

## Один этюд на тему ренормировки

**Александр В. Иванов**

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А.Стеклова РАН,  
Фонтанка 27, Санкт-Петербург, 191023, Россия

E-mail: regul1@mail.ru

07 апреля 2025 г.

К 85-летию ПОМИ РАН

*«Что ни личность – великий знаток,  
И без всякой притом профанации.  
Слов немного – ну, может, пяток...  
Но какие из них комбинации!»*

А.А.Иванов (1936–1996)

**Аннотация.** В данной работе изучается ренормировка, то есть процедура устранения особенностей, для специальной модели как с применением комбинаторной техники в рамках работы с формальными рядами, так и с помощью предельного перехода в стандартном многомерном интеграле с учетом удаления сингулярной составляющей. Особое внимание уделяется сравнительному анализу двух взглядов на проблему. Удивительным оказывается тот факт, что расходимости, которые в одном подходе имеют один и тот же вид, в другом подходе приобретают различную природу и приводят к интересным следствиям. В качестве регуляризации используется специальная деформация спектра.

**Ключевые слова и фразы:** ренормировка, регуляризация, деформация спектра, гауссов интеграл, диаграммная техника, формальный ряд, многомерный интеграл.

## Содержание

1	Введение	3
2	Математический подход	3
3	Физический подход	10
4	Заключение	14
5	Список литературы	14

## **ПРЕПРИНТЫ**

Санкт-Петербургского отделения  
Математического института им. В. А. Стеклова  
Российской академии наук

## **PREPRINTS**

of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

---

## **ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР**

С. В. Кисляков

## **РЕДКОЛЛЕГИЯ**

В. М. Бабич, М. А. Всемиров, А. И. Генералов,  
И. А. Ибрагимов, Л. Ю. Колотилина, Ю. В. Матиясевич,  
Н. Ю. Нецветаев, С. И. Репин, Г. А. Серегин

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Санкт-Петербургское отделение Математического института  
им. В.А.Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:  
ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г.  
Выдано Федеральной службой по надзору  
в сфере связи и массовых коммуникаций

## **Контактные данные:**

191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27  
телефоны: (812) 312-40-58; (812) 571-57-54  
e-mail: admin@pdmi.ras.ru  
<https://www.pdmi.ras.ru/preprint/>

Заведующая информационно-издательским сектором В. Н. Симонова

# 1 Введение

Регуляризация и ренормировка играют важную роль в современной теоретической физике и используются в большом количестве квантово-полевых моделей [1–6]. Однако в математической физике и чистой математике такие понятия встречаются нечасто, либо имеют немного другой смысл, см. [7,8]. Прежде всего это связано с тем фактом, что математический аппарат, посвященный функциональному интегрированию, см. [9–11], развит на данный момент в недостаточной степени. Именно по этой причине основные квантово-полевые модели приходится изучать посредством пертурбативного метода, для которого вполне достаточно понимания функционального интеграла в весьма урезанном виде.

С точки зрения пертурбативного подхода, который связан с анализом формальных (реже асимптотических) рядов, к понятиям регуляризации и ренормировки приводит наличие неинтегрируемых плотностей и сингулярных функционалов в коэффициентах исследуемого ряда. Такой подход в данной статье будет называться «физическим». Однако в рамках другого подхода, который будет называться «математическим», в тех моделях, в которых можно воспользоваться строгим определением функционального интеграла, формальные ряды уже не появляются, а следовательно, и причины введения регуляризации и применения ренормировки становятся уже другими. Обратим внимание, что слова «физический» и «математический» используются лишь для отличия, оба подхода имеют аккуратный математический вид.

В данной работе производится анализ модели специального вида, допускающей как физическое описание, так и формулировку с использованием функционального интеграла в смысле перехода к пределу в конечномерном случае, см. [12–14]. Последний сюжет является достаточно популярным и используется для различных моделей [15–19]. Такая постановка задачи позволяет проследить все тонкости обоих подходов, произвести сравнительный анализ, а также выявить положительные и отрицательные стороны. Удивительным оказывается тот факт, что расходимости, возникающие при использовании пертурбативного подхода из-за появления неинтегрируемых плотностей, во втором подходе обретают совершенно другой смысл: они проявляются либо наличием быстро осциллирующей фазы, либо занулением всего функционала. При этом регуляризация и ренормировка в обоих подходах производятся одинаково.

Целью данной работы является демонстрация применения математического формализма к процессу, часто возникающему в теоретической физике, а также попытка обратить внимание исследователей, работающих в близких математических областях, на существующую интересную проблему. Математический анализ представленной в статье модели можно считать кратким планом, демонстрирующим, в каком виде процедуру ренормировки хотелось бы обобщить на более широкий класс моделей.

Работа имеет следующую структуру. В секции 2 изучается случай с использованием специального вида функционального интеграла. Приводятся необходимые определения и доказательства. Обсуждаются такие понятия, как регуляризация, ренормировка, предельный переход. В секции 3 изучается подход, основанный на использовании формальных рядов. Обсуждаются такие понятия как диаграммная техника, а также регуляризация и ренормировка. Раздел также содержит сравнение подходов. В секции 4 приводятся заключительные замечания.

## 2 Математический подход

**Определение 1.** Пусть  $V$  обозначает множество последовательностей  $a = \{a_j\}_{j=1}^{+\infty}$ , элементы  $a_j$  которых принадлежат  $\mathbb{R}$ . Пусть также  $n \in \mathbb{N}$ . Символом  $p_n$  обозначим проектор из  $V$  в  $V$ , действующий на произвольный  $a \in V$  согласно правилу:

$$(p_n(a))_j = a_j \text{ для } j \in \{1, \dots, n\}, \quad (p_n(a))_j = 0 \text{ для } j > n.$$

**Определение 2.** Пусть  $k \in \mathbb{N}$ . Символом  $B_k$  обозначим подмножество из  $V$ , все элементы  $\beta \in B_k$  которого удовлетворяют двум условиям:

1.  $\beta_j > 0$  для всех  $j \in \mathbb{N}$ ;
2.  $b_k(\beta) = \sum_{j=1}^{+\infty} \beta_j^{-k} < +\infty$ .

В дополнение символом  $\mu(\beta)$  будем обозначать минимальный элемент, то есть  $\min_{j>0}(\beta_j)$ .

**Замечание 1.** Если  $\beta \in \mathcal{B}_k$  для некоторого  $k \in \mathbb{N}$ , то  $\beta \in \mathcal{B}_j$  для всех  $k \leq j \in \mathbb{N}$ . Также обратим внимание, что при необходимости элементы последовательности  $\beta$  можно упорядочить по возрастанию, так как единственной точкой накопления является бесконечность.

