

# О количестве невырожденных сечений векторных расслоений над проективной прямой

В. М. Поляков

С.-ПЕТЕРБУРГСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА  
ИМ. В. А. СТЕКЛОВА РАН, ФОНТАНКА 27, 191023  
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ, РОССИЯ

`polyakov@pdmi.ras.ru`

29 апреля 2025 г.

**Abstract.** Рассматриваются векторные расслоения ранга 2 с тривиальным общим слоем и простыми подскоками на проективной прямой над кольцом целых чисел. Изучается структура множества невырожденных сечений степени 1 таких расслоений. Вычисляются арифметические классы Черна рассматриваемых расслоений и находится главный член асимптотики количества невырожденных сечений степени 1 с ограниченной нормой.

**Ключевые слова:** векторное расслоение, арифметическая поверхность, проективная прямая, подскоки, сечения

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (грант на создание и развитие МЦМУ им. Леонарда Эйлера, соглашение №075-15-2022-289)

ПРЕПРИНТЫ  
Санкт-Петербургского отделения  
Математического института им. В. А. Стеклова  
Российской академии наук

PREPRINTS  
of the St. Petersburg Department  
of Steklov Institute of Mathematics

---

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В. М. Бабич,  
М. А. Всемиров,  
А. И. Генералов, И. А. Ибрагимов, Л. Ю. Колотилина,  
Ю. В. Матиясевич, Н. Ю. Нецветаев, С. И. Репин, Г. А. Серегин

# 1 Введение

Векторные расслоения над  $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1$  ранга 2 с тривиальным общим слоем и подскоками высоты 1 были классифицированы в работе [1]. Позднее в статье [2] было выяснено, что у этих расслоений существует 2-фильтрация, то есть для расслоения  $E$  имеется вложение  $\mathcal{O}(-2) \hookrightarrow E$  такое, что фактор локально свободен. Расслоениями с простыми подскоками мы будем называть расслоения с подскоками высоты 1. По умолчанию считаем, что все изучаемые расслоения имеют тривиальный общий слой. В этой работе мы будем изучать продолжения данных расслоений на пополненную по Аракелову проективную прямую  $\widehat{\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1}$ . В частности, мы вычислим арифметические классы Черна, и, в качестве основного результата, найдем главный член асимптотики количества невырожденных сечений (не имеющих нулей на  $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1$ ) степени 1 с ограниченной нормой. Изучение не всех глобальных сечений, а только невырожденных связано с тем, что множество  $H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1, E(1))$  образует обыкновенную решетку и асимптотика получается вполне ожидаемой, однако, если мы ограничимся только невырожденными сечениями, то вопрос об их асимптотике нам кажется уже более интересным.

В этой работе мы будем придерживаться стандартных обозначений:

$$\mathbb{P}_{\mathbb{A}}^1 = \text{Proj } A[t_0, t_1], \quad \deg t_0 = \deg t_1 = 1.$$

В обозначениях структурного пучка  $\mathcal{O}_X$  и  $\mathcal{O}_X(n)$  будем опускать  $X$  и писать просто  $\mathcal{O}$  и  $\mathcal{O}(n)$ . Как обычно,  $U_i$  — дополнение к нулям  $t_i$ ,  $U_{01} = U_0 \cap U_1$ ,  $x = t_1/t_0$ ,  $y = t_0/t_1$ , кроме того  $\mathcal{O}(U_0) = A[x]$ ,  $\mathcal{O}(U_1) = A[y]$ ,  $\mathcal{O}(U_{01}) = A[x, y]/(xy - 1)$ . Также, в обозначениях групп когомологий  $H^i(X, E)$  мы будем опускать первый аргумент, когда понятно, о каком пространстве идет речь и писать просто  $H^i(E)$ .

Пусть  $V(\nu, \alpha) = \text{Coker}(\phi : \mathcal{O}(-2)^2 \rightarrow \mathcal{O}(-1)^4)$ , где  $\nu, \alpha \in \mathbb{Z}$ , а стрелка  $\phi$  задается матрицей

$$\phi = \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ \alpha t_0 & t_1 \\ \nu t_0 & 0 \\ 0 & t_0 \end{pmatrix}.$$

Теорема классификации расслоений на  $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1$  ранга 2 с тривиальным общим слоем и простыми подскоками формулируется следующим образом.

**Теорема 1** (Смирнов [1], Theorem 18.18). 1. Если  $\nu \neq 0$  и  $\gcd(\nu, \alpha) = 1$ , то  $\mathcal{O}$ –модуль  $V(\nu, \alpha)$  является расслоением. Если, кроме того,  $\nu \neq \pm 1$ , то  $V(\nu, \alpha)$  – расслоение с простыми подскоками. Подскоки находятся в точности в делителях  $\nu$ . Если  $E$  – векторное расслоение с простыми подскоками на  $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1$ , то  $E$  изоморфно расслоению вида  $V(\nu, \alpha)$ .

2. Пусть  $E_1 = V(\nu_1, \alpha_1)$ ,  $E_2 = V(\nu_2, \alpha_2)$ , где  $\gcd(\nu_1, \alpha_1) = 1$ ,  $\gcd(\nu_2, \alpha_2) = 1$ ,  $\nu_1 \neq 0$ ,  $\nu_2 \neq 0$ . Расслоения  $E_1$  и  $E_2$  изоморфны тогда и только тогда, когда идеал  $(\nu_1)$  равен идеалу  $(\nu_2)$  и существует  $\lambda \in \mathbb{Z}$  такое, что

$$\alpha_1 \equiv \pm \alpha_2 \lambda^2 \pmod{\nu_1}.$$

## 2 Структура $H^0(E(1))^\times$

Пусть  $E$  расслоение ранга 2 с тривиальным общим слоем и простыми подскоками над  $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1$ ,  $\text{Aut}(E)$  его группа автоморфизмов, а  $H^0(E(1))^\times$  множество его невырожденных сечений степени 1. Для изучения асимптотики количества невырожденных сечений степени 1 нам будет полезен следующий результат и его следствия.

**Теорема 2.** Пусть множество  $H^0(E(1))^\times$  не пусто, тогда оно является главным однородным пространством группы  $\text{Aut}(E)$ .

*Доказательство.* Для начала докажем, что группа  $\text{Aut}(E)$  действует на  $H^0(E(1))^\times$  транзитивно. Из теоремы 1 мы знаем, что  $E \simeq V(\nu, 1)$  и его можно задать матрицей склейки  $\sigma = \begin{pmatrix} y & \nu \\ 0 & x \end{pmatrix}$ , то есть можно выбрать базисы  $(e_1, e_2)$  и  $(f_1, f_2)$  на  $U_0$  и  $U_1$  соответственно, так, что на  $U_{01}$  будем иметь  $(e_1, e_2)\sigma = (f_1, f_2)$ . Тогда произвольный элемент  $\varphi \in \text{Aut}(E)$  будет на  $U_0$  задаваться матрицей

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha + \nu\beta_2x & -\nu^2\beta_2 \\ \beta_0 + \beta_1x + \beta_2x^2 & (\alpha - \nu\beta_1) - \nu\beta_2x \end{pmatrix}, \quad (1)$$

для элементов которой выполняется соотношение  $\alpha^2 - \alpha\beta_1\nu + \nu^2\beta_0\beta_2 = \pm 1$ . Произвольное невырожденное сечение степени 1 на  $U_0$  будет иметь вид

$$s = (u_0 + \nu wx)t_0e_1 + (v_0 + v_1x + wx^2)t_0e_2,$$

где  $u_0^2 - \nu u_0 v_1 + \nu^2 v_0 w = u = \pm 1$ . Положим  $\alpha = u(u_0 - \nu v_1)$ ,  $\beta_0 = -uv_0$ ,  $\beta_1 = -uv_1$ ,  $\beta_2 = -uw$  и рассмотрим автоморфизм  $\varphi_s$  расслоения  $E$ , который имеет такие коэффициенты в указанном выше матричном представлении. Тогда  $\varphi_s s = e_1 t_0$ . Таким образом любое невырожденное сечение степени 1 лежит в орбите сечения  $e_1 t_0$ .

