

Четырехпетлевая перенормировка с обрезанием в шестерной модели

Наталья В. Харук

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А.Стеклова РАН,
Фонтанка 27, Санкт-Петербург, 191023, Россия

E-mail: natakharuk@mail.ru

31 марта 2025 г.

Аннотация. Рассматривается квантовое действие для трехмерной вещественной шестерной модели с использованием метода фонового поля. Выполняется четырехпетлевая перенормировка данной модели с регуляризацией обрезанием в координатном представлении. Найдены коэффициенты для констант перенормировки, явно продемонстрирована применимость \mathcal{R} -операции в рамках предложенной регуляризации, а также доказано отсутствие нелокальных вкладов. Дополнительно обсуждается явный вид сингулярностей, степенных и логарифмических, а также их зависимость от деформации функции Грина.

Ключевые слова и фразы: перенормировка, скалярная модель, регуляризация обрезанием, функция Грина, эффективное действие, деформация, шестерное взаимодействие, четырехпетлевые вычисления.

Содержание

1	Введение	3
2	Постановка задачи	3
3	Результаты	6
4	Вычисления	6
	4.1 Вспомогательные разложения	6
	4.2 Виды расходящихся диаграмм	7
	4.3 Специальные соотношения	9
5	Заключение	16
6	Список литературы	16

ПРЕПРИНТЫ

Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS

of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В. М. Бабич, М. А. Всемиров, А. И. Генералов,
И. А. Ибрагимов, Л. Ю. Колотилина, Ю. В. Матиясевич,
Н. Ю. Нецветаев, С. И. Репин, Г. А. Серегин

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В.А.Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:
ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г.
Выдано Федеральной службой по надзору
в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные:

191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27
телефоны: (812) 312-40-58; (812) 571-57-54
e-mail: admin@pdmi.ras.ru
<https://www.pdmi.ras.ru/preprint/>

Заведующая информационно-издательским сектором В. Н. Симонова

1 Введение

Пертурбативный подход является мощным и широко используемым инструментом в современной квантовой теории поля. Однако его применение влечет за собой такую проблему, как наличие расходящихся интегралов. Для корректного обращения с такими объектами в теорию вводится регуляризация. Существует несколько популярных схем регуляризации, применяемых на практике, например, размерная регуляризация [1, 2], регуляризация высшими производными [3, 4], или же регуляризация Паули–Вилларса [5].

В данной статье рассматривается регуляризация обрезанием. Это один из самых естественных подходов к работе с расходящимися интегралами, который в стандартной формулировке заключается в обрезании предела (области) интегрирования, см. [6, 7]. Мы будем использовать данную схему в изложении [8–17] для нахождения четырехпетлевых расходимостей в шестерной скалярной модели [18–23]. Отличительной особенностью представленной схемы является не обрезание пределов интегрирования, а специальная деформация свободной функции Грина. Такое отличие имеет важное значение, потому что позволяет сохранить в теории квазилокальность и, кроме того, делает регуляризацию более широко применимой. В частности, это играет важную роль при работе на гладких компактных многообразиях с применением склейки, см. [24–27].

В данной статье для анализа расходимостей используется метод фонового поля [28–32]. Такой подход удобен тем, что позволяет проверять все необходимые диаграммные соотношения, оперируя при этом лишь одним объектом – эффективным действием. Выбор шестерной модели обусловлен не только относительной простотой с математической и вычислительной точек зрения, но и важной физической ролью, которую играет данная теория, см. также [33, 34]. Основным результатом состоит из четырех частей.

- Вычислены четвертые коэффициенты для констант перенормировки.
- Проверена применимость \mathcal{R} -операции.
- Показано отсутствие нелокальных вкладов.
- Изучена зависимость сингулярных вкладов от вида деформации функции Грина.

Отметим, что это является первым примером четырехпетлевой перенормировки с использованием регуляризации обрезанием в координатном представлении. Само же исследование может считаться продолжением серии работ, посвященных скалярным теориям с регуляризацией обрезанием [8, 14, 15], и, в частности, продолжением исследования шестерной модели [16].

Работа имеет следующую структуру. Раздел 2 посвящен постановке задачи и введению основных объектов и определений. В секции 3 представлены основные результаты. В секции 4 приведены подробные вычисления и вспомогательные соотношения. Секция 5 является заключительной, в ней представлены краткие выводы и дополнительные рассуждения.

2 Постановка задачи

Рассмотрим 3-мерное евклидово пространство \mathbb{R}^3 , элементы которого будем обозначать латинскими буквами x, y, z , а их отдельные компоненты – при помощи греческих индексов. Далее введем скалярное вещественное поле $\phi(\cdot)$ и классическое действие $S[\cdot]$ для модели с шестерным взаимодействием в виде

$$S_{\text{cl}}[\phi] = S_0[\phi] + S_{\text{int}}[\phi],$$

где

$$S_0[\phi] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \phi(x) A_0(x) \phi(x), \quad S_{\text{int}}[\phi] = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left(\frac{m^2}{2} \phi^2(x) + \frac{t_4}{4!} \phi^4(x) + \frac{t_6}{6!} \phi^6(x) \right).$$

Здесь $A_0(x) = -\partial_{x_\mu} \partial_{x^\mu}$ – стандартный оператор Лапласа, m^2 – квадрат массового параметра, t_4 и t_6 – константы взаимодействия. В рамках пертурбативного разложения их вещественность не важна.

При этом будет подразумеваться $\Re(t_6) > 0$ для ограниченности снизу функционала $S_{\text{int}}[\cdot]$. Обратим внимание, что данный вид шестерной модели содержит только четные степени. Вариант, содержащий также и нечетные степени, изучался [16] в рамках выполнения трехпетлевой перенормировки с учетом произвольности конечных частей.

Как известно, квантовое действие для такой модели содержит ультрафиолетовые расходимости. По этой причине необходимо ввести регуляризацию, а затем выполнить перенормировку [35, 36]. В рамках данной работы под регуляризацией будет подразумеваться следующий вид деформации

$$S_{\text{int}}[\phi] \rightarrow S_{\text{int}}[\phi_\omega^\Lambda], \quad (1)$$

где

$$\phi_\omega^\Lambda = \int_{\mathbb{R}^3} d^3y \omega(|y|) \phi(x + y/\Lambda), \quad \int_{\mathbb{R}^3} d^3y \omega(|y|) = 1, \quad \text{supp}(\omega) \subset [0, 1].$$

В последней строке Λ является регуляризующим параметром. В пределе $\Lambda \rightarrow +\infty$ регуляризация снимается. Такой вид регуляризации приводит к замене функции Грина для свободного оператора Лапласа

$$R_0(x) = \frac{1}{4\pi|x|} \rightarrow R_0^\Lambda(x) = \frac{1}{4\pi} \begin{cases} \Lambda(1 + \mathbf{f}(|x|^2\Lambda^2)), & |x| \leq 1/\Lambda; \\ |x|^{-1}, & |x| > 1/\Lambda, \end{cases} \quad (2)$$

во всех элементах пертурбативных разложений. В последней формуле функция \mathbf{f} принадлежит $C([0, 1], \mathbb{R})$ и обладает свойством $\mathbf{f}(1) = 0$. Обратим внимание, что формулировка регуляризации (1) эквивалентна специальной деформации оператора $A_0(x) \rightarrow A_0^\Lambda(x)$, которая использовалась в [14–16] в рамках трехпетлевых подсчетов.

В случае шестерной модели в трехмерном пространстве применима мультипликативная перенормировка, которая заключается в переопределении параметров теории

$$\phi(\cdot) \rightarrow \phi(\cdot)Z_0^{1/2}, \quad m^2 \rightarrow m^2Z_2/Z_0, \quad t_4 \rightarrow t_4Z_4/Z_0^2, \quad t_6 \rightarrow t_6Z_6/Z_0^3,$$

где

$$Z_n = z_{n0} + \sum_{k=1}^{+\infty} \hbar^k z_{nk} \quad \text{и} \quad z_{n0} = 1 \quad \text{для всех} \quad n \in \{0, 2, 4, 6\}. \quad (3)$$

После применения метода фонового поля $\phi(\cdot) \rightarrow \tilde{B}(\cdot) + \sqrt{\hbar}\phi(\cdot)$, подробно изложенного в работах [14, 28–32], пертурбативное разложение для квантового действия можно выписать явно. Далее фоновым полем $B(\cdot)$ будем называть деформированное $\tilde{B}_\omega^\Lambda(\cdot)$. Для формулировки введем несколько дополнительных вспомогательных функционалов

$$V_{i,j} \equiv V_{i,j}[\phi, B] = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x (\phi_\omega^\Lambda(x))^i B^j(x), \quad \text{где} \quad i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \text{и} \quad i + j > 0,$$

$$\Gamma_{3k}[\phi] = t_4 z_{4k} V_{3,1} + \frac{t_6 z_{6k}}{3!} V_{3,3}, \quad \Gamma_{4k}[\phi] = t_4 z_{4k} V_{4,0} + \frac{t_6 z_{6k}}{2} V_{4,2},$$

$$\Gamma_{5k}[\phi] = t_6 z_{6k} V_{5,1}, \quad \Gamma_{6k}[\phi] = t_6 z_{6k} V_{6,0},$$

$$X_i[\phi] = 2z_{0i} S_0[\phi] + m^2 z_{2i} V_{2,0} + \frac{t_4 z_{4i}}{2} V_{2,2} + \frac{t_6 z_{6i}}{4!} V_{2,4}.$$

