$$

Положим

$$c^\circ := \min_{(k,r) \in \mathcal{K}} c_{kr}^\circ. \quad (10.11)$$

Ясно, что число (10.11) — это реализация величины (2.3), выбранная не зависящей от $\boldsymbol{\theta}$. Число t^{00} , подчиненное (2.4), при условии 10.5 также можно выбрать не зависящим от $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. С учетом (5.24) и (5.25) положим

$$t^{00} = (8\beta_2)^{-1} r_0 \alpha_1^{-3/2} \alpha_0^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{-3/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1/2} \|f\|_{L_\infty}^{-3} \|f^{-1}\|_{L_\infty}^{-1} c^\circ,$$

где c° определено в (10.11). (Условие $t^{00} \leq t_0$ выполнено, поскольку $c^\circ \leq \|S(\boldsymbol{\theta})\| \leq \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|f\|_{L_\infty}^2$.)

При условии 10.5 из теоремы 4.3 выводим следующий результат (см. [DSu2, теорема 12.10]). Следует учитывать, что сейчас константы в оценках будут зависеть не только от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 , но и от c° и n ; см. замечание 2.12.

Теорема 10.8 ([DSu2]). *Пусть выполнено условие 10.5 (или более сильное условие 10.6). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ выполнены оценки*

$$\begin{aligned} \|\mathbb{D}_{\cos}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/4}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq C_5(1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon, \\ \|\tilde{\mathbb{D}}_{\sin}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{1/4}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq C_6(1 + |\tau|)^{1/2}. \end{aligned} \quad (10.12)$$

Постоянные C_5, C_6 зависят от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}, r_0$, а также от n и c° .

10.2. Более точная аппроксимация по операторной норме в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$. В силу (9.9) имеем

$$t\hat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})\hat{P} = \Lambda_Q b(\mathbf{k})\hat{P} = \Lambda_Q b(\mathbf{D} + \mathbf{k})\hat{P}. \quad (10.13)$$

Из (9.10) следует, что

$$t^3 \hat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})\hat{P} = \hat{N}_Q(\mathbf{k})\hat{P} = b(\mathbf{k})^* L_Q(\mathbf{k}) b(\mathbf{k})\hat{P} = b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* L_Q(\mathbf{D} + \mathbf{k}) b(\mathbf{D} + \mathbf{k})\hat{P}. \quad (10.14)$$

Отметим, что из (3.7)–(3.9) и (5.25) вытекают оценки

$$\|\hat{X}_0 \hat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \|X_1(\boldsymbol{\theta})\| \|f^{-1}\|_{L_\infty} \leq \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty}, \quad (10.15)$$

$$\begin{aligned} \|\hat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq (8\delta)^{-1/2} \|X_1(\boldsymbol{\theta})\| \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty} \\ &\leq (8\delta)^{-1/2} \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|f\|_{L_\infty}^2 \|f^{-1}\|_{L_\infty} =: C_Z, \end{aligned} \quad (10.16)$$

$$\begin{aligned} \|\hat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq (2\delta)^{-1/2} \|X_1(\boldsymbol{\theta})\|^3 \|f^{-1}\|_{L_\infty}^2 \\ &\leq (2\delta)^{-1/2} \alpha_1^{3/2} \|g\|_{L_\infty}^{3/2} \|f\|_{L_\infty}^3 \|f^{-1}\|_{L_\infty}^2 =: C_N. \end{aligned}$$

Положим

$$\hat{G}_{0,Q}(\mathbf{k}) := \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \zeta^{1/2} \bar{Q} (\hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) + \zeta \bar{Q})^{-1} b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* L_Q(\mathbf{D} + \mathbf{k}) b(\mathbf{D} + \mathbf{k}) (\hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) + \zeta \bar{Q})^{-1} \bar{Q} d\zeta, \quad (10.17)$$

$$\hat{\hat{G}}_{0,Q}(\mathbf{k}) := -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \zeta^{-1/2} \bar{Q} (\hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) + \zeta \bar{Q})^{-1} b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* L_Q(\mathbf{D} + \mathbf{k}) b(\mathbf{D} + \mathbf{k}) (\hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) + \zeta \bar{Q})^{-1} \bar{Q} d\zeta. \quad (10.18)$$

В силу (6.16) и (9.11) операторы (4.1) и (4.2) сейчас зависят от $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}$ и совпадают с $\hat{G}_{0,Q}(\mathbf{k})\hat{P}$, $\hat{\hat{G}}_{0,Q}(\mathbf{k})\hat{P}$ соответственно.

Отметим, что из (4.7), (4.8) с учетом (5.15), (5.24), (5.25) вытекают оценки

$$\begin{aligned} \|\widehat{G}_{0,Q}(\mathbf{k})\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} &\leq \frac{1}{2}(2\delta)^{-1/2}c_*^{-1/2}\|X_1(\boldsymbol{\theta})\|^3\|f^{-1}\|_{L_\infty}^2|\mathbf{k}|^2 \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1^{3/2}\alpha_0^{-1}\|g\|_{L_\infty}^{3/2}\|g^{-1}\|_{L_\infty}\|f\|_{L_\infty}^3\|f^{-1}\|_{L_\infty}^4r_0^{-1}|\mathbf{k}|^2 =: C_{\widehat{G}_{0,Q}}|\mathbf{k}|^2, \end{aligned} \quad (10.19)$$

$$\begin{aligned} \|\widehat{\widehat{G}}_{0,Q}(\mathbf{k})\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} &\leq \frac{1}{2}(2\delta)^{-1/2}c_*^{-3/2}\|X_1(\boldsymbol{\theta})\|^3\|f^{-1}\|_{L_\infty}^2 \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1^{3/2}\alpha_0^{-2}\|g\|_{L_\infty}^{3/2}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^2\|f\|_{L_\infty}^3\|f^{-1}\|_{L_\infty}^6r_0^{-1} =: C_{\widehat{\widehat{G}}_{0,Q}}. \end{aligned} \quad (10.20)$$

Положим

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) &:= f \cos(\varepsilon^{-1}\tau \mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}) f^{-1} (I + \Lambda_Q b(\mathbf{D} + \mathbf{k}) \widehat{P}) \\ &\quad - (I + \Lambda_Q b(\mathbf{D} + \mathbf{k}) \widehat{P}) f_0 \cos(\varepsilon^{-1}\tau \mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2}) f_0^{-1}, \end{aligned} \quad (10.21)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{0,\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) &:= f \mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau \mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}) f^{-1} \\ &\quad - (I + \Lambda_Q b(\mathbf{D} + \mathbf{k}) \widehat{P}) f_0 \mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau \mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2}) f_0^{-1}, \end{aligned} \quad (10.22)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) &:= \mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \\ &\quad + \varepsilon^{-1} \int_0^\tau f_0 \cos(\varepsilon^{-1}(\tau - \tilde{\tau}) \mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2}) f_0 \widehat{G}_{0,Q}(\mathbf{k}) f_0 \sin(\varepsilon^{-1}\tilde{\tau} \mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2}) f_0^{-1} d\tilde{\tau} \\ &\quad + \varepsilon^{-1} \int_0^\tau f_0 \sin(\varepsilon^{-1}(\tau - \tilde{\tau}) \mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2}) f_0 \widehat{G}_{0,Q}(\mathbf{k}) f_0 \cos(\varepsilon^{-1}\tilde{\tau} \mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2}) f_0^{-1} d\tilde{\tau}, \end{aligned} \quad (10.23)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) &:= \mathbb{D}_{0,\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) - f_0^2 \widehat{\widehat{G}}_{0,Q}(\mathbf{k}) f_0 \sin(\varepsilon^{-1}\tau \mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2}) f_0^{-1} \\ &\quad - \varepsilon^{-1} \int_0^\tau f_0 \mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2} \cos(\varepsilon^{-1}(\tau - \tilde{\tau}) \mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2}) f_0 \widehat{G}_{0,Q}(\mathbf{k}) f_0 \cos(\varepsilon^{-1}\tilde{\tau} \mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2}) f_0^{-1} d\tilde{\tau} \\ &\quad + \varepsilon^{-1} \int_0^\tau f_0 \mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}(\tau - \tilde{\tau}) \mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2}) f_0 \widehat{G}_{0,Q}(\mathbf{k}) f_0 \sin(\varepsilon^{-1}\tilde{\tau} \mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2}) f_0^{-1} d\tilde{\tau}. \end{aligned} \quad (10.24)$$

Операторы (10.21), (10.22) ограничены, а операторы (10.23), (10.24) в общем случае определены на $\tilde{H}^2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ и $\tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$ соответственно.

Из (10.13), (10.16), (10.19), (10.20) с учетом (9.2), (9.4) и элементарного неравенства $|\sin x|/|x| \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$, следует, что при $\varepsilon > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ справедливы оценки

$$\|\mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} \leq 2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}(1 + C_Z|\mathbf{k}|), \quad (10.25)$$

$$\|\mathbb{D}_{0,\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} \leq \|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}(2\varepsilon^{-1}|\tau| + c_*^{-1/2}C_Z), \quad (10.26)$$

$$\|\mathbb{D}_{\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} \leq 2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}(1 + C_Z|\mathbf{k}| + \varepsilon^{-1}|\tau|\|f\|_{L_\infty}^2 C_{\widehat{G}_{0,Q}}|\mathbf{k}|^2), \quad (10.27)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbb{D}_{\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} &\leq \|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty} \\ &\quad \times (2\varepsilon^{-1}|\tau| + c_*^{-1/2}C_Z + \|f\|_{L_\infty}^2 C_{\widehat{\widehat{G}}_{0,Q}} + 2\varepsilon^{-1}|\tau|c_*^{-1/2}\|f\|_{L_\infty}^2 C_{\widehat{G}_{0,Q}}|\mathbf{k}|). \end{aligned} \quad (10.28)$$

С учетом (9.5), (10.13), (10.14) ясно, что операторы (4.3)–(4.6) сейчас зависят от $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}$, τ и совпадают с операторами $\mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \tau) \widehat{P}$, $\mathbb{D}_{0,\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \tau) \widehat{P}$, $\mathbb{D}_{\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \tau) \widehat{P}$ и $\mathbb{D}_{\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \tau) \widehat{P}$ соответственно.

Теорема 10.9. Пусть операторы $\mathbb{D}_{\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)$, $\mathbb{D}_{\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)$ определены в (10.23), (10.24). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ справедливы оценки

$$\|\mathbb{D}_{\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^2\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mathcal{C}_7(1 + |\tau|)^2 \varepsilon^2, \quad (10.29)$$

$$\|\mathbb{D}_{\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mathcal{C}_8(1 + |\tau|)^2 \varepsilon. \quad (10.30)$$

Константы \mathcal{C}_7 и \mathcal{C}_8 зависят лишь от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Доказательство. Применяя теорему 4.5 с учетом замечания 2.12 и равенства (7.2), получаем

$$\|\mathbb{D}_{\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^2\hat{P}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mathcal{C}'_7(1+|\tau|)^2\varepsilon^2, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, |\mathbf{k}| \leq t_0, \quad (10.31)$$

$$\|\mathbb{D}_{\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2}\hat{P}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mathcal{C}'_8(1+|\tau|)^2\varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, |\mathbf{k}| \leq t_0. \quad (10.32)$$

Константы \mathcal{C}'_7 и \mathcal{C}'_8 зависят лишь от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 . Оценки при $|\mathbf{k}| > t_0$ тривиальны. По аналогии с (7.40), (7.41), используя (7.2), (10.27) и (10.28), получаем:

$$\begin{aligned} & \|\mathbb{D}_{\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2}\hat{P}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} \\ & \leq 2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}(t_0^{-2} + C_Z t_0^{-1} + \|f\|_{L_\infty}^2 C_{\hat{G}_{0,Q}} t_0^{-1}|\tau|)\varepsilon^2, \end{aligned} \quad (10.33)$$

$$\varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, \mathbf{k} \in \tilde{\Omega}, |\mathbf{k}| > t_0,$$

$$\begin{aligned} & \|\mathbb{D}_{\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)\hat{P}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} \\ & \leq \|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}\left(2|\tau|t_0^{-2} + c_*^{-1/2}C_Z t_0^{-1} + \|f\|_{L_\infty}^2 C_{\hat{G}_{0,Q}} t_0^{-1} \right. \\ & \quad \left. + 2|\tau|c_*^{-1/2}\|f\|_{L_\infty}^2 C_{\hat{G}_{0,Q}} t_0^{-1}\right)\varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, \mathbf{k} \in \tilde{\Omega}, |\mathbf{k}| > t_0. \end{aligned} \quad (10.34)$$

Далее, по аналогии с выводом оценок (7.42) и (7.43), используя дискретное преобразование Фурье и учитывая (7.4), (7.7), (9.2), нетрудно вывести оценки

$$\begin{aligned} & \|\mathbb{D}_{\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2}(I - \hat{P})\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} \\ & \leq 2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}(r_0^{-2} + \|f\|_{L_\infty}^2 C_{\hat{G}_{0,Q}} r_0^{-1}|\tau|)\varepsilon^2, \end{aligned} \quad (10.35)$$

$$\begin{aligned} & \|\mathbb{D}_{\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)(I - \hat{P})\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} \\ & \leq \|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}\left(2|\tau|r_0^{-2} + \|f\|_{L_\infty}^2 C_{\hat{G}_{0,Q}} r_0^{-1} + 2|\tau|c_*^{-1/2}\|f\|_{L_\infty}^2 C_{\hat{G}_{0,Q}} r_0^{-1}\right)\varepsilon \end{aligned} \quad (10.36)$$

при всех $\varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, \mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$.

Сопоставляя (10.31)–(10.36) и учитывая (7.7), приходим к оценкам (10.29), (10.30). \square

Теперь на основании теорем 4.7, 4.8 мы усилим результат теоремы 10.9 при дополнительных предположениях.

Теорема 10.10. Пусть операторы $\mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau), \mathbb{D}_{0,\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)$ определены в (10.21), (10.22). Пусть выполнено условие 10.2. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ справедливы оценки

$$\|\mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mathcal{C}_9(1+|\tau|)\varepsilon^2, \quad (10.37)$$

$$\|\mathbb{D}_{0,\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mathcal{C}_{10}(1+|\tau|)\varepsilon. \quad (10.38)$$

Постоянные \mathcal{C}_9 и \mathcal{C}_{10} зависят лишь от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Доказательство. Применяя теорему 4.7 с учетом замечания 2.12 и равенства (7.2), получаем

$$\|\mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2}\hat{P}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mathcal{C}'_9(1+|\tau|)\varepsilon^2, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, |\mathbf{k}| \leq t_0, \quad (10.39)$$

$$\|\mathbb{D}_{0,\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)\hat{P}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mathcal{C}'_{10}(1+|\tau|)\varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, |\mathbf{k}| \leq t_0, \quad (10.40)$$

где константы \mathcal{C}'_9 и \mathcal{C}'_{10} зависят лишь от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Аналогично (10.33) и (10.34), используя (10.25), (10.26), получаем оценки при $|\mathbf{k}| > t_0$:

$$\begin{aligned} \|\mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2}\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} &\leq 2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}(t_0^{-2} + C_Z t_0^{-1})\varepsilon^2, \\ \varepsilon &> 0, \tau \in \mathbb{R}, \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}, |\mathbf{k}| > t_0, \end{aligned} \quad (10.41)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbb{D}_{0,\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} &\leq \|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}(2|\tau|t_0^{-2} + c_*^{-1/2}C_Z t_0^{-1})\varepsilon, \\ \varepsilon &> 0, \tau \in \mathbb{R}, \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}, |\mathbf{k}| > t_0. \end{aligned} \quad (10.42)$$

Наконец, применяя оценки (10.7), (10.8) и учитывая (7.4), имеем

$$\|\mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2}(I - \widehat{P})\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} \leq 2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}r_0^{-2}\varepsilon^2, \quad (10.43)$$

$$\|\mathbb{D}_{0,\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)(I - \widehat{P})\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} \leq 2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}|\tau|r_0^{-2}\varepsilon. \quad (10.44)$$

В итоге, оценка (10.37) следует из (10.39), (10.41) и (10.43), а оценка (10.38) — из (10.40), (10.42) и (10.44). \square

При условии 10.5 из теоремы 4.8 и оценок (10.33)–(10.36) выводим следующий результат.

Теорема 10.11. Пусть операторы $\mathbb{D}_{\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)$, $\mathbb{D}_{\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)$ определены в (10.23), (10.24). Пусть выполнено условие 10.5 (или более сильное условие 10.6). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\mathbb{D}_{\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} &\leq C_{11}(1 + |\tau|)\varepsilon^2, \\ \|\mathbb{D}_{\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} &\leq C_{12}(1 + |\tau|)\varepsilon. \end{aligned}$$

Постоянные C_{11} и C_{12} зависят от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 , а также от c° и n .

10.3. Аппроксимация по энергетической норме. Из (10.13) и (10.21) вытекает оценка

$$\begin{aligned} &\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} \\ &= \|(\widehat{X}_0 + t\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta}))\mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} \\ &\leq \|(\widehat{X}_0 + t\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta}))f \cos(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})f^{-1}(\widehat{P} + t\widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})\widehat{P})\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} \\ &\quad + \|(\widehat{X}_0 + t\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta}))(\widehat{P} + t\widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})\widehat{P})f_0 \cos(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})f_0^{-1}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (10.45)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}fu\|_{L_2(\Omega)} &= \|(\widehat{X}_0 + t\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta}))fu\|_{L_2(\Omega)} \\ &= \|(X_0 + tX_1(\boldsymbol{\theta}))u\|_{L_2(\Omega)} = \|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}u\|_{L_2(\Omega)}, \quad fu \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n), \end{aligned} \quad (10.46)$$

$$\|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}f^{-1}v\|_{L_2(\Omega)} = \|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}v\|_{L_2(\Omega)}, \quad v \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n). \quad (10.47)$$

Поэтому первое слагаемое в правой части (10.45) принимает вид

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2} \cos(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})f^{-1}(\widehat{P} + t\widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})\widehat{P})\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} \\ &\leq \|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}f^{-1}(\widehat{P} + t\widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})\widehat{P})\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} \\ &= \|(\widehat{X}_0 + t\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta}))(\widehat{P} + t\widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})\widehat{P})\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

В силу (9.2) второе слагаемое в правой части (10.45) не превосходит величины

$$\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}\|(\widehat{X}_0 + t\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta}))(\widehat{P} + t\widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})\widehat{P})\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)}.$$

В итоге получаем

$$\begin{aligned} & \|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ & \leq (1 + \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty}) \|(\widehat{X}_0 + t\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta}))(\widehat{P} + t\widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})\widehat{P})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (10.48)$$

Далее, с учетом (6.7), (10.15) и (10.16) имеем

$$\begin{aligned} & \|(\widehat{X}_0 + t\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta}))(\widehat{P} + t\widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})\widehat{P})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ & = \|t\widehat{X}_0\widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})\widehat{P} + t\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta})\widehat{P} + t^2\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta})\widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mathcal{C}'_{13}|\mathbf{k}| + \mathcal{C}''_{13}|\mathbf{k}|^2, \end{aligned}$$

при $\varepsilon > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$, где $\mathcal{C}'_{13} = \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} (1 + \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty})$, $\mathcal{C}''_{13} = \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} C_Z$. Отсюда и из (10.48) вытекает оценка

$$\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \check{\mathcal{C}}'_{13}|\mathbf{k}| + \check{\mathcal{C}}''_{13}|\mathbf{k}|^2, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}, \quad (10.49)$$

где $\check{\mathcal{C}}'_{13} = (1 + \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty}) \mathcal{C}'_{13}$, $\check{\mathcal{C}}''_{13} = (1 + \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty}) \mathcal{C}''_{13}$.

Из теоремы 4.9 выводим следующий результат.

Теорема 10.12. Пусть оператор $\mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)$ определен в (10.21). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ выполнена оценка

$$\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2} \widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mathcal{C}_{14}(1 + |\tau|)\varepsilon^2. \quad (10.50)$$

Постоянная \mathcal{C}_{14} зависит лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Доказательство. Применяя теорему 4.9 и учитывая замечание 2.12, получаем

$$\begin{aligned} & \|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2} \widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mathcal{C}'_{14}(1 + |\tau|)\varepsilon^2, \\ & \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, |\mathbf{k}| \leq t_0. \end{aligned} \quad (10.51)$$

Постоянная \mathcal{C}'_{14} зависит лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

При $|\mathbf{k}| > t_0$ оценки тривиальны. В силу (7.2) и (10.49) имеем:

$$\begin{aligned} & \|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon) \widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq (\check{\mathcal{C}}'_{13}|\mathbf{k}| + \check{\mathcal{C}}''_{13}|\mathbf{k}|^2) \frac{\varepsilon^2}{|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2} \\ & \leq (\check{\mathcal{C}}'_{13}t_0^{-1} + \check{\mathcal{C}}''_{13})\varepsilon^2, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}, |\mathbf{k}| > t_0. \end{aligned} \quad (10.52)$$

Далее, из (10.21), (10.46) и (10.47) вытекает оценка

$$\begin{aligned} & \|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)(I - \widehat{P})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ & \leq (1 + \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty}) \|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)(I - \widehat{P})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ & = (1 + \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty}) \|g^{1/2} b(\mathbf{D} + \mathbf{k}) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)(I - \widehat{P})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ & \leq (1 + \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty}) \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \sup_{0 \neq \mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma}} \frac{|\mathbf{b} + \mathbf{k}| \varepsilon^2}{|\mathbf{b} + \mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2} \\ & \leq (1 + \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty}) \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} r_0^{-1} \varepsilon^2, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}. \end{aligned} \quad (10.53)$$

Сопоставляя (10.51), (10.52) и (10.53) и учитывая (7.7), приходим к искомой оценке (10.50). \square

Аналогичным образом из теорем 4.10 и 4.11 выводятся следующие две теоремы, дающие усиление теоремы 10.12 при дополнительных предположениях. Ср. доказательство теорем 7.13, 7.14.

Теорема 10.13. Пусть оператор $\mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)$ определен в (10.21). Пусть выполнено условие 10.2. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ справедлива оценка

$$\left\| \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{5/4} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_{15}(1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon^2.$$

Постоянная C_{15} зависит лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Теорема 10.14. Пусть оператор $\mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)$ определен в (10.21). Пусть выполнено условие 10.5 (или более сильное условие 10.6). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ справедлива оценка

$$\left\| \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{5/4} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_{16}(1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon^2.$$

Постоянная C_{16} зависит от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 , а также от n и c° .

В завершение этого параграфа приведем результаты из [M5, (7.36)], [DSu2, теоремы 12.13, 12.14] об аппроксимации оператора $\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau \mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})$ по энергетической норме. Эти результаты выводятся из теорем 4.9, 4.10, 4.11.

Теорема 10.15 ([M5]). Пусть оператор $\mathbb{D}_{0,\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)$ определен в (10.22). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ справедлива оценка

$$\left\| \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathbb{D}_{0,\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon) \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_{17}(1 + |\tau|)\varepsilon.$$

Постоянная C_{17} зависит лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Теорема 10.16 ([DSu2]). Пусть оператор $\mathbb{D}_{0,\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)$ определен в (10.22). Пусть выполнено условие 10.2. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ справедлива оценка

$$\left\| \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathbb{D}_{0,\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/4} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_{18}(1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon.$$

Постоянная C_{18} зависит лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Теорема 10.17 ([DSu2]). Пусть оператор $\mathbb{D}_{0,\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)$ определен в (10.22). Пусть выполнено условие 10.5 (или более сильное условие 10.6). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ справедлива оценка

$$\left\| \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathbb{D}_{0,\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/4} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_{19}(1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon.$$

Постоянная C_{19} зависит от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 , а также от n и c° .

§ 11. ПОДТВЕРЖДЕНИЕ ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБ АППРОКСИМАЦИЯХ ОПЕРАТОРОВ $\cos(\varepsilon^{-1}\tau \mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})$ И $\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau \mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})$

11.1. Точность относительно сглаживающего множителя. В утверждениях настоящего параграфа мы накладываем одно из следующих двух условий.

Условие 11.1. Пусть оператор $\hat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta})$ определен в (9.13). Предположим, что $\hat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ в некоторой точке $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Условие 11.2. Пусть операторы $\hat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta})$ и $\hat{\mathcal{N}}_Q^{(\ell)}(\boldsymbol{\theta})$ определены в (9.13) и (9.14) соответственно. Предположим, что $\hat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$ и для некоторого $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ и некоторого $\ell \in \{1, \dots, p(\boldsymbol{\theta}_0)\}$ выполнено $\hat{\mathcal{N}}_Q^{(\ell)}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$.

Аналогом леммы 8.3 является следующая лемма.

Лемма 11.3. Пусть число δ определено в (5.24), а t_0 определено в (5.26). Пусть $F(\mathbf{k}) = F(t, \boldsymbol{\theta})$ — спектральный проектор оператора $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ для промежутка $[0, \delta]$. Пусть операторы $\widehat{G}_{0,Q}(\mathbf{k})$, $\widetilde{\widehat{G}}_{0,Q}(\mathbf{k})$ определены в (10.17), (10.18). Тогда при $|\mathbf{k}| \leq t_0$, $|\mathbf{k}_0| \leq t_0$ справедливы соотношения

$$\|\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k}) - \mathcal{A}(\mathbf{k}_0)F(\mathbf{k}_0)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \check{C}'|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|, \quad (11.1)$$

$$\|\cos(\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})F(\mathbf{k}) - \cos(\tau\mathcal{A}(\mathbf{k}_0)^{1/2})F(\mathbf{k}_0)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \check{C}''(\tau)|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|, \quad (11.2)$$

$$\|\sin(\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})F(\mathbf{k}) - \sin(\tau\mathcal{A}(\mathbf{k}_0)^{1/2})F(\mathbf{k}_0)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \check{C}'''(\tau)|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|, \quad (11.3)$$

$$\|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})F(\mathbf{k}) - \mathcal{A}(\mathbf{k}_0)^{-1/2} \sin(\tau\mathcal{A}(\mathbf{k}_0)^{1/2})F(\mathbf{k}_0)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \check{C}''''(\tau)|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|, \quad (11.4)$$

$$\|\widehat{G}_{0,Q}(\mathbf{k})\widehat{P} - \widehat{G}_{0,Q}(\mathbf{k}_0)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \check{C}''''|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|, \quad (11.5)$$

$$\lim_{|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| \rightarrow 0} \|\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2} f_0 \widehat{G}_{0,Q}(\mathbf{k})\widehat{P} - \mathcal{A}^0(\mathbf{k}_0)^{-1/2} f_0 \widehat{G}_{0,Q}(\mathbf{k}_0)\widehat{P}\| = 0, \quad (11.6)$$

$$\lim_{|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| \rightarrow 0} \|\widetilde{\widehat{G}}_{0,Q}(\mathbf{k}) f_0 \sin(\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})\widehat{P} - \widetilde{\widehat{G}}_{0,Q}(\mathbf{k}_0) f_0 \sin(\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k}_0)^{1/2})\widehat{P}\| = 0. \quad (11.7)$$

Доказательство. Оценка (11.1) была проверена в [Su6, лемма 11.8], а (11.2), (11.4) — в [DSu1, лемма 9.8]. Оценка (11.3) проверяется точно так же, как (11.2). Соотношения (11.5)–(11.7) нетрудно проверить по аналогии с доказательством леммы 8.3. \square

Следующая теорема подтверждает, что теоремы 10.1, 10.9, 10.12, 10.15 точны относительно сглаживающего множителя.

Теорема 11.4. Пусть выполнено условие 11.1.

1°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_1 < 2$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)$, чтобы при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка

$$\|\mathbb{D}_{\cos}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{q_1/2}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon. \quad (11.8)$$

2°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_2 < 1$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)$, чтобы при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка

$$\|\mathbb{D}_{\sin}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{q_2/2}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mathcal{C}(\tau). \quad (11.9)$$

3°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_2 < 1$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)$, чтобы при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка

$$\|\widetilde{\mathbb{D}}_{\sin}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{q_2/2}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mathcal{C}(\tau). \quad (11.10)$$

4°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_1 < 4$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)$, чтобы при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка

$$\|\mathbb{D}_{\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{q_1/2}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon^2. \quad (11.11)$$

5°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_2 < 3$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)$, чтобы при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка

$$\|\mathbb{D}_{\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{q_2/2}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon. \quad (11.12)$$

6°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_1 < 3$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)$, чтобы при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка

$$\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{q_1/2}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon^2. \quad (11.13)$$

7°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_2 < 2$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)$, чтобы при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка

$$\|\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathbb{D}_{0,\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{q_2/2}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon. \quad (11.14)$$

Доказательство. Утверждения 1°, 2°, 3°, 7° были установлены в [DSu1, теорема 9.7], [DSu2, теорема 13.4] на основании абстрактной теоремы 4.12(1°, 2°, 3°, 7°).

Докажем утверждение 4°. Рассуждаем от противного. Предположим, что для некоторых $\tau \neq 0$ и $2 \leq q_1 < 4$ найдется постоянная $\mathcal{C}(\tau)$ такая, что выполнена оценка (11.11) при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$. Домножая оператор под знаком нормы в (11.11) на \hat{P} и используя (7.2), убеждаемся, что выполнена оценка

$$\|\mathbb{D}_{\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \hat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \frac{\varepsilon^{q_1}}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{q_1/2}} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon^2 \quad (11.15)$$

при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

С учетом (10.23) оператор под знаком нормы в (11.15) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \hat{P} &= f \cos(\varepsilon^{-1}\tau \mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}) f^{-1} (I + \Lambda_Q b(\mathbf{k}) \hat{P}) \hat{P} \\ &\quad - (I + \Lambda_Q b(\mathbf{k}) \hat{P}) f_0 \cos(\varepsilon^{-1}\tau \mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2}) f_0^{-1} \hat{P} + \mathbb{G}_{\cos}^{(2)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \hat{P}, \end{aligned} \quad (11.16)$$

где $\mathbb{G}_{\cos}^{(2)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)$ — сумма интегральных членов в (10.23). В силу (3.4) и (10.13) имеем:

$$f^{-1} \Lambda_Q b(\mathbf{k}) \hat{P} = f^{-1} t \hat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta}) \hat{P} = t Z(\boldsymbol{\theta}) f^{-1} \hat{P}. \quad (11.17)$$

Поскольку $f^{-1} \hat{P} = P f^{-1} \hat{P}$, то первое слагаемое в правой части (11.16) можно записать в виде $f \cos(\varepsilon^{-1}\tau \mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}) (P + t Z(\boldsymbol{\theta}) P) f^{-1} \hat{P}$.

Пусть $|\mathbf{k}| \leq t_0$. В силу (1.9) и (1.12)

$$\|F(\mathbf{k})P - P - t Z(\boldsymbol{\theta})P\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_3 |\mathbf{k}|^2. \quad (11.18)$$

Из (11.15)–(11.18) вытекает, что для некоторой постоянной $\check{\mathcal{C}}(\tau)$ выполнено неравенство

$$\|\check{\mathbb{D}}_{\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \frac{\varepsilon^{q_1}}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{q_1/2}} \leq \check{\mathcal{C}}(\tau)\varepsilon^2 \quad (11.19)$$

при почти всех \mathbf{k} в шаре $|\mathbf{k}| \leq t_0$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$. Здесь

$$\begin{aligned} \check{\mathbb{D}}_{\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) &= f \cos(\varepsilon^{-1}\tau \mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}) F(\mathbf{k}) P f^{-1} \hat{P} \\ &\quad - (I + \Lambda_Q b(\mathbf{k}) \hat{P}) f_0 \cos(\varepsilon^{-1}\tau \mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2}) f_0^{-1} \hat{P} + \mathbb{G}_{\cos}^{(2)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \hat{P}. \end{aligned}$$

Из леммы 11.3 (а именно, из неравенств (11.2), (11.5) и неравенств (11.2), (11.3) для $\mathcal{A}^0(\mathbf{k})$) следует, что при фиксированных τ и ε оператор $\check{\mathbb{D}}_{\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)$ непрерывен по \mathbf{k} в шаре $|\mathbf{k}| \leq t_0$. Следовательно, оценка (11.19) справедлива при всех значениях \mathbf{k} из данного шара. В частности, она верна в точке $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}_0$, если $t \leq t_0$. Применяя снова (11.18), получаем, что для некоторой постоянной $\tilde{\mathcal{C}}(\tau)$ справедлива оценка

$$\|\mathbb{D}_{\cos}^{(1)}(t\boldsymbol{\theta}_0, \varepsilon^{-1}\tau) \hat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \frac{\varepsilon^{q_1}}{(t^2 + \varepsilon^2)^{q_1/2}} \leq \tilde{\mathcal{C}}(\tau)\varepsilon^2 \quad (11.20)$$

при всех $t \leq t_0$ и достаточно малом ε .

Оценка (11.20) отвечает абстрактной оценке (4.12). Поскольку $\hat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ в силу условия 11.1, то выполнены условия теоремы 4.12. Утверждение 4° этой теоремы приводит нас к противоречию.

Перейдем к доказательству утверждения 5°. Рассуждаем от противного. Предположим, что для некоторых $\tau \neq 0$ и $1 \leq q_2 < 3$ найдется постоянная $\mathcal{C}(\tau)$ такая, что выполнена

оценка (11.12) при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$. Домножая оператор под знаком нормы в (11.12) на \hat{P} и используя (7.2), убеждаемся, что выполнена оценка

$$\|\mathbb{D}_{\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\hat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \frac{\varepsilon^{q_2}}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{q_2/2}} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon \quad (11.21)$$

при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

С учетом (10.24) оператор под знаком нормы в (11.21) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\hat{P} &= f\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})f^{-1}\hat{P} \\ &- (I + \Lambda_Q b(\mathbf{k})\hat{P})f_0\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})f_0^{-1}\hat{P} \\ &- f_0^2\hat{G}_{0,Q}(\mathbf{k})f_0 \sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})f_0^{-1}\hat{P} + \mathbb{G}_{\sin}^{(3)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\hat{P}, \end{aligned} \quad (11.22)$$

где $\mathbb{G}_{\sin}^{(3)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)$ — сумма интегральных членов в (10.24). Из (1.8) и неравенства $\|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}F(\mathbf{k})^\perp\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq (3\delta)^{-1/2}$ получаем, что

$$\begin{aligned} &\|f\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}F(\mathbf{k})^\perp \sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})(P - F(\mathbf{k}))f^{-1}\hat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \varepsilon^{q_2} (|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-q_2/2} \\ &\leq \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty} (3\delta)^{-1/2} C_1 |\mathbf{k}| \varepsilon^{q_2} (|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-q_2/2} \leq (3\delta)^{-1/2} \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty} C_1 \varepsilon. \end{aligned} \quad (11.23)$$

Из (11.21)–(11.23) вытекает, что для некоторой постоянной $\check{\mathcal{C}}(\tau)$ выполнено неравенство

$$\|\check{\mathbb{D}}_{\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \frac{\varepsilon^{q_2}}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{q_2/2}} \leq \check{\mathcal{C}}(\tau)\varepsilon \quad (11.24)$$

при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$. Здесь

$$\begin{aligned} \check{\mathbb{D}}_{\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) &= f\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})F(\mathbf{k})f^{-1}\hat{P} \\ &- (I + \Lambda_Q b(\mathbf{k})\hat{P})f_0\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})f_0^{-1}\hat{P} \\ &- f_0^2\hat{G}_{0,Q}(\mathbf{k})f_0 \sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})f_0^{-1}\hat{P} + \mathbb{G}_{\sin}^{(3)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\hat{P}. \end{aligned}$$

Пусть $|\mathbf{k}| \leq t_0$. Из леммы 11.3 (а именно, из (11.4)–(11.7) и неравенств (11.2), (11.3) для $\mathcal{A}^0(\mathbf{k})$) следует, что при фиксированных τ и ε оператор $\check{\mathbb{D}}_{\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)$ непрерывен по \mathbf{k} в шаре $|\mathbf{k}| \leq t_0$. Следовательно, оценка (11.24) справедлива при всех значениях \mathbf{k} из данного шара. В частности, она верна в точке $\mathbf{k} = t\theta_0$, если $t \leq t_0$. Применяя снова (11.23), получаем, что для некоторой постоянной $\check{\mathcal{C}}(\tau)$ справедлива оценка

$$\|\check{\mathbb{D}}_{\sin}^{(1)}(t\theta_0, \varepsilon^{-1}\tau)\hat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \frac{\varepsilon^{q_2}}{(t^2 + \varepsilon^2)^{q_2/2}} \leq \check{\mathcal{C}}(\tau)\varepsilon \quad (11.25)$$

при всех $t \leq t_0$ и достаточно малом ε .

Оценка (11.25) отвечает абстрактной оценке (4.13). Утверждение 5° теоремы 4.12 приводит нас к противоречию.