Для доказательства свободности действия рассмотрим произвольное невырожденное сечение  $s$  и предположим, что  $\varphi s = s$  для некоторого  $\varphi \in \text{Aut}(E)$ , который задается матрицей вида (1). Распишем это равенство поэлементно:

$$\begin{cases} \alpha u_0 - \beta_2 v_0 \nu^2 = u_0 \\ \alpha w + \beta_2 (u_0 - v_1 \nu) = w \\ \alpha v_0 + \beta_0 u_0 - \beta_1 v_0 \nu = v_0 \\ \alpha v_1 + \beta_0 w \nu + \beta_1 (u_0 - \nu v_1) + \beta_2 (-v_0 \nu) = v_1. \end{cases} \quad (2)$$

Тогда если посмотреть на эти равенства как на систему линейных уравнений относительно  $\alpha, \beta_0, \beta_1, \beta_2$ , то она будет иметь единственное решение, поскольку определитель основной матрицы системы будет равен  $(u_0^2 - u_0 v_1 \nu + v_0 w \nu^2)^2 = 1$  и ранг расширенной матрицы системы равен рангу основной, отсюда  $\varphi = id$ .  $\square$

Теперь мы можем индуцировать с  $\text{Aut}(E)$  на множество  $H^0(E(1))^\times$  структуру группы, выбрав произвольный элемент в качестве единицы. Наиболее естественным видится взять в качестве единицы  $e = e_1 t_0$ . Для удобства введем сокращенную запись для невырожденных сечений: сечение  $(u_0 + \nu w x) t_0 e_1 + (v_0 + v_1 x + w x^2) t_0 e_2$  будем обозначать  $\langle u_0, v_0, v_1, w \rangle$ . Тогда умножение в получившейся группе в такой записи будет устроено следующим образом. Пусть  $s = \langle u_0, v_0, v_1, w \rangle$ ,  $s' = \langle u'_0, v'_0, v'_1, w' \rangle$ , тогда

$$s \circ s' = \langle u''_0, v''_0, v''_1, w'' \rangle, \quad (3)$$

где

$$\begin{cases} u''_0 = u_0 u'_0 - \nu^2 w v'_0 \\ v''_0 = u_0 v'_0 + u'_0 v_0 - \nu v'_0 v_1 \\ v''_1 = u_0 v'_1 + \nu v_0 w' + v_1 u'_0 - \nu v_1 v'_1 - \nu w v'_0 \\ w'' = u_0 w' + w u'_0 - \nu w v'_1. \end{cases} \quad (4)$$

Следующее замечание проверяется непосредственным элементарным вычислением.

**Замечание 1.** Невырожденные сечения степени 1 расслоения  $E$  можно представить в виде матриц  $2 \times 2$  с целыми коэффициентами, причем условие невырожденности будет означать то, что определитель соответствующей матрицы равен  $\pm 1$ , а введенная выше групповая операция будет соответствовать умножению этих матриц. Это представление задается так: сечению

$$\langle u_0, v_0, v_1, w \rangle$$

сопоставляется матрица

$$\begin{pmatrix} u_0 - \nu v_1 & -\nu v_0 \\ \nu w & u_0 \end{pmatrix}.$$

**Предложение 1.** Группа  $H^0(E(1))^\times$  изоморфна  $\Gamma(\nu) \rtimes \mu_4(\mathbb{Z}/\nu)$ , где  $\Gamma(\nu)$  главная конгруэнц-подгруппа, а  $\mu_4(\mathbb{Z}/\nu)$  группа корней из 1 четвертой степени в кольце  $\mathbb{Z}/\nu$ .

*Доказательство.* Мы будем использовать матричное представление невырожденных сечений из предыдущего замечания. Рассмотрим короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow \Gamma(\nu) \xrightarrow{i} H^0(E(1))^\times \xrightarrow{p} \mu_4(\mathbb{Z}/\nu) \longrightarrow 0,$$

где стрелки задаются следующим образом

$$i : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d - \nu \frac{d-a}{\nu} & -\nu \frac{-b}{\nu} \\ \nu \frac{c}{\nu} & d \end{pmatrix},$$

$$p : \begin{pmatrix} u_0 - \nu v_1 & -\nu v_0 \\ \nu w & u_0 \end{pmatrix} \mapsto u_0 \pmod{\nu}.$$

Существование сечения стрелки  $p$  следует из того факта, что естественное отображение  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/\nu) : \det g = \pm 1\}$  сюръективно, так что эта короткая точная последовательность расщепляется.  $\square$

### 3 Основные обозначения геометрии Араке-лова

Здесь и далее мы будем пользоваться конструкциями теории Аракелова и обозначениями из [3], кратко напомним их. Под арифметическим многообразием  $\widehat{X}$  мы будем понимать проективную регулярную плоскую схему

$X$  над  $\mathbb{Z}$  с фиксированной на  $X(\mathbb{C})$  кэлеровой формой  $\omega$ , инвариантной относительно комплексного сопряжения  $F_\infty : X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$ . Под эрмитовым векторным расслоением  $(E, h)$  над  $\hat{X}$  мы будем понимать обычное векторное расслоение  $E$  над  $X$  вместе с инвариантной относительно  $F_\infty$  эрмитовой метрикой  $h$  на  $E \otimes \mathbb{C}$ , где  $E \otimes \mathbb{C}$  продолжение расслоения  $E$  на  $X(\mathbb{C})$ . В дальнейшем, где это не будет приводить к путанице, мы будем обозначать эрмитовы векторные расслоения как обычные, без указания метрики. Отметим, что условие инвариантности эрмитовой метрики относительно комплексного сопряжения означает в частности, что на вещественных векторах она принимает вещественные значения.

Зафиксируем следующие обозначения.  $A^{p,p}(X)$  обозначим пространство вещественных дифференциальных форм типа  $(p, p)$  на  $X(\mathbb{C})$ , инвариантных относительно инволюции комплексного сопряжения:  $F_\infty^* \eta = (-1)^p \eta$ , а также  $D^{p,p}(X)$  – пространство вещественных, инвариантных относительно  $F_\infty$  потоков на  $X(\mathbb{C})$ . Положим  $\tilde{A}^{p,p}(X) = A^{p,p}(X)/(\text{im } \partial + \text{im } \bar{\partial})$  и  $\tilde{D}^{p,p}(X) = D^{p,p}(X)/(\text{im } \partial + \text{im } \bar{\partial})$ . Обозначим  $X^{(p)}$  для  $p \geq 0$  множество точек  $X$  коразмерности  $p$ ,  $Z^p(X)$  группу циклов коразмерности  $p$  на  $X$ ,  $R^p(X)$  подгруппу  $Z^p(X)$  порожденную циклами  $\text{div}(f)$ , где  $f \in k(x)$ ,  $x \in X^{(p-1)}$  и  $CH^p(X) = Z^p(X)/R^p(X)$   $p$ -ю группу Чжоу.