Также символом $G^\Lambda(x, y)$ будем обозначать функцию Грина для оператора в квадратичной форме $X_0[\phi]$. Как известно, разложение для такой функции около диагонали, см. [37, 38], выписывается явно

$$G^\Lambda(x, y) = R_0^\Lambda(x - y) - g_\Lambda(x - y) \left(m^2 + t_4 \frac{B^2(x) + B^2(y)}{4} + t_6 \frac{B^4(x) + B^4(y)}{48} \right) + PS(x, y),$$

где

$$g_\Lambda(x - y) = \int_{B_{1/\sigma}} d^3z R_0^\Lambda(x - y + z) R_0^\Lambda(z) - \int_{B_{1/\sigma}} d^3z \left(R_0^\Lambda(z) \right)^2,$$

и $PS(x, y)$ является нелокальной составляющей и имеет две конечные производные. В частности, имеем

$$G^\Lambda(x, x) = R_0^\Lambda(0) + PS(x, x).$$

Обратим внимание, что для функционалов и функции Грина можно ввести элементы диаграммной техники

$$\begin{aligned} G^\Lambda &= \text{---}, \quad \Gamma_{30} = \text{---} \diagup \text{---} \diagdown, \quad \Gamma_{40} = \text{---} \diagup \text{---} \diagdown \text{---} \diagup \text{---} \diagdown, \quad \Gamma_{50} = \text{---} \diagup \text{---} \diagdown \text{---} \diagup \text{---} \diagdown \text{---} \diagup \text{---} \diagdown, \quad \Gamma_{60} = \text{---} \diagup \text{---} \diagdown \text{---} \diagup \text{---} \diagdown \text{---} \diagup \text{---} \diagdown \text{---} \diagup \text{---} \diagdown, \\ X_i &= \text{---} \times_i \text{---}, \quad \Gamma_{31} = \text{---} \bullet \text{---}, \quad \Gamma_{41} = \text{---} \bullet \text{---} \times \text{---}, \\ \Gamma_{32} &= \text{---} \blacksquare \text{---}, \quad \Gamma_{42} = \text{---} \blacksquare \text{---} \times \text{---}. \end{aligned}$$

Тогда квантовое перенормированное действие $W_{\text{ren}}[B, \Lambda]$ можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} W_{\text{ren}}[B, \Lambda] &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left(\frac{z_{04}}{2} \tilde{B}(x) A_0(x) \tilde{B}(x) + \frac{z_{24} m^2}{2} B^2(x) + \frac{z_{44} t_4}{4!} B^4(x) + \frac{z_{64} t_6}{6!} B^6(x) \right) - \\ &= \left(\frac{\hbar}{2} \ln \det(G^\Lambda) + \hbar \kappa_1 \right) - \left[\hbar \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \hbar^k X_k[\delta_j] - \sum_{n=3}^6 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\hbar^{n/2+k-1}}{n!} \Gamma_{nk}[\delta_j] \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times e^{g[G^\Lambda, j]} \Big|_{j=0}^{\text{1PI}} + \sum_{n=2}^{+\infty} \hbar^n \kappa_n \right], \quad (4) \end{aligned}$$

где $j(x)$ – вспомогательное гладкое поле, $\delta_{j(x)}$ – вариационная производная по полю $j(x)$, и

$$g[G^\Lambda, j] = \frac{1}{2} \int \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} d^3x d^3y j(x) G^\Lambda(x, y) j(y).$$

Также символ «1PI» означает, что в сумме сохраняются только сильно связанные диаграммы, их еще называют одночастично неприводимыми. Константы κ_n вычитают особенности, не зависящие от фонового поля.

Учитывая то, что подходящим выбором коэффициентов констант перенормировки (3) можно произвести вычитание сингулярностей, пертурбативное разложение (4) определяет набор уравнений, однозначно определяющих сингулярные составляющие искомых коэффициентов. Ранее в работе [16] были исследованы первые три соотношения, которые позволили произвести перенормировку в трех петлях. Найденные коэффициенты в схеме минимальных вычитаний, что является аналогом \overline{MS} -схемы для размерной регуляризации, имеют вид

$$\begin{aligned} Z_0 &= 1 + \mathcal{O}(\hbar^4), \\ Z_2 &= 1 - \hbar \Lambda \frac{\alpha t_4}{2m^2} + \hbar^2 \left(\Lambda^2 \frac{\alpha^2 t_6}{8m^2} + L \frac{t_4^2}{96\pi^2 m^2} \right) + \hbar^3 \left(-\Lambda L \frac{\alpha t_4 t_6}{48\pi^2 m^2} + \Lambda \frac{\alpha_1(\mathbf{f}) t_4 t_6}{24m^2} \right) + \mathcal{O}(\hbar^4), \\ Z_4 &= 1 - \hbar \Lambda \frac{\alpha t_6}{2t_4} + \hbar^2 L \frac{t_6}{24\pi^2} + \hbar^3 \left(-\Lambda L \frac{5\alpha t_6^2}{96\pi^2 t_4} + \Lambda \frac{\alpha_1(\mathbf{f}) t_6^2}{8t_4} \right) + \mathcal{O}(\hbar^4), \\ Z_6 &= 1 + \hbar^2 L \frac{5t_6}{48\pi^2} + \mathcal{O}(\hbar^4). \end{aligned}$$

Целью данной работы является изучение четвертого (пропорционального \hbar^4) соотношения и поиск коэффициентов $z_{04}, z_{24}, z_{44}, z_{64}$ для констант перенормировки.

3 Результаты

С учетом всего вышеизложенного, часть перенормированного эффективного действия (4), пропорциональная \hbar^4 , не содержит нелокальных сингулярных вкладов, то есть зависящих от функции $PS(x, y)$. Остальные же сингулярности нейтрализуются следующим выбором коэффициентов для констант перенормировки

$$\begin{aligned} z_{04} &= -L \frac{t_6^2}{2^4 3^2 5 (4\pi)^4}, \\ z_{24} &= L \Lambda^2 \frac{5\alpha^2(\mathbf{f}) t_6^2}{2^3 3 (4\pi)^2 m^2} - \Lambda^2 \frac{t_6^2 (15\alpha_1(\mathbf{f})\alpha(\mathbf{f}) - 2\alpha_2(\mathbf{f}))}{5! 2 m^2} + L^2 \frac{t_4^2 t_6}{3^2 (4\pi)^4 m^2} - L \frac{t_4^2 t_6 (32 + 3\pi^2) - 4m^2 t_6^2}{2^6 3 (4\pi)^4 m^2}, \\ z_{44} &= L^2 \frac{7t_6^2}{3^2 (4\pi)^4} - L \frac{t_4 t_6^2 (116 + 9\pi^2)}{2^5 3 (4\pi)^4}, \\ z_{64} &= L^2 \frac{25t_6^2}{3^2 (4\pi)^4} - L \frac{t_6^2 (150 + 15\pi^2)}{2^5 (4\pi)^4}, \end{aligned}$$

где вспомогательные числа имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{f}) &= \frac{\mathbf{f}(0) + 1}{4\pi}, \\ \alpha_1(\mathbf{f}) &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3 y \left(R_0^1(y) \right)^4 = \frac{1}{(4\pi)^3} \left(1 + \int_0^1 dt t^2 (\mathbf{f}(t^2) + 1)^4 \right), \\ \alpha_2(\mathbf{f}) &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3 y \left(R_0^1(y) \right)^5 = \frac{1}{(4\pi)^4} \left(\frac{1}{2} + \int_0^1 dt t^2 (\mathbf{f}(t^2) + 1)^5 \right). \end{aligned}$$

Все основные вычисления приведены в секции 4, поэтому отметим лишь основные этапы доказательства. Сперва необходимо выписать четырехпетлевое соотношение для поиска коэффициентов. Оно имеет вид (5). Далее необходимо найти сингулярные составляющие для правой части равенства. Удобнее их анализировать группами. Для этих целей правая часть разбивается на 17 частей, для каждой из которых проводятся отдельные вычисления, см. секцию 4.3. Затем результат суммируется. В итоге остаются только части классического действия, см. формулы (27), (28), (30) и (32), домноженные на сингулярные коэффициенты. Окончательно, коэффициенты $z_{04}, z_{24}, z_{44}, z_{64}$ в левой части равенства (5) подбираются таким образом, чтобы сингулярные составляющие в обеих частях равенства совпадали. Это и приводит к полученным коэффициентам.

Отдельно отметим, что полученные коэффициенты согласуются с результатами, полученными для размерной регуляризации [22].

4 Вычисления

4.1 Вспомогательные разложения

Определение: Пусть $n, j, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $j \leq n$, $\Omega[\phi]$ является функционалом, пропорциональным n -ой степени поля, то есть $\Omega[s\phi] = s^n \Omega[\phi]$ для $s > 0$. Введем в рассмотрение несколько операторов.