Остается проверить утверждение 6°. Рассуждаем от противного. Предположим, что для некоторых $\tau \neq 0$ и $2 \leq q_1 < 3$ найдется постоянная $\mathcal{C}(\tau)$ такая, что выполнена оценка (11.13) при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$. Домножая оператор под знаком нормы в (11.13) на \hat{P} и используя (7.2), убеждаемся, что выполнена оценка

$$\|\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\hat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \frac{\varepsilon^{q_1}}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{q_1/2}} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon^2 \quad (11.26)$$

при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

В силу (10.21), (10.46), (11.17) и равенства $f^{-1}\hat{P} = Pf^{-1}\hat{P}$ оценка (11.26) переписывается в виде

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}(\cos(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})(I + tZ(\boldsymbol{\theta}))Pf^{-1}\hat{P} \\ & - (I + tZ(\boldsymbol{\theta}))Pf^{-1}f_0\cos(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})f_0^{-1}\hat{P})\| \frac{\varepsilon^{q_1}}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{q_1/2}} \leq C(\tau)\varepsilon^2 \end{aligned} \quad (11.27)$$

при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Пусть $|\mathbf{k}| \leq t_0$. В силу (1.10) и (1.12)

$$\|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}(F(\mathbf{k})P - P - tZ(\boldsymbol{\theta})P)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C'_3|\mathbf{k}|^2. \quad (11.28)$$

Из (11.27) и (11.28) вытекает, что для некоторой постоянной $\check{C}(\tau)$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}(\cos(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})F(\mathbf{k})Pf^{-1}\hat{P} - F(\mathbf{k})Pf^{-1}f_0\cos(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})f_0^{-1}\hat{P})\| \\ & \times \frac{\varepsilon^{q_1}}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{q_1/2}} \leq \check{C}(\tau)\varepsilon^2 \end{aligned} \quad (11.29)$$

при почти всех \mathbf{k} в шаре $|\mathbf{k}| \leq t_0$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$. Из леммы 11.3 следует, что при фиксированных τ и ε оператор под знаком нормы в (11.29) непрерывен по \mathbf{k} в шаре $|\mathbf{k}| \leq t_0$. Следовательно, оценка (11.29) справедлива при всех значениях \mathbf{k} из данного шара. В частности, она верна в точке $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}_0$, если $t \leq t_0$. Применяя снова (11.28), получаем, что для некоторой постоянной $\check{C}'(\tau)$ справедлива оценка

$$\|\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(t\boldsymbol{\theta}_0, \varepsilon^{-1}\tau)\hat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \frac{\varepsilon^{q_1}}{(t^2 + \varepsilon^2)^{q_1/2}} \leq \check{C}'(\tau)\varepsilon^2 \quad (11.30)$$

при всех $t \leq t_0$ и достаточно малом ε .

Оценка (11.30) отвечает абстрактной оценке (4.14). Применяя утверждение 6° теоремы 4.12, приходим к противоречию. \square

Аналогичным образом из теоремы 4.13 выводится следующий результат, который подтверждает точность теорем 10.3, 10.8, 10.10, 10.11, 10.13, 10.14, 10.16, 10.17 (об усилении общих результатов при дополнительных предположениях).

Теорема 11.5. Пусть выполнено условие 11.2.

- 1°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_1 < 3/2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка (11.8).
- 2°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_2 < 1/2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка (11.10).
- 3°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_1 < 3$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка (11.11).
- 4°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_2 < 2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка (11.12).
- 5°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_1 < 5/2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка (11.13).
- 6°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_2 < 3/2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка (11.14).

Утверждения 1°, 2°, 6° ранее были получены в [DSu2, теорема 13.5].

11.2. Точность результатов относительно времени. В этом пункте мы подтверждаем точность результатов § 10 относительно зависимости оценок от τ (при большом $|\tau|$).

По аналогии с доказательством теоремы 11.4 из теоремы 4.14 выводится следующее утверждение, подтверждающее точность теорем 10.1, 10.9, 10.12, 10.15.

Теорема 11.6. Пусть выполнено условие 11.1.

1°. Пусть $q_1 \geq 2$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (11.8) при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

2°. Пусть $q_2 \geq 1$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (11.9) при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

3°. Пусть $q_2 \geq 1$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (11.10) при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

4°. Пусть $q_1 \geq 4$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/\tau^2 = 0$ и выполнена оценка (11.11) при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

5°. Пусть $q_2 \geq 3$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/\tau^2 = 0$ и выполнена оценка (11.12) при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

6°. Пусть $q_1 \geq 3$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (11.13) при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

7°. Пусть $q_2 \geq 2$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (11.14) при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Утверждения 1°, 2°, 3°, 7° ранее были получены в [DSu2, теорема 13.6].

Из теоремы 4.15 выводится следующее утверждение, подтверждающее точность теорем 10.3, 10.8, 10.10, 10.11, 10.13, 10.14, 10.16, 10.17.

Теорема 11.7. Пусть выполнено условие 11.2.

1°. Пусть $q_1 \geq 3/2$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (11.8) при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

2°. Пусть $q_2 \geq 1/2$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (11.10) при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

3°. Пусть $q_1 \geq 3$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (11.11) при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

4°. Пусть $q_2 \geq 2$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (11.12) при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

5°. Пусть $q_1 \geq 5/2$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (11.13) при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

6°. Пусть $q_2 \geq 3/2$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (11.14) при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Утверждения 1°, 2°, 6° ранее были получены в [DSu2, теорема 13.7].

§ 12. АППРОКСИМАЦИИ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ ОТ ОПЕРАТОРА $\hat{\mathcal{A}}$

В этом параграфе мы получаем аппроксимации операторов $\cos(\varepsilon^{-1}\tau\hat{\mathcal{A}}^{1/2})$ и $\hat{\mathcal{A}}^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\hat{\mathcal{A}}^{1/2})$ при малом ε .

12.1. Аппроксимации в старшем порядке. В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор $\hat{\mathcal{A}} = b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x})b(\mathbf{D})$ (см. (6.1)). Пусть $\hat{\mathcal{A}}^0$ — эффе́ктивный оператор (6.15). Напомним обозначение $\mathcal{H}_0 = -\Delta$ и положим

$$\mathcal{R}(\varepsilon) := \varepsilon^2(\mathcal{H}_0 + \varepsilon^2 I)^{-1}.$$

Оператор $\mathcal{R}(\varepsilon)$ раскладывается в прямой интеграл по операторам (7.1):

$$\mathcal{R}(\varepsilon) = \mathcal{U}^{-1} \left(\int_{\tilde{\Omega}} \oplus \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon) d\mathbf{k} \right) \mathcal{U}. \quad (12.1)$$

Положим

$$\mathfrak{D}_{\cos}^{(0)}(\tau) := \cos(\tau\hat{\mathcal{A}}^{1/2}) - \cos(\tau(\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}), \quad (12.2)$$

$$\mathfrak{D}_{\sin}^{(0)}(\tau) := \hat{\mathcal{A}}^{-1/2}\sin(\tau\hat{\mathcal{A}}^{1/2}) - (\hat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}). \quad (12.3)$$

Из (12.1)–(12.3) и из разложений вида (5.21) для $\hat{\mathcal{A}}$ и $\hat{\mathcal{A}}^0$ следуют равенства

$$\left\| \mathfrak{D}_{\cos}^{(0)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} = \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}} \left\| \mathfrak{D}_{\cos}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{q/2} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)}, \quad (12.4)$$

$$\left\| \mathfrak{D}_{\sin}^{(0)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} = \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}} \left\| \mathfrak{D}_{\sin}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{q/2} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)},$$

где $q > 0$, а операторы $\mathfrak{D}_{\cos}^{(0)}(\mathbf{k}, \tau)$ и $\mathfrak{D}_{\sin}^{(0)}(\mathbf{k}, \tau)$ определены в (7.5), (7.6).

Поэтому из теорем 7.1, 7.3, 7.8 прямо вытекают следующие утверждения. Для краткости ниже мы *объединяем формулировки* (по усилению результатов), а потому *нам удобно начать новую нумерацию констант*.

Теорема 12.1 ([BSu5], [M5]). *При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ выполнены оценки*

$$\left\| \mathfrak{D}_{\cos}^{(0)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \hat{C}_1(1 + |\tau|)\varepsilon, \quad (12.5)$$

$$\left\| \mathfrak{D}_{\sin}^{(0)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \hat{C}_2(1 + |\tau|). \quad (12.6)$$

Постоянные \hat{C}_1 и \hat{C}_2 зависят лишь от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Ранее оценка (12.5) была получена в [BSu5, теорема 9.2], а (12.6) — в [M5, теорема 8.1].

Теорема 12.2 ([DSu2]). *Пусть выполнено условие 7.2 либо условие 7.4 (или более сильное условие 7.5). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ выполнены оценки*

$$\left\| \mathfrak{D}_{\cos}^{(0)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/4} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \hat{C}_3(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon, \quad (12.7)$$

$$\left\| \mathfrak{D}_{\sin}^{(0)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/4} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \hat{C}_4(1 + |\tau|)^{1/2}. \quad (12.8)$$

При условии 7.2 постоянные \hat{C}_3 и \hat{C}_4 зависят только от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 . При условии 7.4 эти константы зависят от тех же параметров, а также от n и \hat{c}^∞ .

Ранее теорема 12.2 была получена в [DSu2, теорема 14.2].

12.2. Более точные аппроксимации. Нам потребуется оператор

$$\Pi = \mathcal{U}^{-1}[\hat{P}]\mathcal{U}, \quad (12.9)$$

действующий в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Здесь $[\hat{P}]$ — это оператор ортогонального проектирования в $\mathcal{H} = \int_{\tilde{\Omega}} \oplus L_2(\Omega; \mathbb{C}^n) d\mathbf{k}$, действующий в слоях прямого интеграла как оператор \hat{P} усреднения по ячейке. В [BSu3, (6.8)] показано, что Π задается формулой

$$(\Pi \mathbf{u})(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\tilde{\Omega}} e^{i\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} \hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi},$$

где $\hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})$ — Фурье-образ функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Тем самым, Π является псевдодифференциальным оператором (ПДО) в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, символ которого есть характеристическая функция $\chi_{\tilde{\Omega}}(\boldsymbol{\xi})$ множества $\tilde{\Omega}$.

Пусть $\hat{G}_0(\mathbf{D})$, $\hat{\tilde{G}}_0(\mathbf{D})$ — ПДО второго и нулевого порядков соответственно с символами

$$\hat{G}_0(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \zeta^{1/2} (\hat{S}(\boldsymbol{\xi}) + \zeta \mathbf{1})^{-1} b(\boldsymbol{\xi})^* L(\boldsymbol{\xi}) b(\boldsymbol{\xi}) (\hat{S}(\boldsymbol{\xi}) + \zeta \mathbf{1})^{-1} d\zeta, \quad (12.10)$$

$$\hat{\tilde{G}}_0(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \zeta^{-1/2} (\hat{S}(\boldsymbol{\xi}) + \zeta \mathbf{1})^{-1} b(\boldsymbol{\xi})^* L(\boldsymbol{\xi}) b(\boldsymbol{\xi}) (\hat{S}(\boldsymbol{\xi}) + \zeta \mathbf{1})^{-1} d\zeta. \quad (12.11)$$

Положим

$$\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau) := \cos(\varepsilon^{-1}\tau \hat{\mathcal{A}}^{1/2}) (I + \Lambda b(\mathbf{D})\Pi) - (I + \Lambda b(\mathbf{D})\Pi) \cos(\varepsilon^{-1}\tau (\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}), \quad (12.12)$$

$$\mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau) := \hat{\mathcal{A}}^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau \hat{\mathcal{A}}^{1/2}) - (I + \Lambda b(\mathbf{D})\Pi) (\hat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau (\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}), \quad (12.13)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau) &:= \mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau) \\ &+ \varepsilon^{-1} \int_0^\tau \cos(\varepsilon^{-1}(\tau - \tilde{\tau}) (\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \hat{G}_0(\mathbf{D}) \sin(\varepsilon^{-1}\tilde{\tau} (\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) d\tilde{\tau} \\ &+ \varepsilon^{-1} \int_0^\tau \sin(\varepsilon^{-1}(\tau - \tilde{\tau}) (\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \hat{G}_0(\mathbf{D}) \cos(\varepsilon^{-1}\tilde{\tau} (\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) d\tilde{\tau}, \end{aligned} \quad (12.14)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau) &:= \mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau) - \hat{\tilde{G}}_0(\mathbf{D}) \sin(\varepsilon^{-1}\tau (\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \\ &- \varepsilon^{-1} \int_0^\tau (\hat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \cos(\varepsilon^{-1}(\tau - \tilde{\tau}) (\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \hat{G}_0(\mathbf{D}) \cos(\varepsilon^{-1}\tilde{\tau} (\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) d\tilde{\tau} \\ &+ \varepsilon^{-1} \int_0^\tau (\hat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}(\tau - \tilde{\tau}) (\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \hat{G}_0(\mathbf{D}) \sin(\varepsilon^{-1}\tilde{\tau} (\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) d\tilde{\tau}. \end{aligned} \quad (12.15)$$

Сумму интегральных членов в (12.14) обозначим $\mathfrak{G}_{\cos}^{(2)}(\varepsilon^{-1}\tau)$, а сумму интегральных членов в (12.15) обозначим $\mathfrak{G}_{\sin}^{(3)}(\varepsilon^{-1}\tau)$. Операторы (12.12), (12.13) ограничены, оператор (12.14) в общем случае определен на $H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, а оператор (12.15) — на $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. При условии 7.4 оператор (12.14) определен на $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, а оператор (12.15) ограничен (см. предложение 12.6 ниже).

С помощью преобразования Гельфанда операторы (12.12)–(12.15) раскладываются в прямые интегралы по операторам (7.19)–(7.22) соответственно. С учетом (12.1) отсюда следуют

равенства

$$\|\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} = \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{k}\in\tilde{\Omega}} \|\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{q/2}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)}, \quad (12.16)$$

$$\|\mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} = \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{k}\in\tilde{\Omega}} \|\mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{q/2}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)}, \quad (12.17)$$

$$\|\mathfrak{D}_{\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} = \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{k}\in\tilde{\Omega}} \|\mathfrak{D}_{\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{q/2}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)}, \quad (12.18)$$

$$\|\mathfrak{D}_{\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} = \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{k}\in\tilde{\Omega}} \|\mathfrak{D}_{\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{q/2}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)}. \quad (12.19)$$

Из (12.16)–(12.19) и теорем 7.9, 7.10, 7.11 вытекают следующие утверждения.

Теорема 12.3. Пусть операторы $\mathfrak{D}_{\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$, $\mathfrak{D}_{\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$ определены в (12.14), (12.15). При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{D}_{\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^2\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{C}_5(1+|\tau|)^2\varepsilon^2, \\ \|\mathfrak{D}_{\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{C}_6(1+|\tau|)^2\varepsilon. \end{aligned}$$

Константы \widehat{C}_5 и \widehat{C}_6 зависят лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Теорема 12.4. Пусть операторы $\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$, $\mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$ определены в (12.12), (12.13). Пусть выполнено условие 7.2. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{C}_7(1+|\tau|)\varepsilon^2, \\ \|\mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{C}_8(1+|\tau|)\varepsilon. \end{aligned}$$

Постоянные \widehat{C}_7 и \widehat{C}_8 зависят лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Теорема 12.5. Пусть операторы $\mathfrak{D}_{\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$, $\mathfrak{D}_{\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$ определены в (12.14), (12.15). Пусть выполнено условие 7.4 (или более сильное условие 7.5). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{D}_{\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{C}_9(1+|\tau|)\varepsilon^2, \\ \|\mathfrak{D}_{\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{C}_{10}(1+|\tau|)\varepsilon. \end{aligned}$$

Постоянные \widehat{C}_9 и \widehat{C}_{10} зависят от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 , а также от \widehat{c}° и n .

Для целей интерполяции в главе 3 нам понадобятся следующие два утверждения.

Предложение 12.6. Если выполнено условие 7.4, то операторы $\mathfrak{G}_{\cos}^{(2)}(\varepsilon^{-1}\tau)$, $\mathfrak{G}_{\sin}^{(3)}(\varepsilon^{-1}\tau)$, определенные как сумма интегральных членов в (12.14) и (12.15) соответственно, допускают представления в виде ПДО с символами

$$\begin{aligned} \widehat{\mathfrak{g}}_{\cos}^{(2)}(\boldsymbol{\xi}; \varepsilon^{-1}\tau) &= |\boldsymbol{\xi}| \sum_{1 \leq j, l \leq p(\hat{\boldsymbol{\xi}}): j \neq l} \frac{\cos(\varepsilon^{-1}\tau \widehat{\gamma}_l^\circ(\hat{\boldsymbol{\xi}})^{1/2}|\boldsymbol{\xi}|) - \cos(\varepsilon^{-1}\tau \widehat{\gamma}_j^\circ(\hat{\boldsymbol{\xi}})^{1/2}|\boldsymbol{\xi}|)}{\widehat{\gamma}_j^\circ(\hat{\boldsymbol{\xi}})^{1/2} - \widehat{\gamma}_l^\circ(\hat{\boldsymbol{\xi}})^{1/2}} \widehat{P}_j(\hat{\boldsymbol{\xi}}) \widehat{G}_0(\hat{\boldsymbol{\xi}}) \widehat{P}_l(\hat{\boldsymbol{\xi}}), \\ \widehat{\mathfrak{g}}_{\sin}^{(3)}(\boldsymbol{\xi}; \varepsilon^{-1}\tau) &= \sum_{1 \leq j, l \leq p(\hat{\boldsymbol{\xi}}): j \neq l} \frac{\sin(\varepsilon^{-1}\tau \widehat{\gamma}_l^\circ(\hat{\boldsymbol{\xi}})^{1/2}|\boldsymbol{\xi}|) - \sin(\varepsilon^{-1}\tau \widehat{\gamma}_j^\circ(\hat{\boldsymbol{\xi}})^{1/2}|\boldsymbol{\xi}|)}{\widehat{\gamma}_j^\circ(\hat{\boldsymbol{\xi}})^{1/2}(\widehat{\gamma}_j^\circ(\hat{\boldsymbol{\xi}})^{1/2} - \widehat{\gamma}_l^\circ(\hat{\boldsymbol{\xi}})^{1/2})} \widehat{P}_j(\hat{\boldsymbol{\xi}}) \widehat{G}_0(\hat{\boldsymbol{\xi}}) \widehat{P}_l(\hat{\boldsymbol{\xi}}). \end{aligned}$$

Здесь $\boldsymbol{\xi} = |\boldsymbol{\xi}| \hat{\boldsymbol{\xi}} \in \mathbb{R}^d$, $\hat{\boldsymbol{\xi}} \in \mathbb{S}^{d-1}$, числа $\widehat{\gamma}_j^\circ(\hat{\boldsymbol{\xi}})$, $j = 1, \dots, p(\hat{\boldsymbol{\xi}})$ — различные собственные значения матрицы $\widehat{S}(\hat{\boldsymbol{\xi}}) = b(\hat{\boldsymbol{\xi}})^* g^0 b(\hat{\boldsymbol{\xi}})$, а $\widehat{P}_j(\hat{\boldsymbol{\xi}})$ — ортопроектор в \mathbb{C}^n на собственное

подпространство оператора $\hat{S}(\hat{\xi})$, отвечающее собственному значению $\hat{\gamma}_j^\circ(\hat{\xi})$. Матрица $\hat{G}_0(\hat{\xi})$ определена согласно (12.10). Справедливы оценки

$$|\hat{g}_{\cos}^{(2)}(\xi; \varepsilon^{-1}\tau)| \leq 4\alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} n(\hat{c}^\circ)^{-1} C_{\hat{G}_0} |\xi|, \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \quad (12.20)$$

$$|\hat{g}_{\sin}^{(3)}(\xi; \varepsilon^{-1}\tau)| \leq 4\alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} n\hat{c}_*^{-1/2} (\hat{c}^\circ)^{-1} C_{\hat{G}_0}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (12.21)$$

Доказательство. Доказательство вполне аналогично доказательству предложения 12.6 из [Su8] и опирается на представление для символа оператора $\hat{G}_0(\mathbf{D})$ в виде

$$|\xi|^2 \sum_{1 \leq j, l \leq p(\hat{\xi}): j \neq l} \hat{P}_j(\hat{\xi}) \hat{G}_0(\hat{\xi}) \hat{P}_l(\hat{\xi}),$$

которое обеспечено условием 7.4. Для вывода оценок (12.20), (12.21) используются неравенства $|\hat{\gamma}_j^\circ(\hat{\xi})^{1/2} - \hat{\gamma}_l^\circ(\hat{\xi})^{1/2}| \geq n\hat{c}^\circ(2\|\hat{X}_1(\hat{\xi})\|)^{-1}$, $\hat{\gamma}_j^\circ(\hat{\xi}) \geq \hat{c}_*$ и (6.7), (7.17). \square

Предложение 12.7. Пусть операторы $\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$, $\mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$, $\mathfrak{D}_{\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$, $\mathfrak{D}_{\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$ определены в (12.12)–(12.15).

1°. При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \hat{C}_{11}^\circ(1 + |\tau|)\varepsilon, \quad (12.22)$$

$$\|\mathfrak{D}_{\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \hat{C}_{11}(1 + |\tau|)\varepsilon, \quad (12.23)$$

$$\|\mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \hat{C}_{12}^\circ(1 + |\tau|), \quad (12.24)$$

$$\|\mathfrak{D}_{\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \hat{C}_{12}(1 + |\tau|). \quad (12.25)$$

Постоянные \hat{C}_{11}° , \hat{C}_{11} , \hat{C}_{12}° , \hat{C}_{12} зависят лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

2°. Пусть выполнено условие 7.2. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/4}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \hat{C}_{13}(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon, \quad (12.26)$$

$$\|\mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/4}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \hat{C}_{14}(1 + |\tau|)^{1/2}. \quad (12.27)$$

Постоянные \hat{C}_{13} , \hat{C}_{14} зависят лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

3°. Пусть выполнено условие 7.4 (или более сильное условие 7.5). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/4}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \hat{C}_{15}^\circ(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon, \quad (12.28)$$

$$\|\mathfrak{D}_{\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/4}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \hat{C}_{15}(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon, \quad (12.29)$$

$$\|\mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/4}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \hat{C}_{16}^\circ(1 + |\tau|)^{1/2}, \quad (12.30)$$

$$\|\mathfrak{D}_{\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/4}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \hat{C}_{16}(1 + |\tau|)^{1/2}. \quad (12.31)$$

Постоянные \hat{C}_{15}° , \hat{C}_{15} , \hat{C}_{16}° , \hat{C}_{16} зависят от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 , а также от \hat{c}° и n .

Доказательство. 1°. Из (12.12) следует неравенство

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \|\mathfrak{D}_{\cos}^{(0)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + 2\|\Lambda b(\mathbf{D})\Pi\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \quad (12.32)$$

С помощью разложения в прямой интеграл (см. (12.1), (12.9)) с учетом (7.10) и (7.13) имеем

$$\begin{aligned} \|\Lambda b(\mathbf{D})\Pi\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= \sup_{\mathbf{k} \in \hat{\Omega}} \|\Lambda b(\mathbf{D} + \mathbf{k})\hat{P}\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ &\leq C_{\hat{Z}} \sup_{\mathbf{k} \in \hat{\Omega}} \frac{|\mathbf{k}|\varepsilon^2}{|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2} \leq \frac{1}{2}C_{\hat{Z}}\varepsilon. \end{aligned} \quad (12.33)$$

Из (12.5), (12.32) и (12.33) вытекает оценка (12.22) с постоянной $\widehat{C}_{11}^\circ = \widehat{C}_1 + C_{\widehat{Z}}$.

В силу (12.14) справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{D}_{\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \|\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \|\mathfrak{G}_{\cos}^{(2)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \quad (12.34)$$

С помощью преобразования Фурье, учитывая (7.17), имеем

$$\|\mathfrak{G}_{\cos}^{(2)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 2\varepsilon^{-1}|\tau|C_{\widehat{G}_0} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \frac{|\xi|^2 \varepsilon^2}{|\xi|^2 + \varepsilon^2} \leq 2|\tau|C_{\widehat{G}_0} \varepsilon. \quad (12.35)$$

Теперь из (12.22), (12.34) и (12.35) вытекает оценка (12.23) с постоянной $\widehat{C}_{11} = \widehat{C}_{11}^\circ + 2C_{\widehat{G}_0}$.

Далее, из (12.13) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \|\mathfrak{D}_{\sin}^{(0)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \|\Lambda b(\mathbf{D})\Pi(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \quad (12.36)$$

Аналогично (12.33) имеем

$$\begin{aligned} &\|\Lambda b(\mathbf{D})\Pi(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &= \sup_{\mathbf{k} \in \widehat{\Omega}} \|\Lambda b(\mathbf{D} + \mathbf{k})\widehat{P}(\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}))^{-1/2}\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_{\widehat{Z}}\widehat{c}_*^{-1/2}. \end{aligned} \quad (12.37)$$

Из (12.6), (12.36) и (12.37) следует оценка (12.24) с постоянной $\widehat{C}_{12}^\circ = \widehat{C}_2 + C_{\widehat{Z}}\widehat{c}_*^{-1/2}$.

В силу (12.15) справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{D}_{\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \|\mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \|\widehat{G}_0(\mathbf{D})\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} + \|\mathfrak{G}_{\sin}^{(3)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \quad (12.38)$$

С учетом (7.18) второй член справа оценивается константой $C_{\widehat{G}_0}$. Аналогично (12.35) имеем

$$\begin{aligned} &\|\mathfrak{G}_{\sin}^{(3)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq 2\varepsilon^{-1}|\tau|C_{\widehat{G}_0}\widehat{c}_*^{-1/2} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \frac{|\xi|\varepsilon}{(|\xi|^2 + \varepsilon^2)^{1/2}} \leq 2|\tau|C_{\widehat{G}_0}\widehat{c}_*^{-1/2}. \end{aligned} \quad (12.39)$$

В итоге из (12.24), (12.38) и (12.39) вытекает оценка (12.25) с постоянной $\widehat{C}_{12} = \widehat{C}_{12}^\circ + C_{\widehat{G}_0} + 2C_{\widehat{G}_0}\widehat{c}_*^{-1/2}$.

2°. Пусть выполнено условие 7.2. Из (12.12) следует неравенство

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/4}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \|\mathfrak{D}_{\cos}^{(0)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/4}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &+ 2\|\Lambda b(\mathbf{D})\Pi\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/4}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \quad (12.40)$$

По аналогии с (12.33) имеем

$$\|\Lambda b(\mathbf{D})\Pi\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/4}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{\widehat{Z}} \sup_{\mathbf{k} \in \widehat{\Omega}} \frac{|\mathbf{k}|\varepsilon^{3/2}}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{3/4}} \leq C_{\widehat{Z}}\varepsilon. \quad (12.41)$$

Из (12.7), (12.40) и (12.41) вытекает оценка (12.26) с постоянной $\widehat{C}_{13} = \widehat{C}_3 + 2C_{\widehat{Z}}$.

Из (12.13) следует неравенство

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/4}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \|\mathfrak{D}_{\sin}^{(0)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/4}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \|\Lambda b(\mathbf{D})\Pi(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/4}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \quad (12.42)$$

Аналогично (12.37) имеем

$$\|\Lambda b(\mathbf{D})\Pi(\hat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/4}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{\hat{\mathcal{Z}}}\hat{c}_*^{-1/2}. \quad (12.43)$$

Комбинируя (12.8), (12.42) и (12.43), получаем оценку (12.27) с постоянной $\hat{C}_{14} = \hat{C}_4 + C_{\hat{\mathcal{Z}}}\hat{c}_*^{-1/2}$.

3°. При условии 7.4 имеют место оценки (12.7) и (12.8) и по-прежнему справедливы соотношения (12.40)–(12.43). Это приводит к оценкам (12.28), (12.30) с постоянными $\hat{C}_{15}^\circ = \hat{C}_3 + 2C_{\hat{\mathcal{Z}}}$ и $\hat{C}_{16}^\circ = \hat{C}_4 + C_{\hat{\mathcal{Z}}}\hat{c}_*^{-1/2}$.

Далее, по аналогии с (12.34) имеем

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{D}_{\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/4}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \|\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/4}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \|\mathfrak{G}_{\cos}^{(2)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/4}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \quad (12.44)$$

В силу предложения 12.6 при условии 7.4 справедлива оценка (12.20) для символа оператора $\mathfrak{G}_{\cos}^{(2)}(\varepsilon^{-1}\tau)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{G}_{\cos}^{(2)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/4}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ \leq 4\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}n(\hat{c}^\circ)^{-1}C_{\hat{G}_0}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}\frac{|\xi|\varepsilon^{3/2}}{(|\xi|^2+\varepsilon^2)^{3/4}} \leq 4\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}n(\hat{c}^\circ)^{-1}C_{\hat{G}_0}\varepsilon. \end{aligned} \quad (12.45)$$

Из (12.28), (12.44) и (12.45) вытекает оценка (12.29) с постоянной $\hat{C}_{15} = \hat{C}_{15}^\circ + 4\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}n(\hat{c}^\circ)^{-1}C_{\hat{G}_0}$.

В силу (12.15) справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{D}_{\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/4}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \|\mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/4}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \|\hat{\tilde{G}}_0(\mathbf{D})\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/4}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} + \|\mathfrak{G}_{\sin}^{(3)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/4}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \quad (12.46)$$

С учетом (7.18) второй член справа оценивается константой $C_{\hat{\tilde{G}}_0}$. В силу предложения 12.6 при условии 7.4 справедлива оценка (12.21) для символа оператора $\mathfrak{G}_{\sin}^{(3)}(\varepsilon^{-1}\tau)$. Следовательно,

$$\|\mathfrak{G}_{\sin}^{(3)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/4}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 4\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}n\hat{c}_*^{-1/2}(\hat{c}^\circ)^{-1}C_{\hat{G}_0}. \quad (12.47)$$

В итоге соотношения (12.30), (12.46) и (12.47) влекут оценку (12.31) с постоянной $\hat{C}_{16} = \hat{C}_{16}^\circ + C_{\hat{\tilde{G}}_0} + 4\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}n\hat{c}_*^{-1/2}(\hat{c}^\circ)^{-1}C_{\hat{G}_0}$. \square

12.3. Аппроксимация по “энергетической” норме. Аналогично (12.16), (12.17) имеем

$$\begin{aligned} &\|\hat{\mathcal{A}}^{1/2}\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &= \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{k}\in\tilde{\Omega}}\|\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{q/2}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)}, \\ &\|\hat{\mathcal{A}}^{1/2}\mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &= \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{k}\in\tilde{\Omega}}\|\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{q/2}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Поэтому из теорем 7.12–7.17 вытекают следующие утверждения.

Теорема 12.8. Пусть операторы $\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$, $\mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$ определены в (12.12), (12.13). При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ выполнены оценки

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathcal{A}}^{1/2}\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \hat{C}_{17}(1+|\tau|)\varepsilon^2, \\ \|\hat{\mathcal{A}}^{1/2}\mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \hat{C}_{18}(1+|\tau|)\varepsilon. \end{aligned} \quad (12.48)$$

Постоянные \widehat{C}_{17} , \widehat{C}_{18} зависят лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Оценка (12.48) ранее была найдена в [M5, теорема 8.1].

Теорема 12.9. Пусть операторы $\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$, $\mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$ определены в (12.12), (12.13). Пусть выполнено условие 7.2 либо условие 7.4 (или более сильное условие 7.5). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ выполнены оценки

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}^{1/2} \mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\varepsilon)^{5/4} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_{19} (1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon^2, \quad (12.49)$$

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}^{1/2} \mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\varepsilon)^{3/4} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_{20} (1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon. \quad (12.50)$$

При условии 7.2 постоянные \widehat{C}_{19} и \widehat{C}_{20} зависят только от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 . При условии 7.4 эти константы зависят от тех же параметров, а также от n и \widehat{C}° .

Оценка (12.50) ранее была доказана в [DSu2, теорема 14.4].

Для целей интерполяции в главе 3 нам понадобится следующее утверждение.

Предложение 12.10. Пусть оператор $\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$ определен в (12.12). При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\left\| \mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_{21}^\circ, \quad (12.51)$$

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}^{1/2} \mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_{21} \varepsilon. \quad (12.52)$$

Постоянные \widehat{C}_{21}° , \widehat{C}_{21} зависят лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 и r_1 .

Доказательство. Из (12.12) следует неравенство

$$\begin{aligned} \left\| \mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \left\| \mathfrak{D}_{\cos}^{(0)}(\varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + 2 \left\| \Lambda b(\mathbf{D}) \Pi \mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

В силу (12.2) первое слагаемое справа не превосходит 2. Аналогично (12.33) имеем

$$\left\| \Lambda b(\mathbf{D}) \Pi \mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{\widehat{Z}} \sup_{\mathbf{k} \in \widehat{\Omega}} \frac{|\mathbf{k}| \varepsilon}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{1/2}} \leq C_{\widehat{Z}} r_1.$$

В итоге получаем оценку (12.51) с постоянной $\widehat{C}_{21}^\circ = 2 + 2C_{\widehat{Z}} r_1$.

Проверим справедливость оценки (12.52). В силу (12.12)

$$\begin{aligned} \left\| \widehat{\mathcal{A}}^{1/2} \mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq 2 \left\| \widehat{\mathcal{A}}^{1/2} \mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + 2 \left\| \widehat{\mathcal{A}}^{1/2} \Lambda b(\mathbf{D}) \Pi \mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \quad (12.53)$$

С помощью преобразования Фурье выводим оценку

$$\begin{aligned} \left\| \widehat{\mathcal{A}}^{1/2} \mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|b(\mathbf{D}) \mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \alpha_1^{1/2} \sup_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d} \frac{|\boldsymbol{\xi}| \varepsilon}{(|\boldsymbol{\xi}|^2 + \varepsilon^2)^{1/2}} \leq \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \alpha_1^{1/2} \varepsilon. \end{aligned} \quad (12.54)$$

Далее, используя разложение в прямой интеграл и учитывая (6.13), (7.10), (7.13), получаем

$$\begin{aligned} &\left\| \widehat{\mathcal{A}}^{1/2} \Lambda b(\mathbf{D}) \Pi \mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &= \sup_{\mathbf{k} \in \widehat{\Omega}} \|g^{1/2} b(\mathbf{D} + \mathbf{k}) \Lambda b(\mathbf{k}) \widehat{P} \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ &\leq |\Omega|^{-1/2} \|g^{1/2} b(\mathbf{D}) \Lambda\|_{L_2(\Omega)} \alpha_1^{1/2} \sup_{\mathbf{k} \in \widehat{\Omega}} \frac{|\mathbf{k}| \varepsilon}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{1/2}} \\ &\quad + \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \alpha_1^{1/2} C_{\widehat{Z}} \sup_{\mathbf{k} \in \widehat{\Omega}} \frac{|\mathbf{k}|^2 \varepsilon}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{1/2}} \leq \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \alpha_1^{1/2} (1 + C_{\widehat{Z}} r_1) \varepsilon. \end{aligned} \quad (12.55)$$

Из (12.53)–(12.55) вытекает искомое неравенство (12.52) с постоянной $\widehat{C}_{21} = 2\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\alpha_1^{1/2}(2 + C_{\widehat{Z}}r_1)$. \square

12.4. Подтверждение точности теорем об аппроксимациях оператор-функций от \widehat{A} . Применяя теоремы из §8, мы подтверждаем точность результатов пунктов 12.1–12.3. Начнем с точности относительно сглаживающего множителя.

Покажем, что общие результаты (теоремы 12.1, 12.3, 12.8) точны.

Теорема 12.11. *Пусть выполнено условие 8.1.*

1°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_1 < 2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство

$$\|\mathfrak{D}_{\cos}^{(0)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{q_1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(\tau)\varepsilon. \quad (12.56)$$

2°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_2 < 1$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство

$$\|\mathfrak{D}_{\sin}^{(0)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{q_2/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(\tau). \quad (12.57)$$

3°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_1 < 4$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство

$$\|\mathfrak{D}_{\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{q_1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(\tau)\varepsilon^2. \quad (12.58)$$

4°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_2 < 3$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство

$$\|\mathfrak{D}_{\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{q_2/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(\tau)\varepsilon. \quad (12.59)$$

5°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_1 < 3$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство

$$\|\widehat{A}^{1/2}\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{q_1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(\tau)\varepsilon^2. \quad (12.60)$$

6°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_2 < 2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство

$$\|\widehat{A}^{1/2}\mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{q_2/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(\tau)\varepsilon. \quad (12.61)$$

Доказательство. Докажем утверждение 1° методом от противного. Предположим, что при некоторых $\tau \neq 0$ и $0 \leq q_1 < 2$ найдется такая постоянная $C(\tau)$, что неравенство (12.56) выполнено при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. В силу (12.4) это означает, что при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом ε выполнена оценка (8.26). Но это противоречит утверждению 1° теоремы 8.4.

Аналогичным образом утверждения 2°–6° выводятся из соответствующих утверждений теоремы 8.4. \square

Утверждения 1°, 2°, 6° ранее были получены в [DSu1, теорема 10.4], [DSu2, теорема 14.5].

Точность усиленных результатов (теорем 12.2, 12.4, 12.5, 12.9) вытекает из теоремы 8.5.

Теорема 12.12. *Пусть выполнено условие 8.2.*

1°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_1 < 3/2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы оценка (12.56) выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

2°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_2 < 1/2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы оценка (12.57) выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

3°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_1 < 3$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы оценка (12.58) выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

4°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_2 < 2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы оценка (12.59) выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

5°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_1 < 5/2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы оценка (12.60) выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

6°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_2 < 3/2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы оценка (12.61) выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Утверждения 1°, 2°, 6° ранее были получены в [DSu2, теорема 14.6].