**Определение 3.** Пусть  $n, k \in \mathbb{N}$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , а также  $\beta \in \mathcal{B}_k$ . Введем в рассмотрение функцию

$$\Phi_n(s, \beta) = \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} \frac{da_j}{\sqrt{\pi/\beta_j}} e^{-\beta_j a_j^2 + i s a_j}. \quad (1)$$

**Замечание 2.** Обратим внимание, что интегральное представление (1) задано корректно для всех  $s \in \mathbb{C}$ , таких что  $\text{Im}(s) > -\mu(\beta)$ . В рамках данной работы предположение  $\text{Im}(s) = 0$  не является существенным ограничением, поскольку может быть достигнуто путем изменения нормировки интеграла и переопределения элементов  $\beta_j \rightarrow \tilde{\beta}_j = \beta_j - \text{Im}(s)$ .

**Пример 1.** В математической физике набор  $\beta$  обычно называется спектром и имеет прямое отношение к дифференциальным операторам. Рассмотрим следующий пример. Пусть  $\mathbb{N} \ni n > 1$  и  $\mathbf{B} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$  является  $n$ -мерным шаром. В области  $\mathbf{B}$  можно рассмотреть спектральную задачу с нулевым граничным условием Дирихле

$$-\sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 u(x) = \lambda u(x), \quad u(x)|_{|x|=1} = 0.$$

Известно, см. параграф 4 главы 5 в [20], что данная задача обладает счетным спектром  $\beta = \{\beta_j\}_{j=1}^{+\infty}$  и соответствующим набором собственных функций  $\{\phi_j(x) \in L^2(\mathbf{B})\}_{j=1}^{+\infty}$ . При этом набор  $\beta$  имеет единственную точку накопления на бесконечности, а все его элементы строго положительны. Функция Грина для упомянутого оператора в данном случае имеет вид

$$G(x, y) = \sum_{j=1}^{+\infty} \phi_j(x) \beta_j^{-1} \phi_j(y),$$

где  $x, y \in \mathbf{B}$  и  $x \neq y$ . Обратим внимание на поведение функции Грина вблизи диагонали  $x \sim y$ , см. [21, 22], которое в главном порядке при разложении по  $x - y$  пропорционально функции

$$\ln(|x - y|) \text{ для } n = 2 \text{ и } |x - y|^{2-n} \text{ для } n > 2.$$

Ясно, что в этом случае  $b_1(\beta) = +\infty$  для всех  $n > 1$ , так как величина  $G(x, y)$  расходится при  $y \rightarrow x$  внутри области  $\mathbf{B}$ . Сходимость остальных чисел  $b_k(\beta)$ , где  $k > 1$ , удобно анализировать с использованием представления

$$b_k(\beta) = \int_{\mathbf{B}} d^n x_1 \dots \int_{\mathbf{B}} d^n x_k G(x_1, x_2) \cdot \dots \cdot G(x_{k-1}, x_k).$$

В частности, если  $n = 2, 3$ , то в этом случае  $\beta \in \mathcal{B}_2$  ввиду сходимости интегралов.

**Лемма 1.** Пусть верны предположения определения 3. Тогда для функции (1) справедливо следующее представление

$$\Phi_n(s, \beta) = \left( \prod_{j=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{da_j}{\sqrt{\pi/\beta_j}} \right) e^{-S_0[a, \beta] + i s S_1[p_n(a)]}, \quad (2)$$

где вспомогательные объекты определяются равенствами

$$S_0[a, \beta] = \sum_{j=1}^{+\infty} \beta_j a_j^2, \quad S_1[a] = \sum_{j=1}^{+\infty} a_j^2. \quad (3)$$

*Доказательство.* Заметим, что объект из (2) может быть факторизован на две части

$$\left( \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} \frac{da_j}{\sqrt{\pi/\beta_j}} e^{-S_0[a,\beta] + isS_1[p_n(a)]} \right) \left( \prod_{j=n+1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{da_j}{\sqrt{\pi/\beta_j}} e^{-S_0[a-p_n(a),\beta]} \right),$$

где первая часть совпадает с (1), в то время как вторая равна единице.  $\square$

**Лемма 2.** Пусть верны предположения определения 3. Тогда для функции (1) справедливо следующее представление

$$\Phi_n(s, \beta) = \prod_{j=1}^n \left( 1 - is/\beta_j \right)^{-\frac{1}{2}} = f_n(s) e^{ig_n(s)/2}, \quad (4)$$

где

$$f_n(s) = \prod_{j=1}^n \left( 1 + s^2/\beta_j^2 \right)^{-\frac{1}{4}}, \quad g_n(s) = \sum_{j=1}^n \arctan(s/\beta_j). \quad (5)$$

*Доказательство.* Первое равенство в (4) следует из явного вычисления гауссовых интегралов в (1). Второе равенство является следствием представления

$$1 - is/\beta_j = \sqrt{1 + s^2/\beta_j^2} e^{-i \arctan(s/\beta_j)}$$

для комплексного числа в виде произведения абсолютного значения на фазовый множитель.  $\square$

**Определение 4.** Символами  $\Phi(s, \beta)$ ,  $f(s)$  и  $g(s)$  будем обозначать предельные значения функций  $\Phi_n(s, \beta)$ ,  $f_n(s)$  и  $g_n(s)$  при  $n \rightarrow +\infty$ , если такие существуют.

**Лемма 3.** Пусть  $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  и  $\beta \in \mathcal{B}_2$ . Тогда, с учетом всего вышеизложенного, верны следующие утверждения:

1.  $0 < f(s) < f_{n+1}(s) < f_n(s) < 1$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ ;
2.  $f(\cdot) \in L^p(\mathbb{R})$  для любого  $p > 0$ ;
3.  $g(s) < +\infty$  тогда и только тогда, когда  $b_1(\beta) < +\infty$ ;
4.  $\Phi_n(s, \beta)$  имеет предел при  $n \rightarrow +\infty$  тогда и только тогда, когда  $b_1(\beta) < +\infty$ .

Если  $s = 0$ , то справедливы равенства  $\Phi(0, \beta) = 1$ ,  $f(0) = 1$  и  $g(0) = 0$ .