- Оператор $\mathbb{H}_{j,i}^{c(sc)}$ переводит функционал $\Omega[\phi]$ в функционал, пропорциональный j -й степени поля, путем всевозможных спариваний $n - j$ функций поля $\phi(\cdot)$ при помощи регуляризованной функции Грина $G^\Lambda(\cdot, \cdot)$, то есть с использованием замен вида $\phi(x)\phi(y) \rightarrow G^\Lambda(x, y)$, и сохранением только связной (сильно связной) части, содержащей i штук функций Грина на диагонали (петель).
- Оператор без проекции на количество петель имеет вид

$$\mathbb{H}_j^{c(sc)} = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{H}_{j,i}^{c(sc)}.$$

С учетом последнего определения, см. аналог в [39], соотношение для поиска четвертых коэффициентов, то есть часть в формуле (4), пропорциональную \hbar^4 , можно представить следующим образом

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left(\frac{Z_0}{2} \tilde{B}(x) A_0(x) \tilde{B}(x) + \frac{Z_2 m^2}{2} B^2(x) + \frac{Z_4 t^4}{4!} B^4(x) + \frac{Z_6 t^6}{6!} B^6(x) \right) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{1}{4!} \frac{d^4}{d\hbar^4} \Big|_{\hbar=0} \mathbb{H}_0^{\text{sc}} \left(\hbar \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \hbar^k X_k[\phi] - \sum_{n=3}^6 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\hbar^{n/2+k-1}}{n!} \Gamma_{nk}[\phi] \right) \right) + \kappa_4, \quad (5)$$

где знак $\stackrel{\text{s.p.}}{=}$ означает равенство сингулярных составляющих (по параметру Λ). Левую часть последнего равенства можно переписать в виде нескольких вкладов. Выпишем их отдельно с дополнительными комментариями. Первой составляющей являются обычные (без контрчленов) диаграммы

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{30}^6)}{(3!)^6 6!} - \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{30}^4 \Gamma_{40})}{(3!)^4 (4!)^2} + \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{30}^3 \Gamma_{50})}{(3!)^4 5!} + \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{30}^2 \Gamma_{40}^2)}{4(3!)^2 (4!)^2} - \\ & - \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{30}^2 \Gamma_{60})}{2(3!)^2 6!} - \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{30} \Gamma_{40} \Gamma_{50})}{3! 4! 5!} - \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{40}^3)}{3!(4!)^3} + \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{50}^2)}{2(5!)^2} + \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{40} \Gamma_{60})}{4! 6!}. \quad (6) \end{aligned}$$

Второй составляющей являются контрдиаграммы, которые получаются из трехпетлевых диаграмм либо добавлением X_1 , либо заменой одной из вершин Γ_{30} – Γ_{60} на Γ_{31} – Γ_{61} . Они имеют следующий вид

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{30}^3 \Gamma_{31})}{(3!)^5} - \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{30} \Gamma_{31} \Gamma_{40})}{(3!)^2 4!} - \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{30}^2 \Gamma_{41})}{2(3!)^2 4!} + \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{40} \Gamma_{41})}{(4!)^2} + \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{31} \Gamma_{50})}{3! 5!} - \\ & - \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{30}^4 X_1)}{2(3!)^4 4!} + \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{30}^2 \Gamma_{40} X_1)}{4(3!)^2 4!} - \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{40}^2 X_1)}{4(4!)^2} - \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{30} \Gamma_{50} X_1)}{2(3! 5!)} + \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{60} X_1)}{2(6!)}. \quad (7) \end{aligned}$$

Третьей составляющей являются контрдиаграммы, которые получаются из двухпетлевых диаграмм либо добавлением X_2 или $X_1 X_1$, либо заменой одной из вершин Γ_{30} – Γ_{60} на Γ_{32} – Γ_{62} , либо заменой двух вершин Γ_{30} – Γ_{60} на Γ_{31} – Γ_{61} , либо заменой одной вершины Γ_{30} – Γ_{60} на Γ_{31} – Γ_{61} с добавлением X_1 . Они имеют следующий вид

$$\begin{aligned} & - \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{30}^2 X_2)}{4(3!)^2} + \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{40} X_2)}{2(4!)} + \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{30}^2 X_1^2)}{2^4 (3!)^2} - \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{40} X_1^2)}{2^3 (4!)} + \\ & + \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{30} \Gamma_{32})}{(3!)^2} - \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{42})}{4!} + \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{31}^2)}{2(3!)^2} - \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{30} \Gamma_{31} X_1)}{2(3!)^2} + \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{41} X_1)}{2(4!)}. \quad (8) \end{aligned}$$

Наконец, четвертой составляющей являются комбинации вершин X_1 – X_3 вида

$$- \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(X_1^3)}{2^3 (3!)} + \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(X_1 X_2)}{4} - \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(X_3)}{2}. \quad (9)$$

4.2 Виды расходящихся диаграмм

Поиск сингулярных составляющих основан на использовании \mathcal{R} -операции, позволяющей удалять из диаграммы подрасходимость. В данной работе приводится явный подсчет, показывающий, что в рамках предложенной регуляризации основные правила работы с подрасходимостями остаются верными. Заметим, что для произвольного вида регуляризации этот общеизвестный подход не является прозрачным и возможность его применения требует дополнительных исследований.

Ниже приведем все диаграммы из (6), содержащие сингулярности. Некоторые слагаемые, которые являются конечными, будут обозначаться многоточиями. При этом слагаемое $\mathbb{H}_0(\Gamma_{30}^6)$ отсутствует полностью, потому что в этом случае сильно связанные диаграммы не содержат функций

Грина на диагонали и более двух одинаковых линий. Остальные равенства удобно представить следующим образом.

$$\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{40}^3) = 3^3 2^6 A_{27} + 3^4 2^5 A_{26} + 3^3 2^7 A_{25} + 3^3 2^6 A_{24}, \quad (10)$$

$$A_{27} = \text{triangle with 3 circles at vertices}, \quad A_{26} = \text{4 circles in a row}, \quad A_{25} = \text{circle with 2 arcs inside}, \quad A_{24} = \text{circle with 3 arcs inside},$$

$$\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{60}\Gamma_{40}) = 5^1 3^3 2^2 A_{23} + 5^1 3^2 2^3 A_{22}, \quad (11)$$

$$A_{23} = \text{circle with 2 arcs inside and 1 circle outside}, \quad A_{22} = \text{circle with 2 arcs inside and 1 circle outside (different configuration)},$$

$$\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{50}^2) = 5^1 3^1 2^3 A_{21} + 5^2 3^1 2^3 A_{20}, \quad (12)$$

$$A_{21} = \text{circle with 2 arcs inside}, \quad A_{20} = \text{circle with 2 arcs inside and 1 circle outside},$$

$$\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{60}\Gamma_{30}^2) = 5^1 3^2 2^4 A_{19} + 5^1 3^4 2^3 A_{18} + 5^1 3^4 2^2 A_{17}, \quad (13)$$

$$A_{19} = \text{2 circles touching at a point}, \quad A_{18} = \text{circle with 2 arcs inside and 1 circle outside}, \quad A_{17} = \text{circle with 2 arcs inside and 1 circle outside (different configuration)},$$

$$\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{50}\Gamma_{30}^3) = 5^1 3^5 2^5 A_{16} + 5^1 3^4 2^5 A_{15} + 5^1 3^4 2^4 A_{14} + \dots, \quad (14)$$

$$A_{16} = \text{cylinder with 1 circle on top}, \quad A_{15} = \text{triangle with 3 circles at vertices}, \quad A_{14} = \text{circle with 2 arcs inside and 1 circle outside},$$

$$\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{50}\Gamma_{40}\Gamma_{30}) = 5^1 3^2 2^4 A_{13} + 5^1 3^3 2^5 A_{12} + 5^1 3^3 2^4 A_{11} + 5^1 3^2 2^5 A_{10}, \quad (15)$$

$$A_{13} = \text{circle with 2 arcs inside and 1 circle outside}, \quad A_{12} = \text{circle with 2 arcs inside and 1 circle outside (different configuration)}, \quad A_{11} = \text{circle with 2 arcs inside and 1 circle outside (different configuration)}, \quad A_{10} = \text{circle with 2 arcs inside},$$

$$\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{40}\Gamma_{30}^3) = 3^6 2^6 A_9 + 3^6 2^5 A_8 + 3^6 2^6 A_7 + \dots, \quad (16)$$

$$A_9 = \text{cylinder with 1 circle on top}, \quad A_8 = \text{cylinder with 1 circle on side}, \quad A_7 = \text{triangle with 3 circles at vertices},$$

$$\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{40}^2\Gamma_{30}^2) = 3^3 2^7 A_6 + 3^4 2^6 A_5 + 3^4 2^6 A_4 + 3^4 2^6 A_3 + 3^4 2^7 A_2 + 3^4 2^5 A_1 + \dots, \quad (17)$$

$$A_6 = \text{cylinder with 1 circle on top}, \quad A_5 = \text{circle with 2 arcs inside and 1 circle outside}, \quad A_4 = \text{circle with 2 arcs inside and 1 circle outside (different configuration)},$$

$$A_3 = \text{circle with 2 arcs inside and 1 circle outside}, \quad A_2 = \text{circle with 2 arcs inside and 1 circle outside (different configuration)}, \quad A_1 = \text{circle with 2 arcs inside and 1 circle outside (different configuration)},$$

4.3 Специальные соотношения

В данной секции приводятся соотношения между диаграммами из предыдущего раздела. При этом диаграммы будут формулироваться на операторном языке. Такой подход позволяет более компактно производить записи, а сами соотношения в значительной мере упрощают подсчеты и являются аналогом известной \mathcal{R} -операции в рамках предложенной регуляризации (2).