Под арифметическим циклом мы будем понимать пару  $(Z, g_Z)$ , где  $Z \in Z^p(X)$ , а  $g_Z$  является потоком Грина для  $Z(\mathbb{C})$ , то есть таким потоком, что  $\omega = dd^c g_Z + \delta_{Z(\mathbb{C})}$  представляется гладкой формой. Определим соответствующую группу арифметических циклов  $\hat{Z}^p(X)$  как подгруппу в  $Z^p(X) \oplus \tilde{D}^{p-1,p-1}(X)$ , порожденную указанными выше парами, а также группу  $\hat{R}^p(X)$  как подгруппу в  $\hat{Z}^p(X)$ , порожденную арифметическими циклами вида  $\widetilde{\text{div}} f = (\text{div } f, [-\log(|f_{\mathbb{C}}|^2)\delta_{x(\mathbb{C})}])$ , где  $x \in X^{(p-1)}$ ,  $f \in k(x)^*$ . Наконец, определим  $p$ -ю арифметическую группу Чжоу  $\widehat{CH}^p(X) = \hat{Z}^p(X)/\hat{R}^p(X)$ . В дальнейшем нам также потребуется гомоморфизм  $a : \tilde{A}^{p-1,p-1}(X) \rightarrow \widehat{CH}^p(X)$ , который переводит класс формы  $\eta$  в  $(0, [\eta])$ , а также отображение  $\omega : \widehat{CH}^p(X) \rightarrow A^{p,p}(X)$ , которое определяется так:  $\omega(Z, g) = dd^c g + \delta_Z$ .

Положим  $\widehat{CH}(X) = \bigoplus_{p \geq 0} \widehat{CH}^p(X)$ , тогда на  $\widehat{CH}(X)_{\mathbb{Q}}$  имеется спаривание:

$$\begin{aligned} \widehat{CH}^p(X)_{\mathbb{Q}} \otimes \widehat{CH}^q(X)_{\mathbb{Q}} &\longrightarrow \widehat{CH}^{p+q}(X)_{\mathbb{Q}} \\ (Y, g_Y) \cdot (Z, g_Z) &\mapsto (Y \cdot Z, g_Y * g_Z), \end{aligned}$$

где  $g_Y * g_Z = g_Y \delta_Z + \omega(g_Y)g_Z$ .

## 4 Вычисление классов Черна расслоений с простыми подскоками

### 4.1 Предварительные сведения

Далее мы будем работать на арифметической поверхности  $\widehat{X} = \widehat{\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1}$  с эрмитовой метрикой Фубини-Штуди на касательном расслоении. Локальные координаты над  $U_0$  и  $U_1$  (на  $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{C})$ ) будут  $x$  и  $y$  соответственно. Кэлерава форма метрики имеет следующий вид:

$$\omega = \frac{i}{2\pi} \frac{dx d\bar{x}}{(1 + |x|^2)^2}.$$

Пусть  $E$  эрмитово векторное расслоение ранга 2 на  $\widehat{\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1}$ , которое на конечной части  $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1$  имеет тривиальный общий слой и простые подскоки, то есть изоморфно  $V(\nu, \alpha)$ . Также мы будем считать, что  $E$  над бесконечной частью тривиально, под этим мы будем понимать, что оно изоморфно  $\mathcal{O}^2$  с тривиальной метрикой  $h_0$ . Таким образом у нас имеется некоторый изоморфизм  $\mathcal{L} : E \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{O}^2$  с помощью которого индуцируется метрика  $h = \mathcal{L}^* h_0$  на  $E \otimes \mathbb{C}$ , инвариантная относительно комплексного сопряжения.

Зафиксируем голоморфные реперы  $(e_1, e_2)$  над  $U_0$  и  $(f_1, f_2)$  над  $U_1$  расслоения  $E \otimes \mathbb{C}$  со следующей матрицей склейки:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \alpha y & \nu \\ \gamma & \delta x \end{pmatrix}.$$

У нас имеется некоторая вольность выбора изоморфизма тривиализации, при этом любой такой изоморфизм получается из фиксированного подкруткой на допустимый (индуцирующий инвариантную относительно  $F_{\infty}$  метрику) автоморфизм  $\mathcal{O}^2$ . Мы будем заниматься расслоениями с метриками, которые индуцируются произвольной допустимой тривиализацией. В качестве выделенной тривиализации возьмем изоморфизм  $\mathcal{L} : E \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{O}^2$ , который задается следующей матрицей на  $U_0$ :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta x & -\nu \end{pmatrix}$$



так, что  $[g_1, g_2]L = [e_1, e_2]$ , где  $[g_1, g_2]$  глобальный базис  $\mathcal{O}^2$ . Это действительно изоморфизм, поскольку

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta x & -\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha y & \nu \\ \gamma & \delta x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \nu^{-1} & -\alpha \nu^{-1} y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь рассмотрим произвольный автоморфизм  $\gamma$  расслоения  $\mathcal{O}^2$ , в стандартном базисе ему будет соответствовать матрица  $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ . Положим  $\Gamma = \gamma^T \bar{\gamma} = \begin{pmatrix} |\gamma_1|^2 + |\gamma_3|^2 & \gamma_1 \bar{\gamma}_2 + \gamma_3 \bar{\gamma}_4 \\ \bar{\gamma}_1 \gamma_2 + \bar{\gamma}_3 \gamma_4 & |\gamma_2|^2 + |\gamma_4|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix}$ . Тогда, после подкрутки выделенной тривиализации на этот автоморфизм, у нашего расслоения будет метрика  $h$  со следующей матрицей Грама над  $U_0$ :

$$\begin{aligned} H &= \begin{pmatrix} h(e_1, e_1) & h(e_1, e_2) \\ h(e_2, e_1) & h(e_2, e_2) \end{pmatrix} = L^T \Gamma \bar{L} \\ &= \begin{pmatrix} g_1 + 2\delta \operatorname{Re}(g_3 x) + \delta^2 g_4 |x|^2 & -\nu g_2 - \nu \delta g_4 x \\ -\nu g_3 - \nu \delta g_4 \bar{x} & \nu^2 g_4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где  $\operatorname{Re}(g_3 x)$  обозначает вещественную часть  $g_3 x$ . Для инвариантности метрики относительно комплексного сопряжения необходимым и достаточным условием на изоморфизм  $\gamma$  является  $g_2 = g_3 \in \mathbb{R}$ .