*Доказательство.* Заметим, что число  $1 + s^2/\beta_j^2 \geq 1$ , при этом равенство достигается только в точке  $s = 0$ . Следовательно, для любого  $n \in \mathbb{N}$  и  $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  справедлива оценка

$$f_{n+1}(s) = \prod_{j=1}^{n+1} \left( 1 + s^2/\beta_j^2 \right)^{-\frac{1}{4}} < \prod_{j=1}^n \left( 1 + s^2/\beta_j^2 \right)^{-\frac{1}{4}} = f_n(s) < \dots < 1,$$

которая, таким образом, верна и для предельного случая. Далее заметим, что из соотношения  $\ln(1+u) \leq u$ , верного для всех  $u \geq 0$ , следует оценка снизу вида

$$f(s) = \prod_{j=1}^{+\infty} \exp \left( -\frac{1}{4} \ln(1 + s^2/\beta_j^2) \right) \geq \exp \left( -\frac{s^2}{4} \sum_{j=1}^{+\infty} \beta_j^{-2} \right) = e^{-s^2 b_2(\beta)/4} > 0.$$

Второе свойство следует из того факта, что функция  $f_n(s)$  при  $s \rightarrow \pm\infty$  имеет поведение  $|s|^{-n/2}$ . Таким образом, для фиксированного  $p > 0$  все функции  $f_n(\cdot)$  с индексом  $n > 2/p$  принадлежат  $L^p(\mathbb{R})$ . Следовательно, учитывая первое свойство, верно  $f(\cdot) \in L^p(\mathbb{R})$ .

Далее рассмотрим  $v \in \mathbb{R}$ , тогда верна цепочка равенств

$$\arctan(v) - v = v \int_0^1 \frac{dt}{1 + v^2 t^2} - v = -v^3 \int_0^1 \frac{dt t^2}{1 + v^2 t^2}, \quad (6)$$

из которой следует оценка вида

$$\left| \arctan(v) - v \right| \leq |v|^3/3.$$

Следовательно, подставляя в последнее соотношение  $v = s/\beta_j$  и суммируя по индексу  $j$  от 1 до  $n$ , получаем неравенство

$$\left| g_n(s) - s \sum_{j=1}^n \beta_j^{-1} \right| \leq \frac{s^3}{3} \sum_{j=1}^n \beta_j^{-3} \leq \frac{|s|^3 b_2(\beta)}{3\mu(\beta)} < +\infty,$$

из которого получается третья часть утверждения. Четвертое утверждение является следствием третьего и формулы (4). Последняя часть следует из прямой подстановки  $s = 0$  в (5).  $\square$

**Определение 5.** Пусть  $\beta \in \mathcal{B}_2$ . Регуляризующей функцией будем называть функцию  $\rho(\cdot) \in C(\mathbb{R}_+, [0, 1])$  такую, что  $\rho(0) = 1$ , а также выполнено свойство

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\beta_j(\Lambda)} = r(\Lambda) + \kappa + o(1) < +\infty, \text{ где } \beta_j(\Lambda) = \beta_j / \rho(\sqrt{\beta/\Lambda}), \quad (7)$$

для всех  $\Lambda$ , больших некоторого фиксированного значения. Здесь функция  $r(\Lambda)$  обозначает сингулярную составляющую по параметру  $\Lambda$  и стремится к  $+\infty$  при  $\Lambda \rightarrow +\infty$ . Функция  $\kappa$  является константой и не зависит от  $\Lambda$ .

**Пример 2.** В рассматриваемых условиях регуляризующую функцию всегда можно найти. В качестве варианта можно предложить характеристическую функцию интервала  $[0, a]$  для некоторого фиксированного  $a > 0$ . Выбор не является единственным.

**Замечание 3.** Функции  $r(\cdot)$  и  $\kappa$  зависят от спектра и регуляризующей функции, однако эти обозначения как правило будут опускаться для удобства. Также обратим внимание, что для любого  $\beta \in \mathcal{B}_1$  выполняется  $r(\Lambda) = 0$ .

**Определение 6.** Пусть  $\beta \in \mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{B}_1$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , и  $\rho(\cdot)$  – регуляризующая функция из определения 5. Регуляризацией функции  $\Phi(s, \beta)$  будем называть переход к функции  $\Phi(s, \beta(\Lambda))$  путем деформации

$$\beta = \{\beta_j\}_{j=1}^{+\infty} \rightarrow \beta(\Lambda) = \{\beta_j(\Lambda)\}_{j=1}^{+\infty}.$$

Снятием регуляризации будем называть предельный переход  $\Lambda \rightarrow +\infty$ .

**Определение 7.** Объект  $\Phi(s, \beta(\Lambda))$  из определения 6 называется ренормируемым, если путем сдвига внутренних параметров,  $s$  и  $\beta(\Lambda)$ , а также изменением общего множителя, абсолютного значения или фазы, можно получить конечный предел после снятия регуляризации. Формально общий вид ренормированной функции имеет вид

$$e^{h_1 + i h_2} \Phi(s + h_3, \{\beta_j(\Lambda) + h_{3+j}\}_{j=1}^{+\infty}),$$

где  $h_i = h_i(\Lambda, s, \beta)$  вещественны для всех  $i \in \mathbb{N}$ . При этом все ненулевые введенные функции должны расходиться при снятии регуляризации для всех фиксированных значений  $s$  и должны стремиться к нулю при  $s \rightarrow 0$  для каждого фиксированного значения  $\Lambda$ .

**Замечание 4.** Из определения 7 следует, что если функция  $\Phi(s, \beta)$  существует и конечна, то ренормировка ее не изменит.

**Замечание 5.** Ренормировка не является однозначной. При наличии расходимостей она приводит к семейству функций.

**Замечание 6.** Ренормируемость в общем случае, при рассмотрении других функций, может зависеть от введенной регуляризации, поэтому в определении стоит именно регуляризованная функция  $\Phi(s, \beta(\Lambda))$ , а не  $\Phi(s, \beta)$ .

**Теорема 1.** Пусть  $s \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \in \mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{B}_1$ , а также выполнены предположения из определений 5 и 6. Функция  $\Phi(s, \beta(\Lambda))$  является ренормируемой. Процесс ренормировки заключается в изменении фазового множителя переходом

$$\Phi(s, \beta(\Lambda)) \rightarrow \Phi(s, \beta(\Lambda))e^{-is(r(\Lambda)+\theta)/2},$$

где функция  $r(\Lambda)$  из (7), и  $\theta \in \mathbb{R}$  – свободный параметр. Процесс снятия регуляризации после ренормировки приводит к функции

$$\Phi(s, \beta, \theta) = \Phi(s, \beta(\Lambda))e^{-is(r(\Lambda)+\theta)/2} \Big|_{\Lambda \rightarrow +\infty} = f(s) \exp \left( -\frac{i}{2}(s\theta + g_r(s)) \right), \quad (8)$$

где

$$g_r(s) = -s\kappa + s^3 \int_0^1 dt \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{t^2 \beta_j^{-3}}{1 + s^2 t^2 / \beta_j^2}. \quad (9)$$

*Доказательство.* Необходимо воспользоваться представлением из леммы 2, утверждениями из леммы 3 и соотношением (6). Действительно, в этом случае видно, что показатель фазового множителя вычитает сингулярную часть ряда, которая расходится при снятии регуляризации. Оставшаяся часть приводит в заявленному ответу.  $\square$

**Замечание 7.** В краткой форме проделанные выше манипуляции можно представить в виде следующей схемы

$$\Phi(s, \beta) \xrightarrow{\text{рег.}} \Phi(s, \beta(\Lambda)) \xrightarrow{\text{рен.}} \Phi(s, \beta(\Lambda))e^{-is(r(\Lambda)+\theta)/2} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow +\infty} \Phi(s, \beta, \theta).$$

Действительно, стартуя с объекта, который формально был пределом расходящейся последовательности (1), то есть фактически не существовал, мы получили конечную осмысленную функцию. При этом такой переход был сделан в три этапа.

