

УСРЕДНЕНИЕ НЕЛОКАЛЬНОГО НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА СВЁРТОЧНОГО ТИПА

Е. А. Жижина^{1,2}, А. Л. Пятницкий^{1,2}, В. А. Слоущ³, Т. А. Суслина³

¹Высшая школа современной математики МФТИ,
Климентовский пер., д.1, стр.1,
Москва, 115184, Россия

² Арктический университет Норвегии, кампус Нарвик,
Лодве Лангес гате 2,
Нарвик 8517, Норвегия

³Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., д. 7/9,
Санкт-Петербург, 199034, Россия

e-mail: elena.jijina@gmail.com

e-mail: apiatnitski@gmail.com

e-mail: v.slouzh@spbu.ru

e-mail: t.suslina@spbu.ru

АННОТАЦИЯ

В $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассматривается ограниченный оператор \mathbb{A}_ε , $\varepsilon > 0$, вида

$$(\mathbb{A}_\varepsilon u)(\mathbf{x}) = \varepsilon^{-d-2} \int_{\mathbb{R}^d} a((\mathbf{x} - \mathbf{y})/\varepsilon) \mu(\mathbf{x}/\varepsilon, \mathbf{y}/\varepsilon) (u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})) d\mathbf{y}.$$

Предполагается, что $a(\mathbf{x})$ — неотрицательная функция класса $L_1(\mathbb{R}^d)$, а $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — функция, \mathbb{Z}^d -периодическая по каждой переменной, причем $0 < \mu_- \leq \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mu_+ < \infty$. Оператор \mathbb{A}_ε , вообще говоря, несамосопряжен. Кроме того, предполагается, что конечны моменты $M_k = \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^k a(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$, $k = 1, 2, 3$. Получена аппроксимация резольвенты $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ при малом ε по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$ с оценкой погрешности порядка $O(\varepsilon)$. Аппроксимация дается оператором вида $(\mathbb{A}^0 + \varepsilon^{-1} \langle \boldsymbol{\alpha}, \nabla \rangle + I)^{-1}$, домноженным справа на некоторый периодический множитель $q_0(\mathbf{x}/\varepsilon)$, где $\mathbb{A}^0 = -\operatorname{div} g^0 \nabla$ — эффективный оператор, а $\boldsymbol{\alpha}$ — постоянный вектор.

Ключевые слова: нелокальные операторы свёрточного типа, периодическое усреднение, операторные оценки погрешности, эффективный оператор.

Исследование Е. А. Жижиной и А. Л. Пятницкого выполнено при частичной поддержке проекта “Pure Mathematics in Norway” и фонда UiT Aurora проект MASCOT.

Исследование В. А. Слоуща и Т. А. Суслиной выполнено при поддержке РНФ, проект 22-11-00092.

ПРЕПРИНТЫ

Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В. М. Бабич, М. А. Всемиров, А. И. Генералов,
И. А. Ибрагимов, Л. Ю. Колотилина, Ю. В. Матиясевич,
Н. Ю. Нецветаев, С. И. Репин, Г. А. Серегин.

ВВЕДЕНИЕ

Работа относится к теории усреднения периодических операторов. Этой области посвящена обширная литература; укажем несколько основных монографий: [1, 2, 8].

Мы получаем операторные оценки в задаче усреднения периодического нелокального оператора свёрточного типа. В самосопряженном случае рассматриваемая задача изучалась в статьях авторов [13, 14, 15]; по поводу мотивации см. введение к [13]. Метод является модификацией теоретико-операторного подхода на случай нелокальных операторов.

0.1. Операторные оценки в теории усреднения. Теоретико-операторный подход.

В работах Бирмана и Суслиной [3, 4, 5] был предложен и развит теоретико-операторный подход к задачам усреднения периодических дифференциальных операторов в \mathbb{R}^d (вариант спектрального метода). С помощью этого подхода были найдены так называемые *операторные оценки погрешности* для широкого класса задач гомогенизации. Поясним характер результатов на примере усреднения эллиптического оператора $A_\varepsilon = -\operatorname{div} g(\mathbf{x}/\varepsilon)\nabla$, $\varepsilon > 0$, в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Здесь матрица коэффициентов $g(\mathbf{x})$ предполагается ограниченной, положительно определенной и \mathbb{Z}^d -периодической. В [3] было показано, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ резольвента $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ сходится по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$ к резольвенте оператора A^0 и выполнена оценка

$$\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon. \quad (0.1)$$

Здесь $A^0 = -\operatorname{div} g_{\text{hom}}\nabla$ — так называемый *эффективный оператор* с постоянной положительной *эффективной матрицей* g_{hom} . Неравенства такого типа получили название операторных оценок погрешности в теории усреднения. В [4] получена более точная аппроксимация резольвенты $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$ при учете корректора с оценкой погрешности порядка $O(\varepsilon^2)$, а в [5] найдена аппроксимация резольвенты $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d)$ в пространство Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$ (также при учете корректора) с оценкой погрешности порядка $O(\varepsilon)$.

Теоретико-операторный подход основан на масштабном преобразовании, теории Флоке–Блоха и аналитической теории возмущений. Поясним метод на примере вывода оценки (0.1). За счет масштабного преобразования оценка (0.1) равносильна неравенству

$$\|(A + \varepsilon^2 I)^{-1} - (A^0 + \varepsilon^2 I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon^{-1}, \quad (0.2)$$

где $A = -\operatorname{div} g(\mathbf{x})\nabla = \mathbf{D}^* g(\mathbf{x}) \mathbf{D}$, $\mathbf{D} = -i\nabla$. Далее, с помощью унитарного преобразования Гельфанда оператор A раскладывается в прямой интеграл по операторам $A(\boldsymbol{\xi})$, действующим в $L_2(\Omega)$ и зависящим от параметра $\boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}$ (квазиимпульса). Здесь $\Omega = [0, 1)^d$ — ячейка решетки \mathbb{Z}^d , а $\tilde{\Omega} = [-\pi, \pi)^d$ — ячейка двойственной решетки. Оператор $A(\boldsymbol{\xi})$ задается выражением $A = (\mathbf{D} + \boldsymbol{\xi})^* g(\mathbf{x})(\mathbf{D} + \boldsymbol{\xi})$ при периодических граничных условиях. Оценка (0.2) эквивалентна аналогичной оценке для операторов, зависящих от квазиимпульса:

$$\|(A(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 I)^{-1} - (A^0(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 I)^{-1}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C\varepsilon^{-1}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}.$$

Основная часть исследования состоит в изучении операторного семейства $A(\boldsymbol{\xi})$, которое представляет собой аналитическое семейство с компактной резольвентой. Поэтому можно применить методы аналитической теории возмущений. Выясняется, что резольвенту $(A(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 I)^{-1}$ можно приблизить в терминах спектральных характеристик оператора на краю спектра. В частности, эффективная матрица выражается через матрицу Гессе для первого собственного значения $\lambda_1(\boldsymbol{\xi})$ оператора $A(\boldsymbol{\xi})$ в точке $\boldsymbol{\xi} = 0$. Поэтому эффект усреднения представляет собой *спектральный пороговый эффект* на краю спектра эллиптического оператора.

Другой подход к получению операторных оценок погрешности в задачах гомогенизации (так называемый “метод сдвига”) был предложен в работах Жикова и Пастуховой (см. [7, 9], а также обзор [10] и цитированную там литературу).

В последние годы операторные оценки погрешности в различных задачах гомогенизации для дифференциальных операторов привлекают внимание все большего числа исследователей; получено много содержательных результатов. Достаточно подробный обзор современного состояния этой области можно найти в [13, пункт 0.2] и в [17, введение].

Подчеркнем, однако, что до появления работы авторов [13] *операторные оценки для нелокальных операторов не изучались*.

0.2. Постановка задачи. Основной результат. В $L_2(\mathbb{R}^d)$ изучается нелокальный оператор \mathbb{A}_ε , заданный соотношением

$$\mathbb{A}_\varepsilon u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon^{d+2}} \int_{\mathbb{R}^d} a\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\varepsilon}\right) \mu\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \frac{\mathbf{y}}{\varepsilon}\right) (u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d). \quad (0.3)$$

Здесь ε — малый положительный параметр. Предполагается, что $a(\mathbf{x})$ — неотрицательная функция класса $L_1(\mathbb{R}^d)$, $\|a\|_{L_1} > 0$; $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — ограниченная и положительно определенная функция, \mathbb{Z}^d -периодическая по каждой переменной. При этих условиях оператор \mathbb{A}_ε ограничен. Вообще говоря, оператор \mathbb{A}_ε несамосопряжен, но он подобен аккретивному оператору (см. следствие 1.7). При дополнительных условиях $a(\mathbf{x}) = a(-\mathbf{x})$ и $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mu(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ оператор \mathbb{A}_ε самосопряжен. Мы предполагаем, что несколько первых моментов $M_k(a) = \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^k a(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ конечны.

Оператор вида (0.3) возникает в моделях математической биологии и популяционной динамики и активно изучается в последнее время. Усреднению таких операторов была посвящена работа [11], в которой в самосопряженном случае при условии, что $M_2(a) < \infty$, было показано, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ резольвента $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ сильно сходится к резольвенте $(\mathbb{A}^0 + I)^{-1}$ эффективного оператора. Эффективный оператор представляет собой эллиптический дифференциальный оператор второго порядка с постоянными коэффициентами $\mathbb{A}^0 = -\operatorname{div} g^0 \nabla$. Тем самым, в данной задаче наблюдается интересный эффект: при усреднении ограниченного нелокального оператора \mathbb{A}_ε возникает неограниченный локальный оператор \mathbb{A}^0 .

Для операторов с несимметричным ядром аналогичные задачи изучались в [12], где для соответствующих параболических уравнений был получен результат об усреднении в движущихся координатах. Задача в периодически перфорированной области исследовалась вариационными методами в [6].

В работе авторов [13] в самосопряженном случае при условии $M_3(a) < \infty$ была установлена сходимость резольвенты $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ к резольвенте $(\mathbb{A}^0 + I)^{-1}$ эффективного оператора по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$ и была получена точная по порядку оценка погрешности:

$$\|(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(a, \mu) \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

В [14, 15] также в самосопряженном случае при условии $M_4(a) < \infty$ была найдена более точная аппроксимация резольвенты $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ при учете корректора с погрешностью $O(\varepsilon^2)$.

В настоящей работе мы получаем аппроксимацию резольвенты $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ в общем (вообще говоря, несамосопряженном) случае при условии $M_3(a) < \infty$. *Основной результат работы* (теорема 4.1) — оценка

$$\|(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + \varepsilon^{-1} \langle \boldsymbol{\alpha}, \nabla \rangle + I)^{-1} [q_0^\varepsilon]\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(a, \mu) \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (0.4)$$

Здесь $[q_0^\varepsilon]$ — оператор умножения на функцию $q_0(\mathbf{x}/\varepsilon)$, а $q_0(\mathbf{x})$ — положительное \mathbb{Z}^d -периодическое решение уравнения

$$\int_{\mathbb{R}^d} a(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \mu(\mathbf{y}, \mathbf{x}) q_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = q_0(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^d} a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,$$

удовлетворяющее условию $\int_{\Omega} q_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$. Мы показываем, что решение с такими свойствами существует и единственно; более того, функция $q_0(\mathbf{x})$ ограничена и положительно определена.

“Эффективный снос” $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)^t$ определяется формулами

$$\alpha_j = \int_{\Omega} d\mathbf{x} q_0(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} (x_j - y_j) a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad j = 1, \dots, d.$$

(Заметим, что в самосопряженном случае $q_0 \equiv 1$ и $\alpha = 0$.) Опишем эффективный оператор $\mathbb{A}^0 = -\operatorname{div} g^0 \nabla$. Как обычно в теории усреднения, для описания эффективной матрицы g^0 нужно рассмотреть вспомогательные задачи на ячейке. Пусть функция $v_l(\mathbf{x})$ (где $l \in \{1, \dots, d\}$) является \mathbb{Z}^d -периодическим решением задачи

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^d} a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (v_l(\mathbf{x}) - v_l(\mathbf{y})) d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^d} a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (x_l - y_l) d\mathbf{y} - \alpha_l, \\ \int_{\Omega} v_l(\mathbf{y}) q_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 0. \end{cases} \quad (0.5)$$

Отметим, что задача (0.5) имеет единственное \mathbb{Z}^d -периодическое решение. Мы показываем, что это решение ограничено (см. §6). Пусть g^0 — $(d \times d)$ -матрица с элементами $\frac{1}{2}g_{kl}$, $k, l = 1, \dots, d$, определенными соотношениями

$$g_{kl} = \int_{\Omega} d\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \left((x_k - y_k)(x_l - y_l) - v_l(\mathbf{x})(x_k - y_k) - v_k(\mathbf{x})(x_l - y_l) \right) a(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \mu(\mathbf{y}, \mathbf{x}) q_0(\mathbf{y}).$$

Матрица g^0 оказывается положительно определенной. Эффективный оператор $\mathbb{A}^0 = -\operatorname{div} g^0 \nabla$ определен на пространстве Соболева $H^2(\mathbb{R}^d)$.

Заметим, что для сильной сходимости резольвент $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + \varepsilon^{-1} \langle \alpha, \nabla \rangle + I)^{-1}$ к нулю в $L_2(\mathbb{R}^d)$ “подкрутка” на множитель q_0^ε не требуется; ср. (0.4). Этот результат был получен в работе [12]. См. обсуждение в п. 4.2.

0.3. Метод. Как и в [13, 14, 15], для исследования задачи об аппроксимации резольвенты оператора (0.3) мы модифицируем теоретико-операторный подход, развитый в работах Бирмана и Суслиной, о котором шла речь в пункте 0.1.

Первые два шага — масштабное преобразование и разложение оператора \mathbb{A} в прямой интеграл по операторам $\mathbb{A}(\xi)$ с помощью унитарного преобразования Гельфанда — остаются прежними. Здесь $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\varepsilon_0}$, $\varepsilon_0 = 1$. Дело сводится к изучению асимптотики резольвенты $(\mathbb{A}(\xi) + \varepsilon^2 I)^{-1}$ при малом $\varepsilon > 0$ (нужно приблизить эту резольвенту с погрешностью $O(\varepsilon^{-1})$). Операторы $\mathbb{A}(\xi)$ определены ниже в пункте 1.2. Однако, к семейству операторов $\mathbb{A}(\xi)$, действующих в пространстве $L_2(\Omega)$ и зависящих от параметра $\xi \in \tilde{\Omega}$, методы аналитической теории возмущений уже неприменимы. В отличие от случая дифференциальных операторов это операторное семейство не является аналитическим. Взамен мы используем конечную гладкость семейства $\mathbb{A}(\xi)$, которая обеспечена предположением о конечности нескольких первых моментов коэффициента $a(\mathbf{x})$.