Перейдем к подтверждению точности относительно зависимости оценок от параметра τ . Из теоремы 8.6 вытекает точность общих результатов (теорем 12.1, 12.3, 12.8).

Теорема 12.13. Пусть выполнено условие 8.1.

1°. Пусть $q_1 \geq 2$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (12.56) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

2°. Пусть $q_2 \geq 1$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (12.57) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

3°. Пусть $q_1 \geq 4$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/\tau^2 = 0$ и выполнена оценка (12.58) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

4°. Пусть $q_2 \geq 3$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/\tau^2 = 0$ и выполнена оценка (12.59) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

5°. Пусть $q_1 \geq 3$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (12.60) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

6°. Пусть $q_2 \geq 2$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (12.61) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Утверждения 1°, 2°, 6° ранее были получены в [DSu2, теорема 14.7].

Точность усиленных результатов (теорем 12.2, 12.4, 12.5, 12.9) вытекает из теоремы 8.7.

Теорема 12.14. Пусть выполнено условие 8.2.

1°. Пусть $q_1 \geq 3/2$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (12.56) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

2°. Пусть $q_2 \geq 1/2$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (12.57) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

3°. Пусть $q_1 \geq 3$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (12.58) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

4°. Пусть $q_2 \geq 2$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (12.59) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

5°. Пусть $q_1 \geq 5/2$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (12.60) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

6°. Пусть $q_2 \geq 3/2$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (12.61) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Утверждения 1°, 2°, 6° ранее были получены в [DSu2, теорема 14.8].

§ 13. АППРОКСИМАЦИИ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ ОТ ОПЕРАТОРА \mathcal{A}

В этом параграфе мы получаем аппроксимации окаймленных операторов $\cos(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^{1/2})$ и $\mathcal{A}^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^{1/2})$ при малом ε .

13.1. Аппроксимации в старшем порядке. В $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор (5.10). Пусть f_0 — матрица (9.1) и \mathcal{A}^0 — оператор (9.3). Положим

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_{\cos}^{(0)}(\varepsilon^{-1}\tau) &:= f \cos(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^{1/2})f^{-1} - f_0 \cos(\varepsilon^{-1}\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}, \\ \mathbb{D}_{\sin}^{(0)}(\varepsilon^{-1}\tau) &:= f\mathcal{A}^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^{1/2})f^{-1} - f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}, \\ \widetilde{\mathbb{D}}_{\sin}^{(0)}(\varepsilon^{-1}\tau) &:= f\mathcal{A}^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^{1/2})f^* - f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0.\end{aligned}$$

Из разложений вида (5.21) для \mathcal{A} и \mathcal{A}^0 с учетом (12.1) следуют равенства

$$\begin{aligned}\|\mathbb{D}_{\cos}^{(0)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}} \|\mathbb{D}_{\cos}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{q/2}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)}, \\ \|\mathbb{D}_{\sin}^{(0)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}} \|\mathbb{D}_{\sin}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{q/2}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)}, \\ \|\widetilde{\mathbb{D}}_{\sin}^{(0)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}} \|\widetilde{\mathbb{D}}_{\sin}^{(0)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{q/2}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)},\end{aligned}$$

где $q > 0$, а операторы $\mathbb{D}_{\cos}^{(0)}(\mathbf{k}, \tau)$, $\mathbb{D}_{\sin}^{(0)}(\mathbf{k}, \tau)$, $\widetilde{\mathbb{D}}_{\sin}^{(0)}(\mathbf{k}, \tau)$ определены в (10.1)–(10.3). Поэтому из теорем 10.1, 10.3, 10.8 прямо вытекают следующие утверждения.

Теорема 13.1 ([BSu5], [M5], [DSu1]). *При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ выполнены оценки*

$$\|\mathbb{D}_{\cos}^{(0)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_1(1 + |\tau|)\varepsilon, \quad (13.1)$$

$$\|\mathbb{D}_{\sin}^{(0)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_2(1 + |\tau|), \quad (13.2)$$

$$\|\widetilde{\mathbb{D}}_{\sin}^{(0)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widetilde{C}_2(1 + |\tau|). \quad (13.3)$$

Постоянные C_1 , C_2 , \widetilde{C}_2 зависят лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Ранее оценка (13.1) была получена в [BSu5, теорема 10.2], (13.2) — в [M5, теорема 8.1], а (13.3) — в [DSu1, теорема 10.5].

Теорема 13.2 ([DSu2]). *Пусть выполнено условие 10.2 либо условие 10.5 (или более сильное условие 10.6). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ выполнены оценки*

$$\begin{aligned}\|\mathbb{D}_{\cos}^{(0)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/4}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq C_3(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon, \\ \|\widetilde{\mathbb{D}}_{\sin}^{(0)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/4}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq C_4(1 + |\tau|)^{1/2}.\end{aligned} \quad (13.4)$$

При условии 10.2 постоянные C_3 и C_4 зависят только от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 . При условии 10.5 эти константы зависят от тех же параметров, а также от n и c° .

Ранее теорема 13.2 была получена в [DSu2, теорема 14.10].

13.2. Более точные аппроксимации. Пусть $\widehat{G}_{0,Q}(\mathbf{D})$, $\widehat{\widehat{G}}_{0,Q}(\mathbf{D})$ — ПДО второго и нулевого порядков соответственно с символами

$$\widehat{G}_{0,Q}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \zeta^{1/2} \overline{Q}(\widehat{S}(\boldsymbol{\xi}) + \zeta \overline{Q})^{-1} b(\boldsymbol{\xi})^* L_Q(\boldsymbol{\xi}) b(\boldsymbol{\xi}) (\widehat{S}(\boldsymbol{\xi}) + \zeta \overline{Q})^{-1} \overline{Q} d\zeta, \quad (13.5)$$

$$\widehat{\widehat{G}}_{0,Q}(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \zeta^{-1/2} \overline{Q}(\widehat{S}(\boldsymbol{\xi}) + \zeta \overline{Q})^{-1} b(\boldsymbol{\xi})^* L_Q(\boldsymbol{\xi}) b(\boldsymbol{\xi}) (\widehat{S}(\boldsymbol{\xi}) + \zeta \overline{Q})^{-1} \overline{Q} d\zeta. \quad (13.6)$$

Положим

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau) &:= f \cos(\varepsilon^{-1}\tau \mathcal{A}^{1/2}) f^{-1} (I + \Lambda_Q b(\mathbf{D}) \Pi) \\ &\quad - (I + \Lambda_Q b(\mathbf{D}) \Pi) f_0 \cos(\varepsilon^{-1}\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1}, \end{aligned} \quad (13.7)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau) &:= f \mathcal{A}^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau \mathcal{A}^{1/2}) f^{-1} \\ &\quad - (I + \Lambda_Q b(\mathbf{D}) \Pi) f_0 (\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1}, \end{aligned} \quad (13.8)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau) &:= \mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau) \\ &\quad + \varepsilon^{-1} \int_0^\tau f_0 \cos(\varepsilon^{-1}(\tau - \tilde{\tau}) (\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0 \widehat{G}_{0,Q}(\mathbf{D}) f_0 \sin(\varepsilon^{-1}\tilde{\tau} (\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1} d\tilde{\tau} \\ &\quad + \varepsilon^{-1} \int_0^\tau f_0 \sin(\varepsilon^{-1}(\tau - \tilde{\tau}) (\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0 \widehat{G}_{0,Q}(\mathbf{D}) f_0 \cos(\varepsilon^{-1}\tilde{\tau} (\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1} d\tilde{\tau}, \end{aligned} \quad (13.9)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau) &:= \mathbb{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau) - f_0^2 \widehat{G}_{0,Q}(\mathbf{D}) f_0 \sin(\varepsilon^{-1}\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1} \\ &\quad - \varepsilon^{-1} \int_0^\tau f_0 (\mathcal{A}^0)^{-1/2} \cos(\varepsilon^{-1}(\tau - \tilde{\tau}) (\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0 \widehat{G}_{0,Q}(\mathbf{D}) f_0 \cos(\varepsilon^{-1}\tilde{\tau} (\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1} d\tilde{\tau} \\ &\quad + \varepsilon^{-1} \int_0^\tau f_0 (\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}(\tau - \tilde{\tau}) (\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0 \widehat{G}_{0,Q}(\mathbf{D}) f_0 \sin(\varepsilon^{-1}\tilde{\tau} (\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1} d\tilde{\tau}. \end{aligned} \quad (13.10)$$

Операторы (13.7), (13.8) ограничены, оператор (13.9) в общем случае определен на $H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, а оператор (13.10) — на $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. При условии 10.5 оператор (13.9) определен на $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, а оператор (13.10) ограничен (см. предложение 13.6 ниже).

С помощью преобразования Гельфанда операторы (13.7)–(13.10) раскладываются в прямые интегралы по операторам (10.21)–(10.24), соответственно. С учетом (12.1) отсюда следуют равенства

$$\|\mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} = \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}} \|\mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{q/2}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)}, \quad (13.11)$$

$$\|\mathbb{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} = \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}} \|\mathbb{D}_{0,\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{q/2}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)}, \quad (13.12)$$

$$\|\mathbb{D}_{\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} = \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}} \|\mathbb{D}_{\cos}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{q/2}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)}, \quad (13.13)$$

$$\|\mathbb{D}_{\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} = \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}} \|\mathbb{D}_{\sin}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{q/2}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)}. \quad (13.14)$$

Из (13.11)–(13.14) и теорем 10.9, 10.10, 10.11 вытекают следующие утверждения.

Теорема 13.3. Пусть операторы $\mathbb{D}_{\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$, $\mathbb{D}_{\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$ определены в (13.9), (13.10). При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\mathbb{D}_{\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\varepsilon)^2\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq C_5(1 + |\tau|)^2 \varepsilon^2, \\ \|\mathbb{D}_{\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq C_6(1 + |\tau|)^2 \varepsilon. \end{aligned}$$

Константы C_5 и C_6 зависят лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Теорема 13.4. Пусть операторы $\mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$, $\mathbb{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$ определены в (13.7), (13.8). Пусть выполнено условие 10.2. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq C_7(1 + |\tau|) \varepsilon^2, \\ \|\mathbb{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq C_8(1 + |\tau|) \varepsilon. \end{aligned}$$

Постоянные C_7 и C_8 зависят лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Теорема 13.5. Пусть операторы $\mathbb{D}_{\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$, $\mathbb{D}_{\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$ определены в (13.9), (13.10). Пусть выполнено условие 10.5 (или более сильное условие 10.6). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\mathbb{D}_{\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq C_9(1+|\tau|)\varepsilon^2, \\ \|\mathbb{D}_{\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq C_{10}(1+|\tau|)\varepsilon. \end{aligned}$$

Постоянные C_9 и C_{10} зависят от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 , а также от c° и n .

Для целей интерполяции в главе 3 нам понадобятся следующие два утверждения. Первое из них несложно проверить по аналогии с доказательством предложения 12.6.

Предложение 13.6. Если выполнено условие 10.5, то операторы $\mathbb{G}_{\cos}^{(2)}(\varepsilon^{-1}\tau)$, $\mathbb{G}_{\sin}^{(3)}(\varepsilon^{-1}\tau)$, определенные как сумма интегральных членов в (13.9) и (13.10) соответственно, допускают представления в виде ПДО с символами

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{\cos}^{(2)}(\xi; \varepsilon^{-1}\tau) &= |\xi| f_0^2 \sum_{1 \leq j, l \leq p(\hat{\xi}): j \neq l} \frac{\cos(\varepsilon^{-1}\tau \gamma_l^\circ(\hat{\xi})^{1/2}|\xi|) - \cos(\varepsilon^{-1}\tau \gamma_j^\circ(\hat{\xi})^{1/2}|\xi|)}{\gamma_j^\circ(\hat{\xi})^{1/2} - \gamma_l^\circ(\hat{\xi})^{1/2}} \mathcal{P}_j(\hat{\xi})^* \hat{G}_{0,Q}(\hat{\xi}) \mathcal{P}_l(\hat{\xi}), \\ \mathfrak{g}_{\sin}^{(3)}(\xi; \varepsilon^{-1}\tau) &= f_0^2 \sum_{1 \leq j, l \leq p(\hat{\xi}): j \neq l} \frac{\sin(\varepsilon^{-1}\tau \gamma_l^\circ(\hat{\xi})^{1/2}|\xi|) - \sin(\varepsilon^{-1}\tau \gamma_j^\circ(\hat{\xi})^{1/2}|\xi|)}{\gamma_j^\circ(\hat{\xi})^{1/2}(\gamma_j^\circ(\hat{\xi})^{1/2} - \gamma_l^\circ(\hat{\xi})^{1/2})} \mathcal{P}_j(\hat{\xi})^* \hat{G}_{0,Q}(\hat{\xi}) \mathcal{P}_l(\hat{\xi}). \end{aligned}$$

Здесь $\xi = |\xi|\hat{\xi} \in \mathbb{R}^d$, $\hat{\xi} \in \mathbb{S}^{d-1}$, числа $\gamma_j^\circ(\hat{\xi})$, $j = 1, \dots, p(\hat{\xi})$ — различные собственные значения задачи $\hat{S}(\hat{\xi})\mathbf{c} = \gamma \bar{Q}\mathbf{c}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^n$, а $\mathcal{P}_j(\hat{\xi})$ — проектор в \mathbb{C}^n на соответствующее собственное подпространство, ортогональный с весом \bar{Q} . Матрица $\hat{G}_{0,Q}(\hat{\xi})$ определена согласно (13.5). Справедливы оценки

$$\begin{aligned} |\mathfrak{g}_{\cos}^{(2)}(\xi; \varepsilon^{-1}\tau)| &\leq 4\alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|f\|_{L_\infty}^3 C_{\hat{G}_{0,Q}} n(c^\circ)^{-1} |\xi|, \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \\ |\mathfrak{g}_{\sin}^{(3)}(\xi; \varepsilon^{-1}\tau)| &\leq 4\alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|f\|_{L_\infty}^3 C_{\hat{G}_{0,Q}} c_*^{-1/2} n(c^\circ)^{-1}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Второе утверждение устанавливается по аналогии с доказательством предложения 12.7 с использованием теорем 13.1, 13.2 и предложения 13.6.

Предложение 13.7. Пусть операторы $\mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$, $\mathbb{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$, $\mathbb{D}_{\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$, $\mathbb{D}_{\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$ определены в (13.7)–(13.10).

1°. При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq C_{11}^\circ(1+|\tau|)\varepsilon, \\ \|\mathbb{D}_{\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq C_{11}(1+|\tau|)\varepsilon, \\ \|\mathbb{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq C_{12}^\circ(1+|\tau|), \\ \|\mathbb{D}_{\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq C_{12}(1+|\tau|). \end{aligned}$$

Постоянные C_{11}° , C_{11} , C_{12}° , C_{12} зависят лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

2°. Пусть выполнено условие 10.2. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|\mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/4}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{13}(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon.$$

Постоянная C_{13} зависит лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

3°. Пусть выполнено условие 10.5 (или более сильное условие 10.6). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned}\|\mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/4}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq C_{15}^\circ(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon, \\ \|\mathbb{D}_{\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/4}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq C_{15}(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon.\end{aligned}$$

Постоянные C_{15}°, C_{15} зависят от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}, r_0$, а также от c° и n .

Замечание 13.8. Аналогов оценок (12.27), (12.30), (12.31) для операторов $\mathbb{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$, $\mathbb{D}_{\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$ нет, поскольку нет аналога оценки (13.4) для оператора $\mathbb{D}_{\sin}^{(0)}(\varepsilon^{-1}\tau)$. См. замечание 10.4.

13.3. Аппроксимация по “энергетической” норме. Аналогично (13.11), (13.12) имеем

$$\begin{aligned}\|\hat{\mathcal{A}}^{1/2}\mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{k}\in\tilde{\Omega}}\|\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{q/2}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)}, \\ \|\hat{\mathcal{A}}^{1/2}\mathbb{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{k}\in\tilde{\Omega}}\|\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\mathbb{D}_{0,\sin}^{(1)}(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{q/2}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Поэтому из теорем 10.12–10.17 вытекают следующие утверждения.

Теорема 13.9. Пусть операторы $\mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$, $\mathbb{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$ определены в (13.7), (13.8). При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ выполнены оценки

$$\begin{aligned}\|\hat{\mathcal{A}}^{1/2}\mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq C_{17}(1+|\tau|)\varepsilon^2, \\ \|\hat{\mathcal{A}}^{1/2}\mathbb{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq C_{18}(1+|\tau|)\varepsilon.\end{aligned}\tag{13.15}$$

Постоянные C_{17}, C_{18} зависят лишь от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Оценка (13.15) ранее была найдена в [M5, теорема 8.1].

Теорема 13.10. Пусть операторы $\mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$, $\mathbb{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$ определены в (13.7), (13.8). Пусть выполнено условие 10.2 либо условие 10.5 (или более сильное условие 10.6). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ выполнены оценки

$$\begin{aligned}\|\hat{\mathcal{A}}^{1/2}\mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{5/4}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq C_{19}(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon^2, \\ \|\hat{\mathcal{A}}^{1/2}\mathbb{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/4}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq C_{20}(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon.\end{aligned}\tag{13.16}$$

При условии 10.2 постоянные C_{19} и C_{20} зависят только от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 . При условии 10.5 эти константы зависят от тех же параметров, а также от n и c° .

Оценка (13.16) ранее была доказана в [DSu2, теорема 14.12].

Для целей интерполяции в главе 3 нам понадобится следующее утверждение, которое легко проверить по аналогии с доказательством предложения 12.10.

Предложение 13.11. Пусть оператор $\mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$ определен в (13.7). При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned}\|\mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq C_{21}^\circ, \\ \|\hat{\mathcal{A}}^{1/2}\mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq C_{21}\varepsilon.\end{aligned}$$

Постоянные C_{21}°, C_{21} зависят лишь от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}, r_0$ и r_1 .

13.4. Подтверждение точности теорем об аппроксимациях оператор-функций от \mathcal{A} . Применяя теоремы из §11, мы подтверждаем точность результатов пунктов 13.1–13.3. Начнем с точности относительно сглаживающего множителя.

Точность общих результатов (теорем 13.1, 13.3, 13.9) вытекает из теоремы 11.4.

Теорема 13.12. Пусть выполнено условие 11.1.

1°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_1 < 2$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)$, чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство

$$\|\mathbb{D}_{\cos}^{(0)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{q_1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon. \quad (13.17)$$

2°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_2 < 1$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)$, чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство

$$\|\mathbb{D}_{\sin}^{(0)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{q_2/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathcal{C}(\tau). \quad (13.18)$$

3°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_2 < 1$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)$, чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство

$$\|\widetilde{\mathbb{D}}_{\sin}^{(0)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{q_2/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathcal{C}(\tau). \quad (13.19)$$

4°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_1 < 4$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)$, чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство

$$\|\mathbb{D}_{\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{q_1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon^2. \quad (13.20)$$

5°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_2 < 3$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)$, чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство

$$\|\mathbb{D}_{\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{q_2/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon. \quad (13.21)$$

6°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_1 < 3$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)$, чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство

$$\|\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{q_1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon^2. \quad (13.22)$$

7°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_2 < 2$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)$, чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство

$$\|\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\mathbb{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{q_2/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon. \quad (13.23)$$

Утверждения 1°, 2°, 3°, 7° ранее были получены в [DSu1, теорема 10.8], [DSu2, теорема 14.13].

Точность усиленных результатов (теорем 13.2, 13.4, 13.5, 13.10) вытекает из теоремы 11.5.

Теорема 13.13. Пусть выполнено условие 11.2.

1°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_1 < 3/2$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)$, чтобы оценка (13.17) выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

2°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_2 < 1/2$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)$, чтобы оценка (13.19) выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

3°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_1 < 3$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)$, чтобы оценка (13.20) выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

4°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_2 < 2$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)$, чтобы оценка (13.21) выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

5°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_1 < 5/2$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)$, чтобы оценка (13.22) выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

6°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_2 < 3/2$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)$, чтобы оценка (13.23) выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Утверждения 1°, 2°, 6° ранее были получены в [DSu2, теорема 14.14].

Перейдем к подтверждению точности относительно зависимости оценок от параметра τ . Из теоремы 11.6 вытекает точность общих результатов (теорем 13.1, 13.3, 13.9).

Теорема 13.14. Пусть выполнено условие 11.1.

1°. Пусть $q_1 \geq 2$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (13.17) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

2°. Пусть $q_2 \geq 1$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (13.18) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

3°. Пусть $q_2 \geq 1$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (13.19) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

4°. Пусть $q_1 \geq 4$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\tau)/\tau^2 = 0$ и выполнена оценка (13.20) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

5°. Пусть $q_2 \geq 3$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\tau)/\tau^2 = 0$ и выполнена оценка (13.21) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

6°. Пусть $q_1 \geq 3$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (13.22) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

7°. Пусть $q_2 \geq 2$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (13.23) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Утверждения 1°, 2°, 3°, 7° ранее были получены в [DSu2, теорема 14.15].

Точность усиленных результатов (теорем 13.2, 13.4, 13.5, 13.10) вытекает из теоремы 11.7.

Теорема 13.15. Пусть выполнено условие 11.2.

1°. Пусть $q_1 \geq 3/2$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (13.17) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

2°. Пусть $q_2 \geq 1/2$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (13.19) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

3°. Пусть $q_1 \geq 3$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (13.20) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

4°. Пусть $q_2 \geq 2$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (13.21) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

5°. Пусть $q_1 \geq 5/2$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (13.22) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

6°. Пусть $q_2 \geq 3/2$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (13.23) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Утверждения 1°, 2°, 6° ранее были получены в [DSu2, теорема 14.16].

ГЛАВА 3. УСРЕДНЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

§ 14. АППРОКСИМАЦИЯ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ ОТ $\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon$

14.1. Операторы $\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon$, \mathcal{A}_ε . Постановка задачи. Если $\psi(\mathbf{x})$ — измеримая Γ -периодическая функция в \mathbb{R}^d , условимся использовать обозначение $\psi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \psi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$, $\varepsilon > 0$. Наши основные объекты — операторы $\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon$, \mathcal{A}_ε , действующие в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и формально заданные выражениями

$$\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon := b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \quad (14.1)$$

$$\mathcal{A}_\varepsilon := (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon(\mathbf{x}). \quad (14.2)$$

Строгие определения даются через соответствующие квадратичные формы (ср. п. 5.3). Коэффициенты операторов (14.1), (14.2) быстро осциллируют при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Наша основная цель в этой главе — получить аппроксимации операторов $\cos(\tau \hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$, $\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$ и окаймленных операторов $\cos(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$ и $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$ по нормам операторов, действующих из $H^q(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$ и из $H^q(\mathbb{R}^d)$ в $H^1(\mathbb{R}^d)$, и применить полученные результаты к усреднению решений задачи Коши для уравнений гиперболического типа.

14.2. Масштабное преобразование. Пусть T_ε — унитарный в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ оператор масштабного преобразования: $(T_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x}) = \varepsilon^{d/2} \mathbf{u}(\varepsilon \mathbf{x})$, $\varepsilon > 0$. Если $\psi(\mathbf{x})$ — Γ -периодическая измеримая функция, то оператор $[\psi^\varepsilon]$ умножения на функцию $\psi^\varepsilon(\mathbf{x})$ под действием масштабного преобразования перейдет в оператор $[\psi]$ умножения на $\psi(\mathbf{x})$: $[\psi^\varepsilon] = T_\varepsilon^* [\psi] T_\varepsilon$.

Справедливо тождество $\mathcal{A}_\varepsilon = \varepsilon^{-2} T_\varepsilon^* \mathcal{A} T_\varepsilon$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \cos(\tau \hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) &= T_\varepsilon^* \cos(\varepsilon^{-1} \tau \hat{\mathcal{A}}^{1/2}) T_\varepsilon, \\ \hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) &= \varepsilon T_\varepsilon^* \hat{\mathcal{A}}^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1} \tau \hat{\mathcal{A}}^{1/2}) T_\varepsilon, \\ f^\varepsilon \cos(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) (f^\varepsilon)^{-1} &= T_\varepsilon^* f \cos(\varepsilon^{-1} \tau \mathcal{A}^{1/2}) f^{-1} T_\varepsilon, \\ f^\varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) (f^\varepsilon)^{-1} &= \varepsilon T_\varepsilon^* f \mathcal{A}^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1} \tau \mathcal{A}^{1/2}) f^{-1} T_\varepsilon, \\ f^\varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) (f^\varepsilon)^* &= \varepsilon T_\varepsilon^* f \mathcal{A}^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1} \tau \mathcal{A}^{1/2}) f^* T_\varepsilon. \end{aligned} \quad (14.3)$$

Применяя масштабное преобразование к резольвенте оператора $\mathcal{H}_0 = -\Delta$, получаем

$$(\mathcal{H}_0 + I)^{-1} = \varepsilon^2 T_\varepsilon^* (\mathcal{H}_0 + \varepsilon^2 I)^{-1} T_\varepsilon = T_\varepsilon^* \mathcal{R}(\varepsilon) T_\varepsilon. \quad (14.4)$$

14.3. Аппроксимации оператор-функций от $\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ в старшем порядке. Положим

$$\mathfrak{D}_{\cos, \varepsilon}^{(0)}(\tau) := \cos(\tau \hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau \hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}, \quad (14.5)$$

$$\mathfrak{D}_{\sin, \varepsilon}^{(0)}(\tau) := \hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\hat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \sin(\tau \hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}. \quad (14.6)$$

Применяя (14.3) для операторов $\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ и $\hat{\mathcal{A}}^0$, а также (14.4), при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ получаем

$$\mathfrak{D}_{\cos, \varepsilon}^{(0)}(\tau) (\mathcal{H}_0 + I)^{-q/2} = T_\varepsilon^* \mathfrak{D}_{\cos}^{(0)}(\varepsilon^{-1} \tau) \mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2} T_\varepsilon, \quad (14.7)$$

$$\mathfrak{D}_{\sin, \varepsilon}^{(0)}(\tau) (\mathcal{H}_0 + I)^{-q/2} = \varepsilon T_\varepsilon^* \mathfrak{D}_{\sin}^{(0)}(\varepsilon^{-1} \tau) \mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2} T_\varepsilon, \quad (14.8)$$

где $q > 0$, а операторы $\mathfrak{D}_{\cos}^{(0)}(\tau)$, $\mathfrak{D}_{\sin}^{(0)}(\tau)$ определены в (12.2), (12.3).

Заметим, что оператор $(\mathcal{H}_0 + I)^{q/2}$ осуществляет изометрический изоморфизм пространства Соболева $H^q(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ на $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Применяя теоремы 12.1, 12.2 и соотношения (14.7), (14.8) и учитывая унитарность оператора T_ε , получаем следующие две теоремы.

Теорема 14.1 ([BSu5], [M5]). Пусть $\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ — оператор (14.1) и $\hat{\mathcal{A}}^0$ — оператор (6.15). Пусть операторы $\mathfrak{D}_{\cos, \varepsilon}^{(0)}(\tau)$, $\mathfrak{D}_{\sin, \varepsilon}^{(0)}(\tau)$ определены в (14.5), (14.6). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы

оценки

$$\|\mathfrak{D}_{\cos,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_1(1+|\tau|)\varepsilon, \quad (14.9)$$

$$\|\mathfrak{D}_{\sin,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_2(1+|\tau|)\varepsilon, \quad (14.10)$$

где постоянные $\widehat{C}_1, \widehat{C}_2$ зависят только от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Теорема 14.2 ([DSu2]). Пусть выполнены условия теоремы 14.1. Пусть выполнено условие 7.2 либо условие 7.4 (или более сильное условие 7.5). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{D}_{\cos,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{C}_3(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon, \\ \|\mathfrak{D}_{\sin,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{C}_4(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon. \end{aligned}$$

При условии 7.2 постоянные $\widehat{C}_3, \widehat{C}_4$ зависят только от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 . При условии 7.4 эти константы зависят от тех же параметров и от n, \widehat{c}° .

Ранее оценка (14.9) была получена в [BSu5, теорема 13.1], неравенство (14.10) — в [М5, теорема 9.1], теорема 14.2 установлена в [DSu2, теорема 15.2].

Использование интерполяционных соображений (см. [DSu2, п. 15.3]) дает следующие результаты.

Следствие 14.3 ([DSu2]). В условиях теоремы 14.1 справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{D}_{\cos,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathfrak{C}}_1(q_1)(1+|\tau|)^{q_1/2}\varepsilon^{q_1/2}, \\ 0 \leq q_1 \leq 2, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0, \\ \|\mathfrak{D}_{\sin,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathfrak{C}}_2(q_2)(1+|\tau|)^{(q_2+1)/2}\varepsilon^{(q_2+1)/2}, \\ 0 \leq q_2 \leq 1, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \\ \|\mathfrak{D}_{\sin,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\mathbf{D}^*\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathfrak{C}}'_2(q_1)(1+|\tau|)^{q_1/2}\varepsilon^{q_1/2}, \\ 0 \leq q_1 \leq 2, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Следствие 14.4 ([DSu2]). В условиях теоремы 14.2 справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{D}_{\cos,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathfrak{C}}_3(q_1)(1+|\tau|)^{q_1/3}\varepsilon^{2q_1/3}, \\ 0 \leq q_1 \leq 3/2, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0, \end{aligned} \quad (14.11)$$

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{D}_{\sin,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathfrak{C}}_4(q_2)(1+|\tau|)^{(q_2+1)/3}\varepsilon^{2(q_2+1)/3}, \\ 0 \leq q_2 \leq 1/2, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \end{aligned} \quad (14.12)$$

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{D}_{\sin,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\mathbf{D}^*\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathfrak{C}}'_4(q_1)(1+|\tau|)^{q_1/3}\varepsilon^{2q_1/3}, \\ 0 \leq q_1 \leq 3/2, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (14.13)$$

14.4. Более точная аппроксимация. Положим $\Pi_\varepsilon = T_\varepsilon^* \Pi T_\varepsilon$. Тогда Π_ε — это ПДО в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ с символом $\chi_{\widetilde{\Omega}/\varepsilon}(\xi)$:

$$(\Pi_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\widetilde{\Omega}/\varepsilon} e^{i(\mathbf{x}, \xi)} \widehat{\mathbf{u}}(\xi) d\xi.$$

Положим

$$\mathfrak{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau) := \cos(\tau \hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) (I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon) - (I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon) \cos(\tau (\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}), \quad (14.14)$$

$$\mathfrak{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau) := \hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon) (\hat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}), \quad (14.15)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau) &:= \mathfrak{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau) \\ &\quad + \varepsilon \int_0^\tau \cos((\tau - \tilde{\tau})(\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \hat{G}_0(\mathbf{D}) \sin(\tilde{\tau}(\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) d\tilde{\tau} \\ &\quad + \varepsilon \int_0^\tau \sin((\tau - \tilde{\tau})(\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \hat{G}_0(\mathbf{D}) \cos(\tilde{\tau}(\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) d\tilde{\tau}, \end{aligned} \quad (14.16)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau) &:= \mathfrak{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau) - \varepsilon \hat{G}_0(\mathbf{D}) \sin(\tau (\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \\ &\quad - \varepsilon \int_0^\tau (\hat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \cos((\tau - \tilde{\tau})(\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \hat{G}_0(\mathbf{D}) \cos(\tilde{\tau}(\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) d\tilde{\tau} \\ &\quad + \varepsilon \int_0^\tau (\hat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \sin((\tau - \tilde{\tau})(\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \hat{G}_0(\mathbf{D}) \sin(\tilde{\tau}(\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) d\tilde{\tau}, \end{aligned} \quad (14.17)$$

где $\hat{G}_0(\mathbf{D})$, $\hat{\tilde{G}}_0(\mathbf{D})$ — ПДО с символами (12.10), (12.11).

Операторы (14.14), (14.15) ограничены, оператор (14.16) в общем случае определен на $H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, а оператор (14.17) — на $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. При условии 7.4 оператор (14.16) определен на $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, а оператор (14.17) ограничен (ср. предложение 12.6).

Применяя масштабное преобразование, получаем

$$\mathfrak{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)(\mathcal{H}_0 + I)^{-q/2} = T_\varepsilon^* \mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2} T_\varepsilon, \quad (14.18)$$

$$\mathfrak{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)(\mathcal{H}_0 + I)^{-q/2} = \varepsilon T_\varepsilon^* \mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2} T_\varepsilon, \quad (14.19)$$

$$\mathfrak{D}_{\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)(\mathcal{H}_0 + I)^{-q/2} = T_\varepsilon^* \mathfrak{D}_{\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2} T_\varepsilon, \quad (14.20)$$

$$\mathfrak{D}_{\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)(\mathcal{H}_0 + I)^{-q/2} = \varepsilon T_\varepsilon^* \mathfrak{D}_{\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2} T_\varepsilon, \quad (14.21)$$

где операторы $\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$, $\mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$, $\mathfrak{D}_{\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$, $\mathfrak{D}_{\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$ определены в (12.12)–(12.15). Отсюда и из теорем 12.3–12.5 с учетом унитарности оператора T_ε непосредственно вытекают следующие утверждения.

Теорема 14.5. Пусть операторы $\mathfrak{D}_{\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)$, $\mathfrak{D}_{\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)$ определены в (14.16), (14.17). При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|\mathfrak{D}_{\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^4(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \hat{C}_5(1 + |\tau|)^2 \varepsilon^2, \quad (14.22)$$

$$\|\mathfrak{D}_{\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^3(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \hat{C}_6(1 + |\tau|)^2 \varepsilon^2. \quad (14.23)$$

Константы \hat{C}_5 и \hat{C}_6 зависят лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Теорема 14.6. Пусть операторы $\mathfrak{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)$, $\mathfrak{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)$ определены в (14.14), (14.15). Пусть выполнено условие 7.2. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|\mathfrak{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^3(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \hat{C}_7(1 + |\tau|) \varepsilon^2, \quad (14.24)$$

$$\|\mathfrak{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \hat{C}_8(1 + |\tau|) \varepsilon^2. \quad (14.25)$$

Постоянные \hat{C}_7 и \hat{C}_8 зависят лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Теорема 14.7. Пусть операторы $\mathfrak{D}_{\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)$, $\mathfrak{D}_{\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)$ определены в (14.16), (14.17). Пусть выполнено условие 7.4 (или более сильное условие 7.5). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы

оценки

$$\|\mathfrak{D}_{\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^3(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_9(1+|\tau|)\varepsilon^2, \quad (14.26)$$

$$\|\mathfrak{D}_{\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_{10}(1+|\tau|)\varepsilon^2. \quad (14.27)$$

Постоянные \widehat{C}_9 и \widehat{C}_{10} зависят от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 , а также от \widehat{c}° и n .

Аналогичным образом из предложения 12.7 и соотношений (14.18)–(14.21) вытекает следующее утверждение.

Предложение 14.8. Пусть операторы $\mathfrak{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)$, $\mathfrak{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)$, $\mathfrak{D}_{\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)$, $\mathfrak{D}_{\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)$ определены в (14.14)–(14.17).

1°. При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|\mathfrak{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_{11}^\circ(1+|\tau|)\varepsilon, \quad (14.28)$$

$$\|\mathfrak{D}_{\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_{11}(1+|\tau|)\varepsilon, \quad (14.29)$$

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{C}_{12}^\circ(1+|\tau|)\varepsilon, \\ \|\mathfrak{D}_{\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{C}_{12}(1+|\tau|)\varepsilon. \end{aligned} \quad (14.30)$$

Постоянные \widehat{C}_{11}° , \widehat{C}_{11} , \widehat{C}_{12}° , \widehat{C}_{12} зависят лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

2°. Пусть выполнено условие 7.2. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|\mathfrak{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_{13}(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon, \quad (14.31)$$

$$\|\mathfrak{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_{14}(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon. \quad (14.32)$$

Постоянные \widehat{C}_{13} и \widehat{C}_{14} зависят лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

3°. Пусть выполнено условие 7.4 (или более сильное условие 7.5). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{C}_{15}^\circ(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon, \\ \|\mathfrak{D}_{\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{C}_{15}(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon, \end{aligned} \quad (14.33)$$

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{C}_{16}^\circ(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon, \\ \|\mathfrak{D}_{\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{C}_{16}(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon. \end{aligned} \quad (14.34)$$

Постоянные \widehat{C}_{15}° , \widehat{C}_{15} , \widehat{C}_{16}° , \widehat{C}_{16} зависят от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 , а также от \widehat{c}° и n .

С помощью интерполяции из теорем 14.5–14.7 и предложения 14.8 выводятся следующие результаты.

Следствие 14.9. В условиях теоремы 14.5 справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{D}_{\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathfrak{C}}_5(q_1)(1+|\tau|)^{q_1/2}\varepsilon^{q_1/2}, \\ 2 &\leq q_1 \leq 4, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0, \end{aligned} \quad (14.35)$$

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{D}_{\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathfrak{C}}_6(q_2)(1+|\tau|)^{(q_2+1)/2}\varepsilon^{(q_2+1)/2}, \\ 1 &\leq q_2 \leq 3, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (14.36)$$

Здесь $\widehat{\mathfrak{C}}_5(q_1) = \widehat{C}_5^{q_1/2-1}\widehat{C}_{11}^{2-q_1/2}$, $\widehat{\mathfrak{C}}_6(q_2) = \widehat{C}_6^{(q_2-1)/2}\widehat{C}_{12}^{(3-q_2)/2}$.