Как было сказано ранее, наши расслоения обладают 2-фильтрацией, то есть встраиваются в короткую точную последовательность вида

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-2) \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}(2) \longrightarrow 0.$$

Однако некоторые изучаемые расслоения обладают также и 1-фильтрацией:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}(1) \longrightarrow 0,$$

а именно такие  $E = V(\nu, \alpha)$ , где  $\alpha \equiv \pm \lambda^2 \pmod{\nu}$ . В такой ситуации все вычисления сильно упрощаются, поэтому сначала мы вычислим классы Черна для таких расслоений, а потом покажем, что с помощью расширения базы и функториальности классов Черна общий случай сводится к этому.

## 4.2 Вычисление классов Черна $E$

Все дальнейшие вычисления мы будем проводить над  $U_0$  с фиксированным голоморфным репером  $(e_1, e_2)$ . Итак, пусть  $E = V(\nu, 1)$  с метрикой  $h$  с матрицей Грама  $H$  для репера  $(e_1, e_2)$  (с матрицей склейки  $\sigma$ ) над  $U_0$ , где

$$\sigma = \begin{pmatrix} y & \nu \\ 0 & x \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} g_1 + 2 \operatorname{Re}(g_3 x) + g_4 |x|^2 & -\nu g_2 - \nu g_4 x \\ -\nu g_3 - \nu g_4 \bar{x} & \nu^2 g_4 \end{pmatrix}.$$

Имеется короткая точная последовательность

$$\mathcal{E} : 0 \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} \mathcal{O}(1) \longrightarrow 0, \quad (5)$$

где стрелки над  $U_0$  задаются так:  $i : t_0^{-1} \mapsto e_1$ , и  $p : e_1 \mapsto 0$ ,  $e_2 \mapsto t_0$ . С помощью этих стрелок и  $C^\infty$  ортогонального разложения  $E \simeq \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_1(\nu g_3 + \nu g_4 \bar{x}) / (g_1 + 2 \operatorname{Re}(g_3 x) + g_4 |x|^2) + e_2 \rangle$  на  $\mathcal{O}(-1)$  и  $\mathcal{O}(1)$  индуцируются метрики  $h_{\mathcal{O}(-1)} = g_1 + 2 \operatorname{Re}(g_3 x) + g_4 |x|^2$  и  $h_{\mathcal{O}(1)} = \nu^2 \det \Gamma / (g_1 + 2 \operatorname{Re}(g_3 x) + g_4 |x|^2)$  соответственно. В дальнейшем нам понадобятся формы кривизн этих линейных расслоений:

$$\Theta_{\mathcal{O}(-1)} = \bar{\partial}(\partial h_{\mathcal{O}(-1)} h_{\mathcal{O}(-1)}^{-1}) = \frac{-\det \Gamma}{(g_1 + 2 \operatorname{Re}(g_3 x) + g_4 |x|^2)^2} dx d\bar{x},$$

$$\Theta_{\mathcal{O}(1)} = \bar{\partial}(\partial h_{\mathcal{O}(1)} h_{\mathcal{O}(1)}^{-1}) = \frac{\det \Gamma}{(g_1 + 2 \operatorname{Re}(g_3 x) + g_4 |x|^2)^2} dx d\bar{x}.$$

Выпишем также первые арифметические классы Черна наших расслоений, причем в двух разных формах:

$$\begin{aligned} \hat{c}_1(\mathcal{O}(-1)) &= (-\infty), -\log(g_1 + 2 \operatorname{Re}(g_3 x) + g_4 |x|^2) \\ &= (-0), -\log((g_1 + 2 \operatorname{Re}(g_3 x) + g_4 |x|^2)|x|^{-2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{c}_1(\mathcal{O}(1)) &= ((\infty), -\log(\frac{\nu^2 \det \Gamma}{g_1 + 2 \operatorname{Re}(g_3 x) + g_4 |x|^2})) \\ &= ((0), -\log(\frac{\nu^2 \det \Gamma |x|^2}{g_1 + 2 \operatorname{Re}(g_3 x) + g_4 |x|^2})). \end{aligned}$$

Тогда, поскольку  $\tilde{c}_1(\mathcal{E}) = 0$  (см. [6, Corollary 1]),

$$\hat{c}_1(E) = \hat{c}_1(\mathcal{O}(-1)) + \hat{c}_1(\mathcal{O}(1)) = (0, -\log(\nu^2 \det \Gamma)).$$

Для вычисления второго арифметического класса Черна  $E$  нам потребуется вычислить вторичный класс Ботта-Черна короткой точной последовательности  $\mathcal{E}$ . Для этого нам нужно представить  $E$  (как  $C^\infty$  эрмитово расслоение) в виде прямой суммы  $\mathcal{O}(-1)$  и его ортогонального дополнения, которое отождествляется с  $\mathcal{O}(1)$ :  $E \simeq \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1)^\perp$ , этому разложению соответствует репер  $(e'_1, e'_2) = (e_1, e_1(\nu g_3 + \nu g_4 \bar{x}) / (g_1 + 2 \operatorname{Re}(g_3 x) + g_4 |x|^2) + e_2)$ . В этом базисе оператор Дольбо  $\bar{\partial}_E$  представляется в виде матрицы:

$$\bar{\partial}_E = \begin{pmatrix} \bar{\partial}_{\mathcal{O}(-1)} & \alpha \\ 0 & \bar{\partial}_{\mathcal{O}(1)} \end{pmatrix},$$

где

$$\alpha : e'_2 \mapsto \frac{\nu \det \Gamma}{(g_1 + 2 \operatorname{Re}(g_3 x) + g_4 |x|^2)^2} d\bar{x} e'_1.$$

Для того чтобы найти второй вторичный класс Ботта-Черна  $\tilde{c}_2 \mathcal{E}$ , воспользуемся вычислениями из [4, 1.1] и [5, 10.1]:

$$\tilde{c}_2(\mathcal{E}) = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{tr}(\alpha^* \alpha) = \frac{\det \Gamma}{2\pi i (g_1 + 2 \operatorname{Re}(g_3 x) + g_4 |x|^2)^2} dx d\bar{x},$$

где  $\alpha^* = dx/\nu \in A^{1,0}(X, \operatorname{Hom}(\mathcal{O}(-1), \mathcal{O}(1)))$  сопряженный к  $\alpha$  относительно комплексной структуры и метрик на  $\mathcal{O}(-1)$  и  $\mathcal{O}(1)$ .