1. Введение регуляризации. После этого объект стал конечным и зависящим от вспомогательного регуляризующего параметра  $\Lambda$ .
2. Ренормировка. После этого из регуляризованного объекта были удалены сингулярные составляющие. При этом появилась зависимость от дополнительного параметра  $\theta$ , который в некотором смысле символизирует начальные условия. В приложениях этот параметр фиксируется исходя из физических и вычислительных соображений.
3. Снятие регуляризации. После этого зависимость от вспомогательного регуляризующего параметра  $\Lambda$  исчезла. При этом зависимость от дополнительного параметра  $\theta$  осталась.

**Определение 8.** Пусть  $\lambda \geq 0$  и выполнены предположения из определения 3. Введем в рассмотрение функцию

$$Z_n(\lambda, \beta) = \left( \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} \frac{da_j}{\sqrt{\pi/\beta_j}} \right) \exp \left( -S_0[p_n(a)] - \lambda \left( S_1[p_n(a)] \right)^2 \right). \quad (10)$$

Символом  $Z(\lambda, \beta)$  будем обозначать предельное значение при  $n \rightarrow +\infty$ , если оно существует.

**Лемма 4.** Пусть  $\beta \in \mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{B}_1$ , тогда функция  $Z(\lambda, \beta) = 0$  для всех  $\lambda > 0$ . При этом  $Z(1, \beta) = 1$ .

*Доказательство.* Заметим, что функции (1) и (10) связаны интегральным преобразованием вида

$$Z_n(\lambda, \beta) = T(\Phi_n(\cdot, \beta))(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda}} \int_{\mathbb{R}} ds e^{-s^2/(4\lambda)} \Phi_n(s, \beta), \quad (11)$$

что следует из вычисления стандартного гауссова интеграла. Определим набор чисел и функцию

$$c_n = \sum_{j=1}^n \beta_j^{-1}, \quad h_n(s) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda}} e^{-s^2/(4\lambda)} f_n(s) e^{i(g_n(s) - sc_n)/2}.$$

За счет экспоненциального убывания и свойств из леммы 3 функция  $h_n(s)$  и любая ее производная принадлежат  $L^1(\mathbb{R})$ . Кроме того, верны оценки

$$\left| \frac{df_n(s)}{ds} \right| \leq \frac{|s|b_2(\beta)}{2}, \quad \left| \frac{1}{2} \frac{d(g_n(s) - sc_n)}{ds} \right| \leq \sum_{j=1}^n \frac{s^2}{2\beta_j^3} \leq \frac{s^2 b_2(\beta)}{2\mu(\beta)},$$

$$\left| \frac{dh_n(s)}{ds} \right| \leq \frac{e^{-s^2/(4\lambda)}}{\sqrt{4\pi\lambda}} \left( \frac{|s|}{2\lambda} + \frac{|s|b_2(\beta)}{2} + \frac{s^2 b_2(\beta)}{2\mu(\beta)} \right),$$

Обратим внимание, что правые части не зависят от параметра  $n$ , поэтому неравенства справедливы также и для предельного случая. Далее, подставляя представление (4) в (11) и интегрируя по частям, получаем

$$Z_n(\lambda, \beta) = \int_{\mathbb{R}} ds e^{isc_n/2} h_n(s) = -\frac{2}{ic_n} \int_{\mathbb{R}} ds e^{isc_n/2} \frac{dh_n(s)}{ds}.$$

Следовательно, переходя к абсолютным значениям функций, получаем оценку вида

$$|Z_n(\lambda, \beta)| \leq \frac{2}{c_n} \left( \int_{\mathbb{R}} ds \frac{e^{-s^2/(4\lambda)}}{\sqrt{4\pi\lambda}} \left( \frac{|s|}{2\lambda} + \frac{|s|b_2(\beta)}{2} + \frac{s^2 b_2(\beta)}{2\mu(\beta)} \right) \right),$$

в которой правая часть стремится к нулю при  $n \rightarrow +\infty$  для всех фиксированных  $\lambda > 0$ . Заключительное равенство  $Z(1, \beta) = 1$  следует из прямой подстановки.  $\square$

**Теорема 2.** Пусть  $\lambda > 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , а также  $\beta \in \mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{B}_1$ . Пусть также деформированный элемент  $\beta(\Lambda)$  и функция  $r(\Lambda)$  заданы с учетом определения 5. Тогда процесс регуляризации и ренормировки для  $Z(\lambda, \beta)$ , с учетом всего вышеизложенного, может быть произведен согласно следующей схеме

$$\begin{array}{ccccccc} \Phi(s, \beta) & \xrightarrow{\text{рег.}} & \Phi(s, \beta(\Lambda)) & \xrightarrow{\text{рен.}} & \Phi(s, \beta(\Lambda)) e^{-is(r(\Lambda)+\theta)/2} & \xrightarrow{\Lambda \rightarrow +\infty} & \Phi(s, \beta, \theta) \\ & & \downarrow T & & \downarrow T & & \downarrow T \\ Z(\lambda, \beta) & \xrightarrow{\text{рег.}} & Z(\lambda, \beta(\Lambda)) & \xrightarrow{\text{рен.}} & Z(\lambda, \beta_r(\Lambda)) N(\Lambda) & \xrightarrow{\Lambda \rightarrow +\infty} & Z(\lambda, \beta, \theta) \end{array}, \quad (12)$$

где множитель равен

$$N(\Lambda) = e^{-(r(\Lambda)+\theta)^2/4} \prod_{j=1}^{+\infty} \sqrt{\beta(\Lambda)/\beta_r(\Lambda)}, \quad (13)$$

ренормированный элемент  $\beta_r(\Lambda) \in V$  имеет вид  $\{\beta_j(\Lambda) - r(\Lambda) - \theta\}_{j=1}^{+\infty}$ , а также был использован интегральный оператор  $T$  из доказательства леммы 4, ядро которого равно  $\exp(-s^2/(4\lambda))/\sqrt{4\pi\lambda}$ . Получившаяся функция после снятия регуляризации отлична от нуля почти для всех значений  $\theta \in \mathbb{R}$  и равна

$$Z(\lambda, \beta, \theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi\lambda}} \int_{\mathbb{R}} ds e^{-s^2/(4\lambda)} f(s) \cos(s\theta/2 + g_r(s)/2), \quad (14)$$

где функции  $f(\cdot)$  и  $g_r(\cdot)$  те же, что и в формулах (8) и (9).