Доказательство. Интерполируя между (14.29) и (14.22), получаем оценку (14.35). Интерполяция между (14.30) и (14.23) приводит к (14.36). \square

Следствие 14.10. В условиях теоремы 14.6 справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathfrak{C}}_7(q_1)(1+|\tau|)^{q_1/3}\varepsilon^{2q_1/3}, \\ 3/2 &\leq q_1 \leq 3, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0, \end{aligned} \quad (14.37)$$

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathfrak{C}}_8(q_2)(1+|\tau|)^{(q_2+1)/3}\varepsilon^{2(q_2+1)/3}, \\ 1/2 &\leq q_2 \leq 2, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (14.38)$$

Здесь $\widehat{\mathfrak{C}}_7(q_1) = \widehat{C}_7^{2q_1/3-1}\widehat{C}_{13}^{2-2q_1/3}$, $\widehat{\mathfrak{C}}_8(q_2) = \widehat{C}_8^{(2q_2-1)/3}\widehat{C}_{14}^{(4-2q_2)/3}$.

Доказательство. Интерполируя между (14.31) и (14.24), получаем оценку (14.37). Интерполяция между (14.32) и (14.25) приводит к (14.38). \square

Следствие 14.11. В условиях теоремы 14.7 справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{D}_{\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathfrak{C}}_9(q_1)(1+|\tau|)^{q_1/3}\varepsilon^{2q_1/3}, \\ 3/2 &\leq q_1 \leq 3, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0, \end{aligned} \quad (14.39)$$

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{D}_{\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathfrak{C}}_{10}(q_2)(1+|\tau|)^{(q_2+1)/3}\varepsilon^{2(q_2+1)/3}, \\ 1/2 &\leq q_2 \leq 2, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (14.40)$$

Здесь $\widehat{\mathfrak{C}}_9(q_1) = \widehat{C}_9^{2q_1/3-1}\widehat{C}_{15}^{2-2q_1/3}$, $\widehat{\mathfrak{C}}_{10}(q_2) = \widehat{C}_{10}^{(2q_2-1)/3}\widehat{C}_{16}^{(4-2q_2)/3}$.

Доказательство. Интерполируя между (14.33) и (14.26), получаем оценку (14.39). Интерполяция между (14.34) и (14.27) приводит к (14.40). \square

14.5. Аппроксимация по энергетической норме. Получим теперь аппроксимации операторов $\cos(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})(I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon)$ и $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$ по $(H^s \rightarrow H^1)$ -норме (“энергетической” норме), а также аппроксимации операторов $g^\varepsilon b(\mathbf{D})\cos(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})(I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon)$ и $g^\varepsilon b(\mathbf{D})\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$ (отвечающих “потокам”) по $(H^s \rightarrow L_2)$ -норме. Положим

$$\widehat{\Xi}_{\cos,\varepsilon}(\tau) := g^\varepsilon b(\mathbf{D})\cos(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})(I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon\cos(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}), \quad (14.41)$$

$$\widehat{\Xi}_{\sin,\varepsilon}(\tau) := g^\varepsilon b(\mathbf{D})\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}). \quad (14.42)$$

Применяя масштабное преобразование, получаем

$$\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}\mathfrak{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)(\mathcal{H}_0 + I)^{-q/2} = \varepsilon^{-1}T_\varepsilon^*\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2}T_\varepsilon, \quad (14.43)$$

$$\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}\mathfrak{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)(\mathcal{H}_0 + I)^{-q/2} = T_\varepsilon^*\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2}T_\varepsilon,$$

где операторы $\mathfrak{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$, $\mathfrak{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$ определены в (12.12), (12.13). Отсюда и из теорем 12.8, 12.9 выводятся следующие результаты.

Теорема 14.12. Пусть операторы $\mathfrak{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)$, $\mathfrak{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)$, $\widehat{\Xi}_{\cos,\varepsilon}(\tau)$ и $\widehat{\Xi}_{\sin,\varepsilon}(\tau)$ определены в (14.14), (14.15), (14.41) и (14.42). При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|\mathfrak{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^3(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_{22}(1+|\tau|)\varepsilon, \quad (14.44)$$

$$\|\widehat{\Xi}_{\cos,\varepsilon}(\tau)\|_{H^3(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_{23}(1+|\tau|)\varepsilon, \quad (14.45)$$

$$\|\mathfrak{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_{24}(1+|\tau|)\varepsilon, \quad (14.46)$$

$$\|\widehat{\Xi}_{\sin,\varepsilon}(\tau)\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_{25}(1+|\tau|)\varepsilon. \quad (14.47)$$

Постоянные \widehat{C}_{22} , \widehat{C}_{23} , \widehat{C}_{24} , \widehat{C}_{25} зависят от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Доказательство. Используя (14.43) и унитарность оператора T_ε , из теоремы 12.8 получаем оценку

$$\|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2} \mathfrak{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^3(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_{17}(1 + |\tau|)\varepsilon. \quad (14.48)$$

Аналогично (5.11) имеем

$$\widehat{c}_* \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2} \mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^n). \quad (14.49)$$

Следовательно,

$$\|\mathbf{D}\mathfrak{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^3(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{c}_*^{-1/2} \widehat{C}_{17}(1 + |\tau|)\varepsilon.$$

Вместе с (14.28) это влечет (14.44).

Теперь проверим оценку (14.45). Из (14.48) вытекает, что

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathfrak{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^3(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \widehat{C}_{17}(1 + |\tau|)\varepsilon. \quad (14.50)$$

С учетом (6.11) имеем:

$$\begin{aligned} g^\varepsilon b(\mathbf{D})(I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon) \cos(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) &= \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon \cos(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \\ &+ g^\varepsilon b(\mathbf{D})(I - \Pi_\varepsilon) \cos(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) + \varepsilon g^\varepsilon \sum_{l=1}^d b_l \Lambda^\varepsilon D_l b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon \cos(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \widehat{\Xi}_{\cos,\varepsilon}(\tau) &= g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathfrak{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau) + g^\varepsilon b(\mathbf{D})(I - \Pi_\varepsilon) \cos(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \\ &+ \varepsilon g^\varepsilon \sum_{l=1}^d b_l \Lambda^\varepsilon D_l b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon \cos(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}). \end{aligned} \quad (14.51)$$

С помощью масштабного преобразования и преобразования Фурье получаем

$$\begin{aligned} &\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(I - \Pi_\varepsilon) \cos(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{H^q(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &= \varepsilon^{-1} \|gb(\mathbf{D})(I - \Pi) \cos(\varepsilon^{-1} \tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \varepsilon^{-1} \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} \sup_{|\xi| \geq r_0} \frac{|\xi| \varepsilon^q}{(|\xi|^2 + \varepsilon^2)^{q/2}} \leq r_0^{-1} \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} \varepsilon, \quad q \geq 2. \end{aligned} \quad (14.52)$$

Далее, применяя масштабное преобразование и разложение в прямой интеграл и учитывая соотношения (5.8), (7.10) и (7.13), имеем

$$\begin{aligned} &\left\| \varepsilon g^\varepsilon \sum_{l=1}^d b_l \Lambda^\varepsilon D_l b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon \cos(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \right\|_{H^q(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \varepsilon \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} \sum_{l=1}^d \left\| \Lambda \varepsilon^{-2} D_l b(\mathbf{D}) \Pi \cos(\varepsilon^{-1} \tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \varepsilon^{-1} \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} \sum_{l=1}^d \sup_{\mathbf{k} \in \widehat{\Omega}} \left\| [\Lambda] k_l b(\mathbf{k}) \widehat{P} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \frac{\varepsilon^q}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{q/2}} \\ &\leq \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} d^{1/2} C_{\widehat{Z}} \sup_{\mathbf{k} \in \widehat{\Omega}} \frac{\varepsilon^{q-1} |\mathbf{k}|^2}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{q/2}} \leq \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} d^{1/2} C_{\widehat{Z}} \varepsilon, \quad q \geq 2. \end{aligned} \quad (14.53)$$

Комбинируя (14.50), (14.51), а также (14.52), (14.53) (при $q = 3$), приходим к искомой оценке (14.45).

Аналогичным образом из теоремы 12.8 (оценки (12.48)) выводятся оценки (14.46) и (14.47). \square

Ранее оценка (14.46) была установлена в [М5, теорема 9.5], а (14.47) — в [М5, теорема 10.7].

Теорема 14.13. Пусть операторы $\mathfrak{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)$, $\mathfrak{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)$, $\widehat{\Xi}_{\cos,\varepsilon}(\tau)$ и $\widehat{\Xi}_{\sin,\varepsilon}(\tau)$ определены в (14.14), (14.15), (14.41) и (14.42). Пусть выполнено условие 7.2 либо условие 7.4 (или более сильное условие 7.5). При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|\mathfrak{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{5/2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_{26}(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon, \quad (14.54)$$

$$\|\widehat{\Xi}_{\cos,\varepsilon}(\tau)\|_{H^{5/2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_{27}(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon, \quad (14.55)$$

$$\|\mathfrak{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_{28}(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon, \quad (14.56)$$

$$\|\widehat{\Xi}_{\sin,\varepsilon}(\tau)\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_{29}(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon. \quad (14.57)$$

При условии 7.2 постоянные \widehat{C}_{26} , \widehat{C}_{27} , \widehat{C}_{28} и \widehat{C}_{29} зависят только от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 . При условии 7.4 они зависят от тех же параметров, а также от n , \widehat{c}° .

Доказательство. Из (12.49) и (14.43) следует оценка

$$\|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}\mathfrak{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{5/2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_{19}(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon. \quad (14.58)$$

С учетом (14.49) и предложения 14.8 ($2^\circ, 3^\circ$) отсюда вытекает оценка (14.54).

В силу (14.58) имеем

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathfrak{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{5/2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \|g\|_{L_\infty}^{1/2}\widehat{C}_{19}(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon.$$

Отсюда с помощью представления (14.51) и оценок (14.52), (14.53) (при $q = 5/2$) выводим неравенство (14.55).

Аналогичным образом из (12.50) выводятся оценки (14.56) и (14.57). \square

Ранее оценки (14.56) и (14.57) были установлены в [DSu2, теорема 15.11].

Предложение 14.14. Пусть операторы $\mathfrak{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)$ и $\widehat{\Xi}_{\cos,\varepsilon}(\tau)$ определены в (14.14) и (14.41). При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|\mathfrak{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_{30}, \quad (14.59)$$

$$\|\widehat{\Xi}_{\cos,\varepsilon}(\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_{31}. \quad (14.60)$$

Постоянные \widehat{C}_{30} , \widehat{C}_{31} зависят от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 и r_1 .

Доказательство. Используя (14.18), (14.43) и предложение 12.10, получаем

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{C}_{21}^\circ, \\ \|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}\mathfrak{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{C}_{21}. \end{aligned} \quad (14.61)$$

С учетом (14.49) отсюда вытекает неравенство (14.59).

Из (14.61) следует, что

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathfrak{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \|g\|_{L_\infty}^{1/2}\widehat{C}_{21}.$$

Отсюда с помощью представления (14.51) нетрудно вывести оценку (14.60) (по аналогии с (14.52) и (14.53)). \square

С помощью интерполяции из теорем 14.12 и 14.13 и предложения 14.14 выводятся следующие утверждения.

Следствие 14.15. В условиях теоремы 14.12 справедливы оценки

$$\|\mathfrak{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_{11}(q_1)(1+|\tau|)^{(q_1-1)/2} \varepsilon^{(q_1-1)/2},$$

$$1 \leq q_1 \leq 3, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0, \quad (14.62)$$

$$\|\widehat{\Xi}_{\cos,\varepsilon}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_{12}(q_1)(1+|\tau|)^{(q_1-1)/2} \varepsilon^{(q_1-1)/2},$$

$$1 \leq q_1 \leq 3, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0, \quad (14.63)$$

$$\|\mathbf{D}\mathfrak{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_{13}(q_2)(1+|\tau|)^{q_2/2} \varepsilon^{q_2/2},$$

$$0 \leq q_2 \leq 2, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0, \quad (14.64)$$

$$\|\widehat{\Xi}_{\sin,\varepsilon}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_{14}(q_2)(1+|\tau|)^{q_2/2} \varepsilon^{q_2/2},$$

$$0 \leq q_2 \leq 2, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0. \quad (14.65)$$

Доказательство. Интерполируя между (14.59) и (14.44), получаем оценку (14.62) с постоянной $\widehat{\mathfrak{C}}_{11}(q_1) = \widehat{\mathfrak{C}}_{22}^{(q_1-1)/2} \widehat{\mathfrak{C}}_{30}^{(3-q_1)/2}$. Интерполяция между (14.60) и (14.45) приводит к оценке (14.63) с постоянной $\widehat{\mathfrak{C}}_{12}(q_1) = \widehat{\mathfrak{C}}_{23}^{(q_1-1)/2} \widehat{\mathfrak{C}}_{31}^{(3-q_1)/2}$.

Оценки (14.64) и (14.65) были установлены в [DSu2, следствие 15.9]. \square

Следствие 14.16. В условиях теоремы 14.13 справедливы оценки

$$\|\mathfrak{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_{15}(q_1)(1+|\tau|)^{(q_1-1)/3} \varepsilon^{2(q_1-1)/3},$$

$$1 \leq q_1 \leq 5/2, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0, \quad (14.66)$$

$$\|\widehat{\Xi}_{\cos,\varepsilon}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_{16}(q_1)(1+|\tau|)^{(q_1-1)/3} \varepsilon^{2(q_1-1)/3},$$

$$1 \leq q_1 \leq 5/2, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0, \quad (14.67)$$

$$\|\mathbf{D}\mathfrak{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_{17}(q_2)(1+|\tau|)^{q_2/3} \varepsilon^{2q_2/3},$$

$$0 \leq q_2 \leq 3/2, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0, \quad (14.68)$$

$$\|\widehat{\Xi}_{\sin,\varepsilon}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_{18}(q_2)(1+|\tau|)^{q_2/3} \varepsilon^{2q_2/3},$$

$$0 \leq q_2 \leq 3/2, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0. \quad (14.69)$$

Доказательство. Интерполируя между (14.59) и (14.54), получаем оценку (14.66) с постоянной $\widehat{\mathfrak{C}}_{15}(q_1) = \widehat{\mathfrak{C}}_{26}^{2(q_1-1)/3} \widehat{\mathfrak{C}}_{30}^{(5-2q_1)/3}$. Интерполяция между (14.60) и (14.55) приводит к оценке (14.67) с постоянной $\widehat{\mathfrak{C}}_{16}(q_1) = \widehat{\mathfrak{C}}_{27}^{2(q_1-1)/3} \widehat{\mathfrak{C}}_{31}^{(5-2q_1)/3}$.

Оценки (14.68) и (14.69) были установлены в [DSu2, следствие 15.12]. \square

Замечание 14.17. 1°. Согласно замечанию 15.10 из [DSu2], в условиях теоремы 14.12 помимо (14.64) справедлива оценка

$$\|\mathfrak{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_{13}^{\circ}(q_2)(1+|\tau|)^{q_2/2} \varepsilon^{q_2/2} \left(1 + (1+|\tau|)^{1/2} \varepsilon^{1/2}\right)^{1-q_2/2}$$

при $0 \leq q_2 \leq 2$. При ограниченных значениях $(1+|\tau|)\varepsilon$ эта оценка имеет тот же порядок, что и (14.64).

2°. Согласно замечанию 15.13 из [DSu2], в условиях теоремы 14.13 помимо (14.68) справедлива оценка

$$\|\mathfrak{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_{17}^{\circ}(q_2)(1+|\tau|)^{q_2/3} \varepsilon^{2q_2/3} \left(1 + (1+|\tau|)^{1/3} \varepsilon^{2/3}\right)^{1-2q_2/3}$$

при $0 \leq q_2 \leq 3/2$. При ограниченных значениях $(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon$ эта оценка имеет тот же порядок, что и (14.68).

Замечание 14.18. 1°. В общей ситуации, то есть в условиях теорем 14.1, 14.5, 14.12 можно рассмотреть значения времени $\tau = O(\varepsilon^{-\alpha})$, $0 < \alpha < 1$, и получить квалифицированные оценки

$$\begin{aligned}
\|\mathfrak{D}_{\cos,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= O(\varepsilon^{q_1(1-\alpha)/2}), & 0 \leq q_1 \leq 2; \\
\|\mathfrak{D}_{\sin,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= O(\varepsilon^{(q_2+1)(1-\alpha)/2}), & 0 \leq q_2 \leq 1; \\
\|\mathfrak{D}_{\sin,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\mathbf{D}^*\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= O(\varepsilon^{q_1(1-\alpha)/2}), & 0 \leq q_1 \leq 2; \\
\|\mathfrak{D}_{\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= O(\varepsilon^{q_1(1-\alpha)/2}), & 2 \leq q_1 \leq 4; \\
\|\mathfrak{D}_{\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= O(\varepsilon^{(q_2+1)(1-\alpha)/2}), & 1 \leq q_2 \leq 3; \\
\|\mathfrak{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} &= O(\varepsilon^{(q_1-1)(1-\alpha)/2}), & 1 \leq q_1 \leq 3; \\
\|\widehat{\Xi}_{\cos,\varepsilon}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= O(\varepsilon^{(q_1-1)(1-\alpha)/2}), & 1 \leq q_1 \leq 3; \\
\|\mathbf{D}\mathfrak{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= O(\varepsilon^{q_2(1-\alpha)/2}), & 0 \leq q_2 \leq 2; \\
\|\widehat{\Xi}_{\sin,\varepsilon}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= O(\varepsilon^{q_2(1-\alpha)/2}), & 0 \leq q_2 \leq 2.
\end{aligned}$$

2°. В случае усиления результатов, то есть в условиях теорем 14.2, 14.6, 14.7, 14.13 можно рассмотреть значения времени $\tau = O(\varepsilon^{-\alpha})$, $0 < \alpha < 2$, и получить квалифицированные оценки

$$\begin{aligned}
\|\mathfrak{D}_{\cos,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= O(\varepsilon^{q_1(2-\alpha)/3}), & 0 \leq q_1 \leq 3/2; \\
\|\mathfrak{D}_{\sin,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= O(\varepsilon^{(q_2+1)(2-\alpha)/3}), & 0 \leq q_2 \leq 1/2; \\
\|\mathfrak{D}_{\sin,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\mathbf{D}^*\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= O(\varepsilon^{q_1(2-\alpha)/3}), & 0 \leq q_1 \leq 3/2; \\
\|\mathfrak{D}_{\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= O(\varepsilon^{q_1(2-\alpha)/3}), & 3/2 \leq q_1 \leq 3; \\
\|\mathfrak{D}_{\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= O(\varepsilon^{(q_2+1)(2-\alpha)/3}), & 1/2 \leq q_2 \leq 2; \\
\|\mathfrak{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} &= O(\varepsilon^{(q_1-1)(2-\alpha)/3}), & 1 \leq q_1 \leq 5/2; \\
\|\widehat{\Xi}_{\cos,\varepsilon}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= O(\varepsilon^{(q_1-1)(2-\alpha)/3}), & 1 \leq q_1 \leq 5/2; \\
\|\mathbf{D}\mathfrak{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= O(\varepsilon^{q_2(2-\alpha)/3}), & 0 \leq q_2 \leq 3/2; \\
\|\widehat{\Xi}_{\sin,\varepsilon}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= O(\varepsilon^{q_2(2-\alpha)/3}), & 0 \leq q_2 \leq 3/2.
\end{aligned}$$

14.6. Обсуждение. Результаты пунктов 14.4, 14.5, касающиеся операторного косинуса $\cos(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$, дают приближение не для самого этого оператора, а для “подправленного” оператора $\cos(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})(I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon)$. Если бы нам удалось приблизить “проблемный член” $\cos(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon$ с нужной точностью, это привело бы к аппроксимации косинуса $\cos(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$. Однако не представляется возможным приблизить этот член в прежних терминах (в терминах спектральных характеристик оператора $\widehat{\mathcal{A}}$ на краю спектра). Действительно, после масштабного преобразования и разложения в прямой интеграл “проблемный член” перейдет в оператор $\cos(\varepsilon^{-1}\tau\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2})[\Lambda]b(\mathbf{k})\widehat{P}$, действующий в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$. Поскольку выполнено тождество

$$[\Lambda]b(\mathbf{k})\widehat{P} = \widehat{P}^\perp[\Lambda]b(\mathbf{k})\widehat{P},$$

а в пределах допустимой погрешности \widehat{P}^\perp можно заменить на $\widehat{F}(\mathbf{k})^\perp$, приходим к “новому проблемному члену” $\cos(\varepsilon^{-1}\tau\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2})\widehat{F}(\mathbf{k})^\perp[\Lambda]b(\mathbf{k})\widehat{P}$. Ясно, что оператор

$\cos(\varepsilon^{-1}\tau\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2})\hat{F}(\mathbf{k})^\perp$ нельзя приблизить в “пороговых” терминах, так как $\hat{F}(\mathbf{k})^\perp$ — это спектральный проектор оператора $\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$, отвечающий интервалу $[3\hat{\delta}, \infty)$.

14.7. Подтверждение точности результатов пп. 14.3–14.5. Сначала обсудим точность результатов относительно типа операторной нормы. Следующее утверждение подтверждает точность общих результатов (теорем 14.1, 14.5, 14.12).

Теорема 14.19. Пусть выполнено условие 8.1.

1°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_1 < 2$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)$, чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство

$$\|\mathfrak{D}_{\cos,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon. \quad (14.70)$$

2°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_2 < 1$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)$, чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство

$$\|\mathfrak{D}_{\sin,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon. \quad (14.71)$$

3°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_1 < 4$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)$, чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство

$$\|\mathfrak{D}_{\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon^2. \quad (14.72)$$

4°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_2 < 3$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)$, чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство

$$\|\mathfrak{D}_{\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon^2. \quad (14.73)$$

5°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_1 < 3$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)$, чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство

$$\|\mathfrak{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon. \quad (14.74)$$

6°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_2 < 2$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)$, чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство

$$\|\mathfrak{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon. \quad (14.75)$$

Доказательство. Проверим утверждение 1°. Предположим, что при некоторых $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_1 < 2$ оценка (14.70) выполняется при достаточно малом ε . Применяя масштабное преобразование (см. (14.7)), получаем, что выполнена также оценка (12.56). Но это противоречит утверждению 1° теоремы 12.11.

Аналогичным образом утверждение 2° выводится из утверждения 2° теоремы 12.11. Утверждения 3° и 4° следуют из утверждений 3° и 4° теоремы 12.11 с учетом соотношений (14.20) и (14.21).

Проверим утверждение 5°. Предположим, что при некоторых $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_1 < 3$ оценка (14.74) выполняется при достаточно малом ε . Тогда

$$\|\mathbf{D}\mathfrak{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)(\mathcal{H}_0 + I)^{-q_1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon,$$

а потому выполнена также оценка

$$\|\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}\mathfrak{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)(\mathcal{H}_0 + I)^{-q_1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \tilde{\mathcal{C}}(\tau)\varepsilon$$

при достаточно малом ε (с некоторой постоянной $\tilde{\mathcal{C}}(\tau) > 0$). Применяя масштабное преобразование (см. (14.43)), получаем, что выполнена также оценка (12.60). Но это противоречит утверждению 5° теоремы 12.11.

Аналогичным образом утверждение 6° выводится из утверждения 6° теоремы 12.11. \square

Утверждения 1°, 2°, 6° ранее были получены в [DSu1, теорема 11.5], [DSu2, теорема 15.15].

Аналогично, из теоремы 12.12 с помощью масштабного преобразования вытекает точность усиленных результатов (теорем 14.2, 14.6, 14.7, 14.13).

Теорема 14.20. Пусть выполнено условие 8.2.

1°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_1 < 3/2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы оценка (14.70) выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

2°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_2 < 1/2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы оценка (14.71) выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

3°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_1 < 3$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы оценка (14.72) выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

4°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_2 < 2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы (14.73) выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

5°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_1 < 5/2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы оценка (14.74) выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

6°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_2 < 3/2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы оценка (14.75) выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Утверждения 1°, 2°, 6° ранее были получены в [DSu2, теорема 15.16].

Перейдем к подтверждению точности оценок относительно зависимости от параметра τ . Из теоремы 12.13 с помощью масштабного преобразования вытекает следующий результат, подтверждающий точность общих результатов (теорем 14.1, 14.5, 14.12).

Теорема 14.21. Пусть выполнено условие 8.1.

1°. Пусть $q_1 \geq 2$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (14.70) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.

2°. Пусть $q_2 \geq 1$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (14.71) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.

3°. Пусть $q_1 \geq 4$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/\tau^2 = 0$ и выполнена оценка (14.72) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.

4°. Пусть $q_2 \geq 3$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/\tau^2 = 0$ и выполнена оценка (14.73) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.

5°. Пусть $q_1 \geq 3$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (14.74) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.

6°. Пусть $q_2 \geq 2$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (14.75) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Утверждения 1°, 2°, 6° ранее были получены в [DSu2, теорема 15.17].

Наконец, из теоремы 12.14 с помощью масштабного преобразования выводим следующий результат, демонстрирующий точность усиленных результатов (теорем 14.2, 14.6, 14.7, 14.13).

Теорема 14.22. Пусть выполнено условие 8.2.

1°. Пусть $q_1 \geq 3/2$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (14.70) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.

2°. Пусть $q_2 \geq 1/2$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (14.71) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.

3°. Пусть $q_1 \geq 3$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (14.72) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.

4°. Пусть $q_2 \geq 2$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (14.73) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.

5°. Пусть $q_1 \geq 5/2$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (14.74) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.

6°. Пусть $q_2 \geq 3/2$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (14.75) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Утверждения 1°, 2°, 6° ранее были получены в [DSu2, теорема 15.18].

14.8. О возможности устранения сглаживающего оператора Π_ε в аппроксимациях. Рассмотрим теперь вопрос о возможности устранения оператора Π_ε в аппроксимациях (т.е. замены Π_ε тождественным оператором с сохранением порядка погрешностей) в результатах пунктов 14.4 и 14.5.

Лемма 14.23. Пусть $q_1 \geq 1$, $q_2 \geq 0$. При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|b(\mathbf{D})(I - \Pi)\mathcal{R}(\varepsilon)^{q_1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^{q_1-1}(\mathbb{R}^d)} \leq C^{(1)}(q_1)\varepsilon^{q_1}, \quad (14.76)$$

$$\|b(\mathbf{D})(I - \Pi)(\hat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\mathcal{R}(\varepsilon)^{q_2/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^{q_2}(\mathbb{R}^d)} \leq C^{(2)}(q_2)\varepsilon^{q_2}. \quad (14.77)$$

Постоянная $C^{(1)}(q_1)$ зависит от α_1 , r_0 и q_1 ; постоянная $C^{(2)}(q_2)$ зависит от $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 и q_2 .

Доказательство. Оценка (14.76) проверена в [Su8, лемма 14.22].

Докажем (14.77). Записывая норму в левой части (14.77) в Фурье-представлении и вспоминая, что символ оператора Π есть $\chi_{\tilde{\Omega}}(\xi)$, получаем:

$$\begin{aligned} & \|b(\mathbf{D})(I - \Pi)(\hat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\mathcal{R}(\varepsilon)^{q_2/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^{q_2}(\mathbb{R}^d)} \\ &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^{q_2/2} (1 - \chi_{\tilde{\Omega}}(\xi)) |b(\xi)(b(\xi)^* g^0 b(\xi))^{-1/2}| \varepsilon^{q_2} (|\xi|^2 + \varepsilon^2)^{-q_2/2} \\ &\leq \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2} \varepsilon^{q_2} \sup_{|\xi| \geq r_0} (1 + |\xi|^2)^{q_2/2} (|\xi|^2 + \varepsilon^2)^{-q_2/2} \leq C^{(2)}(q_2)\varepsilon^{q_2}, \end{aligned}$$

где $C^{(2)}(q_2) = \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2} (1 + r_0^{-2})^{q_2/2}$. □

Положим

$$\mathfrak{D}'_{0,\cos,\varepsilon}(\tau) := \cos(\tau \hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) (I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})) - (I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})) \cos(\tau (\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}), \quad (14.78)$$

$$\mathfrak{D}'_{0,\sin,\varepsilon}(\tau) := \hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})) (\hat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}), \quad (14.79)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}'_{\cos,\varepsilon}(\tau) &:= \mathfrak{D}'_{0,\cos,\varepsilon}(\tau) \\ &+ \varepsilon \int_0^\tau \cos((\tau - \tilde{\tau})(\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \hat{G}_0(\mathbf{D}) \sin(\tilde{\tau}(\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) d\tilde{\tau} \\ &+ \varepsilon \int_0^\tau \sin((\tau - \tilde{\tau})(\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \hat{G}_0(\mathbf{D}) \cos(\tilde{\tau}(\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) d\tilde{\tau}, \end{aligned} \quad (14.80)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}'_{\sin,\varepsilon}(\tau) &:= \mathfrak{D}'_{0,\sin,\varepsilon}(\tau) - \varepsilon \hat{G}_0(\mathbf{D}) \sin(\tau (\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \\ &- \varepsilon \int_0^\tau (\hat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \cos((\tau - \tilde{\tau})(\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \hat{G}_0(\mathbf{D}) \cos(\tilde{\tau}(\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) d\tilde{\tau} \\ &+ \varepsilon \int_0^\tau (\hat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \sin((\tau - \tilde{\tau})(\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \hat{G}_0(\mathbf{D}) \sin(\tilde{\tau}(\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) d\tilde{\tau}. \end{aligned} \quad (14.81)$$

Из (14.14)–(14.17) и (14.78)–(14.81) следуют соотношения

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}'_{0,\cos,\varepsilon}(\tau) - \mathfrak{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau) &= \mathfrak{D}'_{\cos,\varepsilon}(\tau) - \mathfrak{D}_{\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau) \\ &= \cos(\tau \hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) (I - \Pi_\varepsilon) - \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) (I - \Pi_\varepsilon) \cos(\tau (\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}), \end{aligned} \quad (14.82)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}'_{0,\sin,\varepsilon}(\tau) - \mathfrak{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau) &= \mathfrak{D}'_{\sin,\varepsilon}(\tau) - \mathfrak{D}_{\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau) \\ &= -\varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) (I - \Pi_\varepsilon) (\hat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}). \end{aligned} \quad (14.83)$$

Из следствия 14.9 и леммы 14.23 выводится следующее утверждение. Ниже $[\Lambda]$ — оператор умножения на Γ -периодическое решение задачи (6.8).

Теорема 14.24. Пусть операторы $\mathfrak{D}'_{\cos,\varepsilon}(1)(\tau)$, $\mathfrak{D}'_{\sin,\varepsilon}(1)(\tau)$ определены в (14.80), (14.81).

1°. Пусть $2 \leq q_1 \leq 4$ и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{q_1-1}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка

$$\|\mathfrak{D}'_{\cos,\varepsilon}(1)(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}'_5(q_1)(1 + |\tau|)^{q_1/2} \varepsilon^{q_1/2}, \quad 2 \leq q_1 \leq 4. \quad (14.84)$$

Постоянная $\widehat{\mathfrak{C}}'_5(q_1)$ зависит от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 , q_1 , а также от нормы $\|[\Lambda]\|_{H^{q_1-1} \rightarrow L_2}$.

2°. Пусть $1 \leq q_2 \leq 3$ и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{q_2}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка

$$\|\mathfrak{D}'_{\sin,\varepsilon}(1)(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}'_6(q_2)(1 + |\tau|)^{(q_2+1)/2} \varepsilon^{(q_2+1)/2}, \quad 1 \leq q_2 \leq 3. \quad (14.85)$$

Постоянная $\widehat{\mathfrak{C}}'_6(q_2)$ зависит от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 , q_2 , а также от нормы $\|[\Lambda]\|_{H^{q_2} \rightarrow L_2}$.

Доказательство. Из (14.82) с помощью масштабного преобразования получаем

$$\begin{aligned} & \|\mathfrak{D}'_{\cos,\varepsilon}(1)(\tau) - \mathfrak{D}'_{\cos,\varepsilon}(1)(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 2\varepsilon \|\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(I - \Pi_\varepsilon)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & = 2 \|\Lambda b(\mathbf{D})(I - \Pi)\mathcal{R}(\varepsilon)^{q_1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq 2 \|[\Lambda]\|_{H^{q_1-1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \|b(\mathbf{D})(I - \Pi)\mathcal{R}(\varepsilon)^{q_1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^{q_1-1}(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq 2 \|[\Lambda]\|_{H^{q_1-1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} C^{(1)}(q_1) \varepsilon^{q_1}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (14.86)$$

В последнем переходе мы воспользовались оценкой (14.76). Вместе с (14.35) с учетом ограничения $0 < \varepsilon \leq 1$ это влечет искомую оценку (14.84).

Далее,

$$\begin{aligned} & \|\mathfrak{D}'_{\sin,\varepsilon}(1)(\tau) - \mathfrak{D}'_{\sin,\varepsilon}(1)(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon \|\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(I - \Pi_\varepsilon)(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & = \varepsilon \|\Lambda b(\mathbf{D})(I - \Pi)(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\mathcal{R}(\varepsilon)^{q_2/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq \varepsilon \|[\Lambda]\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \|b(\mathbf{D})(I - \Pi)(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\mathcal{R}(\varepsilon)^{q_2/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^{q_2}(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq \|[\Lambda]\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} C^{(2)}(q_2) \varepsilon^{1+q_2}. \end{aligned}$$

В последнем переходе мы воспользовались оценкой (14.77). Вместе с (14.36) с учетом ограничения $0 < \varepsilon \leq 1$ это влечет искомую оценку (14.85). \square

Аналогичным образом из следствий 14.10, 14.11 и леммы 14.23 вытекают следующие два результата.

Теорема 14.25. Пусть операторы $\mathfrak{D}'_{0,\cos,\varepsilon}(1)(\tau)$, $\mathfrak{D}'_{0,\sin,\varepsilon}(1)(\tau)$ определены в (14.78), (14.79). Пусть выполнено условие 7.2.

1°. Пусть $3/2 \leq q_1 \leq 3$ и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{q_1-1}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка

$$\|\mathfrak{D}'_{0,\cos,\varepsilon}(1)(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}'_7(q_1)(1 + |\tau|)^{q_1/3} \varepsilon^{2q_1/3}. \quad (14.87)$$

Постоянная $\widehat{\mathfrak{C}}'_7(q_1)$ зависит от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 , q_1 , а также от нормы $\|[\Lambda]\|_{H^{q_1-1} \rightarrow L_2}$.

2°. Пусть $1/2 \leq q_2 \leq 2$ и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{q_2}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка

$$\|\mathfrak{D}'_{0,\sin,\varepsilon}(1)(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}'_8(q_2)(1 + |\tau|)^{(q_2+1)/3} \varepsilon^{2(q_2+1)/3}. \quad (14.88)$$

Постоянная $\widehat{\mathfrak{C}}'_8(q_2)$ зависит от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 , q_2 , а также от нормы $\|[\Lambda]\|_{H^{q_2} \rightarrow L_2}$.

Теорема 14.26. Пусть операторы $\mathfrak{D}'_{\cos,\varepsilon}(1)(\tau)$, $\mathfrak{D}'_{\sin,\varepsilon}(1)(\tau)$ определены в (14.80), (14.81). Пусть выполнено условие 7.4 (или более сильное условие 7.5).

1°. Пусть $3/2 \leq q_1 \leq 3$ и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{q_1-1}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка

$$\|\mathfrak{D}'_{\cos,\varepsilon}(1)(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}'_9(q_1)(1 + |\tau|)^{q_1/3} \varepsilon^{2q_1/3}.$$

Постоянная $\widehat{\mathfrak{C}}'_9(q_1)$ зависит от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 , n , \widehat{C}° , q_1 , а также от нормы $\|[\Lambda]\|_{H^{q_1-1} \rightarrow L_2}$.

2°. Пусть $1/2 \leq q_2 \leq 2$ и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{q_2}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка

$$\|\mathfrak{D}'_{\sin,\varepsilon}(1)(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}'_{10}(q_2)(1 + |\tau|)^{(q_2+1)/3} \varepsilon^{2(q_2+1)/3}.$$

Постоянная $\widehat{\mathfrak{C}}'_{10}(q_2)$ зависит от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 , n , \widehat{C}° , q_2 , а также от нормы $\|[\Lambda]\|_{H^{q_2} \rightarrow L_2}$.

Рассмотрим теперь вопрос о возможности устранения оператора Π_ε в аппроксимациях по энергетической норме. Положим

$$\widehat{\Xi}'_{\cos,\varepsilon}(\tau) := g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \cos(\tau \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) (I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) \cos(\tau (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}), \quad (14.89)$$

$$\widehat{\Xi}'_{\sin,\varepsilon}(\tau) := g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}). \quad (14.90)$$

Теорема 14.27. Пусть операторы $\mathfrak{D}'_{0,\cos,\varepsilon}(1)(\tau)$, $\mathfrak{D}'_{0,\sin,\varepsilon}(1)(\tau)$, $\widehat{\Xi}'_{\cos,\varepsilon}(\tau)$ и $\widehat{\Xi}'_{\sin,\varepsilon}(\tau)$ определены в (14.78), (14.79), (14.89) и (14.90).