Мы показываем, что спектр оператора $\mathbb{A}(\xi)$ лежит в правой полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$, а при $|\xi| > \delta > 0$ — в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \geq C(\delta) > 0$. Поэтому достаточно найти асимптотику резольвенты $(\mathbb{A}(\xi) + \varepsilon^2 I)^{-1}$ при $|\xi| \leq \delta_0$, где δ_0 достаточно мало. Далее, ясно, что для решения нашей задачи важны лишь спектральные характеристики оператора $\mathbb{A}(\xi)$ вблизи точки $\lambda_0 = 0$. Действительно, пусть $F(\xi)$ — проектор Рисса оператора $\mathbb{A}(\xi)$, отвечающий некоторой окрестности нуля. Мы показываем, что оператор $(\mathbb{A}(\xi) + \varepsilon^2 I)^{-1} (I - F(\xi))$ равномерно ограничен, а значит, достаточно приблизить оператор $(\mathbb{A}(\xi) + \varepsilon^2 I)^{-1} F(\xi)$. Здесь главную роль играют так называемые пороговые аппроксимации — приближения для операторов $F(\xi)$ и $\mathbb{A}(\xi)F(\xi)$ при малом $|\xi|$.

Мы рассматриваем $\mathbb{A}(\xi)$ как возмущение оператора $\mathbb{A}(0)$. Выясняем, что точка $\lambda_0 = 0$ является изолированным собственным значением оператора $\mathbb{A}(0)$, причем ядро $\operatorname{Ker} \mathbb{A}(0)$ одномерно и состоит из констант. Ядро $\operatorname{Ker} \mathbb{A}^*(0)$ также одномерно и состоит из функций вида $c q_0(\mathbf{x})$, $c \in \mathbb{C}$. Тогда при $|\xi| \leq \delta_0$ в некоторой окрестности нуля спектр оператора $\mathbb{A}(\xi)$ состоит из одного простого собственного значения $\lambda_1(\xi)$. Мы выбираем контур $\Gamma \subset \mathbb{C}$, охватывающий собственное значение $\lambda_1(\xi)$ и отделенный от остального спектра. Для вычисления асимптотики

операторов $F(\xi)$ и $A(\xi)F(\xi)$ при $\xi \rightarrow 0$ мы применяем метод интегрирования резольвенты $(A(\xi) - \zeta I)^{-1}$ по контуру Γ . В [13, пункт 4.2] этот подход был намечен как “третий способ”.

0.4. План статьи. Статья состоит из введения и шести параграфов. В §1 вводится оператор A , обсуждается разложение этого оператора в прямой интеграл по семейству операторов $A(\xi)$, изучаются спектральные характеристики оператора $A(0)$ вблизи нуля и устанавливаются оценки снизу для квадратичной формы оператора $\operatorname{Re}[q_0]A(\xi)$. В §2 получены пороговые аппроксимации для операторов $F(\xi)$ и $A(\xi)F(\xi)$ при малом $|\xi|$. В §3 найдена аппроксимация резольвенты $(A(\xi) + \varepsilon^2 I)^{-1}$ при малом ε , откуда с помощью разложения оператора A в прямой интеграл получена аппроксимация резольвенты $(A + \varepsilon^2 I)^{-1}$. В §4 из результатов §3 с помощью масштабного преобразования выводится основной результат работы — аппроксимация резольвенты $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$. В Приложение (§5 и §6) вынесен вспомогательный материал, касающийся устойчивости изолированного собственного значения (§5) и необходимых свойств вспомогательного оператора G (§6).

0.5. Обозначения. Норма в нормированном пространстве X обозначается через $\|\cdot\|_X$ (либо без индекса, если это не ведет к недоразумениям); если пространства X, Y нормированы, то стандартная норма линейного ограниченного оператора $T : X \rightarrow Y$ обозначается через $\|T\|_{X \rightarrow Y}$ либо $\|T\|$ (без индекса). Линейная оболочка системы векторов $F \subset X$ обозначается через $\mathcal{L}\{F\}$. Пространство ограниченных линейных операторов в нормированном пространстве X обозначается через $\mathcal{B}(X)$.

Пусть $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Если $A : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_*$ — линейный оператор, то через $\operatorname{Dom} A$ обозначается его область определения, а через $\operatorname{Ker} A$ — его ядро. Для замкнутого оператора A в гильбертовом пространстве \mathfrak{H} через $\sigma(A)$ обозначается спектр оператора A .

Если \mathcal{O} — область в \mathbb{R}^d , то через $L_p(\mathcal{O})$, $1 \leq p \leq \infty$, обозначаются стандартные L_p -классы. Стандартное скалярное произведение в пространстве $L_2(\mathcal{O})$ обозначается через $(\cdot, \cdot)_{L_2(\mathcal{O})}$ либо без индекса. Если $f \in L_\infty(\mathcal{O})$, то символ $[f]$ означает оператор умножения на функцию $f(\mathbf{x})$ в пространстве $L_2(\mathcal{O})$. Стандартные классы Соболева порядка $s > 0$ в области \mathcal{O} обозначаются через $H^s(\mathcal{O})$.

Стандартное скалярное произведение в \mathbb{R}^d и \mathbb{C}^d обозначается через $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Далее, используем обозначения $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)^t \in \mathbb{R}^d$, $iD_j = \partial_j = \partial/\partial x_j$, $j = 1, \dots, d$; $\mathbf{D} = -i\nabla = (D_1, \dots, D_d)^t$. Через $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ обозначим класс Шварца в \mathbb{R}^d . Характеристическая функция множества $E \subset \mathbb{R}^d$ обозначается через 1_E . Используем обозначение $B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$.

§ 1. НЕЛОКАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР СВЁРТОЧНОГО ТИПА: РАЗЛОЖЕНИЕ В ПРЯМОЙ ИНТЕГРАЛ И ОЦЕНКИ

1.1. Оператор $A(a, \mu)$. Пусть $a \in L_1(\mathbb{R}^d)$, $\mu \in L_\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ определим *нелокальный оператор свёрточного типа* $A = A(a, \mu)$ соотношением

$$A(a, \mu)u(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^d} a(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})(u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Оператор A можно записать в виде $A = p(\cdot; a, \mu) - B(a, \mu)$, где

$$p(\mathbf{x}; a, \mu) := \int_{\mathbb{R}^d} a(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,$$

$$B(a, \mu)u(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^d} a(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Согласно лемме Шура (см., например, [13, лемма 4.1]) оператор $B(a, \mu) : L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$ ограничен, и справедлива оценка $\|B(a, \mu)\| \leq \|\mu\|_{L_\infty} \|a\|_{L_1}$. Кроме того, потенциал $p(\mathbf{x}; a, \mu)$

удовлетворяет оценке $\|p(\cdot; a, \mu)\|_{L_\infty} \leq \|\mu\|_{L_\infty} \|a\|_{L_1}$. Следовательно, оператор $\mathbb{A}(a, \mu) : L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$ ограничен. Введем обозначения $\mathbb{A}_0(a) := \mathbb{A}(a, \mu_0)$, где $\mu_0 \equiv 1$; $p_0(\mathbf{x}; a) := p(\mathbf{x}; a, \mu_0)$; $\mathbb{B}_0(a) := \mathbb{B}(a, \mu_0)$. Очевидно, оператор $\mathbb{B}_0(a)$ — это оператор свертки с функцией a , а потенциал $p_0(\mathbf{x}; a) = \int_{\mathbb{R}^d} a(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$ — постоянный.

Далее предполагаются выполненными более жесткие ограничения на функции a и μ :

$$a \in L_1(\mathbb{R}^d), \quad \text{mes}\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : a(\mathbf{x}) \neq 0\} > 0, \quad a(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d; \quad (1.1)$$

$$0 < \mu_- \leq \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mu_+ < +\infty, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d; \quad (1.2)$$

$$\mu(\mathbf{x} + \mathbf{m}, \mathbf{y} + \mathbf{n}) = \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d. \quad (1.3)$$

Введем обозначения для моментов функции $a(\mathbf{x})$:

$$M_k(a) := \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^k a(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

С учетом условия $0 < \int_{\mathbb{R}^d} a(\mathbf{x}) d\mathbf{x} < \infty$ из конечности момента $M_k(a)$ автоматически вытекает конечность моментов $M_1(a), \dots, M_{k-1}(a)$. Основной результат (теорема 4.1) справедлив при условии $M_3(a) < \infty$.

Очевидно, при условиях (1.1)–(1.3) потенциал $p(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}; a, \mu)$ вещественен, \mathbb{Z}^d -периодичен и удовлетворяет оценкам

$$\mu_- \|a\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} \leq p(\mathbf{x}) \leq \mu_+ \|a\|_{L_1(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \quad (1.4)$$

1.2. Разложение оператора $\mathbb{A}(a, \mu)$ в прямой интеграл. Нетрудно видеть, что при условиях (1.1)–(1.3) оператор умножения на потенциал $p(\mathbf{x}; a, \mu)$ и оператор $\mathbb{B}(a, \mu)$ (а значит, и оператор $\mathbb{A}(a, \mu)$) коммутируют с операторами $S_{\mathbf{n}}$ целочисленного сдвига, определенными по правилу

$$S_{\mathbf{n}}u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x} + \mathbf{n}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d.$$

Это означает, что $\mathbb{A}(a, \mu)$ и $\mathbb{B}(a, \mu)$ — периодические операторы с решеткой периодов \mathbb{Z}^d . Обозначим через $\Omega := [0, 1)^d$ ячейку решетки \mathbb{Z}^d и через $\tilde{\Omega} := [-\pi, \pi)^d$ — ячейку двойственной решетки $(2\pi\mathbb{Z})^d$.

Определим преобразование Гельфанда \mathcal{G} (см., например, [16] или [3, глава 2]). Первоначально \mathcal{G} задается на классе Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ равенством

$$\mathcal{G}u(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) := (2\pi)^{-d/2} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} u(\mathbf{x} + \mathbf{n}) e^{-i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} + \mathbf{n} \rangle}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Затем \mathcal{G} распространяется по непрерывности до унитарного отображения

$$L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow \int_{\tilde{\Omega}} \oplus L_2(\Omega) d\boldsymbol{\xi} = L_2(\tilde{\Omega} \times \Omega).$$

Как и все периодические операторы, $\mathbb{A}(a, \mu)$ и $\mathbb{B}(a, \mu)$ раскладываются в прямой интеграл с помощью преобразования Гельфанда (т. е. частично диагонализуются):

$$\mathbb{A}(a, \mu) = \mathcal{G}^* \left(\int_{\tilde{\Omega}} \oplus \mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu) d\boldsymbol{\xi} \right) \mathcal{G}, \quad \mathbb{B}(a, \mu) = \mathcal{G}^* \left(\int_{\tilde{\Omega}} \oplus \mathbb{B}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu) d\boldsymbol{\xi} \right) \mathcal{G}. \quad (1.5)$$

Здесь операторы $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)$ и $\mathbb{B}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{B}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)$ — ограниченные операторы в $L_2(\Omega)$, заданные соотношениями

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)u(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}; a, \mu)u(\mathbf{x}) - \mathbb{B}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)u(\mathbf{x}), \quad u \in L_2(\Omega), \quad (1.6)$$

$$\mathbb{B}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \tilde{a}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad u \in L_2(\Omega), \quad (1.7)$$

где

$$\tilde{a}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{z}) := \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} a(\mathbf{z} + \mathbf{n}) e^{-i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{z} + \mathbf{n} \rangle}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d. \quad (1.8)$$

Отметим равенство

$$p(\mathbf{x}; a, \mu) = \int_{\Omega} \tilde{a}(\mathbf{0}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (1.9)$$

Поясним, как понимается (1.5), на примере первого равенства. Пусть $u \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и $v = \mathbb{A}u$. Тогда $\mathcal{G}v(\boldsymbol{\xi}, \cdot) = \mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})\mathcal{G}u(\boldsymbol{\xi}, \cdot)$, $\boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}$.

Оператор $\mathbb{B}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)$ компактен (см. [13, следствие 4.2]); в силу леммы Шура его норма допускает оценку

$$\|\mathbb{B}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)\| \leq \mu_+ \|a\|_{L_1(\mathbb{R}^d)}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}.$$

Вне спектра $\sigma([p]) \subset [\mu_- \|a\|_{L_1}, \mu_+ \|a\|_{L_1}]$ оператора умножения на потенциал $p(\mathbf{x}; a, \mu)$ верно равенство

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu) - \lambda I = ([p] - \lambda)(I - ([p] - \lambda)^{-1} \mathbb{B}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma([p]), \quad \boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}.$$

При этом оператор $I - ([p] - \lambda)^{-1} \mathbb{B}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)$ обратим при условии $\text{dist}(\sigma([p]), \lambda) > \|\mathbb{B}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)\|$. Поэтому в силу аналитической теоремы Фредгольма (см. [19, гл. XI, следствие 8.4]) оператор $I - ([p] - \lambda)^{-1} \mathbb{B}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)$ ограниченно обратим на множестве $\mathbb{C} \setminus \sigma([p])$ за исключением не более, чем счетного набора точек $\{\lambda_k(\boldsymbol{\xi})\}$, которые могут накапливаться только к точкам множества $\sigma([p])$; более того, в окрестности каждой точки $\lambda_k(\boldsymbol{\xi})$ справедливо разложение

$$(I - ([p] - \lambda)^{-1} \mathbb{B}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu))^{-1} = \sum_{n=-q_k}^{\infty} (\lambda - \lambda_k(\boldsymbol{\xi}))^n A_n^{(k)}(\boldsymbol{\xi}),$$

где $A_{-q_k}^{(k)}(\boldsymbol{\xi}), \dots, A_{-1}^{(k)}(\boldsymbol{\xi})$ — операторы конечного ранга. Следовательно, вне множества $\sigma([p])$ спектр оператора $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)$ состоит из точек $\{\lambda_k(\boldsymbol{\xi})\}$, и проекторы Рисса оператора $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)$, отвечающие точкам $\{\lambda_k(\boldsymbol{\xi})\}$, имеют конечный ранг. Отметим также, что спектр оператора $\mathbb{A}^*(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)$ вне множества $\sigma([p])$ состоит из набора $\{\overline{\lambda_k(\boldsymbol{\xi})}\}$, и проекторы Рисса оператора $\mathbb{A}^*(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)$, отвечающие точкам $\{\overline{\lambda_k(\boldsymbol{\xi})}\}$, также имеют конечный ранг.