Соотношение 1. В первом соотношении рассмотрим все три расходящиеся диаграммы $\{A_9, A_8, A_7\}$ из (16) с учетом соответствующего коэффициента из (6). Заметим, что все три диаграммы содержат подрасходимость в виде функции Грина на диагонали, поэтому выделенные диаграммы можно однозначно выразить, отделив от остальных имеющихся диаграмм, заменой $\Gamma_{40} \rightarrow \mathbb{H}_2^c(\Gamma_{40})$. Также заметим, что сингулярность в указанной поддиаграмме, согласно общей теории, должна сокращаться первым коэффициентом константы перенормировки.

Такое рассуждение приводит к желанию рассмотреть расходящиеся диаграммы из (16) совместно с шестым слагаемым из (7), который играет роль контрдиаграммы. В итоге можно убедиться в наличии равенства

$$-\frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{30}^4 \mathbb{H}_2^c(\Gamma_{40}))}{(3!)^4 (4!)^2} - \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{30}^4 X_1)}{2(3!)^4 4!} = -\frac{1}{(3!)^4 (4!)^2} \mathbb{H}_0^{\text{sc}}\left(\Gamma_{30}^4 (\mathbb{H}_2^c(\Gamma_{40}) + 12X_1)\right) \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0,$$

где во втором переходе использовались соотношения

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_2^c(\Gamma_{40}) + 12X_1 &= 6 \text{---} \bigcirc \text{---} + 12 \text{---} \times_1 \text{---} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \phi^2(x) \left(6(t_4 + t_6 B^2(x)/2) G^\Lambda(x, x) + 12(m^2 z_{21} + t_4 z_{41} B^2(x)/2) \right) \\ &= 6 \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \phi^2(x) (t_4 + t_6 B^2(x)/2) PS(x, x), \end{aligned} \quad (18)$$

приводящие к сокращению подрасходимости. Заметим, что после сокращения внутренней сингулярности диаграммы из (16) стали сходящимися. Это полностью согласуется с общей теорией, поскольку получившиеся диаграммы больше не содержат петель и большого (> 2) количества одинаковых линий.

Соотношение 2. Рассмотрим три диаграммы $\{A_3, A_2, A_1\}$ из (17) с учетом соответствующего коэффициента из (6). В данном случае сингулярности появляются из-за наличия функции Грина на диагонали, то есть петли, поэтому сокращение должно происходить с использованием (18). При этом в качестве контрдиаграммы нужно выбрать часть из седьмого слагаемого в (7), не содержащую петель. Легко проверить, что с учетом разложения по петлям

$$\mathbb{H}_2^c(\Gamma_{30}^2 \Gamma_{40}) = \mathbb{H}_{2,0}^c(\Gamma_{30}^2 \Gamma_{40}) + \mathbb{H}_{2,1}^c(\Gamma_{30}^2 \Gamma_{40})$$

верно соотношение вида

$$\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{30}^2 \Gamma_{40} X_1) = \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\mathbb{H}_{2,0}^c(\Gamma_{30}^2 \Gamma_{40}) X_1) = \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\mathbb{H}_{2,0}^c(\Gamma_{30}^2 \Gamma_{40}) X_1) + \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\mathbb{H}_{2,1}^c(\Gamma_{30}^2 \Gamma_{40}) X_1).$$

В итоге можно убедиться в справедливости равенства

$$\frac{2\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\mathbb{H}_{2,0}^c(\Gamma_{30}^2 \Gamma_{40}) \mathbb{H}_2^c(\Gamma_{40}))}{4(3!)^2 (4!)^2} + \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\mathbb{H}_{2,0}^c(\Gamma_{30}^2 \Gamma_{40}) X_1)}{4(3!)^2 4!} \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0.$$

Заметим, что после сокращения диаграммы больше не содержат сингулярных частей.

Соотношение 3. Объединим далее диаграммы $\{A_5, A_4\}$ из (17). При этом прибавим к ним оставшуюся часть из седьмого слагаемого в (7), то есть с одной петлей, а также третье слагаемое из (8). Таким образом, комбинация имеет вид

$$\frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{30}^2 \mathbb{H}_2^c(\Gamma_{40}) \mathbb{H}_2^c(\Gamma_{40}))}{4(3!)^2 (4!)^2} + \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\mathbb{H}_{2,1}^c(\Gamma_{30}^2 \Gamma_{40}) X_1)}{4(3!)^2 4!} + \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{30}^2 X_1^2)}{2^4 (3!)^2}. \quad (19)$$

Заменяем второе слагаемое при помощи равенства

$$\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\mathbb{H}_{2,1}^{\text{c}}(\Gamma_{30}^2 \Gamma_{40}) X_1) = \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{30}^2 \mathbb{H}_2^{\text{c}}(\Gamma_{40}) X_1),$$

тогда (19) можно преобразовать с использованием формулы бинома Ньютона

$$\frac{1}{4(3!)^2(4!)^2} \mathbb{H}_0^{\text{sc}}\left(\Gamma_{30}^2 (\mathbb{H}_2^{\text{c}}(\Gamma_{40}) + 12X_1)^2\right) \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0,$$

после чего все сингулярности в диаграммах сократятся.

Соотношение 4. Далее рассмотрим диаграммы A_{17} из (13), A_{14} из (14) и A_6 из (17). Все эти вклады содержат характерный элемент $\mathbb{H}_2^{\text{sc}}(\Gamma_{30}^2)$, поэтому к ним необходимо добавить соответствующие контрдиаграммы: первое слагаемое из (8) и часть с петлей из третьего слагаемого в (7). Полученную комбинацию можно представить следующим образом

$$\begin{aligned} & -\frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\mathbb{H}_2^{\text{sc}}(\Gamma_{30}^2) \mathbb{H}_2^{\text{sc}}(\Gamma_{60}))}{2(3!)^2 6!} + \frac{3\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\mathbb{H}_2^{\text{sc}}(\Gamma_{30}^2) \mathbb{H}_{2,0}^{\text{sc}}(\Gamma_{30} \Gamma_{50}))}{(3!)^4 5!} + \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\mathbb{H}_2^{\text{sc}}(\Gamma_{30}^2) \mathbb{H}_2^{\text{sc}}(\Gamma_{40}^2))}{4(3!)^2 (4!)^2} - \\ & - \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\mathbb{H}_2^{\text{c}}(\Gamma_{30}^2) X_2)}{4(3!)^2} - \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\mathbb{H}_2^{\text{sc}}(\Gamma_{30}^2) \mathbb{H}_2^{\text{c}}(\Gamma_{41}))}{2(3!)^2 4!} = \frac{1}{8(3!)^2} \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\mathbb{H}_2^{\text{sc}}(\Gamma_{30}^2) \tilde{\Gamma}_2), \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\tilde{\Gamma}_2 = -\frac{4}{6!} \mathbb{H}_2^{\text{sc}}(\Gamma_{60}) + \frac{4}{6!} \mathbb{H}_{2,0}^{\text{sc}}(\Gamma_{30} \Gamma_{50}) + \frac{2}{(4!)^2} \mathbb{H}_2^{\text{sc}}(\Gamma_{40}^2) - 2X_2 - \frac{1}{6} \mathbb{H}_2^{\text{c}}(\Gamma_{41}).$$

Последнюю комбинацию также можно представить в диаграммном виде

$$-\frac{1}{4} \text{---}\text{---}\text{---} + \frac{1}{3} \text{---}\text{---}\text{---} + \frac{1}{3} \text{---}\text{---}\text{---} - 2 \text{---}\text{---}\text{---} - \text{---}\text{---}\text{---}.$$

Далее можно убедиться прямым вычислением, что плотность не содержит сингулярных составляющих

$$\begin{aligned} & -\frac{t_6}{4} (G^\Lambda(x, x))^2 + \frac{1}{3} \frac{L}{16\pi^2} \left(t_4 B(x) + \frac{t_6}{6} B^3(x) \right) t_6 B(x) + \frac{1}{3} \frac{L}{16\pi^2} \left(t_4 + \frac{t_6}{2} B^2(x) \right)^2 - \\ & - 2 \left(\frac{t_6}{8} \alpha^2 \Lambda^2 + \frac{L t_4^2}{96\pi^2} + \frac{L t_4 t_6 B^2(x)}{48\pi^2} + \frac{5L t_6^2 B^4(x)}{48\pi^2 4!} \right) + t_4 \frac{\alpha \Lambda t_6}{2t_4} G^\Lambda(x, x) \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0, \end{aligned} \quad (21)$$

где для второй и третьей диаграмм было использовано асимптотическое разложение вида

$$\int_{B_{1/\sigma}} d^3x \left(G^\Lambda(x+y, y) \right)^3 \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{L}{16\pi^2}.$$

Окончательно получаем, что комбинация

$$\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\mathbb{H}_2^{\text{sc}}(\Gamma_{30}^2) \tilde{\Gamma}_2) \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0$$

не содержит сингулярных частей и линейная комбинация (20) является конечной.