1°. Пусть $2 \leq q_1 \leq 3$ и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{q_1-1}(\mathbb{R}^d)$ в $H^1(\mathbb{R}^d)$. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедливы оценки

$$\|\mathfrak{D}'_{0,\cos,\varepsilon}(1)(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}'_{11}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/2} \varepsilon^{(q_1-1)/2}, \quad (14.91)$$

$$\|\widehat{\Xi}'_{\cos,\varepsilon}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}'_{12}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/2} \varepsilon^{(q_1-1)/2}. \quad (14.92)$$

Постоянные $\widehat{\mathfrak{C}}'_{11}(q_1)$, $\widehat{\mathfrak{C}}'_{12}(q_1)$ зависят от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 , q_1 , а также от нормы $\|[\Lambda]\|_{H^{q_1-1} \rightarrow H^1}$.

2°. Пусть $1 \leq q_2 \leq 2$ и оператор оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{q_2}(\mathbb{R}^d)$ в $H^1(\mathbb{R}^d)$. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедливы оценки

$$\|\mathbf{D} \mathfrak{D}'_{0,\sin,\varepsilon}(1)(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}'_{13}(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/2} \varepsilon^{q_2/2}, \quad (14.93)$$

$$\|\widehat{\Xi}'_{\sin,\varepsilon}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}'_{14}(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/2} \varepsilon^{q_2/2}. \quad (14.94)$$

Константы $\widehat{\mathfrak{C}}'_{13}(q_2)$, $\widehat{\mathfrak{C}}'_{14}(q_2)$ зависят от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 , а также от нормы $\|[\Lambda]\|_{H^{q_2} \rightarrow H^1}$.

Замечание 14.28. Формально утверждение пункта 1° теоремы 14.27 верно при $1 \leq q_1 \leq 3$, а утверждение пункта 2° — при $0 \leq q_2 \leq 2$, но при $1 \leq q_1 < 2$ или $0 \leq q_2 < 1$ соответствующие условия на Λ могут выполняться только в случае $\Lambda = 0$.

Доказательство. Докажем утверждение 1°. Из (14.82) и (14.86) следует оценка

$$\|\mathfrak{D}'_{0,\cos,\varepsilon}(1)(\tau) - \mathfrak{D}^{(1)}_{0,\cos,\varepsilon}(1)(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 2\|[\Lambda]\|_{H^{q_1-1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} C^{(1)}(q_1) \varepsilon^{q_1} \quad (14.95)$$

при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$. С помощью масштабного преобразования из (14.76) и (14.82) получаем

$$\begin{aligned}
& \|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}(\mathfrak{D}_{0,\cos,\varepsilon}'^{(1)}(\tau) - \mathfrak{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau))\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\
& \leq 2\|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(I - \Pi_\varepsilon)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\
& = 2\varepsilon^{-1}\|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}\Lambda b(\mathbf{D})(I - \Pi)\mathcal{R}(\varepsilon)^{q_1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\
& \leq 2\varepsilon^{-1}\|g^{1/2}b(\mathbf{D})[\Lambda]\|_{H^{q_1-1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}\|b(\mathbf{D})(I - \Pi)\mathcal{R}(\varepsilon)^{q_1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^{q_1-1}(\mathbb{R}^d)} \\
& \leq 2\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\alpha_1^{1/2}\|\mathbf{D}[\Lambda]\|_{H^{q_1-1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}C^{(1)}(q_1)\varepsilon^{q_1-1}.
\end{aligned} \tag{14.96}$$

Из (14.95) и (14.96) с учетом (14.49) и ограничения $0 < \varepsilon \leq 1$ вытекает оценка

$$\|\mathfrak{D}_{0,\cos,\varepsilon}'^{(1)}(\tau) - \mathfrak{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_{11}''(q_1)\varepsilon^{q_1-1}. \tag{14.97}$$

Постоянная $\widehat{\mathfrak{C}}_{11}''(q_1)$ зависит от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, r_0, q_1$, а также от нормы $\|[\Lambda]\|_{H^{q_1-1} \rightarrow H^1}$. Из (14.62) и (14.97) вытекает (14.91).

Рассмотрим теперь оператор

$$\widehat{\Xi}'_{\cos,\varepsilon}(\tau) - \widehat{\Xi}_{\cos,\varepsilon}(\tau) = g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \cos(\tau \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(I - \Pi_\varepsilon) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(I - \Pi_\varepsilon) \cos(\tau (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}). \tag{14.98}$$

Первое слагаемое справа легко оценить по аналогии с (14.96):

$$\begin{aligned}
& \|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \cos(\tau \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(I - \Pi_\varepsilon)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\
& \leq \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2} \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(I - \Pi_\varepsilon)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\
& \leq \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} \|\mathbf{D}[\Lambda]\|_{H^{q_1-1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} C^{(1)}(q_1) \varepsilon^{q_1-1}.
\end{aligned} \tag{14.99}$$

Рассмотрим второе слагаемое в правой части (14.98). Поскольку $\widetilde{g} = g(b(\mathbf{D})\Lambda + \mathbf{1})$ и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{q_1-1}(\mathbb{R}^d)$ в $H^1(\mathbb{R}^d)$, то согласно [MaSh, п. 1.3.2, лемма 1] оператор $[\widetilde{g}]$ непрерывен из $H^{q_1-1}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$. При этом норма $\|[\widetilde{g}]\|_{H^{q_1-1} \rightarrow L_2}$ контролируется через $\|[\Lambda]\|_{H^{q_1-1} \rightarrow H^1}, \|g\|_{L_\infty}$ и α_1 . С помощью масштабного преобразования с учетом (14.76) получаем

$$\begin{aligned}
& \|\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(I - \Pi_\varepsilon) \cos(\tau (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \|\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(I - \Pi_\varepsilon)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\
& = \varepsilon^{-1} \|\widetilde{g} b(\mathbf{D})(I - \Pi)\mathcal{R}(\varepsilon)^{q_1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \|[\widetilde{g}]\|_{H^{q_1-1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} C^{(1)}(q_1) \varepsilon^{q_1-1}.
\end{aligned} \tag{14.100}$$

Из (14.98)–(14.100) вытекает оценка

$$\|\widehat{\Xi}'_{\cos,\varepsilon}(\tau) - \widehat{\Xi}_{\cos,\varepsilon}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_{12}''(q_1)\varepsilon^{q_1-1}, \tag{14.101}$$

где постоянная $\widehat{\mathfrak{C}}_{12}''(q_1)$ зависит от $\alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, r_0, q_1$, а также от нормы $\|[\Lambda]\|_{H^{q_1-1} \rightarrow H^1}$. Отсюда и из (14.63) вытекает (14.92).

Докажем теперь утверждение 2°. Аналогично (14.96) из (14.77) и (14.83) получаем

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{D}(\mathfrak{D}_{0,\sin,\varepsilon}'^{(1)}(\tau) - \mathfrak{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau))\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\
& \leq \|\mathbf{D}\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(I - \Pi_\varepsilon)(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\
& = \|\mathbf{D}\Lambda b(\mathbf{D})(I - \Pi)(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\mathcal{R}(\varepsilon)^{q_2/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\
& \leq \|\mathbf{D}[\Lambda]\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}\|b(\mathbf{D})(I - \Pi)(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\mathcal{R}(\varepsilon)^{q_2/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^{q_2}(\mathbb{R}^d)} \\
& \leq \|\mathbf{D}[\Lambda]\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} C^{(2)}(q_2) \varepsilon^{q_2}.
\end{aligned} \tag{14.102}$$

Отсюда и из (14.64) вытекает оценка (14.93).

Рассмотрим теперь оператор

$$\widehat{\Xi}'_{\sin,\varepsilon}(\tau) - \widehat{\Xi}_{\sin,\varepsilon}(\tau) = -\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(I - \Pi_\varepsilon)(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}).$$

Аналогично (14.100) с учетом (14.77) имеем:

$$\begin{aligned} & \|\widehat{\Xi}'_{\sin,\varepsilon}(\tau) - \widehat{\Xi}_{\sin,\varepsilon}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \|\widehat{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(I - \Pi_\varepsilon)(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & = \|\widehat{g}b(\mathbf{D})(I - \Pi)(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\mathcal{R}(\varepsilon)^{q_2/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \|\widehat{g}\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} C^{(2)}(q_2) \varepsilon^{q_2}. \end{aligned} \quad (14.103)$$

Отсюда и из (14.65) вытекает оценка (14.94). \square

Теорема 14.29. Пусть операторы $\mathfrak{D}'_{0,\cos,\varepsilon}(\tau)$, $\mathfrak{D}'_{0,\sin,\varepsilon}(\tau)$, $\widehat{\Xi}'_{\cos,\varepsilon}(\tau)$ и $\widehat{\Xi}'_{\sin,\varepsilon}(\tau)$ определены в (14.78), (14.79), (14.89) и (14.90). Пусть выполнено условие 7.2 либо условие 7.4 (или более сильное условие 7.5).

1°. Пусть $2 \leq q_1 \leq 5/2$ и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{q_1-1}(\mathbb{R}^d)$ в $H^1(\mathbb{R}^d)$. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедливы оценки

$$\|\mathfrak{D}'_{0,\cos,\varepsilon}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}'_{15}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/3} \varepsilon^{2(q_1-1)/3}, \quad (14.104)$$

$$\|\widehat{\Xi}'_{\cos,\varepsilon}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}'_{16}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/3} \varepsilon^{2(q_1-1)/3}. \quad (14.105)$$

При условии 7.2 постоянные $\widehat{\mathfrak{C}}'_{15}(q_1)$, $\widehat{\mathfrak{C}}'_{16}(q_1)$ зависят от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 , q_1 и нормы $\|[\Lambda]\|_{H^{q_1-1} \rightarrow H^1}$. При условии 7.4 они зависят от тех же параметров, а также от n и \widehat{c}° .

2°. Пусть $1 \leq q_2 \leq 3/2$ и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{q_2}(\mathbb{R}^d)$ в $H^1(\mathbb{R}^d)$. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедливы оценки

$$\|\mathbf{D}\mathfrak{D}'_{0,\sin,\varepsilon}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}'_{17}(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/3} \varepsilon^{2q_2/3}, \quad (14.106)$$

$$\|\widehat{\Xi}'_{\sin,\varepsilon}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}'_{18}(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/3} \varepsilon^{2q_2/3}. \quad (14.107)$$

При условии 7.2 постоянные $\widehat{\mathfrak{C}}'_{17}(q_2)$, $\widehat{\mathfrak{C}}'_{18}(q_2)$ зависят от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 , q_2 и нормы $\|[\Lambda]\|_{H^{q_2} \rightarrow H^1}$. При условии 7.4 они зависят от тех же параметров, а также от n и \widehat{c}° .

Доказательство. Оба утверждения вытекают из следствия 14.16 и соотношений (14.97), (14.101), (14.102), (14.103). \square

Следующее замечание вытекает из замечания 14.17 и соотношений (14.97), (14.101), (14.102), (14.103).

Замечание 14.30. 1°. В условиях теоремы 14.27(2°) помимо (14.93) при $\tau \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon \leq 1$ и $1 \leq q_2 \leq 2$ выполнена оценка

$$\|\mathfrak{D}'_{0,\sin,\varepsilon}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}''_{13}(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/2} \varepsilon^{q_2/2} (1 + (1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon^{1/2})^{1-q_2/2}.$$

При ограниченных значениях величины $(1 + |\tau|)\varepsilon$ правая часть оценивается через $C(1 + |\tau|)^{q_2/2} \varepsilon^{q_2/2}$, т. е. имеет тот же порядок, что оценка (14.93).

2°. В условиях теоремы 14.29(2°) помимо (14.106) при $\tau \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon \leq 1$ и $1 \leq q_2 \leq 3/2$ выполнена оценка

$$\|\mathfrak{D}'_{0,\sin,\varepsilon}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}''_{17}(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/3} \varepsilon^{2q_2/3} (1 + (1 + |\tau|)^{1/3} \varepsilon^{2/3})^{1-2q_2/3}.$$

При ограниченных значениях величины $(1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon$ правая часть оценивается через $C(1 + |\tau|)^{q_2/3} \varepsilon^{2q_2/3}$, т. е. имеет тот же порядок, что оценка (14.106).

14.9. Признаки мультипликаторности для Λ . Укажем некоторые случаи, когда одно из условий на оператор $[\Lambda]$ (из теорем 14.24–14.27, 14.29) выполнено. Следующее утверждение проверено в [Su8, следствие 14.30].

Предложение 14.31 ([Su8]). Пусть $q \geq 1$.

1°. При $d \leq 2q$ оператор $[\Lambda]$ заведомо непрерывен из $H^{q-1}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$, причем норма $\|[\Lambda]\|_{H^{q-1} \rightarrow L_2}$ контролируется через d , α_0 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и параметры решетки Γ .

2°. При $d > 2q$ для непрерывности оператора $[\Lambda]$ из $H^{q-1}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$ достаточно, чтобы $\Lambda \in L_{d/(q-1)}(\Omega)$. Норма $\|[\Lambda]\|_{H^{q-1} \rightarrow L_2}$ контролируется через d , параметры решетки Γ и норму $\|\Lambda\|_{L_{d/(q-1)}(\Omega)}$.

Далее, следующее утверждение установлено в [Su3, предложение 9.3].

Предложение 14.32 ([Su3]). Пусть Λ — Γ -периодическое решение задачи (6.8). Пусть $l = 1$ при $d = 1$, $l > 1$ при $d = 2$ и $l = d/2$ при $d \geq 3$. Тогда оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^l(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$ в $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, причем норма $\|[\Lambda]\|_{H^l \rightarrow H^1}$ контролируется через d , α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и параметры решетки Γ , а при $d = 2$ зависит также от l .

Из предложения 14.32 непосредственно вытекает следствие.

Следствие 14.33. Пусть $q \geq 2$. При $d \leq 2q - 2$ оператор $[\Lambda]$ заведомо непрерывен из $H^{q-1}(\mathbb{R}^d)$ в $H^1(\mathbb{R}^d)$, причем норма $\|[\Lambda]\|_{H^{q-1} \rightarrow H^1}$ контролируется через d , α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и параметры решетки Γ .

Далее, справедливо следующее утверждение.

Предложение 14.34. Пусть Λ — Γ -периодическое решение задачи (6.8). Пусть $l \geq 1$ и $d > 2l - 2$. Предположим, что $\Lambda \in L_{d/(l-1)}(\Omega)$. Тогда оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^l(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$ в $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, причем норма $\|[\Lambda]\|_{H^l \rightarrow H^1}$ контролируется через d , l , α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, параметры решетки Γ и норму $\|\Lambda\|_{L_{d/(l-1)}(\Omega)}$.

Это утверждение при $l = 2$ было проверено в [M5, лемма 8.7]; случай произвольного $l \geq 1$ рассматривается аналогично.

Укажем другие достаточные условия непрерывности оператора $[\Lambda]$ из L_2 в L_2 и из H^1 в H^1 . (Отметим, что из непрерывности оператора $[\Lambda]$ из L_2 в L_2 следует его непрерывность из H^{q-1} в L_2 при любом $q \geq 1$, а из непрерывности оператора $[\Lambda]$ из H^1 в H^1 следует его непрерывность из H^{q-1} в H^1 при любом $q \geq 2$.) Справедливо следующее утверждение; см., например, [Su8, предложение 14.34].

Предложение 14.35 ([Su8]). Пусть выполнено хотя бы одно из следующих предположений:

1°. Размерность d произвольна и $\hat{\mathcal{A}} = \mathbf{D}^* g(\mathbf{x}) \mathbf{D}$, причем матрица $g(\mathbf{x})$ имеет вещественные элементы;

2°. Размерность d произвольна и $g^0 = \underline{g}$ (т. е. выполнены соотношения (6.21)).

Тогда оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$ в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и из $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$ в $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, причем нормы $\|[\Lambda]\|_{L_2 \rightarrow L_2}$ и $\|[\Lambda]\|_{H^1 \rightarrow H^1}$ контролируются через d , α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и параметры решетки Γ .

14.10. Специальные случаи. Рассмотрим следующие специальные случаи: $g^0 = \bar{g}$ или $g^0 = \underline{g}$.

Предложение 14.36. Пусть $g^0 = \bar{g}$, т. е. выполнены соотношения (6.20). Тогда при $0 \leq q_1 \leq 3$, $0 \leq q_2 \leq 2$, $1 \leq q_3 \leq 5/2$, $0 \leq q_4 \leq 3/2$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|\mathfrak{D}_{\cos, \varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_{19}(q_1)(1 + |\tau|)^{q_1/3} \varepsilon^{2q_1/3}, \quad (14.108)$$

$$\|\mathfrak{D}_{\sin, \varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_{20}(q_2)(1 + |\tau|)^{(q_2+1)/3} \varepsilon^{2(q_2+1)/3}, \quad (14.109)$$

$$\|\mathfrak{D}_{\cos, \varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{H^{q_3}(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_{15}(q_3)(1 + |\tau|)^{(q_3-1)/3} \varepsilon^{2(q_3-1)/3}, \quad (14.110)$$

$$\|\mathbf{D}\mathfrak{D}_{\sin, \varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{H^{q_4}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_{17}(q_4)(1 + |\tau|)^{q_4/3} \varepsilon^{2q_4/3}, \quad (14.111)$$

$$\begin{aligned} \|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \cos(\tau \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \cos(\tau (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{H^{q_3}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ \leq \widehat{\mathfrak{C}}_{21}(q_3)(1 + |\tau|)^{(q_3-1)/3} \varepsilon^{2(q_3-1)/3}, \end{aligned} \quad (14.112)$$

$$\begin{aligned} \|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - g^\varepsilon b(\mathbf{D}) (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{H^{q_4}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ \leq \widehat{\mathfrak{C}}_{22}(q_4)(1 + |\tau|)^{q_4/3} \varepsilon^{2q_4/3}. \end{aligned} \quad (14.113)$$

Постоянные $\widehat{\mathfrak{C}}_{19}(q)$, $\widehat{\mathfrak{C}}_{20}(q)$, $\widehat{\mathfrak{C}}_{15}(q)$, $\widehat{\mathfrak{C}}_{17}(q)$, $\widehat{\mathfrak{C}}_{21}(q)$, $\widehat{\mathfrak{C}}_{22}(q)$ зависят только от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 и q .

Доказательство. Если выполнены соотношения (6.20), то $\Lambda(\mathbf{x}) = 0$. Тогда выполнено условие 7.2, а операторы (14.14), (14.15) принимают вид $\mathfrak{D}_{0, \cos, \varepsilon}^{(1)}(\tau) = \mathfrak{D}_{\cos, \varepsilon}^{(0)}(\tau)$, $\mathfrak{D}_{0, \sin, \varepsilon}^{(1)}(\tau) = \mathfrak{D}_{\sin, \varepsilon}^{(0)}(\tau)$. Поэтому оценки (14.108), (14.109) прямо вытекают из следствий 14.4 и 14.10; при этом $\widehat{\mathfrak{C}}_{19}(q_1) = \widehat{\mathfrak{C}}_3(q_1)$ при $0 \leq q_1 \leq 3/2$, $\widehat{\mathfrak{C}}_{19}(q_1) = \widehat{\mathfrak{C}}_7(q_1)$ при $3/2 < q_1 \leq 3$, $\widehat{\mathfrak{C}}_{20}(q_2) = \widehat{\mathfrak{C}}_4(q_2)$ при $0 \leq q_2 \leq 1/2$ и $\widehat{\mathfrak{C}}_{20}(q_2) = \widehat{\mathfrak{C}}_8(q_2)$ при $1/2 < q_2 \leq 2$. Оценки (14.110), (14.111) вытекают из следствия 14.16, а (14.112), (14.113) следуют из (14.110), (14.111) соответственно; при этом $\widehat{\mathfrak{C}}_{21}(q) = \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} \widehat{\mathfrak{C}}_{15}(q)$, $\widehat{\mathfrak{C}}_{22}(q) = \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} \widehat{\mathfrak{C}}_{17}(q)$. \square

Предложение 14.37. Пусть $g^0 = \underline{g}$, т. е. выполнены соотношения (6.21). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедливы оценки (14.11)–(14.13), (14.87), (14.88), (14.104), (14.106), а оценки (14.105) и (14.107) принимают вид

$$\begin{aligned} \|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \cos(\tau \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})(I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})) - g^0 b(\mathbf{D}) \cos(\tau (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ \leq \widehat{\mathfrak{C}}'_{16}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/3} \varepsilon^{2(q_1-1)/3}, \quad 2 \leq q_1 \leq 5/2, \\ \|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - g^0 b(\mathbf{D}) (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ \leq \widehat{\mathfrak{C}}'_{18}(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/3} \varepsilon^{2q_2/3}, \quad 1 \leq q_2 \leq 3/2. \end{aligned}$$

Доказательство. Если выполнены соотношения (6.21), то $\widetilde{g}(\mathbf{x}) = g^0 = \underline{g}$. Согласно утверждению 3° предложения 6.4 выполнено условие 7.2. В силу следствия 14.4 справедливы оценки (14.11)–(14.13). С учетом утверждения 2° предложения 14.35 применимы результаты “без сглаживателя”: теоремы 14.25 и 14.29, которые дают оценки (14.87), (14.88), (14.104)–(14.107). \square

§ 15. АППРОКСИМАЦИЯ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ ОТ \mathcal{A}_ε

15.1. Аппроксимации в старшем порядке. Перейдем теперь к рассмотрению оператора \mathcal{A}_ε (см. (14.2)). Положим

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{\cos, \varepsilon}^{(0)}(\tau) &:= f^\varepsilon \cos(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1} - f_0 \cos(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1}, \\ \mathbb{D}_{\sin, \varepsilon}^{(0)}(\tau) &:= f^\varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1} - f_0 (\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1}, \\ \widetilde{\mathbb{D}}_{\sin, \varepsilon}^{(0)}(\tau) &:= f^\varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^* - f_0 (\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0. \end{aligned}$$

Из теорем 13.1, 13.2 масштабным преобразованием выводятся следующие результаты.

Теорема 15.1 ([BSu5], [M5], [DSu1]). При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ выполнены оценки

$$\|\mathbb{D}_{\cos,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_1(1 + |\tau|)\varepsilon, \quad (15.1)$$

$$\|\mathbb{D}_{\sin,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_2(1 + |\tau|)\varepsilon, \quad (15.2)$$

$$\|\widetilde{\mathbb{D}}_{\sin,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widetilde{C}_2(1 + |\tau|)\varepsilon. \quad (15.3)$$

Постоянные C_1 , C_2 и \widetilde{C}_2 зависят лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Оценка (15.1) была получена в [BSu5, теорема 13.3], неравенство (15.2) — в [M5, теорема 9.1], а (15.3) — в [DSu1, теорема 11.6].

Теорема 15.2 ([DSu2]). Пусть выполнены условия теоремы 15.1. Пусть выполнено условие 10.2 либо условие 10.5 (или более сильное условие 10.6). При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ выполнены оценки

$$\begin{aligned} \|\mathbb{D}_{\cos,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq C_3(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon, \\ \|\widetilde{\mathbb{D}}_{\sin,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq C_4(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon. \end{aligned} \quad (15.4)$$

При условии 10.2 постоянные C_3 и C_4 зависят лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 . При условии 10.5 эти константы зависят от тех же параметров, а также от n и c° .

Теорема 15.2 была получена в [DSu2, теорема 15.20].

С помощью интерполяции из теорем 15.1 и 15.2 можно вывести следующие результаты; см. [DSu2, следствия 15.21, 15.23].

Следствие 15.3 ([DSu2]). В условиях теоремы 15.1 справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\mathbb{D}_{\cos,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}_1(q_1)(1 + |\tau|)^{q_1/2}\varepsilon^{q_1/2}, \\ 0 &\leq q_1 \leq 2, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0, \\ \|\widetilde{\mathbb{D}}_{\sin,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}_2(q_2)(1 + |\tau|)^{(q_2+1)/2}\varepsilon^{(q_2+1)/2}, \\ 0 &\leq q_2 \leq 1, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \end{aligned} \quad (15.5)$$

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\mathbb{D}}_{\sin,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\mathbf{D}^*\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}'_2(q_1)(1 + |\tau|)^{q_1/2}\varepsilon^{q_1/2}, \\ 0 &\leq q_1 \leq 2, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (15.6)$$

Замечание 15.4. Для доказательства оценок (15.5), (15.6) используются неравенства $\|\widetilde{\mathbb{D}}_{\sin,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon^{1/2}$ и $\|\widetilde{\mathbb{D}}_{\sin,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\mathbf{D}^*\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C$; см. доказательство следствия 15.21 в [DSu2]. Для оператора $\mathbb{D}_{\sin,\varepsilon}^{(0)}(\tau)$ таких оценок нет, поэтому получить аналоги оценок (15.5), (15.6) для $\mathbb{D}_{\sin,\varepsilon}^{(0)}(\tau)$ не удастся. В условиях теоремы 15.1 можно получить оценку

$$\|\mathbb{D}_{\sin,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \check{\mathfrak{C}}_2(q_2)(1 + |\tau|)\varepsilon^{q_2}, \quad 0 \leq q_2 \leq 1, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0,$$

интерполируя между очевидной оценкой

$$\|\mathbb{D}_{\sin,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}|\tau|$$

и (15.2).

Следствие 15.5 ([DSu2]). В условиях теоремы 15.2 справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\mathbb{D}_{\cos,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}_3(q_1)(1+|\tau|)^{q_1/3}\varepsilon^{2q_1/3}, \\ 0 \leq q_1 &\leq 3/2, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0, \\ \|\tilde{\mathbb{D}}_{\sin,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}_4(q_2)(1+|\tau|)^{(q_2+1)/3}\varepsilon^{2(q_2+1)/3}, \\ 0 \leq q_2 &\leq 1/2, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \\ \|\tilde{\mathbb{D}}_{\sin,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\mathbf{D}^*\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}'_4(q_1)(1+|\tau|)^{q_1/3}\varepsilon^{2q_1/3}, \\ 0 \leq q_1 &\leq 3/2, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

15.2. Более точная аппроксимация. Положим

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau) &:= f^\varepsilon \cos(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1} (I + \varepsilon \Lambda_Q^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon) \\ &\quad - (I + \varepsilon \Lambda_Q^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon) f_0 \cos(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1}, \end{aligned} \quad (15.7)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau) &:= f^\varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1} \\ &\quad - (I + \varepsilon \Lambda_Q^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon) f_0 (\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1}, \end{aligned} \quad (15.8)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau) &:= \mathbb{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau) \\ &\quad + \varepsilon \int_0^\tau f_0 \cos((\tau - \tilde{\tau})(\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0 \widehat{G}_{0,Q}(\mathbf{D}) f_0 \sin(\tilde{\tau} (\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1} d\tilde{\tau} \\ &\quad + \varepsilon \int_0^\tau f_0 \sin((\tau - \tilde{\tau})(\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0 \widehat{G}_{0,Q}(\mathbf{D}) f_0 \cos(\tilde{\tau} (\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1} d\tilde{\tau}, \end{aligned} \quad (15.9)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau) &:= \mathbb{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau) - \varepsilon f_0^2 \widehat{\widehat{G}}_{0,Q}(\mathbf{D}) f_0 \sin(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1} \\ &\quad - \varepsilon \int_0^\tau f_0 (\mathcal{A}^0)^{-1/2} \cos((\tau - \tilde{\tau})(\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0 \widehat{G}_{0,Q}(\mathbf{D}) f_0 \cos(\tilde{\tau} (\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1} d\tilde{\tau} \\ &\quad + \varepsilon \int_0^\tau f_0 (\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin((\tau - \tilde{\tau})(\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0 \widehat{G}_{0,Q}(\mathbf{D}) f_0 \sin(\tilde{\tau} (\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1} d\tilde{\tau}, \end{aligned} \quad (15.10)$$

где $\widehat{G}_{0,Q}(\mathbf{D})$, $\widehat{\widehat{G}}_{0,Q}(\mathbf{D})$ — ПДО с символами (13.5) и (13.6).

Операторы (15.7), (15.8) ограничены, оператор (15.9) в общем случае определен на $H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, а оператор (15.10) — на $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. При условии 10.5 оператор (15.9) определен на $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, а оператор (15.10) ограничен (ср. предложение 13.6).

Применяя масштабное преобразование, получаем

$$\mathbb{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)(\mathcal{H}_0 + I)^{-q/2} = T_\varepsilon^* \mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2} T_\varepsilon, \quad (15.11)$$

$$\mathbb{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)(\mathcal{H}_0 + I)^{-q/2} = \varepsilon T_\varepsilon^* \mathbb{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2} T_\varepsilon, \quad (15.12)$$

$$\mathbb{D}_{\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)(\mathcal{H}_0 + I)^{-q/2} = T_\varepsilon^* \mathbb{D}_{\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2} T_\varepsilon, \quad (15.13)$$

$$\mathbb{D}_{\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)(\mathcal{H}_0 + I)^{-q/2} = \varepsilon T_\varepsilon^* \mathbb{D}_{\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2} T_\varepsilon, \quad (15.14)$$

где операторы $\mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$, $\mathbb{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$, $\mathbb{D}_{\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$, $\mathbb{D}_{\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$ определены в (13.7)–(13.10). Отсюда и из теорем 13.3–13.5 с учетом унитарности оператора T_ε непосредственно вытекают следующие утверждения.

Теорема 15.6. Пусть операторы $\mathbb{D}_{\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)$, $\mathbb{D}_{\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)$ определены в (15.9), (15.10). При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|\mathbb{D}_{\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^4(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_5(1+|\tau|)^2 \varepsilon^2, \quad (15.15)$$

$$\|\mathbb{D}_{\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^3(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_6(1+|\tau|)^2 \varepsilon^2. \quad (15.16)$$

Константы C_5 и C_6 зависят лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Теорема 15.7. Пусть операторы $\mathbb{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)$, $\mathbb{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)$ определены в (15.7), (15.8). Пусть выполнено условие 10.2. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|\mathbb{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^3(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_7(1 + |\tau|)\varepsilon^2, \quad (15.17)$$

$$\|\mathbb{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_8(1 + |\tau|)\varepsilon^2. \quad (15.18)$$

Постоянные C_7 и C_8 зависят лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Теорема 15.8. Пусть операторы $\mathbb{D}_{\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)$, $\mathbb{D}_{\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)$ определены в (15.9), (15.10). Пусть выполнено условие 10.5 (или более сильное условие 10.6). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|\mathbb{D}_{\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^3(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_9(1 + |\tau|)\varepsilon^2, \quad (15.19)$$

$$\|\mathbb{D}_{\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{10}(1 + |\tau|)\varepsilon^2. \quad (15.20)$$

Постоянные C_9 и C_{10} зависят от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 , а также от c° и n .

Аналогичным образом из предложения 13.7 и соотношений (15.11)–(15.14) вытекает следующее утверждение.

Предложение 15.9. Пусть операторы $\mathbb{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)$, $\mathbb{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)$, $\mathbb{D}_{\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)$, $\mathbb{D}_{\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)$ определены в (15.7)–(15.10).

1°. При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|\mathbb{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{11}^\circ(1 + |\tau|)\varepsilon, \quad (15.21)$$

$$\|\mathbb{D}_{\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{11}(1 + |\tau|)\varepsilon, \quad (15.22)$$

$$\|\mathbb{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{12}^\circ(1 + |\tau|)\varepsilon, \quad (15.23)$$

$$\|\mathbb{D}_{\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{12}(1 + |\tau|)\varepsilon. \quad (15.24)$$

Постоянные C_{11}° , C_{11} , C_{12}° , C_{12} зависят лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

2°. Пусть выполнено условие 10.2. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|\mathbb{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{13}(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon. \quad (15.25)$$

Постоянная C_{13} зависит лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

3°. Пусть выполнено условие 10.5 (или более сильное условие 10.6). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|\mathbb{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{15}^\circ(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon, \quad (15.26)$$

$$\|\mathbb{D}_{\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{15}(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon. \quad (15.27)$$

Постоянные C_{15}° , C_{15} зависят от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 , а также от c° и n .

С помощью интерполяции из теорем 15.6–15.8 и предложения 15.9 выводятся следующие результаты.

Следствие 15.10. В условиях теоремы 15.6 справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\mathbb{D}_{\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}_5(q_1)(1+|\tau|)^{q_1/2}\varepsilon^{q_1/2}, \\ 2 &\leq q_1 \leq 4, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0, \end{aligned} \quad (15.28)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbb{D}_{\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}_6(q_2)(1+|\tau|)^{(q_2+1)/2}\varepsilon^{(q_2+1)/2}, \\ 1 &\leq q_2 \leq 3, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (15.29)$$

Здесь $\mathfrak{C}_5(q_1) = C_5^{q_1/2-1}C_{11}^{2-q_1/2}$, $\mathfrak{C}_6(q_2) = C_6^{(q_2-1)/2}C_{12}^{(3-q_2)/2}$.

Доказательство. Интерполируя между (15.22) и (15.15), получаем оценку (15.28). Интерполяция между (15.24) и (15.16) приводит к (15.29). \square

Следствие 15.11. В условиях теоремы 15.7 справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\mathbb{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}_7(q_1)(1+|\tau|)^{q_1/3}\varepsilon^{2q_1/3}, \\ 3/2 &\leq q_1 \leq 3, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0, \end{aligned} \quad (15.30)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbb{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}_8(q_2)(1+|\tau|)\varepsilon^{q_2}, \\ 1 &\leq q_2 \leq 2, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (15.31)$$

Здесь $\mathfrak{C}_7(q_1) = C_7^{2q_1/3-1}C_{13}^{2-2q_1/3}$, $\mathfrak{C}_8(q_2) = C_8^{q_2-1}(C_{12}^\circ)^{2-q_2}$.

Доказательство. Интерполируя между (15.25) и (15.17), получаем оценку (15.30). Интерполяция между (15.23) и (15.18) приводит к (15.31). \square

Следствие 15.12. В условиях теоремы 15.8 справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\mathbb{D}_{\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}_9(q_1)(1+|\tau|)^{q_1/3}\varepsilon^{2q_1/3}, \\ 3/2 &\leq q_1 \leq 3, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0, \end{aligned} \quad (15.32)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbb{D}_{\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}_{10}(q_2)(1+|\tau|)\varepsilon^{q_2}, \\ 1 &\leq q_2 \leq 2, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (15.33)$$

Здесь $\mathfrak{C}_9(q_1) = C_9^{2q_1/3-1}C_{15}^{2-2q_1/3}$, $\mathfrak{C}_{10}(q_2) = C_{10}^{q_2-1}C_{12}^{2-q_2}$.

Доказательство. Интерполируя между (15.27) и (15.19), получаем оценку (15.32). Интерполяция между (15.24) и (15.20) приводит к (15.33). \square

15.3. Аппроксимация по энергетической норме. Положим

$$\begin{aligned} \Xi_{\cos,\varepsilon}(\tau) &:= g^\varepsilon b(\mathbf{D})f^\varepsilon \cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1} (I + \varepsilon\Lambda_Q^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon) \\ &\quad - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon f_0 \cos(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}, \end{aligned} \quad (15.34)$$

$$\begin{aligned} \Xi_{\sin,\varepsilon}(\tau) &:= g^\varepsilon b(\mathbf{D})f^\varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1} \\ &\quad - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon f_0 (\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}. \end{aligned} \quad (15.35)$$

Применяя масштабное преобразование, получаем

$$\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}\mathbb{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)(\mathcal{H}_0 + I)^{-q/2} = \varepsilon^{-1}T_\varepsilon^* \widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2}T_\varepsilon, \quad (15.36)$$

$$\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}\mathbb{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)(\mathcal{H}_0 + I)^{-q/2} = T_\varepsilon^* \widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\mathbb{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{q/2}T_\varepsilon, \quad (15.37)$$

где операторы $\mathbb{D}_{0,\cos}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$, $\mathbb{D}_{0,\sin}^{(1)}(\varepsilon^{-1}\tau)$ определены в (13.7), (13.8).

По аналогии с доказательством теоремы 14.12, используя тождества (15.36), (15.37), а также оценки (15.21), (15.23), из теоремы 13.9 легко вывести следующий результат.

Теорема 15.13. Пусть операторы $\mathbb{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)$, $\mathbb{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)$, $\Xi_{\cos,\varepsilon}(\tau)$ и $\Xi_{\sin,\varepsilon}(\tau)$ определены в (15.7), (15.8), (15.34) и (15.35). При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|\mathbb{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^3(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C_{22}(1 + |\tau|)\varepsilon, \quad (15.38)$$

$$\|\Xi_{\cos,\varepsilon}(\tau)\|_{H^3(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{23}(1 + |\tau|)\varepsilon, \quad (15.39)$$

$$\|\mathbb{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C_{24}(1 + |\tau|)\varepsilon, \quad (15.40)$$

$$\|\Xi_{\sin,\varepsilon}(\tau)\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{25}(1 + |\tau|)\varepsilon. \quad (15.41)$$

Постоянные C_{22} , C_{23} , C_{24} , C_{25} зависят от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Ранее оценка (15.40) была установлена в [М5, теорема 9.5], а (15.41) — в [М5, теорема 10.7].