1.3. Спектр операторов $\mathbb{A}(\mathbf{0}; a, \mu)$ и $\mathbb{A}^*(\mathbf{0}; a, \mu)$ в окрестности нуля. Из (1.6), (1.7), (1.9) вытекает равенство $\mathbb{A}(\mathbf{0}; a, \mu)\mathbf{1}_{\Omega} = 0$. Следовательно, точка $\lambda_0 = 0$ принадлежит спектру $\sigma(\mathbb{A}(\mathbf{0}; a, \mu))$, а значит и спектру $\sigma(\mathbb{A}^*(\mathbf{0}; a, \mu))$. Точка $\lambda_0 = 0$ отделена от $\sigma([p])$ (см. (1.1), (1.4)); следовательно, $\lambda_0 = 0$ — изолированная точка спектров $\sigma(\mathbb{A}(\mathbf{0}; a, \mu))$ и $\sigma(\mathbb{A}^*(\mathbf{0}; a, \mu))$. Обозначим через P и P^* проекторы Рисса операторов $\mathbb{A}(\mathbf{0}; a, \mu)$ и $\mathbb{A}^*(\mathbf{0}; a, \mu)$, отвечающие точке $\lambda_0 = 0$.

Предложение 1.1. *При условиях (1.1)–(1.3) справедливы следующие утверждения:*

- 1) проекторы Рисса P и P^* имеют ранг 1;
- 2) справедливы равенства

$$\text{Ker } \mathbb{A}(\mathbf{0}; a, \mu) = \mathcal{L}\{\mathbf{1}_{\Omega}\}, \quad \text{Ker } \mathbb{A}^*(\mathbf{0}; a, \mu) = \mathcal{L}\{q_0\}, \quad q_0 \in L_2(\Omega);$$

- 3) функцию q_0 можно выбрать удовлетворяющей условиям

$$0 < q_- \leq q_0(\mathbf{x}) \leq q_+ < +\infty, \quad \mathbf{x} \in \Omega; \quad \int_{\Omega} q_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1. \quad (1.10)$$

Доказательство. Определим компактный оператор $\mathbf{G} = \mathbb{B}^*(\mathbf{0}; a, \mu)[p^{-1}]$. Ядро $\text{Ker } \mathbb{A}(\mathbf{0}; a, \mu)$ совпадает с ядром $\text{Ker}(\mathbf{G}^* - I)$. Ядро $\text{Ker } \mathbb{A}^*(\mathbf{0}; a, \mu)$ изоморфно ядру $\text{Ker}(\mathbf{G} - I)$; точнее, справедливо следующее утверждение:

$$u \in \text{Ker } \mathbb{A}^*(\mathbf{0}; a, \mu) \iff pu \in \text{Ker}(\mathbf{G} - I).$$

Ниже в Приложении мы проверим (см. теорему 6.1) следующие утверждения

$$\text{Ker}(\mathbf{G}^* - I) = \mathcal{L}\{\mathbf{1}_{\Omega}\}, \quad \text{Ker}(\mathbf{G} - I) = \mathcal{L}\{\psi_0\}. \quad (1.11)$$

Здесь функция $\psi_0 \in L_2(\Omega)$ удовлетворяет соотношениям

$$0 < \psi_- \leq \psi_0(\mathbf{z}) \leq \psi_+ < +\infty, \quad \mathbf{z} \in \Omega; \quad \int_{\Omega} \psi_0(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = 1. \quad (1.12)$$

Теперь утверждения 2) и 3) вытекают из (1.11) и (1.12); при этом функция $p(\mathbf{z})q_0(\mathbf{z})$ пропорциональна функции $\psi_0(\mathbf{z})$.

Проверим, что ранг проектора Рисса P равен 1. Поскольку P имеет конечный ранг, $\text{Ran } P$ совпадает с корневым подпространством $\cup_{k=1}^{\infty} \text{Ker } \mathbb{A}^k(\mathbf{0}; a, \mu)$. Остается проверить равенство $\text{Ker } \mathbb{A}^2(\mathbf{0}; a, \mu) = \text{Ker } \mathbb{A}(\mathbf{0}; a, \mu)$. Предположим, что найдется $v \in \text{Ker } \mathbb{A}^2(\mathbf{0}; a, \mu) \setminus \text{Ker } \mathbb{A}(\mathbf{0}; a, \mu)$, т.е. $\mathbb{A}(\mathbf{0}; a, \mu)v = \alpha \mathbf{1}_{\Omega}$, $\alpha \neq 0$. В этом случае $\mathbf{1}_{\Omega} \in \text{Ran } \mathbb{A}(\mathbf{0}; a, \mu)$, а потому $\mathbf{1}_{\Omega} \perp q_0$, что противоречит (1.10). \square

Отметим, что утверждения 2) и 3) предложения 1.1 были ранее получены в работе [12, следствие 4.1] с использованием теоремы Крейна–Рутмана.

Следствие 1.2. *Справедливы равенства $P = (\cdot, q_0)\mathbf{1}_{\Omega}$, $P^* = (\cdot, \mathbf{1}_{\Omega})q_0$.*

Замечание 1.3. *Всюду ниже будем считать, что функция $q_0(\mathbf{z})$ периодически продолжена с ячейки Ω на все \mathbb{R}^d .*

Замечание 1.4. *С учетом (1.6)–(1.8) (при $\xi = 0$) равенство $\mathbb{A}^*(\mathbf{0}; a, \mu)q_0 = 0$ эквивалентно каждому из равенств*

$$p(\mathbf{x})q_0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \tilde{a}(\mathbf{0}, \mathbf{y} - \mathbf{x})\mu(\mathbf{y}, \mathbf{x})q_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.13)$$

$$p(\mathbf{x})q_0(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} a(\mathbf{y} - \mathbf{x})\mu(\mathbf{y}, \mathbf{x})q_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \quad (1.14)$$

Замечание 1.5. *В случае $\mu = \mu_0 \equiv 1$ справедливы равенства $p(\mathbf{x}; a, \mu_0) \equiv \int_{\mathbb{R}^d} a(\mathbf{z}) d\mathbf{z}$ и $q_0(\mathbf{x}) \equiv 1$.*

1.4. Оценки квадратичной формы оператора $\text{Re}[q_0]\mathbb{A}(a, \mu)$.

Лемма 1.6. *При условиях (1.1)–(1.3) справедливо равенство*

$$\text{Re}([q_0]\mathbb{A}(a, \mu)u, u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} q_0(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|^2, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d). \quad (1.15)$$

Доказательство. Вычислим квадратичную форму оператора $[q_0]\mathbb{A}(a, \mu)$:

$$\begin{aligned} ([q_0]\mathbb{A}(a, \mu)u, u) &= \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} q_0(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})\overline{u(\mathbf{x})}(u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} q_0(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|^2 + J[u], \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Здесь функционал $J[u]$ определен равенством

$$J[u] := \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} q_0(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})\overline{u(\mathbf{y})}(u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})), \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d). \quad (1.17)$$

Разбивая (1.17) на два слагаемых и пользуясь (1.14), получаем

$$\begin{aligned} J[u] &= - \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} q_0(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})|u(\mathbf{y})|^2 + \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} q_0(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})u(\mathbf{x})\overline{u(\mathbf{y})} \\ &= - \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} |u(\mathbf{y})|^2 \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} q_0(\mathbf{x})a(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \overline{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} q_0(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})\overline{u(\mathbf{x})}u(\mathbf{y})} \\ &= -([q_0]\mathbb{A}(a, \mu)u, u), \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Из (1.16) и (1.18) вытекает равенство (1.15). \square

Следствие 1.7. Оператор $[q_0^{1/2}]A(a, \mu)[q_0^{-1/2}]$ аккретивен, спектр $\sigma(A(a, \mu))$ расположен в правой полуплоскости; справедлива оценка

$$\|(A(a, \mu) - zI)^{-1}\| \leq q_+^{1/2} q_-^{-1/2} |\operatorname{Re} z|^{-1}, \quad \operatorname{Re} z < 0. \quad (1.19)$$

Доказательство. В силу (1.15) оператор $[q_0^{1/2}]A(a, \mu)[q_0^{-1/2}]$ аккретивен; следовательно, при $\operatorname{Re} z < 0$ оператор $[q_0^{1/2}]A(a, \mu)[q_0^{-1/2}] - zI$ ограниченно обратим и справедлива оценка

$$\|([q_0^{1/2}]A(a, \mu)[q_0^{-1/2}] - zI)^{-1}\| \leq |\operatorname{Re} z|^{-1}. \quad (1.20)$$

Таким образом, спектр $\sigma(A(a, \mu))$ расположен в правой полуплоскости. С учетом очевидного тождества

$$(A(a, \mu) - zI)^{-1} = [q_0^{-1/2}]([q_0^{1/2}]A(a, \mu)[q_0^{-1/2}] - zI)^{-1}[q_0^{1/2}]$$

из (1.10) и (1.20) вытекает оценка (1.19). \square

1.5. Представление для квадратичной формы оператора $\operatorname{Re}[q_0]A(\xi; a, \mu)$.

Лемма 1.8. При условиях (1.1)–(1.3) справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}([q_0]A(\xi; a, \mu)u, u) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} q_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) |e^{i\langle \xi, \mathbf{x} \rangle} u(\mathbf{x}) - e^{i\langle \xi, \mathbf{y} \rangle} u(\mathbf{y})|^2, \quad u \in L_2(\Omega), \quad \xi \in \tilde{\Omega}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Здесь подразумевается, что функция $u \in L_2(\Omega)$ периодически продолжена на все \mathbb{R}^d .

Доказательство. Из (1.6), (1.7) и (1.9) следует представление

$$A(\xi; a, \mu)u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} (\tilde{a}(\mathbf{0}, \mathbf{x} - \mathbf{y})u(\mathbf{x}) - \tilde{a}(\xi, \mathbf{x} - \mathbf{y})u(\mathbf{y})) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad u \in L_2(\Omega). \quad (1.22)$$

Учитывая (1.8) и предполагая, что каждая функция $u \in L_2(\Omega)$ продолжена \mathbb{Z}^d -периодически на все \mathbb{R}^d , перепишем (1.22) следующим образом:

$$\begin{aligned} A(\xi; a, \mu)u(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} \int_{\Omega} (a(\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{n})u(\mathbf{x}) - a(\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{n})e^{-i\langle \xi, \mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{n} \rangle} u(\mathbf{y})) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (u(\mathbf{x}) - e^{-i\langle \xi, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle} u(\mathbf{y})) d\mathbf{y} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) e^{-i\langle \xi, \mathbf{x} \rangle} (e^{i\langle \xi, \mathbf{x} \rangle} u(\mathbf{x}) - e^{i\langle \xi, \mathbf{y} \rangle} u(\mathbf{y})) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad u \in L_2(\Omega). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Из (1.23) получаем выражение для квадратичной формы оператора $[q_0]A(\xi; a, \mu)$:

$$\begin{aligned} ([q_0]A(\xi; a, \mu)u, u) &= \int_{\Omega} d\mathbf{x} q_0(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) e^{-i\langle \xi, \mathbf{x} \rangle} \overline{u(\mathbf{x})} (e^{i\langle \xi, \mathbf{x} \rangle} u(\mathbf{x}) - e^{i\langle \xi, \mathbf{y} \rangle} u(\mathbf{y})) \\ &= \int_{\Omega} d\mathbf{x} q_0(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) |e^{i\langle \xi, \mathbf{x} \rangle} u(\mathbf{x}) - e^{i\langle \xi, \mathbf{y} \rangle} u(\mathbf{y})|^2 + J(\xi)[u], \quad u \in L_2(\Omega), \end{aligned} \quad (1.24)$$

где функционал $J(\xi)[u]$ определен равенством

$$J(\xi)[u] := \int_{\Omega} d\mathbf{x} q_0(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) e^{-i\langle \xi, \mathbf{y} \rangle} \overline{u(\mathbf{y})} (e^{i\langle \xi, \mathbf{x} \rangle} u(\mathbf{x}) - e^{i\langle \xi, \mathbf{y} \rangle} u(\mathbf{y})), \quad u \in L_2(\Omega). \quad (1.25)$$

Перепишем среднюю часть в (1.24) в виде

$$([q_0]\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)u, u) = \int_{\Omega} d\mathbf{x} q_0(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) |u(\mathbf{x})|^2 - \int_{\Omega} d\mathbf{x} q_0(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) e^{-i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle} \overline{u(\mathbf{x})} u(\mathbf{y}). \quad (1.26)$$

Разбивая (1.25) на два слагаемых и используя (1.13) и (1.26), получаем

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{\xi})[u] &= - \int_{\Omega} d\mathbf{x} q_0(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) |u(\mathbf{y})|^2 \\ &\quad + \int_{\Omega} d\mathbf{x} q_0(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) e^{i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle} u(\mathbf{x}) \overline{u(\mathbf{y})} \\ &= - \int_{\Omega} d\mathbf{y} |u(\mathbf{y})|^2 \int_{\Omega} d\mathbf{x} q_0(\mathbf{x}) \tilde{a}(0, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &\quad + \int_{\Omega} d\mathbf{x} q_0(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) e^{i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle} u(\mathbf{x}) \overline{u(\mathbf{y})} \\ &= - \int_{\Omega} d\mathbf{y} |u(\mathbf{y})|^2 q_0(\mathbf{y}) p(\mathbf{y}) \\ &\quad + \int_{\Omega} d\mathbf{x} q_0(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) e^{i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle} u(\mathbf{x}) \overline{u(\mathbf{y})} \\ &= - \overline{([q_0]\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)u, u)}, \quad u \in L_2(\Omega). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Из (1.24) и (1.27) вытекает равенство (1.21). \square

Следствие 1.9. Оператор $[q_0^{1/2}]\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)[q_0^{-1/2}]$ аккретивен, спектр $\sigma(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu))$ расположен в правой полуплоскости; справедлива оценка

$$\|(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu) - zI)^{-1}\| \leq q_+^{1/2} q_-^{-1/2} |\operatorname{Re} z|^{-1}, \quad \operatorname{Re} z < 0, \quad \boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}.$$