Соотношение 5. Рассмотрим диаграммы A_{25} из (10), A_{23} из (11) и A_{13} из (15). Они содержат общую поддиаграмму вида $\mathbb{H}_2^{\text{c}}(\Gamma_{40})$, поэтому добавим к ним соответствующие контрдиаграммы: второе слагаемое из (8) и часть с петлей из четвертого слагаемого в (7). Получившаяся комбинация такова

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\mathbb{H}_2^{\text{c}}(\Gamma_{40}) \mathbb{H}_2^{\text{sc}}(\Gamma_{60}))}{4! 6!} - \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\mathbb{H}_2^{\text{c}}(\Gamma_{40}) \mathbb{H}_{2,0}^{\text{sc}}(\Gamma_{30} \Gamma_{50}))}{3! 4! 5!} - \frac{3\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\mathbb{H}_2^{\text{c}}(\Gamma_{40}) \mathbb{H}_2^{\text{sc}}(\Gamma_{40}^2))}{3!(4!)^3} + \\ & + \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\mathbb{H}_2^{\text{c}}(\Gamma_{40}) X_2)}{2(4!)} + \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\mathbb{H}_2^{\text{c}}(\Gamma_{40}) \mathbb{H}_2^{\text{c}}(\Gamma_{41}))}{(4!)^2} = -\frac{1}{4(4!)} \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\mathbb{H}_2^{\text{c}}(\Gamma_{40}) \tilde{\Gamma}_2). \end{aligned} \quad (22)$$

Ясно, что вершина $\tilde{\Gamma}_2$ не содержит сингулярностей из-за (21). Однако первый сомножитель сингулярен, поэтому необходимо выбрать набор контрдиаграмм из (7), (8) и (9) вида

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(X_1 \mathbb{H}_2^{\text{sc}}(\Gamma_{60}))}{2(6!)} - \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(X_1 \mathbb{H}_{2,0}^{\text{sc}}(\Gamma_{30} \Gamma_{50}))}{2(3!5!)} - \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(X_1 \mathbb{H}_2^{\text{sc}}(\Gamma_{40}^2))}{4(4!)^2} + \\ & + \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(X_1 X_2)}{4} + \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(X_1 \mathbb{H}_2^{\text{sc}}(\Gamma_{41}))}{2(4!)} = -\frac{1}{8} \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(X_1 \tilde{\Gamma}_2). \end{aligned} \quad (23)$$

Ясно, что она имеет подходящий вид, такой, что комбинации (22) и (23) в сумме

$$-\frac{1}{4(4!)} \mathbb{H}_0^{\text{sc}} \left((\mathbb{H}_2^{\text{sc}}(\Gamma_{40}) + 12X_1) \tilde{\Gamma}_2 \right) \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0$$

не содержат сингулярных вкладов из-за (18).

Соотношение 6. Изучим диаграмму A_{18} из (13). Ее особенностью является одна функция Грина на диагонали, то есть петля, образованная из вершины Γ_{60} . Ясно, что такой тип сингулярности можно убрать первым коэффициентом, содержащимся в Γ_{41} . Поэтому после прибавления соответствующей части из третьего слагаемого в (7), получаем

$$\begin{aligned} & -\frac{2\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{30} \mathbb{H}_3^{\text{sc}}(\Gamma_{30} \mathbb{H}_4^{\text{sc}}(\Gamma_{60})))}{2(3!)^2 6!} - \frac{2\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{30} \mathbb{H}_3^{\text{sc}}(\Gamma_{30} \Gamma_{41}))}{2(3!)^2 4!} = \\ & = -\frac{1}{(3!)^2 6!} \mathbb{H}_0^{\text{sc}} \left(\Gamma_{30} \mathbb{H}_3^{\text{sc}}(\Gamma_{30} [\mathbb{H}_4^{\text{sc}}(\Gamma_{60}) + 30\Gamma_{41}]) \right) \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0. \end{aligned}$$

Таким образом, вновь получаем конечную диаграмму после удаления внутренней сингулярности.

Соотношение 7. Рассмотрим диаграмму A_{26} из (10). Отличительной чертой является наличие двух функций Грина на диагонали, которые получаются из-за присутствия двух вершин $\mathbb{H}_2^{\text{sc}}(\Gamma_{40})$. Прибавляя ряд подходящих контрдиаграмм из восьмого слагаемого в (7) и четвертого слагаемого в (8), получаем линейную комбинацию

$$-\frac{3\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\mathbb{H}_{2,1}^{\text{sc}}(\Gamma_{40} \mathbb{H}_2^{\text{sc}}(\Gamma_{40})) \mathbb{H}_2^{\text{sc}}(\Gamma_{40}))}{3!(4!)^3} - \frac{2\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\mathbb{H}_{2,0}^{\text{sc}}(\Gamma_{40} X_1) \mathbb{H}_2^{\text{sc}}(\Gamma_{40}))}{4(4!)^2} - \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\mathbb{H}_{2,0}^{\text{sc}}(\Gamma_{40} X_1) X_1)}{8(4!)},$$

которую после применения равенства

$$\mathbb{H}_0^{\text{sc}} \left(\mathbb{H}_{2,1}^{\text{sc}}(\Gamma_{40} \mathbb{H}_2^{\text{sc}}(\Gamma_{40})) X_1 \right) = \mathbb{H}_0^{\text{sc}} \left(\mathbb{H}_{2,0}^{\text{sc}}(\Gamma_{40} X_1) \mathbb{H}_2^{\text{sc}}(\Gamma_{40}) \right)$$

можно представить в виде

$$-\frac{1}{2(4!)^3} \mathbb{H}_0^{\text{sc}} \left(\left[\mathbb{H}_{2,1}^{\text{sc}}(\Gamma_{40} \mathbb{H}_2^{\text{sc}}(\Gamma_{40})) + 12\mathbb{H}_{2,0}^{\text{sc}}(\Gamma_{40} X_1) \right] \left[\mathbb{H}_2^{\text{sc}}(\Gamma_{40}) + 12X_1 \right] \right) \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0.$$

Последнее равенство следует после применения соотношения (18) к обоим множителям.

Соотношение 8. Рассмотрим диаграмму A_{27} из (10). В ней трижды появляется функция Грина на диагонали, поэтому собирать комбинацию следует с учетом равенства (18). Прибавим к диаграмме соответствующие контрдиаграммы из восьмого слагаемого в (7), четвертого слагаемого в (8) и первого в (9), тогда получим комбинацию

$$-\frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}((\mathbb{H}_2^{\text{sc}}(\Gamma_{40}))^3)}{3!(4!)^3} - \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}((\mathbb{H}_2^{\text{sc}}(\Gamma_{40}))^2 X_1)}{4(4!)^2} - \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\mathbb{H}_2^{\text{sc}}(\Gamma_{40}) X_1^2)}{8(4!)} - \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(X_1^3)}{8(3!)},$$

которая после приведения подобных преобразуется в

$$-\frac{1}{3!(4!)^3} \mathbb{H}_0^{\text{sc}} \left((\mathbb{H}_2^{\text{sc}}(\Gamma_{40}) + 12X_1)^3 \right) \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0.$$

Таким образом, результат не имеет сингулярных составляющих.

Соотношение 9. Перейдем к A_{16} и A_{15} из (14). Их отличительной чертой является присутствие функции Грина на диагонали в виде вершины $\mathbb{H}_3^c(\Gamma_{50})$. Ясно, что такая особенность должна сокращаться контрвершиной Γ_{31} . Прибавляя первое слагаемое из (7), можно убедиться в равенстве

$$\frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{30}^3 \mathbb{H}_3^c(\Gamma_{50}))}{(3!)^4 5!} + \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{30}^3 \Gamma_{31})}{(3!)^5} = \frac{1}{(3!)^4 5!} \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{30}^3 [\mathbb{H}_3^c(\Gamma_{50}) + 20\Gamma_{31}]) \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0.$$

Соотношение 10. Аналогичные рассуждения верны и для диаграммы A_{12} из (15). Добавляя часть из второго слагаемого в (7), получаем следующее равенство

$$-\frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\mathbb{H}_3^{\text{sc}}(\Gamma_{30} \Gamma_{40}) \mathbb{H}_3^c(\Gamma_{50}))}{3!4!5!} - \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\mathbb{H}_3^{\text{sc}}(\Gamma_{30} \Gamma_{40}) \Gamma_{31})}{(3!)^2 4!} \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0.$$

Соотношение 11. Далее рассмотрим A_{11} из (15). Данная диаграмма содержит две функции Грина на диагонали, которые следуют из вершин $\mathbb{H}_2^c(\Gamma_{40})$ и $\mathbb{H}_3^c(\Gamma_{50})$. Следовательно, такие сингулярности должны сокращаться контрвершинами X_1 и Γ_{31} . В самом деле, прибавляя оставшуюся часть из второго слагаемого в (7), оставшуюся часть девятого слагаемого в (7), а также восьмое слагаемое в (8), получаем комбинацию

$$-\frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{30} \mathbb{H}_2^c(\Gamma_{40}) \mathbb{H}_3^c(\Gamma_{50}))}{3!4!5!} - \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{30} \mathbb{H}_2^c(\Gamma_{40}) \Gamma_{31})}{(3!)^2 4!} - \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{30} X_1 \mathbb{H}_3^c(\Gamma_{50}))}{2(3!5!)} - \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{30} X_1 \Gamma_{31})}{2(3!)^2},$$

которая преобразуется к виду

$$-\frac{1}{3!4!5!} \mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{30} [\mathbb{H}_2^c(\Gamma_{40}) + 12X_1] [\mathbb{H}_3^c(\Gamma_{50}) + 20\Gamma_{31}]) \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0.$$

Таким образом, результат не имеет сингулярных частей.