Теорема 15.14. Пусть операторы $\mathbb{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)$, $\mathbb{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)$, $\Xi_{\cos,\varepsilon}(\tau)$ и $\Xi_{\sin,\varepsilon}(\tau)$ определены в (15.7), (15.8), (15.34) и (15.35). Пусть выполнено условие 10.2 либо условие 10.5 (или более сильное условие 10.6). При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|\mathbb{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{5/2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C_{26}(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon, \quad (15.42)$$

$$\|\Xi_{\cos,\varepsilon}(\tau)\|_{H^{5/2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{27}(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon, \quad (15.43)$$

$$\|\mathbb{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{28}(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon, \quad (15.44)$$

$$\|\Xi_{\sin,\varepsilon}(\tau)\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{29}(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon. \quad (15.45)$$

При условии 10.2 постоянные C_{26} , C_{27} , C_{28} и C_{29} зависят только от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 . При условии 10.5 они зависят от тех же параметров, а также от n , c° .

Доказательство. По аналогии с доказательством теоремы 14.13, применяя теорему 13.10 и учитывая (15.36), а также (15.25) (при условии 10.2) либо (15.26) (при условии 10.5), получаем неравенство (15.42). Неравенство (15.43) выводится из (15.42) по аналогии с доказательством оценки (14.55).

Из неравенства (13.16) с учетом (15.37) следует, что

$$\|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2} \mathbb{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{20}(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon.$$

Отсюда и из (14.49) вытекает оценка (15.44) с постоянной $C_{28} = \widehat{c}_*^{-1/2} C_{20}$. Оценка (15.45) выводится из (15.44). \square

Замечание 15.15. В условиях теоремы 15.14 из (15.44) и (15.23) следует оценка

$$\|\mathbb{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \check{C}_{28}(1 + |\tau|)\varepsilon. \quad (15.46)$$

Оценить норму в левой части (15.46) через $C(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon$ не удастся из-за отсутствия аналога оценки (15.4) для оператора $\mathbb{D}_{\sin,\varepsilon}^{(0)}(\tau)$. В [DSu2, теоремы 15.28 и 15.36(2°)] была допущена неточность на этот счет.

По аналогии с доказательством предложения 14.14 из предложения 13.11 нетрудно вывести следующее утверждение.

Предложение 15.16. Пусть операторы $\mathbb{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)$ и $\Xi_{\cos,\varepsilon}(\tau)$ определены в (15.7) и (15.34). При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|\mathbb{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C_{30}, \quad (15.47)$$

$$\|\Xi_{\cos,\varepsilon}(\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{31}. \quad (15.48)$$

Постоянные C_{30} , C_{31} зависят от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 и r_1 .

С помощью интерполяции из теорем 15.13, 15.14 и предложения 15.16 выводятся следующие утверждения.

Следствие 15.17. В условиях теоремы 15.13 справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\mathbb{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}_{11}(q_1)(1+|\tau|)^{(q_1-1)/2} \varepsilon^{(q_1-1)/2}, \\ 1 &\leq q_1 \leq 3, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0, \end{aligned} \quad (15.49)$$

$$\begin{aligned} \|\Xi_{\cos,\varepsilon}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}_{12}(q_1)(1+|\tau|)^{(q_1-1)/2} \varepsilon^{(q_1-1)/2}, \\ 1 &\leq q_1 \leq 3, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0, \end{aligned} \quad (15.50)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbb{D}\mathbb{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}_{13}(q_2)(1+|\tau|)^{q_2/2} \varepsilon^{q_2/2}, \\ 0 &\leq q_2 \leq 2, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0, \end{aligned} \quad (15.51)$$

$$\begin{aligned} \|\Xi_{\sin,\varepsilon}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}_{14}(q_2)(1+|\tau|)^{q_2/2} \varepsilon^{q_2/2}, \\ 0 &\leq q_2 \leq 2, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (15.52)$$

Доказательство. Интерполируя между (15.47) и (15.38), получаем оценку (15.49) с постоянной $\mathfrak{C}_{11}(q_1) = C_{22}^{(q_1-1)/2} C_{30}^{(3-q_1)/2}$. Интерполяция между (15.48) и (15.39) приводит к оценке (15.50) с постоянной $\mathfrak{C}_{12}(q_1) = C_{23}^{(q_1-1)/2} C_{31}^{(3-q_1)/2}$.

Оценки (15.51) и (15.52) были установлены в [DSu2, следствие 15.26]. \square

Следствие 15.18. В условиях теоремы 15.14 справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\mathbb{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}_{15}(q_1)(1+|\tau|)^{(q_1-1)/3} \varepsilon^{2(q_1-1)/3}, \\ 1 &\leq q_1 \leq 5/2, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0, \end{aligned} \quad (15.53)$$

$$\begin{aligned} \|\Xi_{\cos,\varepsilon}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}_{16}(q_1)(1+|\tau|)^{(q_1-1)/3} \varepsilon^{2(q_1-1)/3}, \\ 1 &\leq q_1 \leq 5/2, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0, \end{aligned} \quad (15.54)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbb{D}\mathbb{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}_{17}(q_2)(1+|\tau|)^{q_2/3} \varepsilon^{2q_2/3}, \\ 0 &\leq q_2 \leq 3/2, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0, \end{aligned} \quad (15.55)$$

$$\begin{aligned} \|\Xi_{\sin,\varepsilon}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}_{18}(q_2)(1+|\tau|)^{q_2/3} \varepsilon^{2q_2/3}, \\ 0 &\leq q_2 \leq 3/2, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (15.56)$$

Доказательство. Интерполируя между (15.47) и (15.42), получаем оценку (15.53) с постоянной $\mathfrak{C}_{15}(q_1) = C_{26}^{2(q_1-1)/3} C_{30}^{(5-2q_1)/3}$. Интерполяция между (15.48) и (15.43) приводит к оценке (15.54) с постоянной $\mathfrak{C}_{16}(q_1) = C_{27}^{2(q_1-1)/3} C_{31}^{(5-2q_1)/3}$.

Оценки (15.55) и (15.56) были установлены в [DSu2, следствие 15.29]. \square

Замечание 15.19. 1°. В условиях теоремы 15.13 помимо (15.51) справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\mathbb{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} &\leq \check{\mathfrak{C}}_{13}(q_2)(1+|\tau|) \varepsilon^{q_2/2}, \\ 0 &\leq q_2 \leq 2, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \end{aligned}$$

которая получается интерполяцией между оценкой

$$\|\mathbb{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C_{32}(1+|\tau|), \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad (15.57)$$

(см. [DSu2, (15.94)]) и (15.40). См. замечание 15.27 из [DSu2].

2°. В условиях теоремы 15.14 помимо (15.55) справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\mathbb{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} &\leq \check{\mathfrak{C}}_{17}(q_2)(1+|\tau|) \varepsilon^{2q_2/3}, \\ 0 &\leq q_2 \leq 3/2, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \end{aligned}$$

которая получается интерполяцией между оценкой (15.57) и (15.46).

Замечание 15.20. 1°. В общей ситуации, то есть в условиях теорем 15.1, 15.6, 15.13 можно рассмотреть значения времени $\tau = O(\varepsilon^{-\alpha})$, $0 < \alpha < 1$, и получить квалифицированные оценки

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{D}_{\cos,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= O(\varepsilon^{q_1(1-\alpha)/2}), & 0 \leq q_1 \leq 2; \\
\|\tilde{\mathbb{D}}_{\sin,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= O(\varepsilon^{(q_2+1)(1-\alpha)/2}), & 0 \leq q_2 \leq 1; \\
\|\tilde{\mathbb{D}}_{\sin,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\mathbf{D}^*\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= O(\varepsilon^{q_1(1-\alpha)/2}), & 0 \leq q_1 \leq 2; \\
\|\mathbb{D}_{\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= O(\varepsilon^{q_1(1-\alpha)/2}), & 2 \leq q_1 \leq 4; \\
\|\mathbb{D}_{\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= O(\varepsilon^{(q_2+1)(1-\alpha)/2}), & 1 \leq q_2 \leq 3; \\
\|\mathbb{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} &= O(\varepsilon^{(q_1-1)(1-\alpha)/2}), & 1 \leq q_1 \leq 3; \\
\|\Xi_{\cos,\varepsilon}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= O(\varepsilon^{(q_1-1)(1-\alpha)/2}), & 1 \leq q_1 \leq 3; \\
\|\mathbb{D}\mathbb{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= O(\varepsilon^{q_2(1-\alpha)/2}), & 0 \leq q_2 \leq 2; \\
\|\Xi_{\sin,\varepsilon}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= O(\varepsilon^{q_2(1-\alpha)/2}), & 0 \leq q_2 \leq 2.
\end{aligned}$$

2°. В случае усиления результатов, то есть в условиях теорем 15.2, 15.7, 15.8, 15.14 можно рассмотреть значения времени $\tau = O(\varepsilon^{-\alpha})$, $0 < \alpha < 2$, и получить квалифицированные оценки

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{D}_{\cos,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= O(\varepsilon^{q_1(2-\alpha)/3}), & 0 \leq q_1 \leq 3/2; \\
\|\tilde{\mathbb{D}}_{\sin,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= O(\varepsilon^{(q_2+1)(2-\alpha)/3}), & 0 \leq q_2 \leq 1/2; \\
\|\tilde{\mathbb{D}}_{\sin,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\mathbf{D}^*\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= O(\varepsilon^{q_1(2-\alpha)/3}), & 0 \leq q_1 \leq 3/2; \\
\|\mathbb{D}_{\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= O(\varepsilon^{q_1(2-\alpha)/3}), & 3/2 \leq q_1 \leq 3; \\
\|\mathbb{D}_{\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= O(\varepsilon^{2-\alpha}); \\
\|\mathbb{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} &= O(\varepsilon^{(q_1-1)(2-\alpha)/3}), & 1 \leq q_1 \leq 5/2; \\
\|\Xi_{\cos,\varepsilon}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= O(\varepsilon^{(q_1-1)(2-\alpha)/3}), & 1 \leq q_1 \leq 5/2; \\
\|\mathbb{D}\mathbb{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= O(\varepsilon^{q_2(2-\alpha)/3}), & 0 \leq q_2 \leq 3/2; \\
\|\Xi_{\sin,\varepsilon}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= O(\varepsilon^{q_2(2-\alpha)/3}), & 0 \leq q_2 \leq 3/2.
\end{aligned}$$

15.4. Подтверждение точности результатов пп. 15.1–15.3. Сначала обсудим точность результатов относительно типа операторной нормы. Следующее утверждение подтверждает точность общих результатов (теорем 15.1, 15.6, 15.13) и выводится из теоремы 13.12 с помощью масштабного преобразования.

Теорема 15.21. Пусть выполнено условие 11.1.

1°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_1 < 2$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)$, чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство

$$\|\mathbb{D}_{\cos,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon. \quad (15.58)$$

2°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_2 < 1$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)$, чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство

$$\|\mathbb{D}_{\sin,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon. \quad (15.59)$$

3°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_2 < 1$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство

$$\|\widetilde{\mathbb{D}}_{\sin, \varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(\tau)\varepsilon. \quad (15.60)$$

4°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_1 < 4$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство

$$\|\mathbb{D}_{\cos, \varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(\tau)\varepsilon^2. \quad (15.61)$$

5°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_2 < 3$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство

$$\|\mathbb{D}_{\sin, \varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(\tau)\varepsilon^2. \quad (15.62)$$

6°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_1 < 3$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство

$$\|\mathbb{D}_{0, \cos, \varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C(\tau)\varepsilon. \quad (15.63)$$

7°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_2 < 2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство

$$\|\mathbb{D}_{0, \sin, \varepsilon}^{(1)}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(\tau)\varepsilon. \quad (15.64)$$

Утверждения 1°, 2°, 3°, 7° были доказаны в [DSu1, теорема 11.10], [DSu2, теорема 15.31].

Аналогично, из теоремы 13.13 с помощью масштабного преобразования вытекает, что усиленные результаты (теоремы 15.2, 15.7, 15.8, 15.14) тоже точны.

Теорема 15.22. Пусть выполнено условие 11.2.

1°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_1 < 3/2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы оценка (15.58) выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

2°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_2 < 1/2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы оценка (15.60) выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

3°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_1 < 3$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы оценка (15.61) выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

4°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_2 < 2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы (15.62) выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

5°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_1 < 5/2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы оценка (15.63) выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

6°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq q_2 < 3/2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau)$, чтобы оценка (15.64) выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Утверждения 1°, 2°, 6° ранее были получены в [DSu2, теорема 15.32].

Перейдем к подтверждению точности оценок относительно зависимости от параметра τ . Из теоремы 13.14 с помощью масштабного преобразования вытекает следующий результат, подтверждающий точность общих результатов (теорем 15.1, 15.6, 15.13).

Теорема 15.23. Пусть выполнено условие 11.1.

1°. Пусть $q_1 \geq 2$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (15.58) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.

2°. Пусть $q_2 \geq 1$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (15.59) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.

3°. Пусть $q_2 \geq 1$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (15.60) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.

4°. Пусть $q_1 \geq 4$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/\tau^2 = 0$ и выполнена оценка (15.61) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.

- 5°. Пусть $q_2 \geq 3$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/\tau^2 = 0$ и выполнена оценка (15.62) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.
- 6°. Пусть $q_1 \geq 3$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (15.63) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.
- 7°. Пусть $q_2 \geq 2$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (15.64) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Утверждения 1°, 2°, 3°, 7° ранее были получены в [DSu2, теорема 15.33].

Наконец, точность усиленных результатов (теорем 15.2, 15.7, 15.8, 15.14) вытекает из теоремы 13.15 с помощью масштабного преобразования.

Теорема 15.24. Пусть выполнено условие 11.2.

- 1°. Пусть $q_1 \geq 3/2$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (15.58) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.
- 2°. Пусть $q_2 \geq 1/2$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (15.60) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.
- 3°. Пусть $q_1 \geq 3$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (15.61) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.
- 4°. Пусть $q_2 \geq 2$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (15.62) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.
- 5°. Пусть $q_1 \geq 5/2$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (15.63) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.
- 6°. Пусть $q_2 \geq 3/2$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (15.64) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Утверждения 1°, 2°, 6° ранее были получены в [DSu2, теорема 15.34].

15.5. О возможности устранения сглаживающего оператора Π_ε в аппроксимациях.

Рассмотрим теперь вопрос о возможности устранения оператора Π_ε в аппроксимациях в результатах пунктов 15.2 и 15.3.

Положим

$$\mathbb{D}'_{0,\cos,\varepsilon}(1)(\tau) := f^\varepsilon \cos(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) (f^\varepsilon)^{-1} (I + \varepsilon \Lambda_Q^\varepsilon b(\mathbf{D})) - (I + \varepsilon \Lambda_Q^\varepsilon b(\mathbf{D})) f_0 \cos(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1}, \quad (15.65)$$

$$\mathbb{D}'_{0,\sin,\varepsilon}(1)(\tau) := f^\varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) (f^\varepsilon)^{-1} - (I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})) f_0 (\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1}, \quad (15.66)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{D}'_{\cos,\varepsilon}(1)(\tau) &:= \mathbb{D}'_{0,\cos,\varepsilon}(1)(\tau) \\ &+ \varepsilon \int_0^\tau f_0 \cos((\tau - \tilde{\tau})(\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0 \widehat{G}_{0,Q}(\mathbf{D}) f_0 \sin(\tilde{\tau} (\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1} d\tilde{\tau} \end{aligned} \quad (15.67)$$

$$\begin{aligned} &+ \varepsilon \int_0^\tau f_0 \sin((\tau - \tilde{\tau})(\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0 \widehat{G}_{0,Q}(\mathbf{D}) f_0 \cos(\tilde{\tau} (\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1} d\tilde{\tau}, \\ \mathbb{D}'_{\sin,\varepsilon}(1)(\tau) &:= \mathbb{D}'_{0,\sin,\varepsilon}(1)(\tau) - \varepsilon f_0^2 \widehat{G}_{0,Q}(\mathbf{D}) f_0 \sin(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1} \\ &- \varepsilon \int_0^\tau f_0 (\mathcal{A}^0)^{-1/2} \cos((\tau - \tilde{\tau})(\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0 \widehat{G}_{0,Q}(\mathbf{D}) f_0 \cos(\tilde{\tau} (\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1} d\tilde{\tau} \\ &+ \varepsilon \int_0^\tau f_0 (\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin((\tau - \tilde{\tau})(\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0 \widehat{G}_{0,Q}(\mathbf{D}) f_0 \sin(\tilde{\tau} (\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1} d\tilde{\tau}. \end{aligned} \quad (15.68)$$

Из (15.7)–(15.10) и (15.65)–(15.68) следуют соотношения

$$\begin{aligned} \mathbb{D}'_{0,\cos,\varepsilon}(1)(\tau) - \mathbb{D}_{0,\cos,\varepsilon}(1)(\tau) &= \mathbb{D}'_{\cos,\varepsilon}(1)(\tau) - \mathbb{D}_{\cos,\varepsilon}(1)(\tau) \\ &= f^\varepsilon \cos(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1} \varepsilon \Lambda_Q^\varepsilon b(\mathbf{D})(I - \Pi_\varepsilon) - \varepsilon \Lambda_Q^\varepsilon b(\mathbf{D})(I - \Pi_\varepsilon) f_0 \cos(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1}, \end{aligned} \quad (15.69)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{D}'_{0,\sin,\varepsilon}(1)(\tau) - \mathbb{D}_{0,\sin,\varepsilon}(1)(\tau) &= \mathbb{D}'_{\sin,\varepsilon}(1)(\tau) - \mathbb{D}_{\sin,\varepsilon}(1)(\tau) \\ &= -\varepsilon \Lambda_Q^\varepsilon b(\mathbf{D})(I - \Pi_\varepsilon) f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1}. \end{aligned} \quad (15.70)$$

По аналогии с доказательством теоремы 14.24, из следствия 15.10 нетрудно вывести следующее утверждение. При этом используется неравенство (14.76) и оценка

$$\|b(\mathbf{D})(I - \Pi) f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2} \mathcal{R}(\varepsilon)^{q_2/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^{q_2}(\mathbb{R}^d)} \leq C^{(2)}(q_2) \varepsilon^{q_2} \quad (15.71)$$

при $q_2 \geq 0$, которая проверяется по аналогии с (14.77) (ср. доказательство леммы 14.23). Следует также учесть, что матрицы-функции Λ_Q и Λ отличаются на постоянное слагаемое, а потому имеют одинаковые свойства мультипликативности (в пространствах Соболева).

Теорема 15.25. Пусть операторы $\mathbb{D}'_{\cos,\varepsilon}(1)(\tau)$, $\mathbb{D}'_{\sin,\varepsilon}(1)(\tau)$ определены в (15.67), (15.68).

1°. Пусть $2 \leq q_1 \leq 4$ и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{q_1-1}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка

$$\|\mathbb{D}'_{\cos,\varepsilon}(1)(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}'_5(q_1)(1 + |\tau|)^{q_1/2} \varepsilon^{q_1/2}, \quad 2 \leq q_1 \leq 4. \quad (15.72)$$

Постоянная $\mathfrak{C}'_5(q_1)$ зависит от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 , q_1 , а также от нормы $\|[\Lambda]\|_{H^{q_1-1} \rightarrow L_2}$.

2°. Пусть $1 \leq q_2 \leq 3$ и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{q_2}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка

$$\|\mathbb{D}'_{\sin,\varepsilon}(1)(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}'_6(q_2)(1 + |\tau|)^{(q_2+1)/2} \varepsilon^{(q_2+1)/2}, \quad 1 \leq q_2 \leq 3. \quad (15.73)$$

Постоянная $\mathfrak{C}'_6(q_2)$ зависит от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 , q_2 , а также от нормы $\|[\Lambda]\|_{H^{q_2} \rightarrow L_2}$.

Точно так же из следствий 15.11, 15.12 и соотношений (14.76), (15.69)–(15.71) вытекают следующие результаты.

Теорема 15.26. Пусть операторы $\mathbb{D}'_{0,\cos,\varepsilon}(1)(\tau)$, $\mathbb{D}'_{0,\sin,\varepsilon}(1)(\tau)$ определены в (15.65), (15.66). Пусть выполнено условие 10.2.

1°. Пусть $3/2 \leq q_1 \leq 3$ и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{q_1-1}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка

$$\|\mathbb{D}'_{0,\cos,\varepsilon}(1)(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}'_7(q_1)(1 + |\tau|)^{q_1/3} \varepsilon^{2q_1/3}.$$

Постоянная $\mathfrak{C}'_7(q_1)$ зависит от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 , q_1 , а также от нормы $\|[\Lambda]\|_{H^{q_1-1} \rightarrow L_2}$.

2°. Пусть $1 \leq q_2 \leq 2$ и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{q_2}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка

$$\|\mathbb{D}'_{0,\sin,\varepsilon}(1)(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}'_8(q_2)(1 + |\tau|) \varepsilon^{q_2}.$$

Постоянная $\mathfrak{C}'_8(q_2)$ зависит от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 , q_2 , а также от нормы $\|[\Lambda]\|_{H^{q_2} \rightarrow L_2}$.

Теорема 15.27. Пусть операторы $\mathbb{D}'_{\cos,\varepsilon}(1)(\tau)$, $\mathbb{D}'_{\sin,\varepsilon}(1)(\tau)$ определены в (15.67), (15.68). Пусть выполнено условие 10.5 (или более сильное условие 10.6).

1°. Пусть $3/2 \leq q_1 \leq 3$ и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{q_1-1}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка

$$\|\mathbb{D}'_{\cos,\varepsilon}(1)(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}'_9(q_1)(1 + |\tau|)^{q_1/3} \varepsilon^{2q_1/3}.$$

Постоянная $\mathfrak{C}'_9(q_1)$ зависит от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}, r_0, n, c^\circ, q_1$, а также от нормы $\|[\Lambda]\|_{H^{q_1-1} \rightarrow L_2}$.

2°. Пусть $1 \leq q_2 \leq 2$ и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{q_2}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка

$$\|\mathbb{D}'_{\sin,\varepsilon}(1)(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}'_{10}(q_2)(1 + |\tau|)\varepsilon^{q_2}.$$

Постоянная $\mathfrak{C}'_{10}(q_2)$ зависит от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}, r_0, n, c^\circ, q_2$, а также от нормы $\|[\Lambda]\|_{H^{q_2} \rightarrow L_2}$.

Рассмотрим теперь вопрос о возможности устранения оператора Π_ε в аппроксимациях по энергетической норме. Положим

$$\Xi'_{\cos,\varepsilon}(\tau) := g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon \cos(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1} (I + \varepsilon \Lambda_Q^\varepsilon b(\mathbf{D})) - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) f_0 \cos(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1}, \quad (15.74)$$

$$\Xi'_{\sin,\varepsilon}(\tau) := g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1} - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) f_0 (\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1}. \quad (15.75)$$

По аналогии с доказательством теоремы 14.27, используя следствие 15.17 и соотношения (14.76), (15.69)–(15.71), нетрудно проверить следующее утверждение.

Теорема 15.28. Пусть операторы $\mathbb{D}'_{0,\cos,\varepsilon}(1)(\tau)$, $\mathbb{D}'_{0,\sin,\varepsilon}(1)(\tau)$, $\Xi'_{\cos,\varepsilon}(\tau)$ и $\Xi'_{\sin,\varepsilon}(\tau)$ определены в (15.65), (15.66), (15.74) и (15.75).

1°. Пусть $2 \leq q_1 \leq 3$ и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{q_1-1}(\mathbb{R}^d)$ в $H^1(\mathbb{R}^d)$. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедливы оценки

$$\|\mathbb{D}'_{0,\cos,\varepsilon}(1)(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}'_{11}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/2} \varepsilon^{(q_1-1)/2}, \quad (15.76)$$

$$\|\Xi'_{\cos,\varepsilon}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}'_{12}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/2} \varepsilon^{(q_1-1)/2}. \quad (15.77)$$

Постоянные $\mathfrak{C}'_{11}(q_1)$, $\mathfrak{C}'_{12}(q_1)$ зависят от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}, r_0, q_1$, а также от нормы $\|[\Lambda]\|_{H^{q_1-1} \rightarrow H^1}$.

2°. Пусть $1 \leq q_2 \leq 2$ и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{q_2}(\mathbb{R}^d)$ в $H^1(\mathbb{R}^d)$. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедливы оценки

$$\|\mathbb{D}'_{0,\sin,\varepsilon}(1)(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}'_{13}(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/2} \varepsilon^{q_2/2}, \quad (15.78)$$

$$\|\Xi'_{\sin,\varepsilon}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}'_{14}(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/2} \varepsilon^{q_2/2}. \quad (15.79)$$

Константы $\mathfrak{C}'_{13}(q_2)$, $\mathfrak{C}'_{14}(q_2)$ зависят от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}, r_0, q_2$ а также от нормы $\|[\Lambda]\|_{H^{q_2} \rightarrow H^1}$.

Аналогично, из следствия 15.18 и соотношений (14.76), (15.69)–(15.71) выводим следующий результат.

Теорема 15.29. Пусть операторы $\mathbb{D}'_{0,\cos,\varepsilon}(1)(\tau)$, $\mathbb{D}'_{0,\sin,\varepsilon}(1)(\tau)$, $\Xi'_{\cos,\varepsilon}(\tau)$ и $\Xi'_{\sin,\varepsilon}(\tau)$ определены в (15.65), (15.66), (15.74) и (15.75). Пусть выполнено условие 10.2 либо условие 10.5 (или более сильное условие 10.6).

1°. Пусть $2 \leq q_1 \leq 5/2$ и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{q_1-1}(\mathbb{R}^d)$ в $H^1(\mathbb{R}^d)$. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\mathbb{D}'_{0,\cos,\varepsilon}(1)(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}'_{15}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/3} \varepsilon^{2(q_1-1)/3}, \\ \|\Xi'_{\cos,\varepsilon}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}'_{16}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/3} \varepsilon^{2(q_1-1)/3}. \end{aligned}$$

При условии 10.2 постоянные $\mathfrak{C}'_{15}(q_1)$, $\mathfrak{C}'_{16}(q_1)$ зависят от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 , q_1 и нормы $\|[\Lambda]\|_{H^{q_1-1} \rightarrow L_2}$. При условии 10.5 они зависят от тех же параметров, а также от n , c° .

2°. Пусть $1 \leq q_2 \leq 3/2$ и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^2(\mathbb{R}^d)$ в $H^1(\mathbb{R}^d)$. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\mathbb{D}'_{0,\sin,\varepsilon}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}'_{17}(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/3} \varepsilon^{2q_2/3}, \\ \|\Xi'_{\sin,\varepsilon}(\tau)\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}'_{18}(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/3} \varepsilon^{2q_2/3}. \end{aligned} \quad (15.80)$$

При условии 10.2 константы $\mathfrak{C}'_{17}(q_2)$, $\mathfrak{C}'_{18}(q_2)$ зависят от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 , q_2 , а также от нормы $\|[\Lambda]\|_{H^{q_2} \rightarrow H^1}$. При условии 10.5 они зависят от тех же параметров, а также от n , c° .

Следующее замечание вытекает из замечания 15.19 и соотношений (14.76), (15.69)–(15.71).

Замечание 15.30. 1°. В условиях теоремы 15.28(2°) помимо оценки (15.78) при $\tau \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon \leq 1$ и $1 \leq q_2 \leq 2$ справедливо неравенство

$$\|\mathbb{D}'_{0,\sin,\varepsilon}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}''_{13}(q_2)(1 + |\tau|)\varepsilon^{q_2/2}.$$

2°. В условиях теоремы 15.29(2°) помимо оценки (15.80) при $\tau \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon \leq 1$ и $1 \leq q_2 \leq 3/2$ справедливо неравенство

$$\|\mathbb{D}'_{0,\sin,\varepsilon}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}''_{17}(q_2)(1 + |\tau|)\varepsilon^{2q_2/3}.$$

Напомним, что некоторые случаи, когда одно из условий на оператор $[\Lambda]$ (из теорем 15.25–15.29) заведомо выполняется, указаны в предложениях 14.31, 14.32, 14.34, 14.35 и следствии 14.33.

15.6. Специальные случаи. Рассмотрим два специальных случая.

Предложение 15.31. Пусть $g^0 = \bar{g}$, т. е. выполнены соотношения (6.20). Тогда при $0 \leq q_1 \leq 3$, $0 \leq q_2 \leq 2$, $1 \leq q_3 \leq 5/2$, $0 \leq q_4 \leq 3/2$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|\mathbb{D}_{\cos,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_{19}(q_1)(1 + |\tau|)^{q_1/3} \varepsilon^{2q_1/3}, \quad (15.81)$$

$$\|\mathbb{D}_{\sin,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_{20}(q_2)(1 + |\tau|)\varepsilon^{q_2}, \quad (15.82)$$

$$\|\mathbb{D}_{\cos,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{H^{q_3}(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_{15}(q_3)(1 + |\tau|)^{(q_3-1)/3} \varepsilon^{2(q_3-1)/3}, \quad (15.83)$$

$$\|\mathbb{D}_{\sin,\varepsilon}^{(0)}(\tau)\|_{H^{q_4}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_{17}(q_4)(1 + |\tau|)^{q_4/3} \varepsilon^{2q_4/3}, \quad (15.84)$$

$$\begin{aligned} &\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon \cos(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1} - g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f_0 \cos(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1}\|_{H^{q_3}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \mathfrak{C}_{21}(q_3)(1 + |\tau|)^{(q_3-1)/3} \varepsilon^{2(q_3-1)/3}, \end{aligned} \quad (15.85)$$

$$\begin{aligned} &\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1} - g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f_0 (\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1}\|_{H^{q_4}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \mathfrak{C}_{22}(q_4)(1 + |\tau|)^{q_4/3} \varepsilon^{2q_4/3}. \end{aligned} \quad (15.86)$$

Постоянные $\mathfrak{C}_{19}(q)$, $\mathfrak{C}_{20}(q)$, $\mathfrak{C}_{15}(q)$, $\mathfrak{C}_{17}(q)$, $\mathfrak{C}_{21}(q)$, $\mathfrak{C}_{22}(q)$ зависят только от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 и q .

Доказательство. Если выполнены соотношения (6.20), то $\Lambda(\mathbf{x}) = 0$ и $\Lambda_Q(\mathbf{x}) = 0$. Тогда выполнено условие 10.2, а операторы (15.7), (15.8) принимают вид $\mathbb{D}_{0,\cos,\varepsilon}^{(1)}(\tau) = \mathbb{D}_{\cos,\varepsilon}^{(0)}(\tau)$, $\mathbb{D}_{0,\sin,\varepsilon}^{(1)}(\tau) = \mathbb{D}_{\sin,\varepsilon}^{(0)}(\tau)$. Поэтому оценки (15.81), (15.82) прямо вытекают из следствий 15.5 и 15.11 с учетом замечания 15.4.

Оценки (15.83), (15.84) вытекают из следствия 15.18, а (15.85), (15.86) следуют из (15.83), (15.84) соответственно. \square

Предложение 15.32. Пусть $g^0 = g$, т. е. выполнены соотношения (6.21). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедливы оценки (15.72), (15.73), (15.76), (15.78), а оценки (15.77) и (15.79) принимают вид

$$\begin{aligned} & \|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon \cos(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) (f^\varepsilon)^{-1} (I + \varepsilon \Lambda_Q^\varepsilon b(\mathbf{D})) - g^0 b(\mathbf{D}) f_0 \cos(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1}\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq \mathfrak{C}'_{12}(q_1) (1 + |\tau|)^{(q_1-1)/2} \varepsilon^{(q_1-1)/2}, \quad 2 \leq q_1 \leq 3, \\ & \|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) (f^\varepsilon)^{-1} - g^0 b(\mathbf{D}) f_0 (\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1}\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq \mathfrak{C}'_{14}(q_2) (1 + |\tau|)^{q_2/2} \varepsilon^{q_2/2}, \quad 1 \leq q_2 \leq 2. \end{aligned}$$

Доказательство. Если выполнены соотношения (6.21), то $\tilde{g}(\mathbf{x}) = g^0 = g$. С учетом утверждения 2° предложения 14.35 применимы результаты “без сглаживателя”: теоремы 15.25, 15.28, которые дают оценки (15.72), (15.73), (15.76)–(15.79). \square

§ 16. УСРЕДНЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

16.1. Задача Коши с оператором $\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon$. Старший член аппроксимации решения. Пусть $\check{\mathbf{u}}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)$ — решение следующей задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \check{\mathbf{u}}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau^2} = -b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \check{\mathbf{u}}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau), \\ \check{\mathbf{u}}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \check{\mathbf{u}}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0)}{\partial \tau} = \psi(\mathbf{x}) + \mathbf{D}^* \rho(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (16.1)$$

где $\rho = \text{col}\{\rho_1, \dots, \rho_d\}$, $\phi, \psi, \rho_j \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Для решения этой задачи справедливо представление

$$\check{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) = \cos(\tau \hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) \phi + \hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \hat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) (\psi + \mathbf{D}^* \rho). \quad (16.2)$$

Пусть $\check{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}, \tau)$ — решение усредненной задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \check{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau^2} = -b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) \check{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}, \tau), \\ \check{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \check{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}, 0)}{\partial \tau} = \psi(\mathbf{x}) + \mathbf{D}^* \rho(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (16.3)$$

Тогда

$$\check{\mathbf{u}}_0(\cdot, \tau) = \cos(\tau (\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \phi + (\hat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) (\psi + \mathbf{D}^* \rho). \quad (16.4)$$

Теорема 16.1. Пусть $\check{\mathbf{u}}_\varepsilon$ — решение задачи (16.1) и $\check{\mathbf{u}}_0$ — решение усредненной задачи (16.3). 1°. Если $\phi \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\psi \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\rho \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^{dn})$, где $0 \leq q_1 \leq 2$, $0 \leq q_2 \leq 1$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\check{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \check{\mathbf{u}}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} & \leq \hat{\mathfrak{C}}_1(q_1) (1 + |\tau|)^{q_1/2} \varepsilon^{q_1/2} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ & + \hat{\mathfrak{C}}_2(q_2) (1 + |\tau|)^{(q_2+1)/2} \varepsilon^{(q_2+1)/2} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)} + \hat{\mathfrak{C}}'_2(q_1) (1 + |\tau|)^{q_1/2} \varepsilon^{q_1/2} \|\rho\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \quad (16.5)$$

2°. Если $\phi, \psi \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\rho \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^{dn})$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\check{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \check{\mathbf{u}}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Оценка (16.5) прямо вытекает из следствия 14.3 и представлений (16.2), (16.4). Утверждение 2° следует из утверждения 1° по теореме Банаха–Штейнгауза. \square

Утверждение 1° теоремы 16.1 можно усилить при дополнительных предположениях. Из следствия 14.4 вытекает следующий результат.

Теорема 16.2. Пусть $\check{\mathbf{u}}_\varepsilon$ — решение задачи (16.1) и $\check{\mathbf{u}}_0$ — решение усредненной задачи (16.3). Пусть выполнено условие 7.2 либо условие 7.4 (или более сильное условие 7.5). Если $\phi \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\psi \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\rho \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^{dn})$, где $0 \leq q_1 \leq 3/2$, $0 \leq q_2 \leq 1/2$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\check{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \check{\mathbf{u}}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathfrak{C}}_3(q_1)(1 + |\tau|)^{q_1/3} \varepsilon^{2q_1/3} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \widehat{\mathfrak{C}}_4(q_2)(1 + |\tau|)^{(q_2+1)/3} \varepsilon^{2(q_2+1)/3} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)} + \widehat{\mathfrak{C}}'_4(q_1)(1 + |\tau|)^{q_1/3} \varepsilon^{2q_1/3} \|\rho\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

16.2. Задача Коши с оператором $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ и начальными данными из специального класса. Результаты с корректорами. Результаты с корректорами (см. пункты 14.4, 14.5) применимы к следующей задаче Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau^2} = -b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau), \\ \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \phi_\varepsilon(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon}{\partial \tau}(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (16.6)$$

Здесь $\psi \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, а начальное данное ϕ_ε имеет специальный вид:

$$\phi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) + \varepsilon \Lambda^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) (\Pi_\varepsilon \phi)(\mathbf{x}), \quad \phi \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n). \quad (16.7)$$

Для решения этой задачи справедливо представление

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) = \cos(\tau \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) (I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon) \phi + \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) \psi. \quad (16.8)$$

Замечание 16.3. Согласно замечанию 16.3 из [Su8], оператор $I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon$ обратим, причем $(I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon)^{-1} = I - \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon$. Поэтому справедливо равенство $\phi = (I - \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon) \phi_\varepsilon$.