Доказательство. Полностью аналогично доказательству следствия 1.7. \square

1.6. Оценки квадратичной формы оператора $\operatorname{Re}[q_0]\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)$. Полезно отдельно рассмотреть случай $\mu = \mu_0 \equiv 1$. Введем обозначения $\mathbb{A}_0(\boldsymbol{\xi}; a) := \mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu_0)$, $\mathbb{B}_0(\boldsymbol{\xi}; a) := \mathbb{B}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu_0)$. Из замечания 1.5 и соотношений (1.2), (1.10) и (1.21) вытекают двусторонние оценки

$$\mu_- q_- \operatorname{Re}(\mathbb{A}_0(\boldsymbol{\xi}; a)u, u) \leq \operatorname{Re}([q_0]\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)u, u) \leq \mu_+ q_+ \operatorname{Re}(\mathbb{A}_0(\boldsymbol{\xi}; a)u, u), \quad u \in L_2(\Omega), \quad \boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}. \quad (1.28)$$

Операторы $\mathbb{A}_0(\boldsymbol{\xi}; a)$, $\boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}$, диагонализуются унитарным дискретным преобразованием Фурье $\mathcal{F} : L_2(\Omega) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z}^d)$, заданным соотношениями:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}u(\mathbf{n}) &= \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle} d\mathbf{x}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d, \quad u \in L_2(\Omega); \\ \mathcal{F}^*v(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} v_{\mathbf{n}} e^{2\pi i \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad v = \{v_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} \in \ell_2(\mathbb{Z}^d). \end{aligned}$$

Легко проверить, что

$$\mathbb{A}_0(\boldsymbol{\xi}; a) = \mathcal{F}^* [\hat{a}(\mathbf{0}) - \hat{a}(2\pi \mathbf{n} + \boldsymbol{\xi})] \mathcal{F}, \quad \hat{a}(\mathbf{k}) := \int_{\mathbb{R}^d} a(\mathbf{x}) e^{-i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle} d\mathbf{x}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d. \quad (1.29)$$

Здесь через $[\hat{a}(\mathbf{0}) - \hat{a}(2\pi\mathbf{n} + \boldsymbol{\xi})]$ обозначается оператор умножения на функцию $\hat{a}(\mathbf{0}) - \hat{a}(2\pi\mathbf{n} + \boldsymbol{\xi})$ в пространстве $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$. Таким образом, символом оператора $\text{Re } \mathbb{A}_0(\boldsymbol{\xi}; a)$ является последовательность $\{\hat{A}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi})\}_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d}$, где

$$\hat{A}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi}) = \hat{A}(\boldsymbol{\xi} + 2\pi\mathbf{n}) = \text{Re}(\hat{a}(\mathbf{0}) - \hat{a}(2\pi\mathbf{n} + \boldsymbol{\xi})) = \int_{\mathbb{R}^d} (1 - \cos(\langle \mathbf{z}, \boldsymbol{\xi} + 2\pi\mathbf{n} \rangle)) a(\mathbf{z}) d\mathbf{z}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d, \quad \boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}.$$

Исследуем подробнее символ оператора $\text{Re } \mathbb{A}_0(\boldsymbol{\xi}; a)$, $\boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}$, и получим некоторые оценки для квадратичной формы оператора $\text{Re } \mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)$. Величина

$$\hat{A}(\mathbf{y}) := \int_{\mathbb{R}^d} (1 - \cos(\langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle)) a(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = 2 \int_{\mathbb{R}^d} \sin^2\left(\frac{\langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle}{2}\right) a(\mathbf{z}) d\mathbf{z}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d,$$

при условии (1.1) непрерывно зависит от $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ и (согласно лемме Римана–Лебега) стремится к $\|a\|_{L_1} > 0$ при $|\mathbf{y}| \rightarrow \infty$. Кроме того, нетрудно видеть, что $\hat{A}(\mathbf{y}) > 0$ при $\mathbf{y} \neq 0$. Следовательно, справедлива оценка

$$\min_{|\mathbf{y}| \geq r} \hat{A}(\mathbf{y}) =: \mathcal{C}_r(a) > 0, \quad r > 0. \quad (1.30)$$

Поскольку при $\boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}$ и $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ выполнено $|\boldsymbol{\xi} + 2\pi\mathbf{n}| \geq \pi$, то

$$\hat{A}(\boldsymbol{\xi} + 2\pi\mathbf{n}) \geq \mathcal{C}_{\pi}(a), \quad \boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}. \quad (1.31)$$

Далее, при условии $M_2(a) < \infty$ величина

$$\int_{\mathbb{R}^d} a(\mathbf{z}) \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle^2 d\mathbf{z} =: M_a(\mathbf{y})$$

непрерывно зависит от $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ и при ненулевых \mathbf{y} не обращается в нуль. Следовательно,

$$\min_{|\boldsymbol{\theta}|=1} M_a(\boldsymbol{\theta}) =: \mathcal{M}(a) > 0. \quad (1.32)$$

Лемма 1.10. При условиях (1.1)–(1.3) и условии $M_2(a) < \infty$ справедлива оценка

$$\hat{A}(\boldsymbol{\xi} + 2\pi\mathbf{n}) \geq C(a)|\boldsymbol{\xi}|^2, \quad \boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d.$$

Здесь

$$C(a) := \min\left\{\frac{1}{4}\mathcal{M}(a), \mathcal{C}_{r(a)}(a)\pi^{-2}d^{-1}, \mathcal{C}_{\pi}(a)\pi^{-2}d^{-1}\right\} > 0, \quad (1.33)$$

величина $\mathcal{C}_r(a)$, $r > 0$, определена в (1.30), постоянная $\mathcal{M}(a)$ определена в (1.32), $r(a)$ определено условием (1.37).

Доказательство. Воспользуемся равенством

$$1 - \cos \lambda = \lambda^2 \int_0^1 dt \int_0^1 ds \cos(st\lambda) =: \lambda^2 \Phi(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.34)$$

Функция $\Phi(\lambda)$ обладает очевидными свойствами

$$|\Phi(\lambda)| \leq 1/2, \quad \Phi(\lambda) \rightarrow 1/2, \quad \lambda \rightarrow 0. \quad (1.35)$$

Из (1.34) следует оценка

$$\left| \hat{A}(\boldsymbol{\xi}) - \frac{1}{2}M_a(\boldsymbol{\xi}) \right| \leq |\boldsymbol{\xi}|^2 \int_{\mathbb{R}^d} a(\mathbf{z}) |\mathbf{z}|^2 \left| \Phi(\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{z} \rangle) - \frac{1}{2} \right| d\mathbf{z} =: |\boldsymbol{\xi}|^2 \mathcal{E}(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d. \quad (1.36)$$

В силу соотношений (1.35) и условия $M_2(a) < \infty$, имеет место $\mathcal{E}(\boldsymbol{\xi}) \rightarrow 0$, $|\boldsymbol{\xi}| \rightarrow 0$. Выберем $r(a) > 0$ так, чтобы выполнялось условие

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\xi}) \leq \frac{1}{4}\mathcal{M}(a), \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq r(a). \quad (1.37)$$

Из (1.32), (1.36) и (1.37) вытекает оценка

$$\widehat{A}(\xi) \geq \frac{1}{4}M_a(\xi) \geq \frac{1}{4}\mathcal{M}(a)|\xi|^2, \quad |\xi| \leq r(a). \quad (1.38)$$

Теперь из (1.30), (1.31) и (1.38) вытекают все утверждения леммы. \square

Замечание 1.11. Нетрудно убедиться, что при дополнительном условии $M_3(a) < \infty$ радиус $r(a)$ может быть выражен через величины $\mathcal{M}(a)$ и $M_3(a)$ (ср. [13, лемма 1.3]).

Вернемся к рассмотрению оператора $\mathbb{A}(\xi; a, \mu)$ в общем случае. При условиях (1.1)–(1.3) из (1.28), (1.29) и (1.31) вытекает оценка

$$\operatorname{Re}([q_0]\mathbb{A}(\xi; a, \mu)u, u) \geq \mu_{-q}C_\pi(a)\|u\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad u \in L_2(\Omega) \ominus \mathcal{L}\{\mathbf{1}_\Omega\}, \quad \xi \in \widetilde{\Omega}.$$

Из соотношений (1.28), (1.29) и леммы 1.10 вытекает следующее утверждение; ср. [13, предложение 1.4].

Предложение 1.12. При условиях (1.1)–(1.3) и условии $M_2(a) < \infty$ справедлива оценка

$$\operatorname{Re}([q_0]\mathbb{A}(\xi; a, \mu)u, u) \geq \mu_{-q}C(a)|\xi|^2\|u\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad u \in L_2(\Omega), \quad \xi \in \widetilde{\Omega}. \quad (1.39)$$

Следствие 1.13. При $\xi \in \widetilde{\Omega}$ оператор $[q_0^{1/2}]\mathbb{A}(\xi; a, \mu)[q_0^{-1/2}] - \mu_{-q}q_+^{-1}C(a)|\xi|^2I$ аккретивен, спектр оператора $\mathbb{A}(\xi; a, \mu)$ лежит в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq \mu_{-q}q_+^{-1}C(a)|\xi|^2\}$ и справедлива оценка

$$\|(\mathbb{A}(\xi; a, \mu) - zI)^{-1}\| \leq q_-^{-1/2}q_+^{1/2}(\mu_{-q}q_+^{-1}C(a)|\xi|^2 - \operatorname{Re} z)^{-1}, \quad \operatorname{Re} z < \mu_{-q}q_+^{-1}C(a)|\xi|^2. \quad (1.40)$$

Доказательство. В силу (1.39) справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(q_0^{1/2}\mathbb{A}(\xi; a, \mu)q_0^{-1/2}u, u) &\geq \mu_{-q}C(a)|\xi|^2\|q_0^{-1/2}u\|^2 \\ &\geq \mu_{-q}q_+^{-1}C(a)|\xi|^2\|u\|^2, \quad u \in L_2(\Omega), \quad \xi \in \widetilde{\Omega}. \end{aligned}$$

Следовательно, оператор $[q_0^{1/2}]\mathbb{A}(\xi; a, \mu)[q_0^{-1/2}] - \mu_{-q}q_+^{-1}C(a)|\xi|^2I$ аккретивен, а потому при $\operatorname{Re} z < 0$ оператор $[q_0^{1/2}]\mathbb{A}(\xi; a, \mu)[q_0^{-1/2}] - \mu_{-q}q_+^{-1}C(a)|\xi|^2I - zI$ ограниченно обратим и справедлива оценка

$$\|([q_0^{1/2}]\mathbb{A}(\xi; a, \mu)[q_0^{-1/2}] - \mu_{-q}q_+^{-1}C(a)|\xi|^2I - zI)^{-1}\| \leq |\operatorname{Re} z|^{-1}. \quad (1.41)$$

Теперь все утверждения следствия вытекают из (1.41). \square

Нам потребуется также следующая оценка, справедливая при условиях (1.1)–(1.3) и условии $M_1(a) < \infty$:

$$\|\mathbb{A}(\xi; a, \mu) - \mathbb{A}(\eta; a, \mu)\| \leq \mu_+M_1(a)|\xi - \eta|, \quad \xi, \eta \in \widetilde{\Omega}. \quad (1.42)$$

Она вытекает из (1.6)–(1.8) применением леммы Шура.

§ 2. ПОРОГОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕЛОКАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА СВЁРТОЧНОГО ТИПА ВБЛИЗИ НУЛЯ

2.1. Спектр оператора $\mathbb{A}(\xi; a, \mu)$ вблизи нуля. Согласно предложению 1.1 при условиях (1.1)–(1.3) точка $\lambda_0 = 0$ есть изолированное собственное значение оператора $\mathbb{A}(\mathbf{0}; a, \mu)$ и соответствующий проектор Рисса имеет ранг 1. Для краткости обозначим через $d_0 := d_0(a, \mu)$ расстояние от точки λ_0 до остального спектра оператора $\mathbb{A}(\mathbf{0}; a, \mu)$. Резольвента оператора $\mathbb{A}(\mathbf{0}; a, \mu)$ голоморфна в круге $B_{d_0}(0)$ с выколотой точкой 0. Следовательно, конечна величина

$$K := K(d_0, a, \mu) := \max_{\frac{d_0}{3} \leq |\zeta| \leq \frac{2d_0}{3}} \|(\mathbb{A}(\mathbf{0}; a, \mu) - \zeta I)^{-1}\|. \quad (2.1)$$

Положим

$$\delta_0(a, \mu) := \min \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{1}{(d_0K^2 + 3K)M_1(a)\mu_+} \right\}. \quad (2.2)$$

Разумеется, шар $|\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(a, \mu)$ лежит внутри множества $\tilde{\Omega}$. Из оценки (1.42), предложения 5.2 и замечания 5.3 вытекает следующее утверждение.

Предложение 2.1. Пусть выполнены условия (1.1)–(1.3) и $M_1(a) < \infty$. Пусть число $\delta_0(a, \mu)$ определено в (2.2). Тогда при $|\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(a, \mu)$ спектр оператора $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)$ в круге $B_{d_0/3}(0)$ состоит из одного простого собственного значения, т.е. отвечающий спектру в круге $B_{d_0/3}(0)$ проектор Рисса имеет ранг 1. Кольцо $\{\zeta \in \mathbb{C} : \frac{d_0}{3} \leq |\zeta| \leq \frac{2d_0}{3}\}$ не пересекается с $\sigma(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}))$.

При условиях (1.1)–(1.3) и $M_k(a) < \infty$ оператор-функция $\mathbb{A}(\cdot; a, \mu)$ k раз непрерывно дифференцируема по норме в $\mathcal{B}(L_2(\Omega))$. При этом справедливы равенства

$$\begin{aligned} \partial^\alpha \mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu) u(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} \tilde{a}_\alpha(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad u \in L_2(\Omega); \\ \tilde{a}_\alpha(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{z}) &= (-1)(-i)^{|\alpha|} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} (\mathbf{z} + \mathbf{n})^\alpha a(\mathbf{z} + \mathbf{n}) e^{-i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{z} + \mathbf{n} \rangle}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^d, \quad |\alpha| \leq k. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Лемма 2.2. Пусть выполнены условия (1.1)–(1.3).