Нам также необходимо знать интеграл от вторичного класса Ботта-Черна, его можно вычислить непосредственно, однако можно заметить, что форма  $\tilde{c}_2(\mathcal{E})$  совпадает с обычной первой формой Черна  $c_1(\mathcal{O}(-1))$ , таким образом

$$\int_{\mathbb{P}_\mathbb{C}^1} \tilde{c}_2(\mathcal{E}) = -1.$$

Теперь мы можем перейти к вычислению второго арифметического класса Черна  $E$ . Для этого мы воспользуемся соотношением для характеров Черна из [3, IV, 4.3, Proposition 1], которое в нашем случае будет выглядеть так:  $\widehat{\operatorname{ch}}_2(E) = \widehat{\operatorname{ch}}_2(\mathcal{O}(-1)) + \widehat{\operatorname{ch}}_2(\mathcal{O}(1)) - a(\tilde{\operatorname{ch}}(\mathcal{E})_2)$ . Тогда для классов Черна будет верно следующее:

$$\widehat{c}_2(E) = \widehat{c}_1(\mathcal{O}(-1))\widehat{c}_1(\mathcal{O}(1)) - a(\tilde{c}_2(\mathcal{E})).$$

Для вычисления произведения первых классов Черна линейных расслоений возьмем представителя с циклом  $-(\infty)$  для первого сомножителя и представителя с циклом  $(0)$  для второго сомножителя:

$$\widehat{c}_1(\mathcal{O}(-1))\widehat{c}_1(\mathcal{O}(1)) = (0, [-\log(g_1 + 2\operatorname{Re}(g_3x) + g_4|x|^2)] \wedge \delta_{(0)} + \left[ \frac{i}{2\pi} \frac{-\det \Gamma dx d\bar{x}}{(g_1 + 2\operatorname{Re}(g_3x) + g_4|x|^2)^2} \right] \left( -\log \left( \frac{\nu^2 \det \Gamma |x|^2}{g_1 + 2\operatorname{Re}(g_3x) + g_4|x|^2} \right) \right)).$$

Теперь мы вычислим интеграл от  $\widehat{c}_2(E)$ , то есть его образ под действием отображения  $\widehat{\deg} : \widehat{CH}^2(X) \rightarrow \widehat{CH}^1(\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})) = \mathbb{R}$ , которое переводит класс  $(Z, g)$  в  $\log \#(H^0(Z, \mathcal{O}_Z)) + \int_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1} g/2$  (см. [4, 2.1]).

Интеграл от второго вторичного класса Ботта-Черна короткой точной последовательности  $\mathcal{E}$  мы нашли ранее, осталось посчитать интеграл от  $\widehat{c}_1(\mathcal{O}(-1))\widehat{c}_1(\mathcal{O}(1))$ :

$$\begin{aligned} & 2\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\mathcal{O}(-1))\widehat{c}_1(\mathcal{O}(1))) \\ &= -\log(g_1) + \int_{U_0} \frac{i}{2\pi} \log \left( \frac{\nu^2 \det \Gamma |x|^2}{g_1 + 2\operatorname{Re}(g_3x) + g_4|x|^2} \right) \frac{\det \Gamma dx d\bar{x}}{(g_1 + 2\operatorname{Re}(g_3x) + g_4|x|^2)^2}. \end{aligned}$$

Рассмотрим только случай, когда  $g_2 \neq 0$ . Альтернативный случай более простой, и все вычисления будут аналогичны. Сделаем замену  $x = zg_2\sqrt{\det \Gamma}/(|g_2|g_4) - g_2/g_4$ , тогда интеграл перепишется следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int_{U_0} \frac{i}{2\pi} \log \left( \frac{\nu^2 |\sqrt{\det \Gamma} z - |g_2||^2}{g_4(1 + |z|^2)} \right) \frac{dz d\bar{z}}{|1 + |z|^2|^2} \\ &= -1 - \log \left( \frac{g_4}{\nu^2 |g_2|^2} \right) + \int_{U_0} \frac{i}{2\pi} \log \left( \left| 1 - \frac{\sqrt{\det \Gamma}}{|g_2|} z \right|^2 \right) \frac{dz d\bar{z}}{|1 + |z|^2|^2}. \quad (6) \end{aligned}$$

Отдельно вычислим последний интеграл, для этого мы воспользуемся известным интегралом

$$\int_0^{2\pi} \log(1 + c \cos(\varphi)) d\varphi = 2\pi \log \left( \frac{1 + \sqrt{1 - c^2}}{2} \right),$$

для  $|c| \leq 1$ . Для начала вычислим следующий интеграл для  $a > 0$ :

$$\psi_a(r) := \int_0^{2\pi} \log(1 + a^2 r^2 - 2ar \cos(\varphi)) d\varphi$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \log(1 + a^2 r^2) + \int_0^{2\pi} \log \left( 1 - \frac{2ar}{1 + a^2 r^2} \cos(\varphi) \right) d\varphi \\
&= 2\pi \log(1 + a^2 r^2) + 2\pi \log \left( \frac{1 + \sqrt{1 - \left( \frac{2ar}{1 + a^2 r^2} \right)^2}}{2} \right) \\
&= 2\pi \log \left( \frac{1 + a^2 r^2 + \sqrt{(1 - a^2 r^2)^2}}{2} \right) \\
&= 2\pi \log \left( \frac{1 + a^2 r^2 + |1 - a^2 r^2|}{2} \right) = \begin{cases} 2\pi \log(a^2 r^2), & \text{если } a^2 r^2 > 1, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Наконец вычислим интеграл из (6):

$$\begin{aligned}
&\int_{U_0} \frac{i}{2\pi} \log \left( \left| 1 - \frac{\sqrt{\det \Gamma}}{|g_2|} z \right|^2 \right) \frac{dz d\bar{z}}{|1 + |z|^2|^2} \\
&= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{2r \log \left( 1 + \frac{\det \Gamma}{|g_2|^2} r^2 - 2 \frac{\sqrt{\det \Gamma}}{|g_2|} r \cos(\varphi) \right)}{2\pi(1 + r^2)^2} dr d\varphi \\
&= \int_0^\infty \frac{2r}{2\pi(1 + r^2)^2} \psi_a(r) dr = \int_0^{1/a} \int_{1/a}^\infty \frac{2r}{2\pi(1 + r^2)^2} \psi_a(r) dr \\
&= \int_{1/a}^\infty \frac{2r}{(1 + r^2)^2} \log \left( \frac{\det \Gamma}{|g_2|^2} r^2 \right) dr = \log \left( \frac{\det \Gamma}{|g_2|^2} + 1 \right),
\end{aligned}$$

где  $a = \sqrt{\det \Gamma}/|g_2|$ . Тогда

$$\begin{aligned}
2\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\mathcal{O}(-1))\widehat{c}_1(\mathcal{O}(1))) &= -\log(g_1) - 1 - \log \left( \frac{g_4}{\nu^2 |g_2|^2} \right) + \log \left( \frac{\det \Gamma}{|g_2|^2} + 1 \right) \\
&= \log(\nu^2) - 1.
\end{aligned}$$

Таким образом для  $E = V(\nu, 1)$  получаем

$$\widehat{\deg}(\widehat{c}_2(E)) = \log(|\nu|).$$

Теперь выведем отсюда общий случай.

**Теорема 3.** Пусть  $E$  расслоение на  $\widehat{\mathbb{P}}_{\mathbb{Z}}^1$  с тривиальным общим слоем и простыми подскоками над конечной частью и с метрикой, которая индуцирована тривиальной метрикой расслоения  $\mathcal{O}^2$  с помощью произвольной тривиализации над  $\mathbb{C}$ . Предположим, что  $\nu$  – дискриминант расслоения  $E$ , что означает  $H^1(E(-1)) \simeq \mathbb{Z}/\nu$ . Тогда  $\widehat{\deg}(\widehat{c}_2(E)) = \log(|\nu|)$ .