Пусть $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \tau)$ — решение усредненной задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau^2} = -b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \tau), \\ \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \tau}(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (16.9)$$

Тогда

$$\mathbf{u}_0(\cdot, \tau) = \cos(\tau (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \phi + (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \psi. \quad (16.10)$$

Далее, пусть $\mathbf{u}_{0,\cos,\sigma}(\mathbf{x}, \tau)$ и $\mathbf{u}_{0,\sin,\sigma}(\mathbf{x}, \tau)$, где $\sigma \in \{\phi, \psi\}$, — решения задач

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{0,\cos,\sigma}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau^2} = -b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_{0,\cos,\sigma}(\mathbf{x}, \tau), \\ \mathbf{u}_{0,\cos,\sigma}(\mathbf{x}, 0) = \sigma(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \mathbf{u}_{0,\cos,\sigma}}{\partial \tau}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (16.11)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{0,\sin,\sigma}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau^2} = -b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_{0,\sin,\sigma}(\mathbf{x}, \tau), \\ \mathbf{u}_{0,\sin,\sigma}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}_{0,\sin,\sigma}}{\partial \tau}(\mathbf{x}, 0) = \sigma(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (16.12)$$

а $\mathbf{w}_{1,\sigma}(\mathbf{x}, \tau)$ и $\mathbf{w}_{2,\sigma}(\mathbf{x}, \tau)$, где $\sigma \in \{\phi, \psi\}$, — решения задач

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathbf{w}_{1,\sigma}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau^2} = -b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) \mathbf{w}_{1,\sigma}(\mathbf{x}, \tau) + (\widehat{G}_0(\mathbf{D}) (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2} \mathbf{u}_{0,\sin,\sigma})(\mathbf{x}, \tau), \\ \mathbf{w}_{1,\sigma}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{w}_{1,\sigma}}{\partial \tau}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (16.13)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathbf{w}_{2,\sigma}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau^2} = -b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) \mathbf{w}_{2,\sigma}(\mathbf{x}, \tau) + (\widehat{G}_0(\mathbf{D}) \mathbf{u}_{0,\cos,\sigma})(\mathbf{x}, \tau), \\ \mathbf{w}_{2,\sigma}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{w}_{2,\sigma}}{\partial \tau}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (16.14)$$

Для решений задач (16.11)–(16.14) справедливы представления

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{0,\cos,\sigma}(\cdot, \tau) &= \cos(\tau(\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\sigma, \\ \mathbf{u}_{0,\sin,\sigma}(\cdot, \tau) &= (\hat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \sin(\tau(\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\sigma,\end{aligned}\quad (16.15)$$

$$\mathbf{w}_{1,\sigma}(\cdot, \tau) = \int_0^\tau (\hat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \sin((\tau - \tilde{\tau})(\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \hat{G}_0(\mathbf{D}) \sin(\tilde{\tau}(\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \sigma d\tilde{\tau}, \quad (16.16)$$

$$\mathbf{w}_{2,\sigma}(\cdot, \tau) = \int_0^\tau (\hat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \sin((\tau - \tilde{\tau})(\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \hat{G}_0(\mathbf{D}) \cos(\tilde{\tau}(\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \sigma d\tilde{\tau}. \quad (16.17)$$

Введем в рассмотрение приближения с корректорами

$$\mathbf{v}_\varepsilon^\circ := \mathbf{u}_0 + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(\Pi_\varepsilon \mathbf{u}_0), \quad (16.18)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_\varepsilon &:= \mathbf{v}_\varepsilon^\circ + \varepsilon \hat{G}_0(\mathbf{D})(\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2} \mathbf{u}_{0,\sin,\psi} \\ &\quad - \varepsilon (\partial_\tau \mathbf{w}_{1,\phi}) - \varepsilon \mathbf{w}_{1,\psi} - \varepsilon (\hat{\mathcal{A}}^0)^{1/2} \mathbf{w}_{2,\phi} + \varepsilon (\hat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} (\partial_\tau \mathbf{w}_{2,\psi}),\end{aligned}\quad (16.19)$$

а также “поток” \mathbf{p}_ε , отвечающий задаче (16.6), и приближение $\mathbf{p}_{0,\varepsilon}$ к нему:

$$\mathbf{p}_\varepsilon := g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon, \quad \mathbf{p}_{0,\varepsilon} := \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(\Pi_\varepsilon \mathbf{u}_0). \quad (16.20)$$

Сопоставляя представления вида (16.8), (16.10), (16.15)–(16.19) с (14.14)–(14.17), из следствий 14.9, 14.15 и замечания 14.17 выводим следующий результат.

Теорема 16.4. Пусть \mathbf{u}_ε — решение задачи (16.6) с начальным данным вида (16.7), а \mathbf{p}_ε определено в (16.20). Пусть $\mathbf{v}_\varepsilon^\circ$, \mathbf{v}_ε и $\mathbf{p}_{0,\varepsilon}$ определены в (16.18), (16.19) и (16.20).

1°. Если $\phi \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и $\psi \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $2 \leq q_1 \leq 4$ и $1 \leq q_2 \leq 3$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \hat{\mathfrak{C}}_5(q_1)(1 + |\tau|)^{q_1/2} \varepsilon^{q_1/2} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \hat{\mathfrak{C}}_6(q_2)(1 + |\tau|)^{(q_2+1)/2} \varepsilon^{(q_2+1)/2} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

2°. Если $\phi \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и $\psi \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $1 \leq q_1 \leq 3$ и $0 \leq q_2 \leq 2$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{v}_\varepsilon^\circ(\cdot, \tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} &\leq \hat{\mathfrak{C}}_{11}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/2} \varepsilon^{(q_1-1)/2} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \hat{\mathfrak{C}}_{13}(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/2} \varepsilon^{q_2/2} (1 + (1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon^{1/2})^{1-q_2/2} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}, \\ \|\mathbf{D}\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{D}\mathbf{v}_\varepsilon^\circ(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \hat{\mathfrak{C}}_{11}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/2} \varepsilon^{(q_1-1)/2} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \hat{\mathfrak{C}}_{13}(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/2} \varepsilon^{q_2/2} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}, \\ \|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{p}_{0,\varepsilon}(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \hat{\mathfrak{C}}_{12}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/2} \varepsilon^{(q_1-1)/2} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \hat{\mathfrak{C}}_{14}(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/2} \varepsilon^{q_2/2} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

3°. Если $\phi \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и $\psi \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{v}_\varepsilon^\circ(\cdot, \tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{p}_{0,\varepsilon}(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

При дополнительных условиях результаты теоремы 16.4 допускают усиление. Из следствий 14.10, 14.11, 14.16 и замечания 14.17 выводим следующий результат.

Теорема 16.5. Пусть выполнены условия теоремы 16.4. Пусть выполнено условие 7.2 либо условие 7.4 (или более сильное условие 7.5).

1°. При условии 7.2, если $\phi \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и $\psi \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $3/2 \leq q_1 \leq 3$ и $1/2 \leq q_2 \leq 2$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{v}_\varepsilon^\circ(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathfrak{C}}_7(q_1)(1 + |\tau|)^{q_1/3} \varepsilon^{2q_1/3} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \widehat{\mathfrak{C}}_8(q_2)(1 + |\tau|)^{(q_2+1)/3} \varepsilon^{2(q_2+1)/3} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

2°. При условии 7.4, если $\phi \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и $\psi \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $3/2 \leq q_1 \leq 3$ и $1/2 \leq q_2 \leq 2$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathfrak{C}}_9(q_1)(1 + |\tau|)^{q_1/3} \varepsilon^{2q_1/3} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \widehat{\mathfrak{C}}_{10}(q_2)(1 + |\tau|)^{(q_2+1)/3} \varepsilon^{2(q_2+1)/3} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

3°. Если $\phi \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и $\psi \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $1 \leq q_1 \leq 5/2$ и $0 \leq q_2 \leq 3/2$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{v}_\varepsilon^\circ(\cdot, \tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathfrak{C}}_{15}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/3} \varepsilon^{2(q_1-1)/3} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \widehat{\mathfrak{C}}_{17}^\circ(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/3} \varepsilon^{2q_2/3} (1 + (1 + |\tau|)^{1/3} \varepsilon^{2/3})^{1-2q_2/3} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}, \\ \|\mathbf{D}\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{D}\mathbf{v}_\varepsilon^\circ(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathfrak{C}}_{15}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/3} \varepsilon^{2(q_1-1)/3} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \widehat{\mathfrak{C}}_{17}(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/3} \varepsilon^{2q_2/3} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}, \\ \|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{p}_{0,\varepsilon}(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathfrak{C}}_{16}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/3} \varepsilon^{2(q_1-1)/3} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \widehat{\mathfrak{C}}_{18}(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/3} \varepsilon^{2q_2/3} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

16.3. Задача Коши с оператором $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ и начальными данными из специального класса. Случай, когда можно устранить сглаживатель. Рассмотрим теперь случай, когда выполнены условия на Λ , позволяющие устранить сглаживающий оператор Π_ε в аппроксимациях; см. п. 14.8. Пусть $\phi \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\psi \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $q_1 \geq 1$, $q_2 \geq 0$. Предполагая, что оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{q'}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$, где $q' = \min\{q_1 - 1, q_2\}$, рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau^2} = -b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau), \\ \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \tilde{\phi}_\varepsilon(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon}{\partial \tau}(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (16.21)$$

где

$$\tilde{\phi}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) + \varepsilon \Lambda^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \phi(\mathbf{x}). \quad (16.22)$$

Пусть \mathbf{u}_0 — решение прежней усредненной задачи (16.9), а $\mathbf{u}_{0,\sin,\sigma}$ и $\mathbf{w}_{1,\sigma}$, $\mathbf{w}_{2,\sigma}$ — решения задач (16.12), (16.13), (16.14). Положим

$$\tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon^\circ := \mathbf{u}_0 + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0, \quad (16.23)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon &:= \tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon^\circ + \varepsilon \widehat{G}_0(\mathbf{D}) (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2} \mathbf{u}_{0,\sin,\psi} \\ &\quad - \varepsilon (\partial_\tau \mathbf{w}_{1,\phi}) - \varepsilon \mathbf{w}_{1,\psi} - \varepsilon (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2} \mathbf{w}_{2,\phi} + \varepsilon (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} (\partial_\tau \mathbf{w}_{2,\psi}), \end{aligned} \quad (16.24)$$

а также

$$\tilde{\mathbf{p}}_\varepsilon := g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon, \quad \tilde{\mathbf{p}}_{0,\varepsilon} := \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0. \quad (16.25)$$

Из теорем 14.24, 14.27 и замечания 14.30(1°) выводим следующий результат.

Теорема 16.6. Пусть $\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon$ — решение задачи (16.21) с начальным данным вида (16.22), а $\tilde{\mathbf{p}}_\varepsilon$ определено в (16.25). Пусть $\tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon^\circ$, $\tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon$ и $\tilde{\mathbf{p}}_{0,\varepsilon}$ определены в (16.23)–(16.25).

1°. Если $\phi \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\psi \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $2 \leq q_1 \leq 4$, $1 \leq q_2 \leq 3$, и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{q'}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$, где $q' = \min\{q_1 - 1, q_2\}$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathcal{C}}'_5(q_1)(1 + |\tau|)^{q_1/2} \varepsilon^{q_1/2} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \widehat{\mathcal{C}}'_6(q_2)(1 + |\tau|)^{(q_2+1)/2} \varepsilon^{(q_2+1)/2} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

2°. Если $\phi \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\psi \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $2 \leq q_1 \leq 3$, $1 \leq q_2 \leq 2$, и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{q'}(\mathbb{R}^d)$ в $H^1(\mathbb{R}^d)$, где $q' = \min\{q_1 - 1, q_2\}$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon^\circ(\cdot, \tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathcal{C}}'_{11}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/2} \varepsilon^{(q_1-1)/2} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \widehat{\mathcal{C}}''_{13}(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/2} \varepsilon^{q_2/2} (1 + (1 + |\tau|)\varepsilon)^{1-q_2/2} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}, \\ \|\mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{D}\tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon^\circ(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathcal{C}}'_{11}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/2} \varepsilon^{(q_1-1)/2} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \widehat{\mathcal{C}}'_{13}(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/2} \varepsilon^{q_2/2} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}, \\ \|\tilde{\mathbf{p}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{\mathbf{p}}_{0,\varepsilon}(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathcal{C}}'_{12}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/2} \varepsilon^{(q_1-1)/2} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \widehat{\mathcal{C}}'_{14}(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/2} \varepsilon^{q_2/2} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

При дополнительных предположениях результаты теоремы 16.6 допускают усиление. Из теорем 14.25, 14.26, 14.29 и замечания 14.30(2°) вытекает следующий результат.

Теорема 16.7. Пусть выполнены условия теоремы 16.6. Пусть выполнено условие 7.2 либо условие 7.4 (или более сильное условие 7.5).

1°. При условии 7.2, если $\phi \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\psi \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $3/2 \leq q_1 \leq 3$, $1/2 \leq q_2 \leq 2$, и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{q'}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$, где $q' = \min\{q_1 - 1, q_2\}$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon^\circ(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathcal{C}}'_7(q_1)(1 + |\tau|)^{q_1/3} \varepsilon^{2q_1/3} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \widehat{\mathcal{C}}'_8(q_2)(1 + |\tau|)^{(q_2+1)/3} \varepsilon^{2(q_2+1)/3} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

2°. При условии 7.4, если $\phi \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\psi \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $3/2 \leq q_1 \leq 3$, $1/2 \leq q_2 \leq 2$, и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{q'}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$, где $q' = \min\{q_1 - 1, q_2\}$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathcal{C}}'_9(q_1)(1 + |\tau|)^{q_1/3} \varepsilon^{2q_1/3} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \widehat{\mathcal{C}}'_{10}(q_2)(1 + |\tau|)^{(q_2+1)/3} \varepsilon^{2(q_2+1)/3} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

3°. Если $\phi \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\psi \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $2 \leq q_1 \leq 5/2$, $1 \leq q_2 \leq 3/2$, и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{q'}(\mathbb{R}^d)$ в $H^1(\mathbb{R}^d)$, где $q' = \min\{q_1 - 1, q_2\}$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon^\circ(\cdot, \tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathcal{C}}'_{15}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/3} \varepsilon^{2(q_1-1)/3} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \widehat{\mathcal{C}}'_{17}(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/3} \varepsilon^{2q_2/3} (1 + (1 + |\tau|)\varepsilon)^{1-2q_2/3} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}, \\ \|\mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{D}\tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon^\circ(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathcal{C}}'_{15}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/3} \varepsilon^{2(q_1-1)/3} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \widehat{\mathcal{C}}'_{17}(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/3} \varepsilon^{2q_2/3} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}, \\ \|\tilde{\mathbf{p}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{\mathbf{p}}_{0,\varepsilon}(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathcal{C}}'_{16}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/3} \varepsilon^{2(q_1-1)/3} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \widehat{\mathcal{C}}'_{18}(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/3} \varepsilon^{2q_2/3} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

16.4. Задача Коши с оператором \mathcal{A}_ε . Приближение в старшем порядке. Рассмотрим задачу Коши в следующей постановке:

$$\begin{cases} Q^\varepsilon(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \check{\mathbf{u}}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau^2} = -b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \check{\mathbf{u}}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau), \\ \check{\mathbf{u}}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \check{\mathbf{u}}_\varepsilon}{\partial \tau}(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}) + (Q^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1}(\check{\psi}(\mathbf{x}) + \mathbf{D}^* \rho(\mathbf{x})). \end{cases} \quad (16.26)$$

Здесь $\rho = \text{col}\{\rho_1, \dots, \rho_d\}$, $\phi, \psi, \check{\psi}, \rho_j \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ — заданные функции, а $Q(\mathbf{x})$ — Γ -периодическая эрмитова $(n \times n)$ -матричнозначная функция такая, что $Q(\mathbf{x}) > 0$ и $Q, Q^{-1} \in L_\infty$. Факторизуем матрицу $Q(\mathbf{x})^{-1}$: $Q(\mathbf{x})^{-1} = f(\mathbf{x})f^*(\mathbf{x})$. Без ограничения общности считаем $(n \times n)$ -матрицу-функцию $f(\mathbf{x})$ периодической и такой, что $f, f^{-1} \in L_\infty$. Пусть \mathcal{A}_ε — оператор (14.2).

Делая замену $\mathbf{z}_\varepsilon(\cdot, \tau) := (f^\varepsilon)^{-1} \check{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau)$, можно переписать задачу (16.26) следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathbf{z}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau^2} = -(\mathcal{A}_\varepsilon \mathbf{z}_\varepsilon)(\mathbf{x}, \tau), \\ \mathbf{z}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1} \phi(\mathbf{x}), \\ \frac{\partial \mathbf{z}_\varepsilon}{\partial \tau}(\mathbf{x}, 0) = (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1} \psi(\mathbf{x}) + (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^* (\check{\psi}(\mathbf{x}) + \mathbf{D}^* \rho(\mathbf{x})). \end{cases}$$

Выписывая представление решения \mathbf{z}_ε этой задачи, приходим к следующему представлению для функции $\check{\mathbf{u}}_\varepsilon = f^\varepsilon \mathbf{z}_\varepsilon$:

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) = & f^\varepsilon \cos(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) (f^\varepsilon)^{-1} \phi + f^\varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) (f^\varepsilon)^{-1} \psi \\ & + f^\varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) (f^\varepsilon)^* (\check{\psi} + \mathbf{D}^* \rho). \end{aligned} \quad (16.27)$$

Пусть $\check{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}, \tau)$ — решение усредненной задачи

$$\begin{cases} \bar{Q} \frac{\partial^2 \check{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau^2} = -b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) \check{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}, \tau), \\ \check{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \check{\mathbf{u}}_0}{\partial \tau}(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}) + (\bar{Q})^{-1} (\check{\psi}(\mathbf{x}) + \mathbf{D}^* \rho(\mathbf{x})), \end{cases} \quad (16.28)$$

где \bar{Q} — среднее значение матрицы $Q(\mathbf{x})$ по Ω . Полагая $f_0 := (\bar{Q})^{-1/2}$ и делая замену $\mathbf{z}_0(\cdot, \tau) := f_0^{-1} \check{\mathbf{u}}_0(\cdot, \tau)$, приходим к представлению

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{u}}_0(\cdot, \tau) = & f_0 \cos(\tau \mathcal{A}^0)^{1/2} f_0^{-1} \phi + f_0 \mathcal{A}^0^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}^0)^{1/2} f_0^{-1} \psi \\ & + f_0 \mathcal{A}^0^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}^0)^{1/2} f_0 (\check{\psi} + \mathbf{D}^* \rho). \end{aligned} \quad (16.29)$$

Здесь \mathcal{A}^0 — оператор (9.3).

Применяя следствие 15.3, замечание 15.4 и используя представления (16.27), (16.29), получаем следующий результат.

Теорема 16.8. Пусть $\check{\mathbf{u}}_\varepsilon$ — решение задачи (16.26) и $\check{\mathbf{u}}_0$ — решение усредненной задачи (16.28).

1°. Если $\phi \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\psi, \check{\psi} \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\rho \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^{dn})$, где $0 \leq q_1 \leq 2$, $0 \leq q_2 \leq 1$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\check{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \check{\mathbf{u}}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq & \mathfrak{C}_1(q_1)(1 + |\tau|)^{q_1/2} \varepsilon^{q_1/2} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ & + \mathfrak{C}_2(q_2)(1 + |\tau|)^{(q_2+1)/2} \varepsilon^{(q_2+1)/2} \|\check{\psi}\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)} + \check{\mathfrak{C}}_2(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)} \\ & + \mathfrak{C}'_2(q_1)(1 + |\tau|)^{q_1/2} \varepsilon^{q_1/2} \|\rho\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

2°. Если $\phi, \psi, \check{\psi} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\rho \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^{dn})$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\check{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \check{\mathbf{u}}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

В случае, когда $\psi = \mathbf{0}$, можно усилить утверждение пункта 1° теоремы 16.8 при дополнительных предположениях. Следствие 15.5 приводит к следующему результату.

Теорема 16.9. Пусть $\check{\mathbf{u}}_\varepsilon$ — решение задачи (16.26) и $\check{\mathbf{u}}_0$ — решение усредненной задачи (16.28), причем $\psi = \mathbf{0}$. Пусть выполнено условие 10.2 либо условие 10.5 (или более сильное условие 10.6). Если $\phi \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\psi \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\rho \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $0 \leq q_1 \leq 3/2$, $0 \leq q_2 \leq 1/2$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\check{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \check{\mathbf{u}}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}_3(q_1)(1 + |\tau|)^{q_1/3} \varepsilon^{2q_1/3} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \mathfrak{C}_4(q_2)(1 + |\tau|)^{(q_2+1)/3} \varepsilon^{2(q_2+1)/3} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)} + \mathfrak{C}'_4(q_1)(1 + |\tau|)^{q_1/3} \varepsilon^{2q_1/3} \|\rho\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

16.5. Задача Коши с оператором \mathcal{A}_ε и начальными данными из специального класса. Результаты с корректорами. Результаты с корректорами (см. пункты 15.2, 15.3) применимы к следующей задаче Коши:

$$\begin{cases} Q^\varepsilon(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau^2} = -b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau), \\ \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \phi_\varepsilon(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon}{\partial \tau}(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (16.30)$$

Здесь $\psi \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и ϕ_ε — начальное данное из специального класса:

$$\phi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) + \varepsilon \Lambda_Q^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) (\Pi_\varepsilon \phi)(\mathbf{x}), \quad \phi \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n). \quad (16.31)$$

Для решения этой задачи справедливо представление

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) = f^\varepsilon \cos(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) (f^\varepsilon)^{-1} (I + \varepsilon \Lambda_Q^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon) \phi + f^\varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) (f^\varepsilon)^{-1} \psi. \quad (16.32)$$

Пусть $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \tau)$ — решение усредненной задачи

$$\begin{cases} \bar{Q} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau^2} = -b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \tau), \\ \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \tau}(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (16.33)$$

Справедливо представление

$$\mathbf{u}_0(\cdot, \tau) = f_0 \cos(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1} \phi + f_0 (\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1} \psi. \quad (16.34)$$

Далее, пусть $\mathbf{u}_{0,\cos,\sigma}(\mathbf{x}, \tau)$, $\mathbf{u}_{0,\sin,\sigma}(\mathbf{x}, \tau)$, где $\sigma \in \{\phi, \psi\}$, — решения задач

$$\begin{cases} \bar{Q} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{0,\cos,\sigma}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau^2} = -b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_{0,\cos,\sigma}(\mathbf{x}, \tau), \\ \mathbf{u}_{0,\cos,\sigma}(\mathbf{x}, 0) = \sigma(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \mathbf{u}_{0,\cos,\sigma}}{\partial \tau}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (16.35)$$

$$\begin{cases} \bar{Q} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{0,\sin,\sigma}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau^2} = -b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_{0,\sin,\sigma}(\mathbf{x}, \tau), \\ \mathbf{u}_{0,\sin,\sigma}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}_{0,\sin,\sigma}}{\partial \tau}(\mathbf{x}, 0) = \sigma(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (16.36)$$

а $\mathbf{w}_{1,\sigma}(\mathbf{x}, \tau)$ и $\mathbf{w}_{2,\sigma}(\mathbf{x}, \tau)$, где $\sigma \in \{\phi, \psi\}$, — решения задач

$$\begin{cases} \bar{Q} \frac{\partial^2 \mathbf{w}_{1,\sigma}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau^2} = -b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) \mathbf{w}_{1,\sigma}(\mathbf{x}, \tau) + (\hat{G}_{0,Q}(\mathbf{D}) f_0 (\mathcal{A}^0)^{1/2} f_0^{-1} \mathbf{u}_{0,\sin,\sigma})(\mathbf{x}, \tau), \\ \mathbf{w}_{1,\sigma}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{w}_{1,\sigma}}{\partial \tau}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (16.37)$$

$$\begin{cases} \bar{Q} \frac{\partial^2 \mathbf{w}_{2,\sigma}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau^2} = -b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) \mathbf{w}_{2,\sigma}(\mathbf{x}, \tau) + (\hat{G}_{0,Q}(\mathbf{D}) \mathbf{u}_{0,\cos,\sigma})(\mathbf{x}, \tau), \\ \mathbf{w}_{2,\sigma}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{w}_{2,\sigma}}{\partial \tau}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (16.38)$$

Для решений задач (16.35)–(16.38) справедливы представления

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{0,\cos,\sigma}(\cdot, \tau) &= f_0 \cos(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1} \sigma, \\ \mathbf{u}_{0,\sin,\sigma}(\cdot, \tau) &= f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1} \sigma,\end{aligned}\quad (16.39)$$

$$\mathbf{w}_{1,\sigma}(\cdot, \tau) = \int_0^\tau f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin((\tau - \tilde{\tau})(\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0 \widehat{G}_{0,Q}(\mathbf{D}) f_0 \sin(\tilde{\tau}(\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1} \sigma d\tilde{\tau}, \quad (16.40)$$

$$\mathbf{w}_{2,\sigma}(\cdot, \tau) = \int_0^\tau f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin((\tau - \tilde{\tau})(\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0 \widehat{G}_{0,Q}(\mathbf{D}) f_0 \cos(\tilde{\tau}(\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1} \sigma d\tilde{\tau}. \quad (16.41)$$

Введём в рассмотрение приближения с корректорами

$$\mathbf{v}_\varepsilon^\circ := \mathbf{u}_0 + \varepsilon \Lambda_Q^\varepsilon b(\mathbf{D})(\Pi_\varepsilon \mathbf{u}_0), \quad (16.42)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_\varepsilon &:= \mathbf{v}_\varepsilon^\circ + \varepsilon (\overline{Q})^{-1} \widehat{G}_{0,Q}(\mathbf{D}) f_0(\mathcal{A}^0)^{1/2} f_0^{-1} \mathbf{u}_{0,\sin,\psi} \\ &\quad - \varepsilon (\partial_\tau \mathbf{w}_{1,\phi}) - \varepsilon \mathbf{w}_{1,\psi} - \varepsilon f_0(\mathcal{A}^0)^{1/2} f_0^{-1} \mathbf{w}_{2,\phi} + \varepsilon f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2} f_0^{-1} (\partial_\tau \mathbf{w}_{2,\psi}),\end{aligned}\quad (16.43)$$

а также “поток” \mathbf{p}_ε , отвечающий задаче (16.30), и приближение $\mathbf{p}_{0,\varepsilon}$ к нему:

$$\mathbf{p}_\varepsilon := g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon, \quad \mathbf{p}_{0,\varepsilon} := \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(\Pi_\varepsilon \mathbf{u}_0). \quad (16.44)$$

Сопоставляя представления вида (16.32), (16.34), (16.39)–(16.43) с (15.7)–(15.10), из следствий 15.10, 15.17 и замечания 15.19(1°) выводим следующий результат.

Теорема 16.10. Пусть \mathbf{u}_ε — решение задачи (16.30) с начальным данным вида (16.31), а \mathbf{p}_ε определено в (16.44). Пусть $\mathbf{v}_\varepsilon^\circ$, \mathbf{v}_ε и $\mathbf{p}_{0,\varepsilon}$ определены в (16.42)–(16.44).

1°. Если $\phi \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и $\psi \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $2 \leq q_1 \leq 4$ и $1 \leq q_2 \leq 3$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}_5(q_1)(1 + |\tau|)^{q_1/2} \varepsilon^{q_1/2} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \mathfrak{C}_6(q_2)(1 + |\tau|)^{(q_2+1)/2} \varepsilon^{(q_2+1)/2} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

2°. Если $\phi \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\psi \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $1 \leq q_1 \leq 3$ и $0 \leq q_2 \leq 2$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{v}_\varepsilon^\circ(\cdot, \tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}_{11}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/2} \varepsilon^{(q_1-1)/2} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \check{\mathfrak{C}}_{13}(q_2)(1 + |\tau|)^{\varepsilon^{q_2/2}} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}, \\ \|\mathbf{D}\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{D}\mathbf{v}_\varepsilon^\circ(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}_{11}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/2} \varepsilon^{(q_1-1)/2} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \mathfrak{C}_{13}(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/2} \varepsilon^{q_2/2} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}, \\ \|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{p}_{0,\varepsilon}(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}_{12}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/2} \varepsilon^{(q_1-1)/2} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \mathfrak{C}_{14}(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/2} \varepsilon^{q_2/2} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

3°. Если $\phi \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и $\psi \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{v}_\varepsilon^\circ(\cdot, \tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{p}_{0,\varepsilon}(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

При дополнительных предположениях результаты теоремы 16.10 допускают усиление. Из следствий 15.11, 15.12, 15.18 и замечания 15.19(2°) выводим следующий результат.

Теорема 16.11. Пусть выполнены условия теоремы 16.10. Пусть выполнено условие 10.2 либо условие 10.5 (или более сильное условие 10.6).

1°. При условии 10.2, если $\phi \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и $\psi \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $3/2 \leq q_1 \leq 3$ и $1 \leq q_2 \leq 2$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{v}_\varepsilon^\circ(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}_7(q_1)(1 + |\tau|)^{q_1/3} \varepsilon^{2q_1/3} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \mathfrak{C}_8(q_2)(1 + |\tau|)^{\varepsilon^{q_2}} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

2°. При условии 10.5, если $\phi \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и $\psi \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $3/2 \leq q_1 \leq 3$ и $1 \leq q_2 \leq 2$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}_9(q_1)(1 + |\tau|)^{q_1/3} \varepsilon^{2q_1/3} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \mathfrak{C}_{10}(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2} \varepsilon^{q_2} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

3°. Если $\phi \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и $\psi \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $1 \leq q_1 \leq 5/2$ и $0 \leq q_2 \leq 3/2$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{v}_\varepsilon^\circ(\cdot, \tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}_{15}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/3} \varepsilon^{2(q_1-1)/3} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \check{\mathfrak{C}}_{17}(q_2)(1 + |\tau|)^{2q_2/3} \varepsilon^{2q_2/3} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}, \\ \|\mathbf{D}\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{D}\mathbf{v}_\varepsilon^\circ(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}_{15}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/3} \varepsilon^{2(q_1-1)/3} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \mathfrak{C}_{17}(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/3} \varepsilon^{2q_2/3} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}, \\ \|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{p}_{0,\varepsilon}(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}_{16}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/3} \varepsilon^{2(q_1-1)/3} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \mathfrak{C}_{18}(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/3} \varepsilon^{2q_2/3} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

16.6. Задача Коши с оператором \mathcal{A}_ε и начальными данными из специального класса. Случай, когда можно устранить сглаживатель. Рассмотрим теперь случай, когда выполнены условия на Λ , позволяющие устранить сглаживающий оператор Π_ε в аппроксимациях; см. п. 15.5. Пусть $\phi \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\psi \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $q_1 \geq 1$, $q_2 \geq 0$. Предполагая, что оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{q'}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$, где $q' = \min\{q_1 - 1, q_2\}$, рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} Q^\varepsilon(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau^2} = -b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau), \\ \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \tilde{\phi}_\varepsilon(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon}{\partial \tau}(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (16.45)$$

где

$$\tilde{\phi}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) + \varepsilon \Lambda_Q^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \phi(\mathbf{x}). \quad (16.46)$$

Пусть \mathbf{u}_0 — решение прежней усредненной задачи (16.33), а $\mathbf{u}_{0,\sin,\sigma}$ и $\mathbf{w}_{1,\sigma}$, $\mathbf{w}_{2,\sigma}$ — решения задач (16.36), (16.37), (16.38). Положим

$$\tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon^\circ := \mathbf{u}_0 + \varepsilon \Lambda_Q^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0, \quad (16.47)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon &:= \tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon^\circ + \varepsilon (\overline{Q})^{-1} \widehat{\tilde{G}}_0(\mathbf{D}) f_0(\mathcal{A}^0)^{1/2} f_0^{-1} \mathbf{u}_{0,\sin,\psi} \\ &\quad - \varepsilon (\partial_\tau \mathbf{w}_{1,\phi}) - \varepsilon \mathbf{w}_{1,\psi} - \varepsilon f_0(\mathcal{A}^0)^{1/2} f_0^{-1} \mathbf{w}_{2,\phi} + \varepsilon f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2} f_0^{-1} (\partial_\tau \mathbf{w}_{2,\psi}), \end{aligned} \quad (16.48)$$

а также

$$\tilde{\mathbf{p}}_\varepsilon := g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon, \quad \tilde{\mathbf{p}}_{0,\varepsilon} := \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0. \quad (16.49)$$

Из теорем 15.25, 15.28 и замечания 15.30(1°) выводим следующий результат.

Теорема 16.12. Пусть $\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon$ — решение задачи (16.45) с начальным данным вида (16.46), а $\tilde{\mathbf{p}}_\varepsilon$ определено в (16.49). Пусть $\tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon^\circ$, $\tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon$ и $\tilde{\mathbf{p}}_{0,\varepsilon}$ определены в (16.47)–(16.49).

1°. Если $\phi \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\psi \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $2 \leq q_1 \leq 4$, $1 \leq q_2 \leq 3$, и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{q'}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$, где $q' = \min\{q_1 - 1, q_2\}$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}'_5(q_1)(1 + |\tau|)^{q_1/2} \varepsilon^{q_1/2} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \mathfrak{C}'_6(q_2)(1 + |\tau|)^{(q_2+1)/2} \varepsilon^{(q_2+1)/2} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

2°. Если $\phi \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\psi \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $2 \leq q_1 \leq 3$, $1 \leq q_2 \leq 2$, и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{q'}(\mathbb{R}^d)$ в $H^1(\mathbb{R}^d)$, где $q' = \min\{q_1 - 1, q_2\}$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon^\circ(\cdot, \tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}'_{11}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/2} \varepsilon^{(q_1-1)/2} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \mathfrak{C}''_{13}(q_2)(1 + |\tau|) \varepsilon^{q_2/2} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}, \\ \|\mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{D}\tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon^\circ(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}'_{11}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/2} \varepsilon^{(q_1-1)/2} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \mathfrak{C}'_{13}(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/2} \varepsilon^{q_2/2} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}, \\ \|\tilde{\mathbf{p}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{\mathbf{p}}_{0,\varepsilon}(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}'_{12}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/2} \varepsilon^{(q_1-1)/2} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \mathfrak{C}'_{14}(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/2} \varepsilon^{q_2/2} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

При дополнительных предположениях результаты теоремы 16.12 допускают усиление. Из теорем 15.26, 15.27, 15.29 и замечания 15.30(2°) вытекает следующий результат.

Теорема 16.13. Пусть выполнены условия теоремы 16.12. Пусть выполнено условие 10.2 либо условие 10.5 (или более сильное условие 10.6).

1°. При условии 10.2, если $\phi \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\psi \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $3/2 \leq q_1 \leq 3$, $1 \leq q_2 \leq 2$, и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{q'}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$, где $q' = \min\{q_1 - 1, q_2\}$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon^\circ(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}'_7(q_1)(1 + |\tau|)^{q_1/3} \varepsilon^{2q_1/3} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \mathfrak{C}'_8(q_2)(1 + |\tau|) \varepsilon^{q_2} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

2°. При условии 10.5, если $\phi \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\psi \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $3/2 \leq q_1 \leq 3$, $1 \leq q_2 \leq 2$, и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{q'}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$, где $q' = \min\{q_1 - 1, q_2\}$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}'_9(q_1)(1 + |\tau|)^{q_1/3} \varepsilon^{2q_1/3} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \mathfrak{C}'_{10}(q_2)(1 + |\tau|) \varepsilon^{q_2} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

3°. Если $\phi \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\psi \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $2 \leq q_1 \leq 5/2$, $1 \leq q_2 \leq 3/2$, и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{q'}(\mathbb{R}^d)$ в $H^1(\mathbb{R}^d)$, где $q' = \min\{q_1 - 1, q_2\}$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon^\circ(\cdot, \tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}'_{15}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/3} \varepsilon^{2(q_1-1)/3} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \mathfrak{C}''_{17}(q_2)(1 + |\tau|) \varepsilon^{2q_2/3} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}, \\ \|\mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{D}\tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon^\circ(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}'_{15}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/3} \varepsilon^{2(q_1-1)/3} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \mathfrak{C}'_{17}(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/3} \varepsilon^{2q_2/3} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}, \\ \|\tilde{\mathbf{p}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{\mathbf{p}}_{0,\varepsilon}(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}'_{16}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/3} \varepsilon^{2(q_1-1)/3} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \mathfrak{C}'_{18}(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/3} \varepsilon^{2q_2/3} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

§ 17. ПРИМЕНЕНИЕ ОБЩИХ РЕЗУЛЬТАТОВ: УРАВНЕНИЕ АКУСТИКИ

17.1. **Модельный оператор.** В $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим оператор

$$\hat{\mathcal{A}} = \mathbf{D}^* g(\mathbf{x}) \mathbf{D} = -\operatorname{div} g(\mathbf{x}) \nabla. \quad (17.1)$$

Здесь $g(\mathbf{x})$ — Γ -периодическая эрмитова $(d \times d)$ -матрица-функция такая, что $g(\mathbf{x}) > 0$ и $g, g^{-1} \in L_\infty$. Оператор (17.1) является частным случаем оператора (6.1). В этом случае $n = 1$, $m = d$ и $b(\mathbf{D}) = \mathbf{D}$. Очевидно, условие (5.7) выполнено при $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$. Согласно

(6.15) эффективный оператор для оператора (17.1) имеет вид $\hat{\mathcal{A}}^0 = \mathbf{D}^* g^0 \mathbf{D} = -\operatorname{div} g^0 \nabla$. В соответствии с (6.11), (6.12), эффективная матрица g^0 определяется следующим образом. Пусть $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$ — стандартный ортонормированный базис в \mathbb{R}^d . Пусть $\Phi_j \in \tilde{H}^1(\Omega)$ — слабое Γ -периодическое решение задачи

$$\operatorname{div} g(\mathbf{x}) (\nabla \Phi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j) = 0, \quad \int_{\Omega} \Phi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

Тогда $\Lambda(\mathbf{x})$ — это матрица-строка $\Lambda(\mathbf{x}) = i(\Phi_1(\mathbf{x}), \dots, \Phi_d(\mathbf{x}))$, а $\tilde{g}(\mathbf{x})$ — это $(d \times d)$ -матрица со столбцами $\tilde{\mathbf{g}}_j(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) (\nabla \Phi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j)$, $j = 1, \dots, d$. Эффективная матрица определяется соотношением $g^0 = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \tilde{g}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$. В случае $d = 1$ выполнено $m = n = 1$, а потому $g^0 = \underline{g}$. Спектральный росток $\hat{S}(\boldsymbol{\theta})$ действует в одномерном пространстве $\hat{\mathfrak{N}} = \mathbb{C}$ как умножение на число $\hat{\gamma}(\boldsymbol{\theta}) = \langle g^0 \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta} \rangle$.