1°. Если $M_1(a) < \infty$, то

$$\|\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) - \mathbb{A}(\mathbf{0})\| \leq \mu_+ M_1(a) |\boldsymbol{\xi}|, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(a, \mu). \quad (2.4)$$

2°. Если $M_2(a) < \infty$, то

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{A}(\mathbf{0}) + [\Delta_1 \mathbb{A}](\boldsymbol{\xi}) + \mathbb{K}_1(\boldsymbol{\xi}), \quad [\Delta_1 \mathbb{A}](\boldsymbol{\xi}) := \sum_{j=1}^d \partial_j \mathbb{A}(\mathbf{0}) \xi_j, \quad (2.5)$$

$$\|[\Delta_1 \mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})\| \leq \mu_+ M_1(a) |\boldsymbol{\xi}|, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(a, \mu), \quad (2.6)$$

$$\|\mathbb{K}_1(\boldsymbol{\xi})\| \leq \frac{1}{2} \mu_+ M_2(a) |\boldsymbol{\xi}|^2, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(a, \mu). \quad (2.7)$$

3°. Если $M_3(a) < \infty$, то

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{A}(\mathbf{0}) + [\Delta_1 \mathbb{A}](\boldsymbol{\xi}) + [\Delta_2 \mathbb{A}](\boldsymbol{\xi}) + \mathbb{K}_2(\boldsymbol{\xi}), \quad [\Delta_2 \mathbb{A}](\boldsymbol{\xi}) := \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^d \partial_k \partial_l \mathbb{A}(\mathbf{0}) \xi_k \xi_l, \quad (2.8)$$

$$\|[\Delta_2 \mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})\| \leq \frac{1}{2} \mu_+ M_2(a) |\boldsymbol{\xi}|^2, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(a, \mu), \quad (2.9)$$

$$\|\mathbb{K}_2(\boldsymbol{\xi})\| \leq \frac{1}{6} \mu_+ M_3(a) |\boldsymbol{\xi}|^3, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(a, \mu). \quad (2.10)$$

Аналогичное утверждение было доказано в [14, лемма 2.2], где дополнительно предполагалось, что $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mu(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$, $a(\mathbf{z}) = a(-\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d$. Нетрудно, однако, убедиться, что доказательство без изменений переносится на случай, когда эти условия не выполнены.

2.2. Пороговые аппроксимации. Обозначим через $F(\boldsymbol{\xi})$ проектор Рисса оператора $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)$, отвечающий кругу $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq d_0/3\}$. Как и выше, обозначим через P проектор Рисса оператора $\mathbb{A}(\mathbf{0}; a, \mu)$, отвечающий собственному значению $\lambda_0 = 0$; имеем $P = (\cdot, q_0) \mathbf{1}_\Omega$. Пусть Γ — окружность на комплексной плоскости $\{z \in \mathbb{C} : |z| = d_0/2\}$, эквидистантно охватывающая круг $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq d_0/3\}$. В силу формулы Рисса справедливы представления

$$F(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) - \zeta I)^{-1} d\zeta, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(a, \mu), \quad (2.11)$$

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) F(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) - \zeta I)^{-1} \zeta d\zeta, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(a, \mu). \quad (2.12)$$

Здесь в интегралах направление обхода контура идет против часовой стрелки.

Наша цель — получить приближение к оператору $F(\xi)$ с погрешностью $O(|\xi|)$ и приближение к оператору $A(\xi)F(\xi)$ с погрешностью $O(|\xi|^3)$. Ранее для самосопряженного случая такие приближения были получены в работе [13]. Мы в основном следуем этой работе; при вычислении аппроксимаций мы последовательно применяем метод интегрирования резольвенты по контуру (названный “третьим способом” в [13, § 4]).

Предложение 2.3. Пусть выполнены условия (1.1)–(1.3) и $M_1(a) < \infty$. Тогда справедлива оценка

$$\|F(\xi) - P\| \leq C_1(a, \mu)|\xi|, \quad |\xi| \leq \delta_0(a, \mu). \quad (2.13)$$

Постоянная $C_1(a, \mu)$ определена ниже в (2.17) и контролируется в терминах величин μ_+ , $M_1(a)$, d_0 , K .

Доказательство. Введем обозначения

$$\begin{aligned} R(\xi, \zeta) &:= (A(\xi) - \zeta I)^{-1}, \quad |\xi| \leq \delta_0(a, \mu), \quad \zeta \in \Gamma; \\ R_0(\zeta) &:= R(0, \zeta), \quad \zeta \in \Gamma; \\ \Delta A(\xi) &:= A(\xi) - A(0), \quad |\xi| \leq \delta_0(a, \mu). \end{aligned}$$

В силу формулы Рисса (2.11) разность $F(\xi) - P$ допускает представление

$$F(\xi) - P = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (R(\xi, \zeta) - R_0(\zeta)) d\zeta, \quad |\xi| \leq \delta_0(a, \mu). \quad (2.14)$$

Справедливо резольвентное тождество

$$R(\xi, \zeta) = R_0(\zeta) - R(\xi, \zeta) \Delta A(\xi) R_0(\zeta), \quad |\xi| \leq \delta_0(a, \mu), \quad \zeta \in \Gamma. \quad (2.15)$$

Длина контура Γ есть πd_0 , и обе резольвенты допускают на контуре Γ оценки

$$\|R_0(\zeta)\| \leq K, \quad \|R(\xi, \zeta)\| \leq 3K/2, \quad |\xi| \leq \delta_0(a, \mu), \quad \zeta \in \Gamma, \quad (2.16)$$

где константа K определена в (2.1). Здесь мы учли: 1) что резольвента $R(\xi, \zeta)$ на контуре Γ представляется сходящимся рядом:

$$R(\xi, \zeta) = R_0(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} (-\Delta A(\xi) R_0(\zeta))^n, \quad |\xi| \leq \delta_0(a, \mu), \quad \zeta \in \Gamma;$$

2) оценку (2.4) и равенство (2.2). Теперь из (2.4) и (2.14)–(2.16) вытекает оценка (2.13) с постоянной

$$C_1(a, \mu) := \frac{3}{4} K^2 d_0 \mu_+ M_1(a). \quad (2.17)$$

□

Перейдем к пороговым аппроксимациям для оператора $A(\xi)F(\xi)$. (Здесь начинаются существенные технические отличия от самосопряженного случая.)

Предложение 2.4. Пусть выполнены условия (1.1)–(1.3) и $M_3(a) < \infty$. Тогда справедливо представление

$$A(\xi)F(\xi) = [G]_1(\xi) + [G]_2(\xi) + \Psi(\xi), \quad [G]_1(\xi) := \sum_{j=1}^d G_j \xi_j, \quad [G]_2(\xi) := \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^d G_{kl} \xi_k \xi_l, \quad (2.18)$$

и оценка

$$\|\Psi(\xi)\| \leq C_2(a, \mu)|\xi|^3, \quad |\xi| \leq \delta_0(a, \mu). \quad (2.19)$$

Операторы G_j заданы равенствами

$$G_j = P \partial_j A(0) P, \quad j = 1, \dots, d. \quad (2.20)$$

Операторы G_{kl} имеют вид

$$\begin{aligned} G_{kl} = & P\partial_k\partial_l\mathbb{A}(\mathbf{0})P - P\partial_k\mathbb{A}(\mathbf{0})R_1(0)\partial_l\mathbb{A}(\mathbf{0})P - P\partial_l\mathbb{A}(\mathbf{0})R_1(0)\partial_k\mathbb{A}(\mathbf{0})P \\ & - P\partial_k\mathbb{A}(\mathbf{0})P\partial_l\mathbb{A}(\mathbf{0})R_1(0) - R_1(0)\partial_k\mathbb{A}(\mathbf{0})P\partial_l\mathbb{A}(\mathbf{0})P \\ & - P\partial_l\mathbb{A}(\mathbf{0})P\partial_k\mathbb{A}(\mathbf{0})R_1(0) - R_1(0)\partial_l\mathbb{A}(\mathbf{0})P\partial_k\mathbb{A}(\mathbf{0})P, \quad k, l = 1, \dots, d. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Здесь $R_1(0) := Q\mathbb{A}(\mathbf{0})^{-1}Q$, $Q = I - P$; под $\mathbb{A}(\mathbf{0})^{-1}$ подразумевается оператор, обратный к $\mathbb{A}(\mathbf{0})|_{QL_2(\Omega)} : QL_2(\Omega) \rightarrow QL_2(\Omega)$; этот оператор корректно определен и ограничен. Постоянная $C_2(a, \mu)$ определена ниже в (2.31) и контролируется в терминах величин d_0 , K , μ_+ , $M_1(a)$, $M_2(a)$, $M_3(a)$.

Доказательство. Итерируя резольвентное тождество (2.15) дважды, получаем

$$\begin{aligned} R(\boldsymbol{\xi}, \zeta) = & R_0(\zeta) - R_0(\zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta) + R_0(\zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta) + Z_3(\boldsymbol{\xi}, \zeta), \\ Z_3(\boldsymbol{\xi}, \zeta) := & -R(\boldsymbol{\xi}, \zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta), \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(a, \mu), \quad \zeta \in \Gamma. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Из (2.4) и (2.16) вытекает оценка

$$\|Z_3(\boldsymbol{\xi}, \zeta)\| \leq \frac{3}{2}K^4\mu_+^3M_1(a)^3|\boldsymbol{\xi}|^3, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(a, \mu), \quad \zeta \in \Gamma. \quad (2.23)$$

Далее, подставляя (2.8) во второе слагаемое в правой части (2.22) и (2.5) — в третье слагаемое, получаем

$$\begin{aligned} R(\boldsymbol{\xi}, \zeta) = & R_0(\zeta) - R_0(\zeta)([\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi}) + [\Delta_2\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi}))R_0(\zeta) \\ & + R_0(\zeta)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta) + Z_3(\boldsymbol{\xi}, \zeta) + Z_4(\boldsymbol{\xi}, \zeta), \\ Z_4(\boldsymbol{\xi}, \zeta) := & -R_0(\zeta)\mathbb{K}_2(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta) + R_0(\zeta)\mathbb{K}_1(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta) \\ & + R_0(\zeta)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\mathbb{K}_1(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta), \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(a, \mu), \quad \zeta \in \Gamma. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Из (2.4), (2.6), (2.7), (2.10) и (2.16) вытекает оценка

$$\|Z_4(\boldsymbol{\xi}, \zeta)\| \leq \left(\frac{1}{6}\mu_+K^2M_3(a) + \mu_+^2K^3M_1(a)M_2(a) \right) |\boldsymbol{\xi}|^3, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(a, \mu), \quad \zeta \in \Gamma. \quad (2.25)$$

Применяя формулу Рисса (2.12) и представление (2.24), получаем

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})F(\boldsymbol{\xi}) = G_0 + \sum_{j=1}^d G_j\xi_j + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^d G_{kl}\xi_k\xi_l + \Psi(\boldsymbol{\xi}), \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(a, \mu), \quad (2.26)$$

где

$$G_0 = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} R_0(\zeta)\zeta d\zeta, \quad (2.27)$$

$$G_j = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} R_0(\zeta)\partial_j\mathbb{A}(\mathbf{0})R_0(\zeta)\zeta d\zeta, \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} G_{kl} = & \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} R_0(\zeta)\partial_k\partial_l\mathbb{A}(\mathbf{0})R_0(\zeta)\zeta d\zeta \\ & - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (R_0(\zeta)\partial_k\mathbb{A}(\mathbf{0})R_0(\zeta)\partial_l\mathbb{A}(\mathbf{0})R_0(\zeta) + R_0(\zeta)\partial_l\mathbb{A}(\mathbf{0})R_0(\zeta)\partial_k\mathbb{A}(\mathbf{0})R_0(\zeta))\zeta d\zeta, \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\Psi(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (Z_3(\boldsymbol{\xi}, \zeta) + Z_4(\boldsymbol{\xi}, \zeta))\zeta d\zeta. \quad (2.30)$$

Из (2.23) и (2.25) вытекает оценка (2.19) для оператора (2.30) с постоянной

$$C_2(a, \mu) := \frac{d_0^2}{4} \left(\frac{3}{2}K^4\mu_+^3M_1(a)^3 + \frac{1}{6}K^2\mu_+M_3(a) + K^3\mu_+^2M_1(a)M_2(a) \right). \quad (2.31)$$

Чтобы вычислить интегралы в (2.27)–(2.29), используем разложение резольвенты оператора $\mathbb{A}(\mathbf{0})$:

$$R_0(\zeta) = R_0(\zeta)P + R_0(\zeta)(I - P) = -\frac{1}{\zeta}P + R_0(\zeta)(I - P), \quad \zeta \in \Gamma. \quad (2.32)$$

Нетрудно убедиться в равенстве

$$R_0(\lambda)(I - P) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\zeta - \lambda)^{-1} R_0(\zeta) d\zeta, \quad 0 < |\lambda| < d_0/2. \quad (2.33)$$

Действительно, в силу тождества Гильберта $R_0(\zeta) = R_0(\lambda) + (\zeta - \lambda)R_0(\lambda)R_0(\zeta)$ правая часть в (2.33) запишется в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\zeta - \lambda)^{-1} R_0(\zeta) d\zeta = R_0(\lambda) \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\zeta - \lambda)^{-1} d\zeta + R_0(\lambda) \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} R_0(\zeta) d\zeta = R_0(\lambda) - R_0(\lambda)P.$$

Мы учли (2.11) при $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$.

Из (2.33) следует, что оператор-функция $R_1(\lambda) := R_0(\lambda)(I - P)$, $0 < |\lambda| \leq d_0/2$, продолжается до функции голоморфной внутри контура Γ , оператор $\mathbb{A}(\mathbf{0})|_{QL_2(\Omega)} : QL_2(\Omega) \rightarrow QL_2(\Omega)$ ограниченно обратим, и обратный к нему есть $R_1(0)$. Подставим разложение (2.32) в контурные интегралы (2.27)–(2.29) и воспользуемся тем, что оператор-функция $R_1(\zeta) = R_0(\zeta)(I - P)$ голоморфна внутри контура Γ . Получаем:

$$G_0 = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \left(-\frac{1}{\zeta}P + R_1(\zeta) \right) \zeta d\zeta = 0; \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} G_j &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \left(-\frac{1}{\zeta}P + R_1(\zeta) \right) \partial_j \mathbb{A}(\mathbf{0}) \left(-\frac{1}{\zeta}P + R_1(\zeta) \right) \zeta d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{1}{\zeta} P \partial_j \mathbb{A}(\mathbf{0}) P d\zeta = P \partial_j \mathbb{A}(\mathbf{0}) P, \quad j = 1, \dots, d; \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} G_{kl} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \left(-\frac{1}{\zeta}P + R_1(\zeta) \right) \partial_k \partial_l \mathbb{A}(\mathbf{0}) \left(-\frac{1}{\zeta}P + R_1(\zeta) \right) \zeta d\zeta \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \left(-\frac{1}{\zeta}P + R_1(\zeta) \right) \partial_k \mathbb{A}(\mathbf{0}) \left(-\frac{1}{\zeta}P + R_1(\zeta) \right) \partial_l \mathbb{A}(\mathbf{0}) \left(-\frac{1}{\zeta}P + R_1(\zeta) \right) \zeta d\zeta \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \left(-\frac{1}{\zeta}P + R_1(\zeta) \right) \partial_l \mathbb{A}(\mathbf{0}) \left(-\frac{1}{\zeta}P + R_1(\zeta) \right) \partial_k \mathbb{A}(\mathbf{0}) \left(-\frac{1}{\zeta}P + R_1(\zeta) \right) \zeta d\zeta \\ &= P \partial_k \partial_l \mathbb{A}(\mathbf{0}) P - P \partial_k \mathbb{A}(\mathbf{0}) R_1(0) \partial_l \mathbb{A}(\mathbf{0}) P - P \partial_l \mathbb{A}(\mathbf{0}) R_1(0) \partial_k \mathbb{A}(\mathbf{0}) P \\ &\quad - P \partial_k \mathbb{A}(\mathbf{0}) P \partial_l \mathbb{A}(\mathbf{0}) R_1(0) - R_1(0) \partial_k \mathbb{A}(\mathbf{0}) P \partial_l \mathbb{A}(\mathbf{0}) P \\ &\quad - P \partial_l \mathbb{A}(\mathbf{0}) P \partial_k \mathbb{A}(\mathbf{0}) R_1(0) - R_1(0) \partial_l \mathbb{A}(\mathbf{0}) P \partial_k \mathbb{A}(\mathbf{0}) P, \quad k, l = 1, \dots, d. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Этим доказаны представления (2.20) и (2.21).