*Доказательство.* Известно, что  $E \simeq V(\nu, \alpha)$  для некоторого  $\alpha > 0$ . Из [1, 18.3.5.7] мы знаем, что для расслоения  $V(\nu, 1)$  над  $\mathbb{P}_A^1$ , где  $A$  – дедекиндово, существует 1-фильтрация. Обозначим  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{\alpha})$ ,  $\mathcal{O}_K$  его кольцо целых, тогда расслоение  $E \otimes \mathcal{O}_K$  над  $\mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^1$  изоморфно  $V(\nu, 1)$ . Таким образом  $E \otimes \mathcal{O}_K$  обладает 1-фильтрацией. Рассмотрим следующую диаграмму замены базы:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1 & \xleftarrow{\tilde{f}} & \mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^1 \\ \downarrow g & & \downarrow \tilde{g} \\ \mathrm{Spec} \mathbb{Z} & \xleftarrow{f} & \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K). \end{array}$$

Обозначим также  $\widehat{\deg}_{\mathbb{Z}} : \widehat{CH}^1(\mathrm{Spec} \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$  – отображение степени для  $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}$ .

Многообразие, соответствующее комплексным точкам  $\mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^1$ , представляет собой объединение двух комплексных проективных прямых, поэтому ввиду предыдущих вычислений  $\widehat{\deg}_{\mathbb{Z}} \left( (f \circ \tilde{g})_* (\widehat{c}_2(\tilde{f}^*(E))) \right) = 2 \log(|\nu|)$ . Тогда из следующей цепочки равенств будет следовать утверждение теоремы.

$$\begin{aligned} \widehat{\deg}_{\mathbb{Z}} (2g_* (\widehat{c}_2(E))) &= \widehat{\deg}_{\mathbb{Z}} (g_* (\widehat{c}_2(E) \cdot 2((\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1), 0))) \\ &= \widehat{\deg}_{\mathbb{Z}} \left( g_* \left( \widehat{c}_2(E) \cdot \tilde{f}_* ((\mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^1), 0) \right) \right) = \widehat{\deg}_{\mathbb{Z}} \left( (gf)_* \left( \tilde{f}^* (\widehat{c}_2(E)) \right) \right) \\ &= \widehat{\deg}_{\mathbb{Z}} \left( (f \circ \tilde{g})_* \left( \widehat{c}_2(\tilde{f}^*(E)) \right) \right) = 2 \log(|\nu|) \end{aligned}$$

□

Далее мы будем опускать  $\widehat{\deg}$  в обозначении  $\widehat{\deg}(\widehat{c}_2(E))$  и писать просто  $\widehat{c}_2(E)$  там, где это не приведет к путанице.

## 5 Асимптотика количества невырожденных сечений

Теперь мы займемся основным вопросом этой работы, а именно будем изучать асимптотику количества невырожденных сечений степени 1 с ограниченной  $L_2$ –нормой расслоений на  $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1$  ранга 2 с тривиальным общим слоем и простыми подскоками:  $|s|_{L_2}^2 = \int_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1} h(s, s)\omega$ , где  $h$  эрмитова

метрика на  $E$ , которая снимается с тривиального расслоения  $\mathcal{O}^2$ , как и прежде. При более детальном рассмотрении окажется, что на эту задачу можно смотреть как на обобщение классической задачи Гаусса о количестве точек с целыми взаимно простыми координатами внутри круга данного радиуса, поскольку в случае  $E = \mathcal{O}^2$  с тривиальной метрикой можно проверить, что мы приходим именно к этой задаче.

Пусть  $E$  расслоение ранга 2 на  $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1$  с тривиальным общим слоем и простыми подскоками. Из теоремы 1 мы знаем, что  $E \simeq V(\nu, \alpha)$  для некоторых  $\nu, \alpha \in \mathbb{Z}$ . Также мы предполагаем, что у  $E$  существуют невырожденные сечения степени 1, поэтому, как следует из [1, 18.3.5.7],  $E$  изоморфно  $V(\nu, \theta\lambda^2)$ , где  $\theta = \pm 1$ ,  $\lambda \in \mathbb{Z}$ ,  $(\lambda, \nu) = 1$ . Тогда из теоремы классификации мы получаем, что  $E \simeq V(\nu, 1)$ .

Таким образом мы будем изучать невырожденные сечения степени 1 расслоения  $E = V(\nu, 1)$  над  $\widehat{\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1}$ , метрику на  $E$  мы выбираем ту же, что и ранее, то есть снимаем ее с метризованного расслоения  $\mathcal{O}^2$  с тривиальной метрикой с помощью произвольного допустимого изоморфизма  $\mathcal{L} : E \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^2$ . Как и ранее зафиксируем голоморфные реперы  $(e_1, e_2)$  над  $U_0$  и  $(f_1, f_2)$  над  $U_1$ , связанные матрицей склейки

$$\sigma = \begin{pmatrix} y & \nu \\ 0 & x \end{pmatrix}.$$

Все обозначения мы будем брать из 4.1 и 4.2 и производить все основные вычисления над  $U_0$ . В частности матрица Грама метрики  $h$  расслоения  $E$  над  $U_0$  будет

$$H = \begin{pmatrix} g_1 + 2\operatorname{Re}(g_2x) + g_4|x|^2 & -\nu g_2 - \nu g_4x \\ -\nu g_2 - \nu g_4\bar{x} & \nu^2 g_4 \end{pmatrix},$$

где  $g_1, g_4 > 0$ ,  $g_2 \in \mathbb{R}$  и  $\det \Gamma = g_1 g_4 - g_2^2 > 0$ .

Рассмотрим  $s \in H^0(X, E(1))^\times$  – произвольное невырожденное сечение степени 1:

$$s = s_1 e_1 t_0 + s_2 e_2 t_0 = (u_0 + \nu w x) e_1 t_0 + (v_0 + v_1 x + w x^2) e_2 t_0,$$

где  $u_0, v_0, v_1, w \in \mathbb{Z}$  и  $u_0^2 - \nu u_0 v_1 + \nu^2 v_0 w = \pm 1$ . Вычислим его норму:

$$\begin{aligned} h(s, s) &= (|s_1|^2 h(e_1, e_1) + s_1 \bar{s}_2 h(e_1, e_2) + \bar{s}_1 s_2 h(e_2, e_1) + |s_2|^2 h(e_2, e_2)) \frac{1}{1 + |x|^2} \\ &= \frac{d_0}{1 + |x|^2} + \frac{d_2}{1 + |x|^2} |x|^2 + \alpha(x, \bar{x}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} d_0 &= g_1 u_0^2 + g_4 \nu^2 v_0^2 - 2g_2 \nu u_0 v_0, \\ d_2 &= g_1 \nu^2 w^2 + (u_0 - \nu v_1)(-g_4 \nu v_1 + 2g_2 \nu w + g_4 u_0), \end{aligned}$$

а  $\alpha(x, \bar{x})$  такая, что  $\int_{U_0} \alpha \omega = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} |s|_{L_2}^2 &= \int_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1} h(s, s) \omega = \\ &= \frac{1}{2} (g_1(u_0^2 + \nu^2 w^2) + 2g_2(\nu u_0(w - v_0) - \nu^2 v_1 w) + g_4((u_0 - \nu v_1)^2 + \nu^2 v_0^2)). \end{aligned}$$

Наша основная задача состоит в том, чтобы найти главный член асимптотики количества невырожденных сечений  $s \in H^0(X, E(1))^\times$  таких, что  $|s|_{L_2}^2 < R$ . Обозначим это число как  $N_\nu^\times(R)$ , поскольку расслоения, имеющие невырожденные сечения степени 1, характеризуются одним параметром  $\nu$ . Мы сведем нашу задачу к гиперболической проблеме круга, поскольку, как мы ранее установили, на множестве  $H^0(X, E(1))^\times$  можно ввести структуру группы, причем получающаяся группа изоморфна  $\Gamma(\nu) \rtimes \mu_4(\mathbb{Z}/\nu)$ . Далее кратко опишем, что мы будем понимать под этой задачей.