Если $g(\mathbf{x})$ — симметричная матрица с вещественными элементами, то в силу предложения 6.4(1°) выполнено $\hat{N}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Если же $g(\mathbf{x})$ — эрмитова матрица с комплексными элементами, то в общей ситуации оператор $\hat{N}(\boldsymbol{\theta})$ отличен от нуля. Поскольку $n = 1$, то оператор $\hat{N}(\boldsymbol{\theta}) = \hat{N}_0(\boldsymbol{\theta})$ есть оператор умножения на $\hat{\mu}(\boldsymbol{\theta})$, где $\hat{\mu}(\boldsymbol{\theta})$ — коэффициент при t^3 в разложении первого собственного значения $\hat{\lambda}_1(t, \boldsymbol{\theta}) = \hat{\gamma}(\boldsymbol{\theta})t^2 + \hat{\mu}(\boldsymbol{\theta})t^3 + \hat{\nu}(\boldsymbol{\theta})t^4 + \dots$ оператора $\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = \hat{A}(t, \boldsymbol{\theta})$. Вычисление (см. [BSu3, п. 10.3]) показывает, что

$$\begin{aligned} \hat{N}(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\mu}(\boldsymbol{\theta}) &= -i \sum_{j,l,k=1}^d (a_{jlk} - a_{jlk}^*) \theta_j \theta_l \theta_k, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}, \\ a_{jlk} &= |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \Phi_j(\mathbf{x})^* \langle g(\mathbf{x}) (\nabla \Phi_l(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_l), \mathbf{e}_k \rangle d\mathbf{x}, \quad j, l, k = 1, \dots, d. \end{aligned} \quad (17.2)$$

В [BSu3, п. 10.4] приведен пример оператора вида (17.1) с комплексной эрмитовой матрицей $g(\mathbf{x})$, в котором $\hat{N}(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\mu}(\boldsymbol{\theta}) \neq 0$.

Опишем теперь оператор $\hat{\mathcal{N}}^{(1)}(\boldsymbol{\theta})$ — оператор умножения на $\hat{\nu}(\boldsymbol{\theta})$. Пусть $\Psi_{jl}(\mathbf{x})$ — Γ -периодическое решение задачи

$$-\operatorname{div} g(\mathbf{x}) (\nabla \Psi_{jl}(\mathbf{x}) - \Phi_j(\mathbf{x}) \mathbf{e}_l) = g_{lj}^0 - \tilde{g}_{lj}(\mathbf{x}), \quad \int_{\Omega} \Psi_{jl}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

Как проверено в [VSu2, п. 14.5],

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{N}}^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\nu}(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{p,q,l,k=1}^d (\alpha_{pqlk} - (\overline{\Phi_p^* \Phi_q}) g_{lk}^0) \theta_p \theta_q \theta_l \theta_k, \\ \alpha_{pqlk} &= |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} (\tilde{g}_{lp}(\mathbf{x}) \Psi_{qk}(\mathbf{x}) + \tilde{g}_{kq}(\mathbf{x}) \Psi_{pl}(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \\ &+ |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \langle g(\mathbf{x}) (\nabla \Psi_{qk}(\mathbf{x}) - \Phi_q(\mathbf{x}) \mathbf{e}_k), \nabla \Psi_{pl}(\mathbf{x}) - \Phi_p(\mathbf{x}) \mathbf{e}_l \rangle d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Замечание 17.1. В [D2, лемма 5.8] показано, что при $d = 1$ и $g(x) \neq \operatorname{const}$ всегда выполнено $\hat{\nu}(1) = \hat{\nu}(-1) \neq 0$. Поэтому авторы полагают, что и в многомерном случае, как правило, $\hat{\nu}(\boldsymbol{\theta}) \neq 0$.

Вычисление символов (12.10), (12.11) ПДО $\hat{G}_0(\mathbf{D})$ и $\hat{\hat{G}}_0(\mathbf{D})$ дает

$$\hat{G}_0(\boldsymbol{\xi}) = |\boldsymbol{\xi}|^2 \frac{\hat{\mu}(\boldsymbol{\theta})}{2\hat{\gamma}(\boldsymbol{\theta})^{1/2}}, \quad \hat{\hat{G}}_0(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{\hat{\mu}(\boldsymbol{\theta})}{2\hat{\gamma}(\boldsymbol{\theta})^{3/2}}.$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \check{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau^2} = -\mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{D} \check{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau), \\ \check{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \check{u}_\varepsilon}{\partial \tau}(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}) + \mathbf{D}^* \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (17.3)$$

где $\phi, \psi \in L_2(\mathbb{R}^d)$, $\boldsymbol{\rho} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^d)$. Пусть \check{u}_0 — решение усредненной задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \check{u}_0(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau^2} = -\mathbf{D}^* g^0(\mathbf{x}) \mathbf{D} \check{u}_0(\mathbf{x}, \tau), \\ \check{u}_0(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \check{u}_0}{\partial \tau}(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}) + \mathbf{D}^* \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (17.4)$$

Применяя теорему 16.1 в общем случае и теорему 16.2 в “вещественном” случае, получаем следующий результат.

Предложение 17.2. Пусть \check{u}_ε — решение задачи (17.3) и \check{u}_0 — решение усредненной задачи (17.4).

1°. Если $\phi \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d)$, $\psi \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d)$ и $\boldsymbol{\rho} \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^d)$, где $0 \leq q_1 \leq 2$, $0 \leq q_2 \leq 1$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\check{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \check{u}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathfrak{C}}_1(q_1)(1 + |\tau|)^{q_1/2} \varepsilon^{q_1/2} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \widehat{\mathfrak{C}}_2(q_2)(1 + |\tau|)^{(q_2+1)/2} \varepsilon^{(q_2+1)/2} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)} + \widehat{\mathfrak{C}}'_2(q_1)(1 + |\tau|)^{q_1/2} \varepsilon^{q_1/2} \|\boldsymbol{\rho}\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Если $\phi, \psi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и $\boldsymbol{\rho} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^d)$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\check{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \check{u}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

2°. Пусть $g(\mathbf{x})$ — симметричная матрица с вещественными элементами. Если $\phi \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d)$, $\psi \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d)$ и $\boldsymbol{\rho} \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^d)$, где $0 \leq q_1 \leq 3/2$, $0 \leq q_2 \leq 1/2$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\check{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \check{u}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathfrak{C}}_3(q_1)(1 + |\tau|)^{q_1/3} \varepsilon^{2q_1/3} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \widehat{\mathfrak{C}}_4(q_2)(1 + |\tau|)^{(q_2+1)/3} \varepsilon^{2(q_2+1)/3} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)} + \widehat{\mathfrak{C}}'_4(q_1)(1 + |\tau|)^{q_1/3} \varepsilon^{2q_1/3} \|\boldsymbol{\rho}\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь задачу Коши с начальным данным из специального класса:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau^2} = -\mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{D} u_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau), \\ u_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \phi_\varepsilon(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \tau}(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (17.5)$$

где

$$\phi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) + \varepsilon \sum_{j=1}^d \Phi_j^\varepsilon(\mathbf{x}) \partial_j (\Pi_\varepsilon \phi)(\mathbf{x}), \quad \phi \in L_2(\mathbb{R}^d), \quad \psi \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

Пусть u_0 — решение усредненной задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_0(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau^2} = -\mathbf{D}^* g^0 \mathbf{D} u_0(\mathbf{x}, \tau), \\ u_0(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial u_0}{\partial \tau}(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (17.6)$$

Далее, пусть $u_{0, \cos, \sigma}$ и $u_{0, \sin, \sigma}$, где $\sigma \in \{\phi, \psi\}$, — решения задач вида (16.11), (16.12) с оператором $\widehat{\mathcal{A}}^0 = \mathbf{D}^* g^0 \mathbf{D}$.

Нетрудно убедиться, что приближения (16.18), (16.19) к решению задачи (17.5) сейчас принимают вид

$$v_\varepsilon^\circ = u_0 + \varepsilon \sum_{j=1}^d \Phi_j^\varepsilon \partial_j (\Pi_\varepsilon u_0), \quad (17.7)$$

$$v_\varepsilon = v_\varepsilon^\circ - \frac{\varepsilon \tau}{2} \widehat{N}(\mathbf{D}) u_{0,\sin,\phi} - \frac{\varepsilon}{2} \widehat{N}(\mathbf{D}) (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1} u_{0,\sin,\psi} + \frac{\varepsilon \tau}{2} \widehat{N}(\mathbf{D}) (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1} u_{0,\cos,\psi}. \quad (17.8)$$

Здесь $\widehat{N}(\mathbf{D}) = \sum_{j,l,k=1}^d (a_{jlk} - a_{jlk}^*) D_j D_l D_k$, а коэффициенты a_{jlk} определены в (17.2).

Применяя теорему 16.4 в общем случае и теорему 16.5(1°, 3°) в “вещественном” случае, получаем следующие два утверждения.

Предложение 17.3. Пусть u_ε — решение задачи (17.5), а u_0 — решение усредненной задачи (17.6). Пусть v_ε° и v_ε определены в (17.7), (17.8).

1°. Если $\phi \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d)$ и $\psi \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d)$, где $2 \leq q_1 \leq 4$, $1 \leq q_2 \leq 3$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon(\cdot, \tau) - v_\varepsilon(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathfrak{C}}_5(q_1)(1 + |\tau|)^{q_1/2} \varepsilon^{q_1/2} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \widehat{\mathfrak{C}}_6(q_2)(1 + |\tau|)^{(q_2+1)/2} \varepsilon^{(q_2+1)/2} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}, \end{aligned}$$

2°. Если $\phi \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d)$ и $\psi \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d)$, где $1 \leq q_1 \leq 3$, $0 \leq q_2 \leq 2$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon(\cdot, \tau) - v_\varepsilon^\circ(\cdot, \tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathfrak{C}}_{11}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/2} \varepsilon^{(q_1-1)/2} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \widehat{\mathfrak{C}}_{13}^\circ(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/2} \varepsilon^{q_2/2} (1 + (1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon^{1/2})^{1-q_2/2} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}, \\ \|\nabla u_\varepsilon(\cdot, \tau) - \nabla v_\varepsilon^\circ(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathfrak{C}}_{11}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/2} \varepsilon^{(q_1-1)/2} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \widehat{\mathfrak{C}}_{13}(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/2} \varepsilon^{q_2/2} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}, \\ \|g^\varepsilon \nabla u_\varepsilon(\cdot, \tau) - \widetilde{g}^\varepsilon \nabla (\Pi_\varepsilon u_0)(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathfrak{C}}_{12}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/2} \varepsilon^{(q_1-1)/2} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \widehat{\mathfrak{C}}_{14}(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/2} \varepsilon^{q_2/2} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Предложение 17.4. Пусть выполнены условия предложения 17.3. Пусть $g(\mathbf{x})$ — симметричная матрица с вещественными элементами.

1°. Если $\phi \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d)$ и $\psi \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d)$, где $3/2 \leq q_1 \leq 3$, $1/2 \leq q_2 \leq 2$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon(\cdot, \tau) - v_\varepsilon^\circ(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathfrak{C}}_7(q_1)(1 + |\tau|)^{q_1/3} \varepsilon^{2q_1/3} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \widehat{\mathfrak{C}}_8(q_2)(1 + |\tau|)^{(q_2+1)/3} \varepsilon^{2(q_2+1)/3} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}, \end{aligned}$$

2°. Если $\phi \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d)$ и $\psi \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d)$, где $1 \leq q_1 \leq 5/2$, $0 \leq q_2 \leq 3/2$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon(\cdot, \tau) - v_\varepsilon^\circ(\cdot, \tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathfrak{C}}_{15}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/3} \varepsilon^{2(q_1-1)/3} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \widehat{\mathfrak{C}}_{17}^\circ(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/3} \varepsilon^{2q_2/3} (1 + (1 + |\tau|)^{1/3} \varepsilon^{2/3})^{1-2q_2/3} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}, \\ \|\nabla u_\varepsilon(\cdot, \tau) - \nabla v_\varepsilon^\circ(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathfrak{C}}_{15}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/3} \varepsilon^{2(q_1-1)/3} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \widehat{\mathfrak{C}}_{17}(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/3} \varepsilon^{2q_2/3} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}, \\ \|g^\varepsilon \nabla u_\varepsilon(\cdot, \tau) - \widetilde{g}^\varepsilon \nabla (\Pi_\varepsilon u_0)(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathfrak{C}}_{16}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/3} \varepsilon^{2(q_1-1)/3} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \widehat{\mathfrak{C}}_{18}(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/3} \varepsilon^{2q_2/3} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

В силу предложения 14.35(1°) в “вещественном” случае оператор $[\Lambda]$ непрерывен из L_2 в L_2 и из H^1 в H^1 . Тогда можно рассмотреть задачу “без сглаживателя”:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau^2} = -\mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{D} \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau), \\ \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}) + \varepsilon \sum_{j=1}^d \Phi_j^\varepsilon(\mathbf{x}) \partial_j \phi(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon}{\partial \tau}(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (17.9)$$

Пусть u_0 — решение задачи (17.6). Положим

$$\tilde{v}_\varepsilon^\circ = u_0 + \varepsilon \sum_{j=1}^d \Phi_j^\varepsilon \partial_j u_0. \quad (17.10)$$

Применяя теорему 16.7(1°, 3°), получаем следующее утверждение.

Предложение 17.5. Пусть $g(\mathbf{x})$ — симметричная матрица с вещественными элементами. Пусть \tilde{u}_ε — решение задачи (17.9), u_0 — решение задачи (17.6) и $\tilde{v}_\varepsilon^\circ$ определено в (17.10).

1°. Если $\phi \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d)$ и $\psi \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d)$, где $3/2 \leq q_1 \leq 3$, $1/2 \leq q_2 \leq 2$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{v}_\varepsilon^\circ(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathfrak{C}}'_7(q_1)(1 + |\tau|)^{q_1/3} \varepsilon^{2q_1/3} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \widehat{\mathfrak{C}}'_8(q_2)(1 + |\tau|)^{(q_2+1)/3} \varepsilon^{2(q_2+1)/3} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}, \end{aligned}$$

2°. Если $\phi \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d)$ и $\psi \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d)$, где $2 \leq q_1 \leq 5/2$, $1 \leq q_2 \leq 3/2$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{v}_\varepsilon^\circ(\cdot, \tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathfrak{C}}'_{15}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/3} \varepsilon^{2(q_1-1)/3} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \widehat{\mathfrak{C}}'_{17}(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/3} \varepsilon^{2q_2/3} (1 + (1 + |\tau|)^{1/3} \varepsilon^{2/3})^{1-2q_2/3} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}, \\ \|\nabla \tilde{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \nabla \tilde{v}_\varepsilon^\circ(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathfrak{C}}'_{15}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/3} \varepsilon^{2(q_1-1)/3} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \widehat{\mathfrak{C}}'_{17}(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/3} \varepsilon^{2q_2/3} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}, \\ \|g^\varepsilon \nabla u_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{g}^\varepsilon \nabla u_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathfrak{C}}'_{16}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/3} \varepsilon^{2(q_1-1)/3} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \widehat{\mathfrak{C}}'_{18}(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/3} \varepsilon^{2q_2/3} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

17.2. Уравнение акустики. В условиях пункта 17.1 предположим дополнительно, что $g(\mathbf{x})$ — симметричная матрица с вещественными элементами. Матрица $g(\mathbf{x})$ характеризует параметры акустической (вообще говоря, анизотропной) среды. Пусть $Q(\mathbf{x})$ — Γ -периодическая функция в \mathbb{R}^d , причем $Q(\mathbf{x}) > 0$; $Q, Q^{-1} \in L_\infty$. Эта функция играет роль плотности среды. Положим $f(\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x})^{-1/2}$.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения акустики в среде с быстро осциллирующими характеристиками:

$$\begin{cases} Q^\varepsilon(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \check{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau^2} = -\mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{D} \check{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau), \\ \check{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \check{u}_\varepsilon}{\partial \tau}(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}) + (Q^\varepsilon)^{-1}(\check{\psi}(\mathbf{x}) + \mathbf{D}^* \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x})), \end{cases} \quad (17.11)$$

где $\phi, \psi, \check{\psi} \in L_2(\mathbb{R}^d)$, $\boldsymbol{\rho} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^d)$. Пусть \check{u}_0 — решение усредненной задачи

$$\begin{cases} \bar{Q} \frac{\partial^2 \check{u}_0(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau^2} = -\mathbf{D}^* g^0(\mathbf{x}) \mathbf{D} \check{u}_0(\mathbf{x}, \tau), \\ \check{u}_0(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \check{u}_0}{\partial \tau}(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}) + (\bar{Q})^{-1}(\check{\psi}(\mathbf{x}) + \mathbf{D}^* \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x})). \end{cases} \quad (17.12)$$

Матрица $\Lambda_Q(\mathbf{x})$ — это матрица-строка $\Lambda_Q(\mathbf{x}) = i(\Phi_{1,Q}(\mathbf{x}), \dots, \Phi_{d,Q}(\mathbf{x}))$, где $\Phi_{j,Q} \in \tilde{H}^1(\Omega)$ — слабое Γ -периодическое решение задачи

$$\operatorname{div} g(\mathbf{x}) (\nabla \Phi_{j,Q}(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j) = 0, \quad \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}) \Phi_{j,Q}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

В силу предложения 9.1(1°) выполнено условие 10.2. Комбинируя теорему 16.8 и теорему 16.9, приходим к следующему утверждению.

Предложение 17.6. В предположениях пункта 17.2 пусть \tilde{u}_ε — решение задачи (17.11), \tilde{u}_0 — решение задачи (17.12). Если $\phi \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d)$, $\psi \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d)$, $\check{\psi} \in H^{q_3}(\mathbb{R}^d)$ и $\boldsymbol{\rho} \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^d)$, где $0 \leq q_1 \leq 3/2$, $0 \leq q_2 \leq 1$, $0 \leq q_3 \leq 1/2$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{u}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}_3(q_1)(1 + |\tau|)^{q_1/3} \varepsilon^{2q_1/3} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \mathfrak{C}_2(q_2)(1 + |\tau|) \varepsilon^{q_2} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)} + \mathfrak{C}_4(q_3)(1 + |\tau|)^{(q_3+1)/3} \varepsilon^{2(q_3+1)/3} \|\check{\psi}\|_{H^{q_3}(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \mathfrak{C}'_4(q_1)(1 + |\tau|)^{q_1/3} \varepsilon^{2q_1/3} \|\boldsymbol{\rho}\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Как уже отмечалось, в рассматриваемом “вещественном” случае оператор $[\Lambda]$ непрерывен из L_2 в L_2 и из H^1 в H^1 . Поэтому можно рассмотреть задачу со специальным начальным данным “без сглаживателя”:

$$\begin{cases} Q^\varepsilon(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau^2} = -\mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{D} \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau), \\ \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}) + \varepsilon \sum_{j=1}^d \Phi_{j,Q}^\varepsilon(\mathbf{x}) \partial_j \phi(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon}{\partial \tau}(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (17.13)$$

Пусть u_0 — решение усредненной задачи

$$\begin{cases} \bar{Q} \frac{\partial^2 u_0(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau^2} = -\mathbf{D}^* g^0(\mathbf{x}) \mathbf{D} u_0(\mathbf{x}, \tau), \\ u_0(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial u_0}{\partial \tau}(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (17.14)$$

Положим

$$\tilde{v}_\varepsilon^\circ = u_0 + \varepsilon \sum_{j=1}^d \Phi_{j,Q}^\varepsilon \partial_j u_0. \quad (17.15)$$

Применяя теорему 16.13(1°, 3°), получаем следующее утверждение.

Предложение 17.7. В предположениях пункта 17.2 пусть \tilde{u}_ε — решение задачи (17.13), u_0 — решение задачи (17.14), и $\tilde{v}_\varepsilon^\circ$ определено в (17.15).

1°. Если $\phi \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d)$ и $\psi \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d)$, где $3/2 \leq q_1 \leq 3$, $1 \leq q_2 \leq 2$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{v}_\varepsilon^\circ(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}'_7(q_1)(1 + |\tau|)^{q_1/3} \varepsilon^{2q_1/3} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \mathfrak{C}'_8(q_2)(1 + |\tau|)^{(q_2+1)/3} \varepsilon^{2(q_2+1)/3} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}, \end{aligned}$$

2°. Если $\phi \in H^{q_1}(\mathbb{R}^d)$ и $\psi \in H^{q_2}(\mathbb{R}^d)$, где $2 \leq q_1 \leq 5/2$, $1 \leq q_2 \leq 3/2$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{v}_\varepsilon^\circ(\cdot, \tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}'_{15}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/3} \varepsilon^{2(q_1-1)/3} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \widehat{\mathfrak{C}}''_{17}(q_2)(1 + |\tau|) \varepsilon^{2q_2/3} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}, \\ \|\nabla \tilde{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \nabla \tilde{v}_\varepsilon^\circ(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{\mathfrak{C}}'_{15}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/3} \varepsilon^{2(q_1-1)/3} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \widehat{\mathfrak{C}}'_{17}(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/3} \varepsilon^{2q_2/3} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}, \\ \|g^\varepsilon \nabla u_\varepsilon(\cdot, \tau) - \widehat{g}^\varepsilon \nabla u_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}'_{16}(q_1)(1 + |\tau|)^{(q_1-1)/3} \varepsilon^{2(q_1-1)/3} \|\phi\|_{H^{q_1}(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \mathfrak{C}'_{18}(q_2)(1 + |\tau|)^{q_2/3} \varepsilon^{2q_2/3} \|\psi\|_{H^{q_2}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

§ 18. ПРИМЕНЕНИЕ ОБЩИХ РЕЗУЛЬТАТОВ: СИСТЕМА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

18.1. Оператор теории упругости. Пусть $d \geq 2$. Мы записываем оператор теории упругости, следуя [BSu1, гл. 5, §2]. Пусть ζ — ортогональный тензор второго ранга в \mathbb{R}^d . В стандартном ортонормированном базисе в \mathbb{R}^d он представляется в виде матрицы $\zeta = \{\zeta_{jl}\}_{j,l=1}^d$. Рассматриваем симметричные тензоры ζ и отождествляем их с векторами $\zeta_* \in \mathbb{C}^m$, $2m = d(d+1)$, по следующему правилу. Вектор ζ_* состоит из всех компонент ζ_{jl} , $j \leq l$, упорядоченных каким-либо фиксированным способом.

Для вектора смещений $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^d)$ введем тензор деформаций $e(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\{\partial_l u_j + \partial_j u_l\}$. Пусть $e_*(\mathbf{u})$ — вектор, отвечающий тензору $e(\mathbf{u})$ в соответствии с описанным правилом. Равенство $b(\mathbf{D})\mathbf{u} = -ie_*(\mathbf{u})$ определяет однозначно $(m \times d)$ -матричный ДО $b(\mathbf{D})$ (причем символ $b(\boldsymbol{\xi})$ является матрицей с вещественными элементами). Например, при подходящем упорядочении

$$b(\mathbf{D}) = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 \\ \frac{1}{2}\xi_2 & \frac{1}{2}\xi_1 \\ 0 & \xi_2 \end{pmatrix}, \quad d = 2.$$

Сейчас $n = d$, $m = d(d+1)/2$. Легко видеть, что условие (5.7) выполнено, причем α_0, α_1 зависят только от d .

Пусть $\sigma(\mathbf{u})$ — тензор напряжений, а $\sigma_*(\mathbf{u})$ — соответствующий вектор. Тогда закон Гука о пропорциональности напряжений деформациям можно выразить соотношением $\sigma_*(\mathbf{u}) = g(\mathbf{x})e_*(\mathbf{u})$, где $g(\mathbf{x})$ — симметричная $(m \times m)$ -матрица с вещественными элементами. Матрица g характеризует параметры упругой (вообще говоря, анизотропной) среды. Мы предполагаем, что матрица $g(\mathbf{x})$ периодична, $g(\mathbf{x}) > 0$ и $g, g^{-1} \in L_\infty$.

Энергия упругих деформаций задается квадратичной формой

$$w[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \langle \sigma_*(\mathbf{u}), e_*(\mathbf{u}) \rangle d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \langle g(\mathbf{x})b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u} \rangle d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^d). \quad (18.1)$$

Оператор \mathcal{W} , порожденный этой формой в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^d)$, называют оператором упругости. Таким образом, $2\mathcal{W} = \hat{\mathcal{A}} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$.

В случае изотропной среды матрица $g(\mathbf{x})$ выражается через два функциональных параметра $\lambda(\mathbf{x})$ и $\mu(\mathbf{x})$ (параметры Ламе). Параметр μ — модуль сдвига. Часто вместо λ вводят другой параметр $K(\mathbf{x})$ — модуль объемного сжатия. Нам понадобится еще один модуль — $\beta(\mathbf{x})$. Выпишем соотношения: $K(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}) + \frac{2\mu(\mathbf{x})}{d}$, $\beta(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) + \frac{\lambda(\mathbf{x})}{2}$. Условия положительной определенности матрицы $g(\mathbf{x})$ в изотропном случае имеют вид: $\mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0 > 0$, $K(\mathbf{x}) \geq K_0 > 0$. Для примера выпишем матрицу $g(\mathbf{x})$ в изотропном случае при $d = 2$:

$$g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} K(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x}) & 0 & K(\mathbf{x}) - \mu(\mathbf{x}) \\ 0 & 4\mu(\mathbf{x}) & 0 \\ K(\mathbf{x}) - \mu(\mathbf{x}) & 0 & K(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

18.2. Усреднение системы теории упругости. Рассмотрим теперь оператор упругости $\mathcal{W}_\varepsilon = \frac{1}{2}\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon = \frac{1}{2}b(\mathbf{D})^*g^\varepsilon(\mathbf{x})b(\mathbf{D})$ с быстро осциллирующими коэффициентами. Эффективная матрица g^0 и эффективный оператор $\mathcal{W}^0 = \frac{1}{2}\hat{\mathcal{A}}^0 = \frac{1}{2}b(\mathbf{D})^*g^0b(\mathbf{D})$ строятся по общим правилам (см. пункты 6.2, 6.3). В изотропном случае эффективная среда, вообще говоря, анизотропна.

Оператор $\hat{N}(\boldsymbol{\theta})$, вообще говоря, отличен от нуля. Более того, известны примеры, в которых $\hat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) \neq 0$ в некоторых точках $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$ (даже в изотропном случае). См. [Su6, пример 8.7], [DSu1, п. 14.3].

Пусть $Q(\mathbf{x})$ — Γ -периодическая симметричная $(d \times d)$ -матрица-функция с вещественными элементами, причем $Q(\mathbf{x}) > 0$; $Q, Q^{-1} \in L_\infty$. (Обычно Q — скалярная функция, имеющая смысл плотности среды). Положим $f(\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x})^{-1/2}$. Рассмотрим задачу Коши для системы теории упругости с быстро осциллирующими коэффициентами:

$$\begin{cases} Q^\varepsilon(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \check{\mathbf{u}}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau^2} = -\mathcal{W}_\varepsilon \check{\mathbf{u}}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau), \\ \check{\mathbf{u}}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \check{\mathbf{u}}_\varepsilon}{\partial \tau}(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}) + (Q^\varepsilon)^{-1}(\check{\psi}(\mathbf{x}) + \mathbf{D}^* \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x})), \end{cases} \quad (18.2)$$

где $\phi, \psi, \check{\psi} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^d)$, $\boldsymbol{\rho} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^{d^2})$. Пусть $\check{\mathbf{u}}_0$ — решение усредненной задачи

$$\begin{cases} \bar{Q} \frac{\partial^2 \check{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau^2} = -\mathcal{W}^0 \check{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}, \tau), \\ \check{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \check{\mathbf{u}}_0}{\partial \tau}(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}) + (\bar{Q})^{-1}(\check{\psi}(\mathbf{x}) + \mathbf{D}^* \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x})). \end{cases}$$

Применима теорема 16.8.

Рассмотрим теперь задачу Коши с начальными данными из специального класса:

$$\begin{cases} Q^\varepsilon(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau^2} = -\mathcal{W}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau), \\ \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}) + \varepsilon \Lambda_Q^\varepsilon(\mathbf{x})(\Pi_\varepsilon b(\mathbf{D})\phi)(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon}{\partial \tau}(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}). \end{cases}$$

Применима теорема 16.10.

18.3. Тело Хилла. Так в механике называют изотропную среду, когда $\mu(\mathbf{x}) = \mu_0 = \text{const}$ (см., например, [ZhKO]). Для этого случая возможна более простая факторизация оператора \mathcal{W} ; см. [BSu1, гл. 5, п. 2.3]. Форму (18.1) можно представить в виде

$$w[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \int_{\mathbb{R}^d} \langle g_\wedge(\mathbf{x}) b_\wedge(\mathbf{D}) \mathbf{u}, b_\wedge(\mathbf{D}) \mathbf{u} \rangle d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^d).$$

При этом $m_\wedge = 1 + d(d-1)/2$. Символ оператора $b_\wedge(\mathbf{D})$ — матрица $b_\wedge(\boldsymbol{\xi})$ размера $m_\wedge \times d$ определяется следующим образом. Первая строка есть $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d)$. Остальные строки соответствуют парам индексов (j, l) , $1 \leq j < l \leq d$. Элемент, стоящий в (j, l) -й строке и j -м столбце, есть ξ_l ; элемент, стоящий в (j, l) -й строке и l -м столбце, есть $-\xi_j$; остальные элементы (j, l) -й строки равны нулю. Матрица $g_\wedge(\mathbf{x})$ диагональна и имеет вид

$$g_\wedge(\mathbf{x}) = \text{diag}\{\beta(\mathbf{x}), \mu_0/2, \dots, \mu_0/2\}.$$

Эффективный оператор имеет вид $\mathcal{W}^0 = b_\wedge(\mathbf{D})^* g^0 b_\wedge(\mathbf{D})$, причем эффективная матрица g^0 совпадает с \underline{g} и равна $g^0 = \underline{g} = \text{diag}\{\underline{\beta}, \mu_0/2, \dots, \mu_0/2\}$.

В силу предложения 14.35 оператор $[\Lambda]$ непрерывен из L_2 в L_2 и из H^1 в H^1 . Тогда можно рассмотреть задачу Коши со специальным начальным данным “без сглаживателя”:

$$\begin{cases} Q^\varepsilon(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau^2} = -\mathcal{W}_\varepsilon \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau), \\ \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}) + \varepsilon \Lambda_Q^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \phi(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon}{\partial \tau}(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (18.3)$$

Применима теорема 16.12.

Обсудим случай, когда $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{1}$. В силу предложения 6.4(3°) выполнено $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. В этом случае к задаче (18.2) применима теорема 16.2, а к задаче (18.3) — теорема 16.7.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [BaPa] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.
- [BeLP] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.
- [BSu1] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), вып. 5, 1–108.
- [BSu2] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Пороговые аппроксимации резольвенты факторизованного самосопряженного семейства с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), вып. 5, 69–90.
- [BSu3] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), вып. 6, 1–104.
- [BSu4] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$* , Алгебра и анализ **18** (2006), вып. 6, 1–130.
- [BSu5] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности при усреднении нестационарных периодических уравнений*, Алгебра и анализ **20** (2008), вып. 6, 30–107.
- [COVa] Conca C., Orive R., Vanninathan M., *Bloch approximation in homogenization and applications*, SIAM J. Math. Anal. **33** (2002), no. 5, 1166–1198.
- [V] Василевская Е. С., *Усреднение параболической задачи Коши с периодическими коэффициентами при учете корректора*, Алгебра и анализ **21** (2009), вып. 1, 3–60.
- [VSu1] Василевская Е. С., Суслина Т. А., *Пороговые аппроксимации факторизованного самосопряженного операторного семейства с учетом первого и второго корректоров*, Алгебра и анализ **23** (2011), вып. 2, 102–146.
- [VSu2] Василевская Е. С., Суслина Т. А., *Усреднение параболических и эллиптических периодических операторов в $L_2(\mathbb{R}^d)$ при учете первого и второго корректоров*, Алгебра и анализ **24** (2012), вып. 2, 1–103.
- [D1] Дородный М. А., *Усреднение периодических уравнений типа Шрёдингера при включении членов младшего порядка*, Алгебра и анализ **31** (2019), вып. 6, 122–196.
- [D2] Dorodnyi M. A., *Operator error estimates for homogenization of the nonstationary Schrödinger-type equations: sharpness of the results*, Appl. Anal. **101** (2022), no. 16, 5582–5614.
- [DSu1] Dorodnyi M. A., Suslina T. A., *Spectral approach to homogenization of hyperbolic equations with periodic coefficients*, J. Differ. Equ. **264** (2018), no. 12, 7463–7522.
- [DSu2] Дородный М. А., Суслина Т. А., *Усреднение гиперболических уравнений с периодическими коэффициентами в \mathbb{R}^d : точность результатов*, Алгебра и анализ **32** (2020), вып. 4, 3–136.
- [DSu3] Дородный М. А., Суслина Т. А., *Усреднение гиперболических уравнений: операторные оценки при учете корректоров*, Функц. анализ и его прил. **57** (2023), вып. 4, 123–129.
- [DSu4] Дородный М. А., Суслина Т. А., *Пороговые аппроксимации функций от факторизованного операторного семейства*, Алгебра и анализ **36** (2024), вып. 1, 95–161.
- [Zh1] Жиков В. В., *Спектральный подход к асимптотическим задачам диффузии*, Дифференциальные уравнения **25** (1989), вып. 1, 44–50.
- [Zh2] Жиков В. В., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Докл. РАН **403** (2005), вып. 3, 305–308.
- [ZhKO] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1993.
- [ZhPas1] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys. **12** (2005), no. 4, 515–524.
- [ZhPas2] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients*, Russ. J. Math. Phys. **13** (2006), no. 2, 224–237.
- [ZhPas3] Жиков В. В., Пастухова С. Е., *Операторные оценки в теории усреднения*, Успехи матем. наук **71** (2016), вып. 3, 27–122.
- [K] Като Т., *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.
- [MaSh] Мазья В. Г., Шапошникова Т. О., *Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций*, Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1986.
- [M1] Мешкова Ю. М., *Усреднение задачи Коши для параболических систем с периодическими коэффициентами*, Алгебра и анализ **25** (2013), вып. 6, 125–177.

- [M2] Мешкова Ю. М., *Усреднение периодических гиперболических систем при учете корректора по $L_2(\mathbb{R}^d)$ -норме*, рукопись (2018), DOI: 10.13140/RG.2.2.15658.08643.
- [M3] Мешкова Ю. М., *Усреднение периодических параболических систем по $L_2(\mathbb{R}^d)$ -норме при учете корректора*, Алгебра и анализ **31** (2019), вып. 4, 137–197.
- [M4] Мешкова Ю. М., *Об усреднении периодических гиперболических систем*, Матем. заметки **105** (2019), вып. 6, 937–942.
- [M5] Meshkova Yu. M., *On operator error estimates for homogenization of hyperbolic systems with periodic coefficients*, J. Spectr. Theory **11** (2021), no. 2, 587–660.
- [M6] Meshkova Yu. M., *Variations on the theme of the Trotter–Kato theorem for homogenization of periodic hyperbolic systems*, Russian J. Math. Phys. **30** (2023), 561–598.
- [Se] Севостьянова Е. В., *Асимптотическое разложение решения эллиптического уравнения второго порядка с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами*, Мат. сб. **115** (1981), вып. 2, 204–222.
- [Su1] Суслина Т. А., *Об усреднении периодических параболических систем*, Функц. анализ и его прил. **38** (2004), вып. 4, 86–90.
- [Su2] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem*, Amer. Math. Soc. Transl. (2), vol. **220**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 201–233.
- [Su3] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem in the Sobolev space $H^1(\mathbb{R}^d)$* , Math. Model. Nat. Phenom. **5** (2010), no. 4, 390–447.
- [Su4] Суслина Т. А., *Усреднение в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$ для периодических эллиптических дифференциальных операторов второго порядка при включении членов первого порядка*, Алгебра и анализ **22** (2010), вып. 1, 108–221.
- [Su5] Суслина Т. А., *Усреднение эллиптических систем с периодическими коэффициентами: операторные оценки погрешности в $L_2(\mathbb{R}^d)$ с учетом корректора*, Алгебра и анализ **26** (2014), вып. 4, 195–263.
- [Su6] Suslina T. A., *Spectral approach to homogenization of nonstationary Schrödinger-type equations*, J. Math. Anal. and Appl. **446** (2017), no. 2, 1466–1523.
- [Su7] Суслина Т. А., *Пороговые аппроксимации экспоненты факторизованного операторного семейства при учете корректоров*, Алгебра и анализ **35** (2023), вып. 3, 138–184.
- [Su8] Суслина Т. А., *Теоретико-операторный подход к усреднению уравнений типа Шрёдингера с периодическими коэффициентами*, Успехи матем. наук **78** (2023), вып. 6.