Представление (2.18) вытекает из (2.26), (2.34), (2.35) и (2.36). \square

Расшифруем теперь представление (2.20) и первые три слагаемых в (2.21) в терминах решений вспомогательных задач. Из равенства $P = (\cdot, q_0) \mathbf{1}_{\Omega}$ вытекает соотношение

$$PTP = (T \mathbf{1}_{\Omega}, q_0) P, \quad T \in \mathcal{B}(L_2(\Omega)). \quad (2.37)$$

Следовательно,

$$G_j = P \partial_j \mathbb{A}(\mathbf{0}) P = i(w_j, q_0) P, \quad \text{где } iw_j := \partial_j \mathbb{A}(\mathbf{0}) \mathbf{1}_{\Omega}, \quad j = 1, \dots, d. \quad (2.38)$$

В силу (2.3) справедливы соотношения

$$\begin{aligned} w_j(\mathbf{x}) &= \overline{w_j(\mathbf{x})} = \int_{\Omega} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} (x_j - y_j + n_j) a(\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{n}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (x_j - y_j) a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad j = 1, \dots, d. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Мы учли условие периодичности функции μ . Таким образом, операторы G_j , $j = 1, \dots, d$, принимают вид

$$G_j = i\alpha_j P, \quad \alpha_j = (w_j, q_0) = \int_{\Omega} d\mathbf{x} q_0(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} (x_j - y_j) a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad j = 1, \dots, d. \quad (2.40)$$

Из (2.37) вытекают равенства

$$P \partial_k \partial_l \mathbb{A}(\mathbf{0}) P = (w_{kl}, q_0) P, \quad k, l = 1, \dots, d. \quad (2.41)$$

Здесь

$$w_{kl} = \overline{w_{kl}} = \partial_k \partial_l \mathbb{A}(\mathbf{0}) \mathbf{1}_{\Omega} \in L_2(\Omega),$$

т. е.

$$\begin{aligned} w_{kl}(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} (x_k - y_k + n_k)(x_l - y_l + n_l) a(\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{n}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (x_k - y_k)(x_l - y_l) a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad k, l = 1, \dots, d. \end{aligned}$$

Окончательно с учетом периодичности функций q_0 и μ получаем

$$\begin{aligned} (w_{kl}, q_0) &= \int_{\Omega} d\mathbf{x} q_0(\mathbf{x}) \int_{\Omega} d\mathbf{y} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} (x_k - y_k + n_k)(x_l - y_l + n_l) a(\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{n}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= \int_{\Omega} d\mathbf{y} \int_{\Omega} d\mathbf{x} q_0(\mathbf{x}) \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} (x_k - y_k + n_k)(x_l - y_l + n_l) a(\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{n}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= \int_{\Omega} d\mathbf{y} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} q_0(\mathbf{x}) (x_k - y_k)(x_l - y_l) a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= \int_{\Omega} d\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} q_0(\mathbf{y}) (x_k - y_k)(x_l - y_l) a(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \mu(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \quad k, l = 1, \dots, d. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Далее, из (2.37) следуют равенства

$$\begin{aligned} P \partial_k \mathbb{A}(\mathbf{0}) R_1(0) \partial_l \mathbb{A}(\mathbf{0}) P &= (iv_l, i\tilde{w}_k) P, \quad \text{где } iv_l := R_1(0) \partial_l \mathbb{A}(\mathbf{0}) \mathbf{1}_{\Omega} = iR_1(0) w_l, \\ i\tilde{w}_k &:= (\partial_k \mathbb{A}(\mathbf{0}))^* q_0, \quad k, l = 1, \dots, d. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Выше мы учли (2.38). Перепишем равенства, задающие v_l , $l = 1, \dots, d$:

$$v_l = \mathbb{A}(\mathbf{0})^{-1} Q w_l, \quad Q w_l = w_l - \alpha_l \mathbf{1}_{\Omega}, \quad l = 1, \dots, d, \quad (2.44)$$

где функции $w_l \in L_2(\Omega)$, $l = 1, \dots, d$, определены в (2.39), коэффициенты α_l , $l = 1, \dots, d$, определены в (2.40). Из (2.44) вытекает, что функции $v_l = \bar{v}_l \in L_2(\Omega)$, $j = 1, \dots, d$, являются решениями следующих задач на ячейке Ω :

$$\int_{\Omega} \tilde{a}(\mathbf{0}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (v_l(\mathbf{x}) - v_l(\mathbf{y})) d\mathbf{y} = w_l(\mathbf{x}) - \alpha_l, \quad \mathbf{x} \in \Omega; \quad \int_{\Omega} v_l(\mathbf{x}) q_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

Считая, что функции $v_l \in L_2(\Omega)$, $l = 1, \dots, d$, периодически продолжены на все \mathbb{R}^d , можно переписать вспомогательные задачи на ячейке в следующем виде

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (v_l(\mathbf{x}) - v_l(\mathbf{y})) d\mathbf{y} &= \int_{\mathbb{R}^d} a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (x_l - y_l) d\mathbf{y} - \alpha_l, \quad \mathbf{x} \in \Omega; \\ \int_{\Omega} v_l(\mathbf{x}) q_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

В силу (2.40) задачи (2.45) однозначно разрешимы.

Из (2.3) и (2.43) вытекают соотношения

$$\tilde{w}_k(\mathbf{x}) = \overline{\tilde{w}_k(\mathbf{x})} = \int_{\mathbb{R}^d} (x_k - y_k) a(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \mu(\mathbf{y}, \mathbf{x}) q_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad k = 1, \dots, d. \quad (2.46)$$

Таким образом, из (2.21), (2.40)–(2.43) и (2.46) вытекает следующее утверждение.

Предложение 2.5. В условиях предложения 2.4 для операторов G_j , G_{kl} справедливы представления

$$G_j = i\alpha_j P, \quad j = 1, \dots, d, \quad G_{kl} = g_{kl}P + PG_{kl}Q + QG_{kl}P, \quad k, l = 1, \dots, d.$$

Здесь $Q = I - P$, вещественные коэффициенты α_j определены в (2.40),

$$\begin{aligned} g_{kl} &= (w_{kl}, q_0) - (v_k, \tilde{w}_l) - (v_l, \tilde{w}_k) \\ &= \int_{\Omega} d\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} ((x_k - y_k)(x_l - y_l) - v_k(\mathbf{x})(x_l - y_l) - v_l(\mathbf{x})(x_k - y_k)) a(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \mu(\mathbf{y}, \mathbf{x}) q_0(\mathbf{y}), \end{aligned} \quad (2.47)$$

а v_j — периодическое решение задачи (2.45). Таким образом,

$$[G]_1(\xi) = \sum_{j=1}^d G_j \xi_j = i \sum_{j=1}^d \alpha_j \xi_j P = i \langle \alpha, \xi \rangle P, \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} [G]_2(\xi) &= \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^d G_{kl} \xi_k \xi_l = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^d g_{kl} \xi_k \xi_l P + \frac{1}{2} P \sum_{k,l=1}^d G_{kl} \xi_k \xi_l Q + \frac{1}{2} Q \sum_{k,l=1}^d G_{kl} \xi_k \xi_l P \\ &= \langle g^0 \xi, \xi \rangle P + \frac{1}{2} P \sum_{k,l=1}^d G_{kl} \xi_k \xi_l Q + \frac{1}{2} Q \sum_{k,l=1}^d G_{kl} \xi_k \xi_l P, \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \end{aligned} \quad (2.49)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)^t$; g^0 — $(d \times d)$ -матрица с элементами $\frac{1}{2}g_{kl}$, $k, l = 1, \dots, d$.

Матрицу g^0 назовем *эффективной матрицей*; в силу (2.47) матрица g^0 вещественна и симметрична; ниже в пункте 3.1 мы убедимся, что матрица g^0 положительно определена.

§ 3. АППРОКСИМАЦИЯ РЕЗОЛЬВЕНТЫ $(\mathbb{A} + \varepsilon^2 I)^{-1}$

3.1. Аппроксимация резольвенты оператора $\mathbb{A}(\xi)$. Здесь мы получим приближение резольвенты $(\mathbb{A}(\xi) + \varepsilon^2 I)^{-1}$ при малом $\varepsilon > 0$ с погрешностью $O(\varepsilon^{-1})$ (см. теорему 3.2). Из (1.39) следует неравенство

$$\operatorname{Re}([q_0] \mathbb{A}(\xi; a, \mu) F(\xi) F(\xi) u, F(\xi) u) \geq \mu_{-q} C(a) |\xi|^2 (F(\xi) u, F(\xi) u), \quad u \in L_2(\Omega), \quad |\xi| \leq \delta_0(a, \mu). \quad (3.1)$$

Подставляя в (3.1) разложение (2.18) и учитывая (2.48) и (2.49), получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}([q_0] \langle i \alpha, \xi \rangle P + \langle g^0 \xi, \xi \rangle P + P[G]_2(\xi) Q + Q[G]_2(\xi) P + \Psi(\xi)) F(\xi) u, F(\xi) u) \\ \geq \mu_{-q} C(a) |\xi|^2 (F(\xi) u, F(\xi) u), \quad u \in L_2(\Omega), \quad |\xi| \leq \delta_0(a, \mu). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Поскольку оператор $[q_0]P = (\cdot, q_0)q_0$ самосопряжен, справедливо равенство

$$\operatorname{Re}([q_0]i\langle \alpha, \xi \rangle PF(\xi)u, F(\xi)u) = 0. \quad (3.3)$$

С учетом равенств $QP = 0$ и $P^*[q_0] = [q_0]P$ имеем

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}([q_0](P[G]_2(\xi)Q + Q[G]_2(\xi)P + \Psi(\xi))F(\xi)u, F(\xi)u) \\ &= \operatorname{Re}([q_0]P[G]_2(\xi)Q(F(\xi) - P)u, F(\xi)u) \\ &+ \operatorname{Re}([q_0]Q[G]_2(\xi)PF(\xi)u, (F(\xi) - P)u) + \operatorname{Re}([q_0]\Psi(\xi)F(\xi)u, F(\xi)u). \end{aligned} \quad (3.4)$$

В силу (2.13), (2.19) и соотношения $q_0 \in L_\infty$ модуль выражения (3.4) оценивается через $C'|\xi|^3\|u\|^2$ с некоторой постоянной C' . Отсюда и из (3.2), (3.3) следует неравенство

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}([q_0]\langle g^0\xi, \xi \rangle PF(\xi)u, F(\xi)u) \\ & \geq \mu_{-q_-}C(a)|\xi|^2(F(\xi)u, F(\xi)u) - C'|\xi|^3\|u\|^2, \quad u \in L_2(\Omega), \quad |\xi| \leq \delta_0(a, \mu). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Используя снова (2.13), получаем

$$\operatorname{Re}([q_0]\langle g^0\xi, \xi \rangle Pu, Pu) \geq \mu_{-q_-}C(a)|\xi|^2(Pu, Pu) - C''|\xi|^3\|u\|^2, \quad u \in L_2(\Omega), \quad |\xi| \leq \delta_0(a, \mu),$$

с некоторой постоянной C'' . Полагая здесь $u = \mathbf{1}_\Omega$, имеем

$$\langle g^0\xi, \xi \rangle \geq \mu_{-q_-}C(a)|\xi|^2 - C''|\xi|^3, \quad |\xi| \leq \delta_0(a, \mu).$$

Поделим последнее соотношение на $|\xi|^2$ и устремим $|\xi| \rightarrow 0$. В итоге мы убеждаемся, что матрица g^0 положительно определена:

$$\langle g^0\theta, \theta \rangle \geq \mu_{-q_-}C(a), \quad \theta \in \mathbb{S}^{d-1},$$

или окончательно

$$\langle g^0\xi, \xi \rangle \geq \mu_{-q_-}C(a)|\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (3.6)$$

Предложение 3.1. Пусть выполнены условия (1.1)–(1.3) и $M_3(a) < \infty$. Положим

$$\Xi(\xi, \varepsilon) := (\mathbb{A}(\xi) + \varepsilon^2 I)^{-1} F(\xi) - (\langle g^0\xi, \xi \rangle + i\langle \alpha, \xi \rangle + \varepsilon^2)^{-1} P, \quad \xi \in \tilde{\Omega}, \quad \varepsilon > 0.$$

Справедлива оценка

$$\|\Xi(\xi, \varepsilon)\| \leq \frac{C_3(a, \mu)|\xi|}{\mu_{-q_-}q_+^{-1}C(a)|\xi|^2 + \varepsilon^2} + \frac{C_4(a, \mu)|\xi|^3}{(\mu_{-q_-}q_+^{-1}C(a)|\xi|^2 + \varepsilon^2)^2}, \quad |\xi| \leq \delta_0(a, \mu), \quad \varepsilon > 0. \quad (3.7)$$

Здесь

$$C_3(a, \mu) = \frac{5}{4}Kd_0q_-^{-1/2}q_+^{1/2}C_1(a, \mu), \quad (3.8)$$

$$C_4(a, \mu) = \frac{1}{2}Kd_0q_-^{-1}q_+ \left(\frac{3}{4}Kd_0C_2(a, \mu) + \frac{1}{2}C_1(a, \mu)S(d_0, K, a, \mu)d \left(1 + \frac{1}{2}Kd_0 \right) \right), \quad (3.9)$$

а постоянная $S(d_0, K, a, \mu)$ определена в (3.16).