## 5.1 Гиперболическая проблема круга

Рассмотрим теперь в качестве нашего основного пространства верхнюю комплексную полуплоскость  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, x \in \mathbb{R}, y > 0\}$  с



метрикой Лобачевского  $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$ . В качестве аналога группы целых сдвигов Евклидова пространства будет выступать некоторая фиксированная арифметическая дискретная группа изометрий  $\mathbb{H}$ . Мы возьмем в качестве этой группы главную конгруэнц-подгруппу  $\Gamma(\nu)$ . Расстояние между двумя точками  $z_1$  и  $z_2$  в  $\mathbb{H}$  вычисляется по известной формуле

$$\rho(z_1, z_2) = 2 \operatorname{arsinh} \left( \frac{\|z_1 - z_2\|}{2\sqrt{\operatorname{Im}(z_1) \operatorname{Im}(z_2)}} \right).$$

Пусть  $\Gamma \subset \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$  некоторая конгруэнц-подгруппа. Под гиперболической проблемой круга мы будем понимать оценку следующего числа:

$$\mathcal{N}_\Gamma(z_0, R) = \# \{ \gamma \in \Gamma : 2 \cosh(\rho(\gamma i, z_0)) \leq R \}.$$

Нас будет интересовать самая грубая оценка, то есть только главный член асимптотики. Его значение является известным (см. [7, Theorem 12.1]), а именно  $\mathcal{N}_\Gamma(z_0, R) \sim 2\pi R / \operatorname{vol}(\Gamma)$ , где  $\operatorname{vol}(\Gamma)$  – объем фундаментальной области группы  $\Gamma$ .

## 5.2 Основная теорема

**Теорема 4.** Пусть  $E$  расслоение ранга 2 на  $\widehat{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{Z}}$  с тривиальным общим слоем, простыми подскоками и имеющее невырожденные сечения степени 1. Тогда

$$N_\nu^\times(R) \sim \frac{12\mu \exp(\widehat{c}_2(E) + \widehat{c}_1(E) \cdot \widehat{c}_1(\mathcal{O}(1))) R}{[\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(\exp(\widehat{c}_2(E)))]},$$

где  $\mu = \#\mu_4(\mathbb{Z}/\nu)$ .

*Доказательство.* Для каждого  $\zeta \in \mu_4(\mathbb{Z}/\nu)$  зафиксируем матрицу  $\begin{pmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 \\ \zeta_3 & \zeta_4 \end{pmatrix} \in \operatorname{GL}_2(\mathbb{Z})$ , являющуюся подъемом матрицы  $\begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix} \in \operatorname{GL}_2(\mathbb{Z}/\nu)$  при естественной сюръекции  $\operatorname{GL}_2(\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \{g \in \operatorname{GL}_2(\mathbb{Z}/\nu) : \det g = \pm 1\}$ . По предложению 1 у нас имеется изоморфизм между  $\Gamma(\nu) \rtimes \mu_4(\mathbb{Z}/\nu)$  и  $H^0(X, E(1))^\times$ . При этом изоморфизме пара  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(\nu)$  и  $\zeta \in \mu_4(\mathbb{Z}/\nu)$  перейдет в сечение  $s = (u_0 + \nu wx)e_1 t_0 + (v_0 + v_1 x + v_2 x^2)e_2 t_0$ , где  $u_0 = \zeta_3 b + \zeta_4 d$ ,  $v_0 = -(\zeta_1 b + \zeta_2 d)/\nu$ ,  $v_1 = (\zeta_3 b + \zeta_4 d - \zeta_1 a - \zeta_2 c)/\nu$ ,  $w = (\zeta_3 a + \zeta_4 c)/\nu$ .

Явный вид этого изоморфизма легко выводится из матричного представления невырожденных сечений:

$$\begin{pmatrix} u_0 - \nu v_1 & -\nu v_0 \\ \nu w & u_0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 \\ \zeta_3 & \zeta_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Зафиксируем  $\zeta \in \mu_4(\mathbb{Z}/\nu)$  и будем искать главный член асимптотики  $N_\nu^\times(R)$  только для сечений, соответствующих матрицам  $\begin{pmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 \\ \zeta_3 & \zeta_4 \end{pmatrix} \Gamma(\nu)$ . В итоге окажется, что он не зависит от  $\zeta$ , поэтому, для того чтобы получить главный член асимптотики для всех сечений, достаточно будет умножить полученный результат на  $\mu$ .

Для начала перепишем  $L_2$ -норму сечения через  $a, b, c, d$ :

$$|s|_{L_2}^2 = \frac{1}{2} (B_1(a^2 + b^2) + B_2(ac + bd) + B_3(c^2 + d^2)),$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= g_1\zeta_3^2 + g_4\zeta_1^2 + 2g_2\zeta_1\zeta_3, \\ B_2 &= 2g_1\zeta_3\zeta_4 + 2g_4\zeta_1\zeta_2 + 2g_2(\zeta_1\zeta_4 + \zeta_2\zeta_3), \\ B_3 &= g_1\zeta_4^2 + g_4\zeta_2^2 + 2g_2\zeta_2\zeta_4. \end{aligned}$$

Пусть  $|s|_{L_2}^2 \leq R$ , рассмотрим  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(\nu)$ ,  $z_0 = \alpha + \beta i$ , где

$$\alpha = -\frac{B_2}{2B_1}, \quad \beta = \sqrt{\frac{4B_3B_1 - B_2^2}{4B_1^2}} = \frac{1}{B_1} \sqrt{\det \Gamma},$$

$$T = \frac{2}{\sqrt{\det \Gamma}} R.$$

С помощью стандартных неравенств легко проверяется, что  $B_1 > 0$  и  $\beta \in \mathbb{R}$ . Тогда

$$\rho(\gamma i, \alpha + \beta i) = 2 \operatorname{arsinh} \left( \frac{||\gamma i - (\alpha + \beta i)||}{2\sqrt{\frac{\beta}{c^2 + d^2}}} \right).$$

Расписав последнее выражение, мы приходим к следующему равенству:

$$\rho(\gamma i, \alpha + \beta i) = 2 \operatorname{arsinh} \left( \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + b^2) \frac{1}{\beta} - 2(ac + bd) \frac{\alpha}{\beta} + (c^2 + d^2) \left( \frac{\alpha^2}{\beta} + \beta \right) - 2} \right).$$

Пусть  $2 \cosh(\rho(\gamma i, z_0)) \leq T$ , что, как следует из предыдущего равенства, равносильно

$$(a^2 + b^2) \frac{1}{\beta} - 2(ac + bd) \frac{\alpha}{\beta} + (c^2 + d^2) \left( \frac{\alpha^2}{\beta} + \beta \right) \leq T. \quad (7)$$