Соотношение 12. Рассмотрим A_{22} из (11) вместе с соответствующим четвертым слагаемым из (7). Линейная комбинация имеет вид

$$\frac{\mathbb{H}_{0,1}^{\text{sc}}(\Gamma_{40} \mathbb{H}_4^c(\Gamma_{60}))}{4!6!} + \frac{\mathbb{H}_{0,0}^{\text{sc}}(\Gamma_{40} \Gamma_{41})}{(4!)^2} = \frac{1}{48} \left(\text{diagram 1} + 2 \text{diagram 2} \right).$$

Аналитическое выражение выглядит следующим образом

$$\frac{1}{48} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 y \int_{\mathbb{R}^3} d^3 x \left(t_4 + \frac{t_6 B^2(y)}{2} \right) \left(G^\Lambda(y, x) \right)^4 \left(t_6 \alpha \Lambda + t_6 PS(x, x) + 2t_4 z_{41} \right).$$

С учетом равенства $t_6 \alpha \Lambda + 2t_4 z_{41} = 0$ сразу получаем сингулярную составляющую

$$\frac{\alpha_1(\mathbf{f}) \Lambda}{48} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 x \left(t_4 + \frac{t_6 B^2(x)}{2} \right) t_6 PS(x, x) + \frac{L}{12(16\pi^2)} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 x \left(t_4 + \frac{t_6 B^2(x)}{2} \right) t_6 PS^2(x, x),$$

где дополнительно было введено вспомогательное число

$$\alpha_1(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 y \left(R_0^1(y) \right)^4.$$

Заметим, что вся сингулярная часть зависит от нелокальной функции PS .

Соотношение 13. Следующая диаграмма A_{20} из (12) содержит две вершины $\mathbb{H}_3^c(\Gamma_{50})$, поэтому в качестве вычитаемых нужно выбрать пятое слагаемое из (7) и седьмое слагаемое из (8). В итоге получим

$$\frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}((\mathbb{H}_3^c(\Gamma_{50}))^2)}{2(5!)^2} + \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{31} \mathbb{H}_3^c(\Gamma_{50}))}{3!5!} + \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}((\Gamma_{31})^2)}{2(3!)^2} = \frac{1}{2(5!)^2} \mathbb{H}_0^{\text{sc}}([\mathbb{H}_3^c(\Gamma_{50}) + 20\Gamma_{31}]^2).$$

Ясно, что она содержит сингулярную составляющую

$$\frac{1}{48} \left(\text{diagram 1} + 2 \text{diagram 2} + 4 \text{diagram 3} \right) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{Lt_6^2}{48(16\pi^2)} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x PS^2(x, x) B^2(x),$$

которая имеет нелокальный характер (зависит от функции PS).

Соотношение 14. Далее изучим линейную комбинацию диаграмм A_{19} из (13) и A_{10} из (15), а также пятого слагаемого из (8)

$$-\frac{\mathbb{H}_{0,0}^{\text{sc}}(\Gamma_{30}^2 \Gamma_{60})}{2(3!)^2 6!} - \frac{\mathbb{H}_{0,0}^{\text{sc}}(\Gamma_{30} \Gamma_{40} \Gamma_{50})}{3!4!5!} + \frac{\mathbb{H}_{0,0}^{\text{sc}}(\Gamma_{30} \Gamma_{32})}{(3!)^2}, \quad (24)$$

которая на диаграммном языке принимает форму

$$-\frac{1}{72} \text{diagram 4} - \frac{1}{12} \text{diagram 5} + \frac{1}{6} \text{diagram 6}. \quad (25)$$

Найдем асимптотические разложения для каждого из слагаемых отдельно. Первая диаграмма переписывается аналитически

$$\text{diagram 4} = \int_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} d^3x d^3y d^3z r(x) \left(G^\Lambda(x, y) \right)^3 t_6 \left(G^\Lambda(y, z) \right)^3 r(z)$$

где для удобства была использована функция

$$r(x) = \left(t_4 B(x) + \frac{t_6 B^3(x)}{3!} \right).$$

Далее удобно воспользоваться добавлением и вычитанием и представить каждый боковой сомножитель следующим образом

$$r(x) \left(G^\Lambda(x, y) \right)^3 = r(x) \left(G^\Lambda(x, y) \right)^3 \pm r(y) \left(\tilde{R}_0^\Lambda(x - y) \right)^3,$$

$$r(z) \left(G^\Lambda(y, z) \right)^3 = r(z) \left(G^\Lambda(y, z) \right)^3 \pm r(y) \left(\tilde{R}_0^\Lambda(z - y) \right)^3,$$

где была использована обрезанная функция

$$\tilde{R}_0^\Lambda(x) = R_0^\Lambda(x) \chi(1/\Lambda < |x| < 1/\sigma).$$

Затем, отбрасывая конечные части и пользуясь интегральным равенством

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left(\tilde{R}_0^\Lambda(x) \right)^3 = \frac{L}{16\pi^2},$$

приходим к следующему выражению для первой диаграммы

$$\text{diagram 4} \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{2L}{16\pi^2} \int_{\mathbb{R}^{3 \times 2}} d^3x d^3y r(x) \left(G^\Lambda(x, y) \right)^3 t_6 r(y) - \left(\frac{L}{16\pi^2} \right)^2 \int_{\mathbb{R}^3} d^3x t_6 r^2(x).$$

Перейдем к следующей диаграмме и вновь воспользуемся добавлением и вычитанием

$$\text{diagram 5} \pm I_1(\Lambda) \int_{\mathbb{R}^3} d^3x r(x) t_6 B(x) \left(t_4 + \frac{t_6 B^2(x)}{2} \right), \quad (26)$$

где

$$I_1(\Lambda) = \frac{L}{16\pi^2} \int_{B_{1/\sigma}} d^3y \left(R_0^\Lambda(y) \right)^3 - \int_{B_{1/\sigma} \times B_{1/\sigma}} d^3y d^3z \left(R_0^\Lambda(y) \right)^2 R_0^\Lambda(y-z) \left(R_0^\Lambda(z) \right)^3 \stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{L}{(4\pi)^4} + \frac{L^2}{2(4\pi)^4}.$$

Здесь мы воспользовались переходом

$$\left(R_0^\Lambda(y)\right)^2 R_0^\Lambda(y-z) \xrightarrow{\text{s.p.}} \left(R_0(y)\right)^2 R_0(y-z) \xrightarrow{f} \frac{1 - \ln(|y|\sigma)}{16\pi^2},$$

а также формулой, см. [10],

$$\int_{|\hat{y}|=1} d^2\sigma(\hat{y}) R_0(x+r\hat{y}) = \frac{1}{4\pi} \begin{cases} r^{-1}, & |x| \leq r; \\ |x|^{-1}, & |x| > r. \end{cases}$$

Тогда, стягивая поддиаграмму с тремя линиями, формула (26) в смысле равенства сингулярных составляющих переходит в

$$\frac{L}{16\pi^2} \int_{\mathbb{R}^{3 \times 2}} d^3x d^3y r(x) \left(G^\Lambda(x, y)\right)^3 \left(t_4 t_6 B(y) + \frac{t_6^2 B^3(y)}{2}\right) - I_1(\Lambda) \int_{\mathbb{R}^3} d^3x r(x) t_6 B(x) \left(t_4 + \frac{t_6 B(x)}{2}\right).$$

Последняя диаграмма мгновенно выписывается с учетом вида контрвершины Γ_{42}

$$\text{---} \bigcirc \text{---} = \int_{\mathbb{R}^{3 \times 2}} d^3x d^3y r(x) \left(G^\Lambda(x, y)\right)^3 \left(\frac{L t_4 t_6 B(y)}{24\pi^2} + \frac{5 L t_6^2 B^3(y)}{48\pi^2 3!}\right).$$

Окончательно, возвращаясь к линейной комбинации (25), приходим к выражению

$$(24) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{1}{72} \left(\frac{L}{16\pi^2}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^3} d^3x t_6 r^2(x) + \frac{I_1(\Lambda)}{12} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x r(x) t_6 B(x) \left(t_4 + \frac{t_6 B(x)}{2}\right) \quad (27)$$

$$= V_{0,2} \left(\frac{L^2 t_4^2 t_6}{3^2 2 (4\pi)^4} - \frac{L t_4^2 t_6}{12 (4\pi)^4}\right) + V_{0,4} \left(\frac{7 L^2 t_4 t_6^2}{2^3 3^3 (4\pi)^4} - \frac{L t_4 t_6^2}{3^2 2 (4\pi)^4}\right) + V_{0,6} \left(\frac{5 L^2 t_6^3}{2^4 3^4 (4\pi)^4} - \frac{L t_6^3}{2^4 3^2 (4\pi)^4}\right).$$