Доказательство. Из (1.40) и (3.6) вытекают оценки

$$\|(\mathbb{A}(\xi) + \varepsilon^2 I)^{-1}\| \leq q_-^{-1/2}q_+^{1/2}(\mu_{-q_-}q_+^{-1}C(a)|\xi|^2 + \varepsilon^2)^{-1} := \mathcal{S}(\xi, \varepsilon), \quad \varepsilon > 0, \quad \xi \in \tilde{\Omega}; \quad (3.10)$$

$$|(\langle g^0\xi, \xi \rangle + i\langle \alpha, \xi \rangle + \varepsilon^2)^{-1}| \leq (\mu_{-q_-}C(a)|\xi|^2 + \varepsilon^2)^{-1} \leq \mathcal{S}(\xi, \varepsilon), \quad \varepsilon > 0, \quad \xi \in \tilde{\Omega}. \quad (3.11)$$

Второе неравенство в (3.11) выполнено в силу свойства $q_+ \geq 1$. Из (2.11), (2.16) следуют оценки

$$\|F(\xi)\| \leq \frac{3}{4}Kd_0, \quad |\xi| \leq \delta_0(a, \mu); \quad \|P\| \leq \frac{1}{2}Kd_0; \quad \|Q\| \leq 1 + \frac{1}{2}Kd_0. \quad (3.12)$$

Представление (2.33) дает неравенство

$$\|R_1(0)\| \leq K. \quad (3.13)$$

Из (2.5), (2.6) вытекают оценки

$$\|\partial_j \mathbb{A}(\mathbf{0})\| \leq \mu_+ M_1(a), \quad j = 1, \dots, d. \quad (3.14)$$

Из (2.8), (2.9) следуют неравенства

$$\|\partial_k \partial_l \mathbb{A}(\mathbf{0})\| \leq \mu_+ M_2(a), \quad k, l = 1, \dots, d. \quad (3.15)$$

Равенство (2.36) вместе с оценками (3.12)–(3.15) приводит к соотношениям

$$\|G_{kl}\| \leq S(d_0, K, a, \mu) := (\mu_+ M_2(a) + 6(\mu_+ M_1(a))^2 K) \left(\frac{1}{2} K d_0 \right)^2, \quad k, l = 1, \dots, d; \quad (3.16)$$

$$\|[G]_2(\boldsymbol{\xi})\| \leq \frac{d}{2} S(d_0, K, a, \mu) |\boldsymbol{\xi}|^2, \quad \boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Omega}. \quad (3.17)$$

Справедливо очевидное тождество

$$\begin{aligned} \Xi(\boldsymbol{\xi}, \varepsilon) &= F(\boldsymbol{\xi})(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 I)^{-1}(F(\boldsymbol{\xi}) - P) + (F(\boldsymbol{\xi}) - P)(\langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle + i\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi} \rangle + \varepsilon^2)^{-1} P - \\ &\quad - F(\boldsymbol{\xi})(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 I)^{-1} (\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) F(\boldsymbol{\xi}) - (\langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle + i\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi} \rangle) P) (\langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle + i\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi} \rangle + \varepsilon^2)^{-1} P. \end{aligned} \quad (3.18)$$

В силу (2.18), (2.48) и (2.49) третье слагаемое в (3.18) принимает вид

$$\begin{aligned} &- F(\boldsymbol{\xi})(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 I)^{-1} (\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) F(\boldsymbol{\xi}) - (\langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle + i\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi} \rangle) P) (\langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle + i\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi} \rangle + \varepsilon^2)^{-1} P \\ &= -F(\boldsymbol{\xi})(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 I)^{-1} \Psi(\boldsymbol{\xi})(\langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle + i\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi} \rangle + \varepsilon^2)^{-1} P - \\ &\quad - (\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 I)^{-1} (F(\boldsymbol{\xi}) - P) Q[G]_2(\boldsymbol{\xi})(\langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle + i\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi} \rangle + \varepsilon^2)^{-1} P. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Теперь (3.7) следует из (2.13), (2.19) и (3.10)–(3.12), (3.17)–(3.19). \square

Теорема 3.2. Пусть выполнены условия (1.1)–(1.3) и $M_3(a) < \infty$. Тогда справедлива оценка

$$\|(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 I)^{-1} - (\langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle + i\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi} \rangle + \varepsilon^2)^{-1} P\| \leq C_5(a, \mu) \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon > 0, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(a, \mu). \quad (3.20)$$

Постоянная $C_5(a, \mu)$ контролируется в терминах параметров $d_0, K, q_-, q_+, d, \mu_-, \mu_+, M_1(a), M_2(a), M_3(a), \mathcal{M}(a), \mathcal{C}_\pi(a), \mathcal{C}_r(a)$.

Доказательство. Из (2.16) и очевидного представления (ср. (2.33))

$$R(\boldsymbol{\xi}, -\varepsilon^2)(I - F(\boldsymbol{\xi})) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\zeta + \varepsilon^2)^{-1} R(\boldsymbol{\xi}, \zeta) d\zeta, \quad 0 < \varepsilon^2 < d_0/2, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(a, \mu),$$

вытекает неравенство

$$\|(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 I)^{-1}(I - F(\boldsymbol{\xi}))\| \leq 3K, \quad 0 < \varepsilon^2 \leq d_0/4, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(a, \mu). \quad (3.21)$$

С другой стороны, соотношения (1.40) и (3.12) дают оценку

$$\|(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 I)^{-1}(I - F(\boldsymbol{\xi}))\| \leq q_-^{-1/2} q_+^{1/2} \left(1 + \frac{3}{4} K d_0\right) \varepsilon^{-2}, \quad \varepsilon > 0, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(a, \mu). \quad (3.22)$$

Из (3.21) и (3.22) вытекает, что

$$\|(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 I)^{-1}(I - F(\boldsymbol{\xi}))\| \leq \sqrt{3K} q_-^{-1/4} q_+^{1/4} \left(1 + \frac{3}{4} K d_0\right)^{1/2} \varepsilon^{-1}, \quad 0 < \varepsilon \leq \frac{\sqrt{d_0}}{2}, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(a, \mu). \quad (3.23)$$

Очевидно, из (3.22) следует, что

$$\|(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 I)^{-1}(I - F(\boldsymbol{\xi}))\| \leq q_-^{-1/2} q_+^{1/2} \left(1 + \frac{3}{4} K d_0\right) 2d_0^{-1/2} \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon > \frac{\sqrt{d_0}}{2}, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(a, \mu). \quad (3.24)$$

Сопоставляя (3.23) и (3.24), получаем

$$\begin{aligned} &\|(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 I)^{-1}(I - F(\boldsymbol{\xi}))\| \leq C_5^{(1)} \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon > 0, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(a, \mu), \\ C_5^{(1)} &= \max \left\{ \sqrt{3K} q_-^{-1/4} q_+^{1/4} \left(1 + \frac{3}{4} K d_0\right)^{1/2}, q_-^{-1/2} q_+^{1/2} \left(1 + \frac{3}{4} K d_0\right) 2d_0^{-1/2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Из (3.7) непосредственно вытекает оценка

$$\begin{aligned} \|\Xi(\xi, \varepsilon)\| &\leq C_5^{(2)} \varepsilon^{-1}, \quad |\xi| \leq \delta_0(a, \mu), \quad \varepsilon > 0, \\ C_5^{(2)} &= \frac{C_3(a, \mu)}{(\mu_- q_- q_+^{-1} C(a))^{1/2}} + \frac{C_4(a, \mu)}{(\mu_- q_- q_+^{-1} C(a))^{3/2}}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Очевидно, оператор под знаком нормы в (3.20) равен $(\mathbb{A}(\xi) + \varepsilon^2 I)^{-1}(I - F(\xi)) + \Xi(\xi, \varepsilon)$, а потому из (3.25) и (3.26) следует оценка (3.20) с постоянной $C_5(a, \mu) = C_5^{(1)}(a, \mu) + C_5^{(2)}(a, \mu)$. Из соотношений (1.33), (2.17), (2.31), (3.8), (3.9), (3.16) видно, что константа $C_5(a, \mu)$ контролируется в терминах параметров $d_0, K, q_-, q_+, d, \mu_-, \mu_+, M_1(a), M_2(a), M_3(a), \mathcal{M}(a), C_\pi(a), C_{r(a)}(a)$. \square

Введем *эффективный оператор* — самосопряженный эллиптический дифференциальный оператор второго порядка с постоянными коэффициентами в $L_2(\mathbb{R}^d)$:

$$\mathbb{A}^0 := \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^d g_{kl} D_k D_l = -\operatorname{div} g^0 \nabla, \quad \operatorname{Dom} \mathbb{A}^0 = H^2(\mathbb{R}^d). \quad (3.27)$$

При этом *эффективная матрица* $g^0 = (d \times d)$ -матрица с элементами $\frac{1}{2} g_{kl}$, где коэффициенты g_{kl} , $k, l = 1, \dots, d$, определены в (2.47). Выполнена оценка (3.6), тем самым матрица g^0 положительно определена.

С помощью унитарного преобразования Гельфанда оператор \mathbb{A}^0 раскладывается в прямой интеграл:

$$\mathbb{A}^0 = \mathcal{G}^* \left(\int_{\tilde{\Omega}} \oplus \mathbb{A}^0(\xi) d\xi \right) \mathcal{G}. \quad (3.28)$$

Здесь $\mathbb{A}^0(\xi)$ — самосопряженный оператор в пространстве $L_2(\Omega)$, заданный выражением

$$\mathbb{A}^0(\xi) = (\mathbf{D} + \xi)^* g^0 (\mathbf{D} + \xi), \quad \operatorname{Dom} \mathbb{A}^0(\xi) = \tilde{H}^2(\Omega).$$

Пространство $\tilde{H}^2(\Omega)$ определяется как подпространство в $H^2(\Omega)$, состоящее из функций, \mathbb{Z}^d -периодическое продолжение которых на \mathbb{R}^d принадлежит классу $H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^d)$. Равенство (3.28) означает следующее. Пусть $u \in \operatorname{Dom} \mathbb{A}^0 = H^2(\mathbb{R}^d)$ и $v = \mathbb{A}^0 u$. Тогда $\mathcal{G}u(\xi, \cdot) \in \operatorname{Dom} \mathbb{A}^0(\xi) = \tilde{H}^2(\Omega)$ и $\mathcal{G}v(\xi, \cdot) = \mathbb{A}^0(\xi) \mathcal{G}u(\xi, \cdot)$, $\xi \in \tilde{\Omega}$.

На области определения $\operatorname{Dom} \mathbb{A}^0$ определим оператор $\mathbb{A}^0 + i\langle \mathbf{D}, \alpha \rangle$. Этот оператор также раскладывается в прямой интеграл.

$$\mathbb{A}^0 + i\langle \mathbf{D}, \alpha \rangle = \mathcal{G}^* \left(\int_{\tilde{\Omega}} \oplus (\mathbb{A}^0(\xi) + i\langle \mathbf{D} + \xi, \alpha \rangle) d\xi \right) \mathcal{G}. \quad (3.29)$$

Здесь оператор $\mathbb{A}^0(\xi) + i\langle \mathbf{D} + \xi, \alpha \rangle$ определен на области определения $\operatorname{Dom} \mathbb{A}^0(\xi)$.

Из теоремы 3.2 легко выводится следующий результат.

Теорема 3.3. Пусть выполнены условия (1.1)–(1.3) и $M_3(a) < \infty$. Тогда справедлива оценка

$$\|(\mathbb{A}(\xi) + \varepsilon^2 I)^{-1} - (\mathbb{A}^0(\xi) + i\langle \mathbf{D} + \xi, \alpha \rangle + \varepsilon^2 I)^{-1}[q_0]\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_1(a, \mu) \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon > 0, \quad \xi \in \tilde{\Omega}. \quad (3.30)$$

Постоянная $C_1(a, \mu)$ контролируется в терминах параметров $d_0, K, q_-, q_+, d, \mu_-, \mu_+, M_1(a), M_2(a), M_3(a), \mathcal{M}(a), C_\pi(a), C_{r(a)}(a)$.

Доказательство. Из (3.10) и (3.11) вытекают очевидные оценки

$$\begin{aligned} \|(\mathbb{A}(\xi) + \varepsilon^2 I)^{-1}\| &\leq q_-^{-1/2} q_+^{1/2} (\mu_- q_- q_+^{-1} C(a))^{-1/2} (\delta_0(a, \mu))^{-1} \varepsilon^{-1}, \\ \varepsilon &> 0, \quad \xi \in \tilde{\Omega}, \quad |\xi| \geq \delta_0(a, \mu), \end{aligned}$$

$$\left| (\langle g^0 \xi, \xi \rangle + i \langle \alpha, \xi \rangle + \varepsilon^2)^{-1} \right| \leq q_-^{-1/2} q_+^{1/2} (\mu_- q_- q_+^{-1} C(a))^{-1/2} (\delta_0(a, \mu))^{-1} \varepsilon^{-1},$$

$$\varepsilon > 0, \quad \xi \in \tilde{\Omega}, \quad |\xi| \geq \delta_0(a, \mu).$$

Отсюда и из теоремы 3.2 с учетом (3.12) следует оценка

$$\|(\mathbb{A}(\xi) + \varepsilon^2 I)^{-1} - (\langle g^0 \xi, \xi \rangle + i \langle \alpha, \xi \rangle + \varepsilon^2)^{-1} P\| \leq \tilde{C}_5(a, \mu) \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon > 0, \quad \xi \in \tilde{\Omega}, \quad (3.31)$$

где $\tilde{C}_5(a, \mu) = \max\{C_5(a, \mu), q_-^{-1/2} q_+^{1/2} (\mu_- q_- q_+^{-1} C(a))^{-1/2} (\delta_0(a, \mu))^{-1} (1 + K d_0/2)\}$.