Подставим в  $\alpha$  и  $\beta$  наши выбранные ранее значения и домножим обе части неравенства (7) на  $B_1\beta/2$ , тогда в конечном итоге мы придем к следующему неравенству:

$$\frac{1}{2} (B_1(a^2 + b^2) + B_2(ac + bd) + B_3(c^2 + d^2)) \leq R.$$

Тогда, поскольку  $\mathcal{N}_\Gamma(z_0, T) \sim 2\pi T / \text{vol}(\Gamma)$ , количество четверок  $(a, b, c, d)$ , удовлетворяющих предыдущему неравенству, имеет главный член асимптотики

$$\frac{2\pi T}{\frac{\pi}{3} [\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(\nu)]} = \frac{12R}{\sqrt{\det \Gamma} [\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(\nu)]}$$

Теперь заметим, что

$$\widehat{c}_1(E) \cdot \widehat{c}_1(\mathcal{O}(1)) = (0, -\log(\nu^2 \det(\Gamma))) \cdot ((0, -\log(\frac{|x|^2}{1+|x|^2}))) = (0, -\log(\nu^2 \det(\Gamma))).$$

Тогда имеем

$$\deg(\widehat{c}_1(E) \cdot \widehat{c}_1(\mathcal{O}(1))) = -\frac{1}{2} \log(\nu^2 \det(\Gamma)).$$

Таким образом главный член асимптотики количества невырожденных сечений для данного  $\zeta$  перепишется так:

$$\frac{12 \exp(\widehat{c}_2(E) + \widehat{c}_1(E) \cdot \widehat{c}_1(\mathcal{O}(1))) R}{[\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(\exp(\widehat{c}_2(E)))]}.$$

Отсюда, после учета всех  $\zeta \in \mu_4(\mathbb{Z}/\nu)$ , получаем итоговую формулу.  $\square$

### 5.3 Случай неинвариантной относительно комплексного сопряжения метрики

Предположим теперь, что мы находимся в прежней ситуации, однако наши расслоения обладают не инвариантной относительно комплексного сопряжения  $F_\infty$  метрикой и имеют классы Черна, вычисляемые старыми

формулами. Формально эта ситуация будет отличаться от старой только тем, что теперь элемент  $g_2$  матрицы  $\Gamma$  будет не вещественным, а комплексным, и  $\overline{g_3} = g_2$ . Тогда, проводя вычисления, аналогичные старым, можно написать формулу для асимптотики количества невырожденных сечений и для таких метрик. Однако, чтобы в конечной формуле все элементы были определены инвариантно, нужно будет рассмотреть следующую конструкцию.

### 5.3.1 Симплектическая форма расслоения $E$

Мы построим симплектическую форму расслоения  $E$  и ее определитель. Для эрмитова расслоения  $(E, h)$  над  $\hat{X}$  рассмотрим расслоение  $E_{\mathbb{R}} = E \otimes \mathbb{R}$  на  $X(\mathbb{R})$  с метрикой  $h|_{X(\mathbb{R})}$ . Симплектической формой расслоения  $(E, h)$  будем называть  $w = \text{Im } h|_{X(\mathbb{R})} \in \text{Hom}(E_{\mathbb{R}} \otimes E_{\mathbb{R}}, \mathcal{O}_{X(\mathbb{R})})$ . Теперь зафиксируем изоморфизм  $\mathcal{O} \xrightarrow{\simeq} \Lambda^2(E)$  над конечной частью  $X$ . Тогда композиция стрелок

$$\mathcal{O} \xrightarrow{\simeq} \Lambda^2(E) \longrightarrow \bigotimes^2 E \xrightarrow{w} \mathcal{O} \quad (8)$$

задает нам элемент из  $\text{Aut}(\mathcal{O}_{X(\mathbb{R})}) \simeq \mathbb{R}^{\times}$ , его мы будем называть пфаффианом симплектической формы  $E$  и обозначать  $\text{pf}(w)$ . Положим  $\det(w) = \text{pf}^2(w)$ . Заметим, что уже  $\det(w)$  не зависит от выбора изоморфизма между  $\mathcal{O}$  и  $\Lambda^2(E)$  над  $\mathbb{Z}$ , в отличие от пфаффиана.

### 5.3.2 Вычисление определителя симплектической формы и итоговая формула

Теперь вычислим определитель симплектической формы  $w$  нашего расслоения  $E$ . Над  $U_0$  в базисе  $e_1, e_2$  форме  $w$  будет соответствовать матрица

$$W = \begin{pmatrix} w(e_1, e_1) & w(e_1, e_2) \\ w(e_2, e_1) & w(e_2, e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\nu \text{Im}(g_2) \\ \nu \text{Im}(g_2) & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть у нас также зафиксирован изоморфизм  $\mathcal{O} \xrightarrow{\simeq} \Lambda^2(E)$ , определенный над  $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1$ , при котором  $1 \mapsto e_1 \wedge e_2$ . Тогда, если пройти по стрелкам последовательности (8), то получим  $1 \mapsto e_1 \wedge e_2 \mapsto \frac{1}{2}(e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1) \mapsto -\nu \text{Im}(g_2)$ . Таким образом  $\det(w) = \nu^2 \text{Im}(g_2)^2$ . Следующая формула приводится без доказательства, однако она выводится абсолютно аналогично формуле из теоремы 4.

**Замечание 2.** Пусть  $E$  расслоение на  $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1$  ранга 2 с тривиальным общим слоем, простыми подскоками и имеющее невырожденные сечения степени 1. Также предположим, что метрика на  $E$  индуцируется произвольным изоморфизмом с тривиальной метрики на  $\mathcal{O}^2$ , то есть может быть не инвариантной относительно  $F_{\infty}$ . Тогда

$$N_{\nu}^{\times}(R) \sim \frac{12\mu \exp(\widehat{c}_2(E))R}{\sqrt{\exp(-2\widehat{c}_1(E) \cdot \widehat{c}_1(\mathcal{O}(1))) + \det(w) [\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(\exp(\widehat{c}_2(E)))]}},$$

где  $\mu = \#\mu_4(\mathbb{Z}/\nu)$ .

## Список литературы

- [1] A. L. Smirnov, On filtrations of vector bundles over  $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ . Arithmetic and Geometry, London Math. Soc. Lect. Note Series, 420, Cambridge Univ. Press (2015), 436-457.
- [2] А. Л. Смирнов, Векторные расслоения на  $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$  с простыми подскоками. Вопросы теории представлений алгебр и групп. 30, Зап. научн. сем. ПОМИ, 452, ПОМИ, СПб., 2016, 202-217; J. Math. Sci., 232:5 (2018), 721-731.
- [3] C. Soulé, D. Abramovich, J. F. Burnol, J. K. Kramer, Lectures on Arakelov Geometry. Cambridge University Press (1992).
- [4] C. Soulé, A vanishing theorem on arithmetic surfaces. Inventiones mathematicae 116.1-3 (1994), 577-600.
- [5] P. Deligne, Le déterminant de la cohomologie. Contemp. Mathematics 67 (1987), 93-177.
- [6] H. Tamvakis, Bott-Chern forms and arithmetic intersections. Enseign. Math. 43 (1997), 34-54.
- [7] H. Iwaniec, Spectral methods of automorphic forms (Second Edition). American Mathematical Society (2002).