*Доказательство.* В формуле (11) было показано, что функции  $\Phi_n(s, \beta)$  и  $Z_n(\lambda, \beta)$  связаны интегральным преобразованием. При этом, при переходе к пределу  $n \rightarrow +\infty$ , функция  $\Phi(s, \beta)$  не существует для всех  $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , см. лемму 3, в то время как  $Z(\lambda, \beta) = 0$  для всех  $\lambda > 0$ , см. лемму 4. Регуляризуем обе величины согласно определению 6, то есть путем деформации элемента  $\beta \rightarrow \beta(\Lambda)$ . В этом случае предельная функция  $\Phi(s, \beta(\Lambda))$  станет конечной за счет сходимости ряда (7) и третьего свойства из леммы 3. В то же время для предельной функции  $Z(\lambda, \beta(\Lambda))$  верно представление

$$Z(\lambda, \beta(\Lambda)) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda}} \int_{\mathbb{R}} ds e^{-s^2/(4\lambda)} \Phi(s, \beta(\Lambda)), \quad (15)$$

что вновь проверяется простым вычислением гауссова интеграла. Обратим внимание, что в регуляризованном случае была произведена перестановка интегрирования от преобразования T и перехода к пределу  $n \rightarrow +\infty$ . Это возможно, так как, см. теорему 1 в параграфе 3 главы 14 монографии [23], во-первых, подынтегральная функция стремится к предельной

$$e^{-s^2/(4\lambda)} \Phi_n(s, \beta(\Lambda)) \rightarrow e^{-s^2/(4\lambda)} \Phi(s, \beta(\Lambda))$$

равномерно относительно переменной  $s$ , см. лемму 3, и, во-вторых, сам интеграл является равномерно сходящимся относительно индекса  $n$ .

Далее проверим, что число  $Z(\lambda, \beta(\Lambda))$  ренормируемо. Для этого необходимо показать, что сингулярные составляющие можно убрать подходящим сдвигом,  $\lambda$  и/или  $\beta(\Lambda)$ , и изменением общего множителя. Обратим внимание, что проблема при снятии регуляризации вновь заключается в сингулярном поведении ряда (7), потому что это приводит к большим осцилляциям фазового множителя в (15) и, как следствие, к занулению числа  $Z(\lambda, \beta)$ . В связи с этим попробуем вначале выполнить ренормировку числа  $\Phi(s, \beta(\Lambda))$ , а затем проверим, что это в действительности приводит к положительному результату для  $Z(\lambda, \beta(\Lambda))$ . Таким образом, потенциальный кандидат на ренормированную функцию имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda}} \int_{\mathbb{R}} ds e^{-s^2/(4\lambda)} \Phi(s, \beta(\Lambda)) e^{-is(r(\Lambda)+\theta)/2}. \quad (16)$$

Воспользуемся представлением (2), тогда, с учетом обозначений (3), последний интеграл вычисляется явно и равен

$$\left( \prod_{j=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{da_j}{\sqrt{\pi/\beta_j(\Lambda)}} \right) e^{-S_0[a, \beta(\Lambda)] - \lambda (S_1[a] - r(\Lambda)/2 - \theta/2)^2},$$

что соответствует сдвигу элемента

$$\beta(\Lambda) \rightarrow \beta_r(\Lambda) = \{\beta_j(\Lambda) - \lambda r(\Lambda) - \lambda \theta\}_{j=1}^{+\infty}$$

и домножению на общий множитель (13). Таким образом, ренормируемость проверена. Далее перейдем к последнему столбцу схемы (12). Сперва перейдем к пределу  $\Lambda \rightarrow +\infty$ . Перестановка предельного перехода и интеграла в (16) возможна за счет наличия равномерной сходимости. Таким образом, формула (14) получается с помощью результата теоремы 1.

Покажем, что для фиксированного  $\lambda > 0$  функция (14) почти для всех  $a \in \mathbb{R}$  отлична от нуля. Для этого заметим, что функция  $Z(\lambda, \beta, \cdot)$  является голоморфной в полосе

$$\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}(z)| \leq p\}$$

для любого фиксированного  $p > 0$ . Действительно, при  $\theta \in \mathcal{P}$  ряд Тейлора для функции (14) имеет вид

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\theta^k}{k!} \frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda}} \int_{\mathbb{R}} ds e^{-s^2/(4\lambda)} f(s) \exp(-ig_r(s)/2) \left(-\frac{is}{2}\right)^k$$

и сходится абсолютно, поскольку, с учетом леммы 3, допускает оценку сверху величиной

$$|(12)| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|\theta|^k}{k!} \frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda}} \int_{\mathbb{R}} ds e^{-s^2/(4\lambda)} \frac{|s|^k}{2^k} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda}} \int_{\mathbb{R}} ds e^{-s^2/(4\lambda) + |s\theta|/2} < +\infty.$$

Таким образом,  $Z(\lambda, \beta, \cdot)$  аналитична в  $\mathcal{P}$  и не может внутри области иметь предельную точку. Следовательно, на любом ограниченном интервале из  $\mathbb{R}$  функция может иметь только конечное число нулей.  $\square$

**Замечание 8.** Обратим внимание, что в процессе ренормировки часть элементов последовательности  $\beta \in \mathcal{B}_2$  сместилась в область отрицательных значений, так что  $\beta_r(\Lambda) \in V$ . Таким образом, квадратичная форма  $S_0[\cdot, \cdot]$  перестала быть строго положительной, что приводит в подынтегральном выражении (10) к дополнительному экспоненциальному росту. Строгие математические выкладки, изложенные выше, можно переформулировать на качественном уровне следующим образом: возникший после ренормировки экспоненциальный рост «уравновешивает» экспоненциальное убывание четвертой степени.

### 3 Физический подход

При интегрировании полиномов в конечномерном случае, как это продемонстрировано на примере 3 ниже, интеграл и сумма могут быть переставлены местами. Это дает возможность свести процесс интегрирования к дифференцированию экспоненты, или, формулируя на физическом языке, свести интегрирование к применению теоремы Вика о спариваниях. Однако даже для простейшего примера, см. (17), такая возможность возникает лишь при существенных ограничениях на параметры. Таким образом, в области допустимых параметров математический и физический подходы эквивалентны, в остальных же случаях физический подход оперирует лишь формальными (или асимптотическими) рядами. Заметим, что пример ниже соответствует простому случаю, в реальных задачах возникают показатели более высокого порядка, то есть  $\exp(isa_j^2) \rightarrow \exp(isa_j^k)$ , где  $k > 2$ , что приводит либо к еще более существенным ограничениям на параметры, либо делает сравнение подходов вообще невозможным, если радиус сходимости равен нулю.