Соотношение 15. Далее изучим оставшиеся две контрдиаграммы, шестое слагаемое из (8) и третье слагаемое из (9). Они имеют вид

$$-\frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{42})}{4!} - \frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(X_3)}{2} = -\frac{1}{8} \text{---} \bigcirc \text{---} - \frac{1}{2} \text{---} \bigcirc \text{---}.$$

С использованием функции Грина на диагонали явный вид сингулярностей легко выписывается. Разобьем его на две части: зависящую от нелокальной составляющей PS

$$-\frac{1}{8} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x PS^2(x, x) \left(\frac{L t_4 t_6}{24\pi^2} + \frac{5 L t_6^2 B^2(x)}{96\pi^2}\right) - \frac{\alpha\Lambda}{8} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x PS(x, x) \left(\frac{L t_4 t_6}{12\pi^2} + \frac{5 L t_6^2 B^2(x)}{48\pi^2}\right) -$$

$$-\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x PS(x, x) \left(-\frac{\alpha\Lambda L t_4 t_6}{48\pi^2} + \frac{\alpha_1(\mathbf{f})\Lambda t_4 t_6}{24} - \frac{5\alpha\Lambda L t_6^2 B^2(x)}{192\pi^2} + \frac{\alpha_1(\mathbf{f})\Lambda t_6^2 B^2(x)}{16}\right),$$

а также зависящую только от фонового поля B

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x B^2(x) \left(-\frac{\alpha^2 \Lambda^2 5 L t_6^2}{16 48\pi^2} + \frac{\alpha^2 \Lambda^2 5 L t_6^2}{4 96\pi^2} - \frac{\alpha_1(\mathbf{f})\alpha\Lambda^2 t_6^2}{4 8}\right) = V_{0,2} \left(\frac{5 L \alpha^2 \Lambda^2 t_6^2}{2^4 3 (4\pi)^2} - \frac{\alpha_1(\mathbf{f})\alpha\Lambda^2 t_6^2}{2^5}\right). \quad (28)$$

Соотношение 16. Ответ для диаграммы A_{21} из (12)

$$\frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{50})}{2(5!)^2} = \frac{1}{240} \text{---} \bigcirc \text{---}$$

выписывается с использованием стандартных методов. Его также удобно разбить на две части: с использованием нелокальной составляющей

$$\frac{t_6^2}{24} \frac{L}{16\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x PS^2(x, x) B^2(x) + \frac{\alpha_1(\mathbf{f})\Lambda t_6^2}{48} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x PS(x, x) B^2(x),$$

а также зависящую только от фонового поля

$$\frac{\alpha_2(\mathbf{f})\Lambda^2 t_6^2}{2(5!)} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x B^2(x) - \frac{t_6^2}{2(3!5!)} \frac{L}{(16\pi^2)^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x B(x) A_0(x) B(x) - \frac{I_2(\Lambda) t_6^2}{48} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x B^2(x) \left(m^2 + \frac{t_4 B^2(x)}{2} + \frac{t_6 B^4(x)}{4!} \right). \quad (29)$$

Здесь для удобства были введены два новых вспомогательных числа

$$\alpha_2(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3y \left(R_0^1(y) \right)^5,$$

$$I_2(\Lambda) = \int_{B_{1/\sigma}} d^3x \left(R_0^\Lambda(x) \right)^4 \left(\int_{B_{1/\sigma}} d^3y R_0^\Lambda(x-y) R_0^\Lambda(y) - \int_{B_{1/\sigma}} d^3y \left(R_0^\Lambda(y) \right)^2 \right) \stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{L}{2(4\pi)^4},$$

где мы использовали переход

$$R_0^\Lambda(x-y) R_0^\Lambda(y) - \left(R_0^\Lambda(y) \right)^2 \stackrel{\text{s.p.}}{\rightarrow} R_0(x-y) R_0(y) - \left(R_0(y) \right)^2 \xrightarrow{f} \frac{(-|x|)}{8\pi}.$$

Заметим, что (29) можно представить в виде

$$(29) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \left(\int_{\mathbb{R}^3} d^3x B(x) A_0(x) B(x) \right) \left(-\frac{L t_6^2}{2^5 3^2 5 (4\pi)^4} \right) + V_{0,2} \left(\frac{\alpha_2(\mathbf{f}) \Lambda^2 t_6^2}{2(5!)} + \frac{L m^2 t_6^2}{2^5 3 (4\pi)^4} \right) + V_{0,4} \left(\frac{L t_4 t_6^2}{2^6 3 (4\pi)^4} \right) + V_{0,6} \left(\frac{L t_6^3}{2^8 3^2 (4\pi)^4} \right). \quad (30)$$

Соотношение 17. Последняя диаграмма A_{24} из (10) содержит только часть, зависящую от фонового поля и может быть представлена в виде

$$-\frac{\mathbb{H}_0^{\text{sc}}(\Gamma_{40}^3)}{3!(4!)^3} + \kappa_{24} = -\frac{1}{240} \langle \text{triangle} \rangle + \kappa_{24} \stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{I_3(\Lambda)}{48} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left(\left(t_4 + t_6 B^2(x)/2 \right)^3 - t_4^3 \right),$$

где константа κ_{24} не зависит от фонового поля и вычитает лишнюю константу, а вспомогательный интеграл имеет вид

$$\begin{aligned} I_3(\Lambda) &= \int_{B_{1/\sigma}} d^3x \int_{B_{1/\sigma}} d^3y \left(R_0^\Lambda(x) \right)^2 \left(R_0^\Lambda(x-y) \right)^2 \left(R_0^\Lambda(y) \right)^2 \\ &\stackrel{\text{s.p.}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \int_{B_{1/\sigma}} d^3y \left(R_0^\Lambda(x) \right)^2 \left(R_0^\Lambda(x-y) \right)^2 \left(R_0^\Lambda(y) \right)^2 \\ &\stackrel{\text{s.p.}}{=} L \left(\Lambda \frac{d}{d\Lambda} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \int_{B_{\Lambda/\sigma}} d^3y \left(R_0^1(x) \right)^2 \left(R_0^1(x-y) \right)^2 \left(R_0^1(y) \right)^2 \right) \Big|_{\Lambda \rightarrow +\infty} \\ &= \frac{L}{16\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \int_{|\hat{y}|=1} d^2\sigma(\hat{y}) \left(R_0(x) \right)^2 \left(R_0(x-\hat{y}) \right)^2 \equiv \frac{L\alpha_3}{(4\pi)^4}. \end{aligned} \quad (31)$$

Следовательно, получаем

$$(31) \stackrel{\text{s.p.}}{=} V_{0,2} \left(-\frac{L\alpha_3 t_4 t_6^2}{2^5 (4\pi)^4} \right) + V_{0,4} \left(-\frac{L\alpha_3 t_4 t_6^2}{2^6 (4\pi)^4} \right) + V_{0,6} \left(-\frac{L\alpha_3 t_6^3}{2^7 3 (4\pi)^4} \right). \quad (32)$$

Вычислим значение коэффициента α_3 :

$$\alpha_3 = 16\pi^2 \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \int_{|\hat{y}|=1} d^2\sigma(\hat{y}) \left(R_0(x) \right)^2 \left(R_0(x-\hat{y}) \right)^2 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dr}{r} \ln \left| \frac{r+1}{r-1} \right| = \int_0^1 \frac{dr}{r} \ln \left(\frac{1+r}{1-r} \right),$$

где мы совершили переход к сферическим координатам. Заметим, что

$$\ln(1+r) - \ln(1-r) = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^{2k+1}}{2k+1},$$

тогда получаем

$$\alpha_3 = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \int_0^1 dr r^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

5 Заключение

В работе были изучены сингулярные вклады для трехмерной шестерной модели в четырехпетлевом приближении. Показано, что результат не зависит от нелокальных вкладов. Найдены четвертые коэффициенты для констант перенормировок.

Отметим, что предложенная в работе перенормировка реализуется в рамках схемы минимального вычитания – так называемая MS-схема. Также в работе наглядно видно выполнение \mathcal{R} -операции, что иллюстрируется сокращением сингулярных вкладов в соотношениях 1–13.

Видно, что значение коэффициента (3) для константы перенормировки зависит от $\alpha(\mathbf{f})$, $\alpha_1(\mathbf{f})$ и $\alpha_2(\mathbf{f})$, которые задаются выражениями (3), (3) и (3). Рассмотрим два частных случая.

- Пусть \mathbf{f} имеет тривиальный вид $\mathbf{f} = 0$, тогда

$$\alpha = \frac{1}{4\pi}, \quad \alpha_1 = \frac{4}{3(4\pi)^3}, \quad \alpha_2 = \frac{5}{6(4\pi)^4}.$$

- Пусть $\mathbf{f}(t^2) = 1 - t$, тогда условие применимости регуляризации из [17] выполняется, и числа равны

$$\alpha = \frac{1}{2\pi}, \quad \alpha_1 = \frac{68}{35(4\pi)^3}, \quad \alpha_2 = \frac{101}{56(4\pi)^4}.$$

Благодарности. Автор признательна А.В.Иванову за полезные обсуждения и скрупулезную редакторскую работу.