**Пример 3.** Пусть  $k \in \mathbb{N}$  и выполнены предположения определения 3 и леммы 1, тогда справедлива цепочка соотношений

$$\begin{aligned} \left( \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} \frac{da_j}{\sqrt{\pi/\beta_j}} e^{-\beta_j a_j^2} \right) (S_1[p_n(a)])^k &= \left( \sum_{i=1}^n \partial_{c_i}^2 \right)^k \left( \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} \frac{da_j}{\sqrt{\pi/\beta_j}} e^{-\beta_j a_j^2 + c_j a_j} \right) \Big|_{c=0} = \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \partial_{c_i}^2 \right)^k \exp \left( \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n c_j^2 / \beta_j \right) \Big|_{c=0}. \end{aligned}$$

В частности, если выбрать  $n = 1$  и  $\beta_1 = 1$ , то результат будет равен

$$\partial_t^{2k} e^{t^2/4} \Big|_{t=0} = \frac{(2k)!}{k! 2^{2k}}.$$

Далее, домножая на  $(is)^k/k!$  и применяя суммирование по индексу  $k$ , получаем

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(is)^k}{k!} \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} t^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(is)^k}{k!} \frac{(2k)!}{k! 2^{2k}}. \quad (17)$$

Последняя сумма сходится для  $|s| < 1$  и равна  $(1 - is)^{-1/2}$ , что воспроизводит результат из формулы (4). При этом для остальных значений параметра  $s$  перестановка интеграла и суммы запрещена.

**Замечание 9.** В некоторых случаях в рамках физического подхода можно воспользоваться специальными суммированиями, которые позволяют восстановить функцию и, таким образом, перейти в рамки математического подхода. Примером может служить суммирование по Борелю, см. [24, 25].

**Определение 9.** Пусть  $a \in V$ , а также  $\beta \in \mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{B}_1$  согласно определению 2. Применим регуляризацию с учетом определения 5. Введем в рассмотрение три элемента диаграммной техники.

1. Точкой  $\bullet$  обозначим оператор суммирования по всем значениям индекса.
2. Линией с одним индексом  $\text{---}\bullet\text{---}$   $j$  обозначим компоненту  $a_j$  для  $j \in \mathbb{N}$ .
3. Линией с двумя индексами  $i \text{---}\bullet\text{---} j$  обозначим величину  $\delta_{ij}(2\beta_j(\Lambda))^{-1}$ , где  $i, j \in \mathbb{N}$ .

**Пример 4.** Пусть  $a \in V$  суммируема с квадратом, то есть  $S_1[a] < +\infty$ , тогда

$$S_1[a] = \sum_{j=1}^{+\infty} a_j^2 = \text{---}\bullet\text{---}, \quad \sum_{i,j=1}^{+\infty} a_i \delta_{ij}(2\beta_j(\Lambda))^{-1} a_j = \text{---}\bullet\text{---}\bullet\text{---}. \quad (18)$$

**Лемма 5.** С учетом предположений из определения 9, число  $2^{-k}b_k(\beta(\Lambda))$  из определения 2, где  $k \in \mathbb{N}$ , можно изобразить в виде кольца с  $k$  точками.

*Доказательство.* Заметим, что определение числа можно переписать в виде многократного суммирования

$$2^{-k} \sum_{j=1}^{+\infty} \beta_j^{-k}(\Lambda) = \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^{+\infty} \left( \delta_{j_1 j_2} (2\beta_{j_1}(\Lambda))^{-1} \right) \cdot \dots \cdot \left( \delta_{j_k j_1} (2\beta_{j_k}(\Lambda))^{-1} \right),$$

тогда утверждение следует из применения 1-го и 3-го элементов диаграммной техники.  $\square$

**Пример 5.** С учетом предположений из определения 9 и результата леммы 5, верны равенства

$$b_1(\beta(\Lambda)) = 2 \text{---}\bullet\text{---}, \quad b_2(\beta(\Lambda)) = 4 \text{---}\bullet\text{---}\bullet\text{---}, \quad b_3(\beta(\Lambda)) = 8 \text{---}\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet\text{---}.$$

**Определение 10.** Пусть верны предположения из определения 9. Диаграммное представление (18) для  $S_1[a]$  будем называть вершиной и обозначать тем же символом  $S_1$  без аргумента. Символом  $\mathbb{H}$  обозначим линейный оператор из множества полиномов  $\mathbb{C}[S_1]$  в  $\mathbb{C}$ , который задается на мономах  $S_1^k$  двумя правилами.

1. Если  $k = 0$ , то  $\mathbb{H}(S_1^0) = \mathbb{H}(1) = 1$ .
2. Если  $k \in \mathbb{N}$ , то  $\mathbb{H}(S_1^k)$  равен сумме всех возможных вариантов попарного соединения  $2k$  штук внешних линий для  $k$  штук вершин  $S_1$ .

**Пример 6.** С учетом определений 9 и 10, верны следующие соотношения

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(S_1) &= \text{---}\bullet\text{---} = \frac{1}{2}b_1(\beta(\Lambda)), \\ \mathbb{H}(S_1^2) &= \text{---}\bullet\text{---}\text{---}\bullet\text{---} + 2 \text{---}\bullet\text{---}\bullet\text{---} = \frac{1}{4}b_1^2(\beta(\Lambda)) + \frac{1}{2}b_2(\beta(\Lambda)), \\ \mathbb{H}(S_1^3) &= \text{---}\bullet\text{---}\text{---}\bullet\text{---}\text{---}\bullet\text{---} + 6 \text{---}\bullet\text{---}\text{---}\bullet\text{---}\text{---}\bullet\text{---} + 8 \text{---}\bullet\text{---}\text{---}\bullet\text{---}\text{---}\bullet\text{---} = \frac{1}{8}b_1^3(\beta(\Lambda)) + \frac{3}{4}b_1(\beta(\Lambda))b_2(\beta(\Lambda)) + b_3(\beta(\Lambda)). \end{aligned}$$

**Определение 11.** Пусть верны предположения из определения 10. Символом  $\mathbb{H}_1$  обозначим линейный оператор из множества полиномов  $\mathbb{C}[S_1]$  в  $\mathbb{C}$ , который задается формулой

$$\mathbb{H}_1(S_1^k) = \mathbb{H}(S_1^k) \Big|_{b_1 \equiv 0}$$

для всех  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

**Пример 7.** С учетом определений 9 и 11, верны следующие соотношения

$$\mathbb{H}_1(1) = 1, \quad \mathbb{H}_1(S_1) = 0, \quad \mathbb{H}_1(S_1^2) = 2 \cdot \text{circle with two dots} = \frac{1}{2} b_2(\beta(\Lambda)), \quad \mathbb{H}_1(S_1^3) = 8 \cdot \text{triangle with three dots} = b_3(\beta(\Lambda)).$$

**Определение 12.** Пусть верны предположения из определений, изложенных выше. Пусть также  $f(\cdot)$  является функцией, допускающей представление в виде ряда Тейлора

$$f(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} f_j z^j$$

для всех значений аргумента  $z \in \mathbb{C}$ . Тогда регуляризованным «физическим» функциональным интегралом от функции  $f(S_1[\cdot])$  с весом  $\exp(-S_0[\cdot, \beta(\Lambda)])$  называется формальный ряд

$$\sum_{j=0}^{+\infty} f_j \mathbb{H}(S_1^j),$$

который будет обозначаться символической записью вида

$$\int_V \mathcal{D}a e^{-S_0[a, \beta(\Lambda)]} f(S_1[a]).$$

**Пример 8.** С учетом определения 12, модели, исследованные в секции 2, формулируются следующим образом

$$\int_V \mathcal{D}a e^{-S_0[a, \beta(\Lambda)] + is S_1[a]} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(is)^j}{j!} \mathbb{H}(S_1^j), \quad (19)$$

$$\int_V \mathcal{D}a e^{-S_0[a, \beta(\Lambda)] - \lambda S_1^2[a]} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda)^j}{j!} \mathbb{H}(S_1^{2j}). \quad (20)$$

**Замечание 10.** Обратим внимание, что физический подход значительно хуже. Действительно, в секции 2 обе модели были связаны интегральным преобразованием. В данном случае такая связь сохраняется только в том случае, если интегральное преобразование, примененное к формальному ряду, понимать как преобразование, примененное к каждому отдельному коэффициенту. Такая процедура приводит к новому формальному ряду.

**Замечание 11.** Заметим, что расходимости в двух подходах имеют разный вид и смысл. В следующей таблице приведены проблемы, которые возникают при снятии регуляризации, то есть в пределе  $\Lambda \rightarrow +\infty$ .

Математический подход	Физический подход
Фаза $\Phi(s, \beta(\Lambda))$ быстро осциллирует	Слагаемые с $b_1(\beta(\Lambda))$ расходятся в (19) и (20)
Функция $Z(\lambda, \beta(\Lambda))$ стремится к нулю	

Таким образом, математический подход является более детальным. С физической точки зрения расходимости имеют одинаковый характер в двух моделях, коэффициенты ряда становятся бесконечно большими. В свою очередь, в рамках секции 2 имеется четкое разграничение. В одном случае при снятии регуляризации неконтролируемо осциллирует фаза, в то время как в другом варианте функция тождественно становится равной нулю.

**Замечание 12.** При работе с формальными рядами числа  $\beta_j^{-1}(\Lambda)$  встречаются в определении элемента диаграммной техники, из-за чего любой сдвиг вида  $\beta_j(\Lambda) \rightarrow \beta_j(\Lambda) + \alpha_j$  приводит к необходимости перераскладывать формальные ряды. Чтобы обойти этот процесс, достаточно заметить, что указанный сдвиг эквивалентен появлению слагаемого

$$-\sum_{j=1}^{+\infty} a_j^2 \alpha_j$$

в экспоненте. В частном случае, если  $a_j = \alpha \in \mathbb{R}$  для всех  $j \in \mathbb{N}$ , сдвиг равен  $-\alpha S_1[a]$ . Такая добавка приводит к появлению дополнительной вершины.

**Определение 13.** Формальный ряд (19) называется ренормируемым, если он является ренормируемым в смысле определения 7 с учетом двух изменений.

1. Сдвиг  $\beta(\Lambda)$  понимается с учетом замечания 12.
2. При снятии регуляризации конечным должен быть не ряд в целом, а лишь каждый отдельный его коэффициент.

Понятие ренормируемости расширяется на ряд (20) заменой параметров  $s \leftrightarrow \lambda$  в формулировке.

**Теорема 3.** Пусть  $\beta \in \mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{B}_1$  и выполнены предположения определения 12, тогда формальные ряды (19) и (20) являются ренормируемыми, а сам процесс ренормировки заключается в переходе к формальным рядам вида

$$\int_V \mathcal{D}a e^{-S_0[a, \beta(\Lambda)] + is(S_1[a] - r(\Lambda)/2 - \theta/2)} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(is)^j}{j!} \mathbb{H}((S_1 - r(\Lambda)/2 - \theta/2)^j), \quad (21)$$

$$\int_V \mathcal{D}a e^{-S_0[a, \beta(\Lambda)] - \lambda(S_1[a] - r(\Lambda)/2 - \theta/2)^2} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda)^j}{j!} \mathbb{H}((S_1 - r(\Lambda)/2 - \theta/2)^{2j}), \quad (22)$$

где  $\theta \in \mathbb{R}$  и функция  $r(\Lambda)$  выбрана с учетом определения 5.

*Доказательство.* Для удобства обозначим  $\zeta = r(\Lambda)/2 + \theta/2$ . Далее заметим, что  $\mathbb{H}(S_1^j)$  можно разложить в сумму по степеням  $\xi = b_1(\beta(\Lambda))/2$  следующим образом

$$\mathbb{H}(S_1^j) = \sum_{i=0}^j C_i^j \mathbb{H}_1(S_1^i) \xi^{j-i},$$

где коэффициент равен числу способов выбрать  $i$  элементов из  $j$  штук. Затем выполним цепочку преобразований

$$\begin{aligned} \mathbb{H}((S_1 - \zeta)^n) &= \sum_{j=0}^n C_j^n \mathbb{H}(S_1^j) (-\zeta)^{n-j} = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j C_j^n C_i^j \mathbb{H}_1(S_1^i) \xi^{j-i} (-\zeta)^{n-j} \\ &= \sum_{i=0}^n \mathbb{H}_1(S_1^i) \sum_{j=i}^n C_j^n C_i^j \xi^{j-i} (-\zeta)^{n-j} \\ &= \sum_{i=0}^n \mathbb{H}_1(S_1^i) \sum_{j=0}^{n-i} C_{j+i}^n C_i^{j+i} \xi^j (-\zeta)^{n-j-i} \\ &= \sum_{i=0}^n \mathbb{H}_1(S_1^i) C_{n-i}^n (\xi - \zeta)^{n-i} = \mathbb{H}_1((S_1 + \xi - \zeta)^n), \end{aligned}$$

из которой следует, что все коэффициенты формальных рядов (21) и (22) конечны, поскольку  $\beta \in \mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{B}_1$  и комбинация  $\xi - \zeta$  конечна до и после снятия регуляризации.  $\square$

## 4 Заключение

В работе были рассмотрены регуляризация и перенормировка для специальной модели как в рамках работы с формальными рядами (пертурбативный подход), так и с использованием явного построения функционального интеграла в смысле перехода к бесконечно большому количеству измерений (предельный переход в конечномерном случае). Было явно продемонстрировано, что расходимости, которые появляются в первом случае, имеют одну и ту же природу, в то время как в рамках второго случая они могут выражаться либо через осцилляцию фазы, либо через зануление всего функционала.