6 Список литературы

- [1] C. G. Bollini, J. J. Giambiagi, *Dimensional Renormalization: The Number of Dimensions as a Regularizing Parameter*, Nuovo Cim. B, **12**, 20–26 (1972)
- [2] G. 't Hooft, M. Veltman, *Regularization and renormalization of gauge fields*, Nucl. Phys. B **44**, 189–213 (1972)
- [3] T. Bakhayev, A. Slavnov, *Higher covariant derivative regularization revisited*, Mod. Phys. Lett. A **11**(19), 1539–1554 (1996)
- [4] K. V. Stepanyantz, *The Higher Covariant Derivative Regularization as a Tool for Revealing the Structure of Quantum Corrections in Supersymmetric Gauge Theories*, Proc. Steklov Inst. Math. **309**, 284–298 (2020)
- [5] W. Pauli, F. Villars, *On the Invariant Regularization in Relativistic Quantum Theory*, Rev. Mod. Phys. **21**(3): 434–444 (1949)
- [6] L. D. Faddeev, A. A. Slavnov, *Gauge Fields: An Introduction to Quantum Theory*, Frontiers in Physics **83**, Addison-Wesley, 1–236 (1991)

- [7] D. I. Kazakov, *Radiative Corrections, Divergences, Regularization, Renormalization, Renormalization Group and All That in Examples in Quantum Field Theory*, JINR, UC-2008-34, 1–91 (2009) arXiv:0901.2208
- [8] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Quantum equation of motion and two-loop cutoff renormalization for ϕ^3 model*, Zap. Nauchn. Sem. POMI, **487**, POMI, St. Petersburg, 2019, 151–166; J. Math. Sci. (N. Y.), **257**:4 (2021), 526–536, arXiv:2203.04562, doi:10.1007/s10958-021-05500-5
- [9] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Two-Loop Cutoff Renormalization of 4-D Yang–Mills Effective Action*, 2020 J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **48**, 015002, arXiv:2004.05999, doi:10.1088/1361-6471/abb939
- [10] A. V. Ivanov, *Explicit Cutoff Regularization in Coordinate Representation*, 2022 J. Phys. A: Math. Theor. **55**, 495401, arXiv:2209.01783, doi:10.1088/1751-8121/aca8dc
- [11] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Formula for two-loop divergent part of 4-D Yang–Mills effective action*, Eur. Phys. J. C **82**, 997 (2022), arXiv:2203.07131, doi:10.1140/epjc/s10052-022-10921-w
- [12] P. V. Akacevich, A. V. Ivanov, *On Two-Loop Effective Action of 2D Sigma Model*, Eur. Phys. J. C **83**, 653 (2023), arXiv:2304.02374, doi:10.1140/epjc/s10052-023-11797-0
- [13] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Three-loop divergences in effective action of 4-dimensional Yang–Mills theory with cutoff regularization: Γ_4^2 -contribution*, Zap. Nauchn. Sem. POMI, **520**, POMI, St. Petersburg, 2023, 162–188, J Math Sci **284**, 681–699 (2024) doi:10.1007/s10958-024-07379-4
- [14] A. V. Ivanov, *Three-loop renormalization of the quantum action for a four-dimensional scalar model with quartic interaction with the usage of the background field method and a cutoff regularization*, Nucl. Phys. B, **1006**, 116647 (2024), doi:10.1016/j.nuclphysb.2024.116647, arXiv:2402.14549, <https://www.pdmi.ras.ru/preprint/2024/24-02.html>
- [15] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Three-loop renormalization of the quantum action for a five-dimensional scalar cubic model with the usage of the background field method and a cutoff regularization*, Eur. Phys. J. Plus **139**, 849 (2024) doi:10.1140/epjp/s13360-024-05648-4, arXiv:2404.07513, <https://www.pdmi.ras.ru/preprint/2024/24-05.html>
- [16] N. V. Kharuk, *Three-loop renormalization with a cutoff in a sextic model*, Questions of quantum field theory and statistical physics. Part 30, Zap. Nauchn. Sem. POMI, **532**, POMI, St. Petersburg, 2024, 273–286 <https://mathscinet.ams.org/mathscinet/relay-station?mr=4811943> <https://www.mathnet.ru/eng/zns17462>
- [17] A. V. Ivanov, *An applicability condition of a cutoff regularization in the coordinate representation*, Funktsional. Anal. i Prilozhen., **59**:1 (2025), 5–17 arXiv:2403.09218, <https://www.pdmi.ras.ru/preprint/2024/24-04.html>, DOI: <https://doi.org/10.4213/faa4221>
- [18] L. N. Lipatov, *Calculation of the Gell–Mann–Low function in scalar theory with strong nonlinearity*, Sov. Phys. JETP **44**, 1055–1062 (1976)
- [19] R. D. Pisarski, *Fixed points of $(\phi^6)_3$ and $(\phi^4)_4$ theories*, Phys. Rev. D **28**, 1554–1556 (1983)
- [20] W. A. Bardeen, M. Moshe, M. Bander, *Spontaneous Breaking of Scale Invariance and the Ultraviolet Fixed Point in $O(N)$ -Symmetric (ϕ_3^6) Theory*, Phys. Rev. Lett. **52**, 1188–1191 (1984)
- [21] R. Gudmundsdottir, G. Rydneil, P. Salomonson, *More on $O(N)$ -Symmetric ϕ_3^6 Theory*, Phys. Rev. Lett. **53**, 2529–2531 (1984)
- [22] J. S. Hager, *Six-loop renormalization group functions of $O(n)$ -symmetric ϕ^6 -theory and ϵ -expansions of tricritical exponents up to ϵ^3* , J. Phys. A **35**, 2703–2711 (2002)
- [23] J. A. Gracey, *Renormalization of scalar field theories in rational spacetime dimensions*, Eur. Phys. J. C **80**, 604 (2020)

- [24] A. S. Cattaneo, P. Mnev, N. Reshetikhin, *Perturbative Quantum Gauge Theories on Manifolds with Boundary*, Commun. Math. Phys. **357**, 631–730 (2018) doi:10.1007/s00220-017-3031-6
- [25] S. Kandel, *Functorial quantum field theory in the Riemannian setting*, Adv. Theor. Math. Phys. **20**(6), 1443–1471 (2016) doi:10.4310/ATMP.2016.v20.n6.a5
- [26] S. Kandel, P. Mnev, K. Wernli, *Two-dimensional perturbative scalar QFT and Atiyah-Segal gluing*, Adv. Theor. Math. Phys. **25**(7), 1847–1952 (2021) doi:10.4310/ATMP.2021.v25.n7.a5
- [27] A. V. Ivanov, *Effective actions, cutoff regularization, quasi-locality, and gluing of partition functions*, arXiv:2411.13857 (2024) <https://www.pdmi.ras.ru/preprint/2024/24-11.html>
- [28] B. S. DeWitt, *Quantum Theory of Gravity. 2. The Manifestly Covariant Theory*, Phys. Rev. **162**, 1195–1239 (1967)
- [29] B. S. DeWitt, *Quantum Theory of Gravity. 3. Applications of the Covariant Theory*, Phys. Rev. **162**, 1239–1256 (1967)
- [30] G. 't Hooft, *The background field method in gauge field theories*, (Karpacz, 1975), Proceedings, Acta Universitatis Wratislaviensis, **1**, Wroclaw, 345–369 (1976)
- [31] L. F. Abbott, *Introduction to the background field method*, Acta Phys. Polon. B, **13**:1–2, 33–50 (1982)
- [32] I. Ya. Aref'eva, A. A. Slavnov, L. D. Faddeev, *Generating functional for the S-matrix in gauge-invariant theories*, TMF, **21**:3, 311–321 (1974)
- [33] R. Shrock, *Study of the ultraviolet behavior of an $O(N)$ ϕ^6 theory in $d = 3$ dimensions*, Phys. Rev. D **107**, 096009 (2023) doi:10.1103/PhysRevD.107.096009
- [34] S. Kvedaraitė, T. Steudtner, M. Uetrecht, *Revisiting the ϕ^6 Theory in Three Dimensions at Large N* , arXiv:2502.07880 (2025)
- [35] J. C. Collins, *Renormalization: An Introduction to Renormalization, the Renormalization Group and the Operator-Product Expansion*, Cambridge University Press (1984)
- [36] O. I. Zavialov, *Renormalized quantum field theory*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, 1–524 (1990)
- [37] M. Lüscher, *Dimensional regularisation in the presence of large background fields*, Annals of Physics **142**, 359–392 (1982)
- [38] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Special Functions for Heat Kernel Expansion*, Eur. Phys. J. Plus **137**, 1060 (2022), arXiv:2106.00294v2, 10.1140/epjp/s13360-022-03176-7
- [39] A. V. Ivanov, M. A. Russkikh, *Quantum Field Theory on the Example of the Simplest Cubic Model*, J Math Sci **275**, 306–325 (2023) <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06683-9>