В качестве одного из интересных и важных вариантов обобщения рассмотренной модели (10) является переход

$$S_1^2[a] = \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^{+\infty} \delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} a_{i_4} \rightarrow \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^{+\infty} C_{i_1 i_2 i_3 i_4} a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} a_{i_4},$$

где коэффициенты  $C_{i_1 i_2 i_3 i_4}$  имеют более сложную структуру. Используя обозначения из примера 1, можно выбрать коэффициенты в виде

$$C_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \int_{\mathbf{B}} d^n x \phi_{i_1}(x) \phi_{i_2}(x) \phi_{i_3}(x) \phi_{i_4}(x),$$

что приведет к модели с четверным взаимодействием. Известно, что при  $n \leq 4$  такая модель является перенормируемой в рамках пертурбативного подхода, см. [26–29].

**Благодарности.** Автор признателен Н.В.Харук за полезные комментарии.

## 5 Список литературы

- [1] C. Itzykson, J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-hill, New York, 1–705 (1980)
- [2] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley, 1–868 (1995)
- [3] L. D. Faddeev, A. A. Slavnov, *Gauge Fields: An Introduction to Quantum Theory*, Frontiers in Physics **83**, Addison-Wesley, 1–236 (1991)
- [4] J. C. Collins, *Renormalization: An Introduction to Renormalization, the Renormalization Group and the Operator-Product Expansion*, Cambridge University Press, 1–380 (1984)
- [5] O. I. Zavialov, *Renormalized quantum field theory*, Kluwer Academic Publishers, Dodrecht, Boston, 1–524 (1990)
- [6] D. I. Kazakov, *Radiative Corrections, Divergences, Regularization, Renormalization, Renormalization Group and All That in Examples in Quantum Field Theory*, arXiv:0901.2208 [hep-ph] (2009)
- [7] I. M. Gel'fand, G. E. Shilov, *Generalized Functions, Volume 1: Properties and Operations*, AMS Chelsea Publishing **377**, 1–423 (1964)
- [8] V. S. Vladimirov, *Methods of the theory of generalized functions*, London, CRC Press, 1–328 (2002)
- [9] R. P. Feynman, *Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics*, Review of Modern Physics **20**, 367–387 (1948)
- [10] L. A. Takhtajan, *Quantum Mechanics for Mathematicians*, American Mathematical Society, Graduate Series in Mathematics **95** (2008)

- [11] E. T. Shavgulidze, O.G. Smolyanov, *Functional integrals*, Moscow, URSS, 1–328 (2015)
- [12] P. J. Daniell, *Integrals in An Infinite Number of Dimensions*, The Annals of Mathematics **20**, No. 4, 281–288 (1919)
- [13] A. V. Ivanov, *Notes on functional integration*, Zap. Nauchn. Sem. POMI, **487**, POMI, St. Petersburg, 2019, 140–150; J. Math. Sci. (N. Y.), **257**:4 (2021), 518–525 doi:10.1007/s10958-021-05499-9
- [14] J. Zinn-Justin, *Path Integrals in Quantum Mechanics*, Oxford University Press, USA, 1–336 (2005)
- [15] P. Cartier, C. DeWitt-Morette, *A Rigorous Mathematical Foundation of Functional Integration*, In: DeWitt-Morette, C., Cartier, P., Folacci, A. (eds) Functional Integration. NATO ASI Series, vol **361**, Springer, Boston (1997) doi:10.1007/978-1-4899-0319-8\_1
- [16] A. V. Ivanov, M. A. Russkikh, *Quantum Field Theory on the Example of the Simplest Cubic Model*, J Math Sci **275**, 306–325 (2023) <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06683-9>
- [17] A. Bhattacharya, J. Cotler, A. Dersy, M. D. Schwartz, *Collective coordinate fix in the path integral*, Phys. Rev. D **110**, 116023 (2024) doi:10.1103/PhysRevD.110.116023
- [18] A. Bhattacharya, J. Cotler, A. Dersy, M. D. Schwartz, *Renormalons as Saddle Points*, (2024) doi:10.48550/arXiv.2410.07351
- [19] F. Peng, H. Shu, *Truncating Dyson-Schwinger equations based on a Lefschetz thimble decomposition and Borel resummation*, Phys. Rev. D **111**, 065003 (2025) doi:10.1103/PhysRevD.111.065003
- [20] A. G. Sveshnikov, A. N. Bogolyubov, V. V. Kravtsov, *Lectures on mathematical physics*, Moscow: Moscow University Press, 1–352 (1993)
- [21] M. Lüscher, *Dimensional regularisation in the presence of large background fields*, Annals of Physics **142**, 359–392 (1982)
- [22] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Special Functions for Heat Kernel Expansion*, Eur. Phys. J. Plus **137**, 1060 (2022), arXiv:2106.00294v2, 10.1140/epjp/s13360-022-03176-7
- [23] G. M. Fikhtengol'ts, *Course of differential and integral calculus*, Moscow: Science, Vol. 2, 1–800 (1970)
- [24] B. Shawyer, B. Watson, *Borel's methods of summability : theory and applications*, Oxford University Press, 1–254 (1994)
- [25] G. H. Hardy, *Divergent Series*, American Mathematical Society, 1–396 (2000)
- [26] H. Kleinert, V. Schulte-Frohlinde, *Critical properties of  $\phi^4$ -theories*, World Scientific, Singapore, 1–512 (2001)
- [27] A. N. Vasil'ev, *The field theoretic renormalization group in critical behavior theory and stochastic dynamics*, Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 1–681 (2004)
- [28] A. V. Ivanov, *Three-loop renormalization of the quantum action for a four-dimensional scalar model with quartic interaction with the usage of the background field method and a cutoff regularization*, Nucl. Phys. B, **1006**, 116647 (2024), doi:10.1016/j.nuclphysb.2024.116647, arXiv:2402.14549, <https://www.pdmi.ras.ru/preprint/2024/24-02.html>
- [29] N. V. Kharuk, *Three-loop renormalization with a cutoff in a sextic model*, Questions of quantum field theory and statistical physics. Part 30, Zap. Nauchn. Sem. POMI, **532**, POMI, St. Petersburg, 2024, 273–286 <https://mathscinet.ams.org/mathscinet/relay-station?mr=4811943> <https://www.mathnet.ru/eng/zns17462>