Далее, определим ортопроектор $P_0 = (\cdot, \mathbf{1}_\Omega) \mathbf{1}_\Omega$; отметим соотношение $P = P_0[q_0]$. Справедливо очевидное равенство

$$(\mathbb{A}^0(\xi) + i \langle \mathbf{D} + \xi, \alpha \rangle) P_0 = (\langle g^0 \xi, \xi \rangle + i \langle \alpha, \xi \rangle) P_0,$$

а потому

$$(\mathbb{A}^0(\xi) + i \langle \mathbf{D} + \xi, \alpha \rangle + \varepsilon^2 I)^{-1} P_0 = (\langle g^0 \xi, \xi \rangle + i \langle \alpha, \xi \rangle + \varepsilon^2)^{-1} P_0.$$

Перепишем (3.31) в виде

$$\|(\mathbb{A}(\xi) + \varepsilon^2 I)^{-1} - (\mathbb{A}^0(\xi) + i \langle \mathbf{D} + \xi, \alpha \rangle + \varepsilon^2 I)^{-1} P_0[q_0]\| \leq \tilde{C}_5(a, \mu) \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon > 0, \quad \xi \in \tilde{\Omega}. \quad (3.32)$$

С помощью дискретного преобразования Фурье имеем

$$\begin{aligned} & \|(\mathbb{A}^0(\xi) + i \langle \mathbf{D} + \xi, \alpha \rangle + \varepsilon^2 I)^{-1} (I - P_0)\| \\ &= \sup_{0 \neq \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} |\langle g^0(2\pi \mathbf{n} + \xi), 2\pi \mathbf{n} + \xi \rangle + i \langle \alpha, 2\pi \mathbf{n} + \xi \rangle + \varepsilon^2|^{-1} \leq (\mu_- q_- C(a) \pi^2 + \varepsilon^2)^{-1}. \end{aligned}$$

Мы учли (3.6) и очевидное неравенство $|2\pi \mathbf{n} + \xi| \geq \pi$ при $\xi \in \tilde{\Omega}$ и $0 \neq \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$. Следовательно,

$$\|(\mathbb{A}^0(\xi) + i \langle \mathbf{D} + \xi, \alpha \rangle + \varepsilon^2 I)^{-1} (I - P_0)\| \leq (\mu_- q_- C(a))^{-1/2} \pi^{-1} \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon > 0, \quad \xi \in \tilde{\Omega}.$$

Отсюда и из (3.32) вытекает искомая оценка (3.30) с постоянной $C_1(a, \mu) = \tilde{C}_5(a, \mu) + q_+(\mu_- q_- C(a))^{-1/2} \pi^{-1}$. \square

3.2. Аппроксимация резольвенты $(\mathbb{A} + \varepsilon^2 I)^{-1}$.

Теорема 3.4. Пусть выполнены условия (1.1)–(1.3) и $M_3(a) < \infty$. Тогда справедлива оценка

$$\|(\mathbb{A} + \varepsilon^2 I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + i \langle \mathbf{D}, \alpha \rangle + \varepsilon^2 I)^{-1} [q_0]\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_1(a, \mu) \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon > 0. \quad (3.33)$$

Доказательство. Из разложений (1.5) и (3.29) следует, что оператор под знаком нормы в (3.33) с помощью преобразования Гельфанда раскладывается в прямой интеграл по операторам $(\mathbb{A}(\xi) + \varepsilon^2 I)^{-1} - (\mathbb{A}^0(\xi) + i \langle \mathbf{D} + \xi, \alpha \rangle + \varepsilon^2 I)^{-1} [q_0]$. Следовательно,

$$\begin{aligned} & \|(\mathbb{A} + \varepsilon^2 I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + i \langle \mathbf{D}, \alpha \rangle + \varepsilon^2 I)^{-1} [q_0]\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &= \sup_{\xi \in \tilde{\Omega}} \|(\mathbb{A}(\xi) + \varepsilon^2 I)^{-1} - (\mathbb{A}^0(\xi) + i \langle \mathbf{D} + \xi, \alpha \rangle + \varepsilon^2 I)^{-1} [q_0]\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Поэтому оценка (3.33) вытекает из (3.30). \square

§ 4. УСРЕДНЕНИЕ НЕЛОКАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА СВЁРТОЧНОГО ТИПА

4.1. Основные результаты. Предполагая выполненными условия (1.1)–(1.3), рассмотрим семейство нелокальных операторов в $L_2(\mathbb{R}^d)$, заданных по правилу

$$\mathbb{A}_\varepsilon u(\mathbf{x}) := \varepsilon^{-d-2} \int_{\mathbb{R}^d} a((\mathbf{x} - \mathbf{y})/\varepsilon) \mu(\mathbf{x}/\varepsilon, \mathbf{y}/\varepsilon) (u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d), \quad \varepsilon > 0.$$

Пусть эффективный оператор \mathbb{A}^0 в $L_2(\mathbb{R}^d)$ определен в (3.27). Напомним, что эффективная матрица g^0 — это матрица с элементами $\frac{1}{2} g_{kl}$, где коэффициенты g_{kl} , $k, l = 1, \dots, d$, определены в (2.47). Напомним также обозначение $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)^t$, где числа α_j определены в (2.40).

Из теоремы 3.4 с помощью масштабного преобразования выводится основной результат работы.

Теорема 4.1. Пусть выполнены условия (1.1)–(1.3) и $M_3(a) < \infty$. Тогда справедлива оценка

$$\|(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + \varepsilon^{-1}\langle \boldsymbol{\alpha}, \nabla \rangle + I)^{-1}[q_0^\varepsilon]\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_1(a, \mu)\varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (4.1)$$

Постоянная $C_1(a, \mu)$ контролируется через следующие величины: d_0 , K , q_+ , q_- , d , μ_- , μ_+ , $M_1(a)$, $M_2(a)$, $M_3(a)$, $\mathcal{M}(a)$, $\mathcal{C}_\pi(a)$, $\mathcal{C}_{r(a)}(a)$.

Доказательство. Введем масштабное преобразование (семейство унитарных операторов):

$$T_\varepsilon u(\mathbf{x}) := \varepsilon^{d/2} u(\varepsilon \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d), \quad \varepsilon > 0.$$

Нетрудно проверить равенство

$$\mathbb{A}_\varepsilon = \varepsilon^{-2} T_\varepsilon^* \mathbb{A} T_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Следовательно,

$$(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} = T_\varepsilon^* \varepsilon^2 (\mathbb{A} + \varepsilon^2 I)^{-1} T_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (4.2)$$

Для эффективного оператора также выполнено тождество

$$\mathbb{A}^0 = \varepsilon^{-2} T_\varepsilon^* \mathbb{A}^0 T_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

а потому

$$(\mathbb{A}^0 + \varepsilon^{-1} i \langle \mathbf{D}, \boldsymbol{\alpha} \rangle + I)^{-1} [q_0^\varepsilon] = T_\varepsilon^* \varepsilon^2 (\mathbb{A}^0 + i \langle \mathbf{D}, \boldsymbol{\alpha} \rangle + \varepsilon^2 I)^{-1} [q_0] T_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (4.3)$$

Из (4.2) и (4.3) с учетом унитарности оператора T_ε вытекает равенство

$$\begin{aligned} \|(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + \varepsilon^{-1} i \langle \mathbf{D}, \boldsymbol{\alpha} \rangle + I)^{-1} [q_0^\varepsilon]\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ = \varepsilon^2 \|(\mathbb{A} + \varepsilon^2 I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + i \langle \mathbf{D}, \boldsymbol{\alpha} \rangle + \varepsilon^2 I)^{-1} [q_0]\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Отсюда и из теоремы 3.4 вытекает искомая оценка (4.1). \square

4.2. Заключительные замечания. 1. Теорема 4.1 сохраняет силу, если решетку периодов \mathbb{Z}^d заменить на произвольную решетку в \mathbb{R}^d . Тогда постоянные в оценках будут зависеть не только от коэффициентов a и μ , но и от параметров решетки.

2. Если в условиях теоремы 4.1 заменить условие $M_3(a) < \infty$ условием $\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^k a(\mathbf{x}) d\mathbf{x} < \infty$, где $2 < k < 3$, то выполнена оценка

$$\|(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + \varepsilon^{-1} \langle \boldsymbol{\alpha}, \nabla \rangle + I)^{-1} [q_0^\varepsilon]\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C \varepsilon^{k-2}, \quad \varepsilon > 0. \quad (4.4)$$

Если в условиях теоремы 4.1 заменить условие $M_3(a) < \infty$ условием $M_2(a) < \infty$, то имеет место сходимость

$$\|(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + \varepsilon^{-1} \langle \boldsymbol{\alpha}, \nabla \rangle + I)^{-1} [q_0^\varepsilon]\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow +0. \quad (4.5)$$

В самом деле, при замене условия $M_3(a) < \infty$ условием $\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^k a(\mathbf{x}) d\mathbf{x} < \infty$, где $2 < k < 3$, неравенство (2.19) заменится соотношением

$$\|\Psi(\boldsymbol{\xi})\| \leq C_2(a, \mu) |\boldsymbol{\xi}|^k, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta_0(a, \mu),$$

откуда и вытекает (4.4). Если же в формулировке теоремы 4.1 заменить условие $M_3(a) < \infty$ условием $M_2(a) < \infty$, то формула (2.18) остается в силе, однако оценка остаточного члена в (2.19) заменится на соотношение $\|\Psi(\boldsymbol{\xi})\| = o(|\boldsymbol{\xi}|^2)$. Последнее дает (4.5).

3. Пусть выполнены условия (1.1)–(1.3) и $M_2(a) < \infty$. Тогда имеет место сильная сходимость:

$$(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + \varepsilon^{-1} \langle \boldsymbol{\alpha}, \nabla \rangle + I)^{-1} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.6)$$

Доказательство. Этот факт легко получить, используя известное “свойство среднего значения” (см., например, [8]): при $\varepsilon \rightarrow 0$ оператор $[q_0^\varepsilon]$ слабо сходится к среднему значению периодической функции $q_0(\mathbf{x})$, то есть к 1. Убедимся, что

$$\|(\mathbb{A}^0 + \varepsilon^{-1}\langle \boldsymbol{\alpha}, \nabla \rangle + I)^{-1}[q_0^\varepsilon]u - (\mathbb{A}^0 + \varepsilon^{-1}\langle \boldsymbol{\alpha}, \nabla \rangle + I)^{-1}u\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d). \quad (4.7)$$

В силу оценок

$$\|(\mathbb{A}^0 + \varepsilon^{-1}\langle \boldsymbol{\alpha}, \nabla \rangle + I)^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq 1, \quad \|[q_0^\varepsilon]\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq q_+$$

сходимость (4.7) достаточно установить при $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Пусть носитель функции u содержится в некотором шаре B . Тогда справедливо соотношение

$$\begin{aligned} & (\mathbb{A}^0 + \varepsilon^{-1}\langle \boldsymbol{\alpha}, \nabla \rangle + I)^{-1}[q_0^\varepsilon]u - (\mathbb{A}^0 + \varepsilon^{-1}\langle \boldsymbol{\alpha}, \nabla \rangle + I)^{-1}u \\ &= (\mathbb{A}^0 + I)(\mathbb{A}^0 + \varepsilon^{-1}\langle \boldsymbol{\alpha}, \nabla \rangle + I)^{-1}(\mathbb{A}^0 + I)^{-1}[\mathbf{1}_B(q_0^\varepsilon - 1)]u. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Поскольку норма оператора $(\mathbb{A}^0 + I)(\mathbb{A}^0 + \varepsilon^{-1}\langle \boldsymbol{\alpha}, \nabla \rangle + I)^{-1}$ не превосходит единицы, а оператор $(\mathbb{A}^0 + I)^{-1}[\mathbf{1}_B]$ компактен в $L_2(\mathbb{R}^d)$, то из слабой сходимости $(q_0^\varepsilon - 1)u \rightarrow 0$ вытекает, что L_2 -норма выражения (4.8) стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Теперь из (4.5) и (4.7) следует (4.6). \square

§ 5. ПРИЛОЖЕНИЕ. УСТОЙЧИВОСТЬ ИЗОЛИРОВАННОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ

Приведем без доказательства (см. [18], п. I.4.6) следующее утверждение.

Предложение 5.1. Пусть P_1, P_2 — проекторы в \mathfrak{H} , и справедливо условие $\|P_1 - P_2\| < 1$. Тогда верно равенство $\text{rank } P_1 = \text{rank } P_2$.

Пусть A — ограниченный оператор в гильбертовом пространстве \mathfrak{H} . Предположим, что λ_0 — изолированное простое собственное значение оператора A , т.е. отвечающий точке λ_0 проектор Рисса оператора A имеет ранг 1. Обозначим через d_0 расстояние от λ_0 до остального спектра оператора A . Резольвента $(A - \zeta I)^{-1}$ голоморфна в круге $B_{d_0}(\lambda_0)$ с выколотой точкой λ_0 . Следовательно, конечна величина

$$K := \max_{\frac{d_0}{3} \leq |\zeta - \lambda_0| \leq \frac{2d_0}{3}} \|(A - \zeta I)^{-1}\|.$$

Предложение 5.2. При сделанных предположениях пусть B — ограниченный оператор в \mathfrak{H} и величина $\|A - B\|$ настолько мала, что выполнены условия

$$K\|A - B\| < 1, \quad \frac{d_0}{3} \cdot \frac{K^2\|A - B\|}{1 - K\|A - B\|} < 1. \quad (5.1)$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) кольцо $\{\zeta \in \mathbb{C} : \frac{d_0}{3} \leq |\zeta - \lambda_0| \leq \frac{2d_0}{3}\}$ не пересекается с $\sigma(B)$;
- 2) спектр оператора B в круге $B_{d_0/3}(\lambda_0)$ состоит из одного простого собственного значения, т.е. отвечающий спектру в круге $B_{d_0/3}(\lambda_0)$ проектор Рисса оператора B имеет ранг 1.

Замечание 5.3. Условия (5.1) эквивалентны неравенству $\|A - B\| < 3(d_0K^2 + 3K)^{-1}$.

Доказательство. При условии (5.1) для всех $\zeta \in \mathbb{C} : \frac{d_0}{3} \leq |\zeta - \lambda_0| \leq \frac{2d_0}{3}$ существует резольвента оператора B :

$$(B - \zeta I)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} ((A - \zeta I)^{-1}(A - B))^n (A - \zeta I)^{-1},$$

откуда вытекает первое утверждение предложения 5.2. Кроме того, справедлива оценка

$$\|(B - \zeta I)^{-1} - (A - \zeta I)^{-1}\| \leq \frac{K^2\|A - B\|}{1 - K\|A - B\|}, \quad |\zeta - \lambda_0| = d_0/3. \quad (5.2)$$

Обозначим через P_A и P_B проекторы Рисса операторов A и B , отвечающие частям спектров $\sigma(A)$ и $\sigma(B)$ внутри круга $B_{d_0/3}(\lambda_0)$. В силу представления

$$P_A - P_B = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - \lambda_0| = d_0/3} ((A - \zeta I)^{-1} - (B - \zeta I)^{-1}) d\zeta,$$

неравенства (5.2) и условия (5.1) справедлива оценка $\|P_A - P_B\| < 1$, которая (см. предложение 5.1) и приводит ко второму утверждению предложения 5.2. \square

§ 6. ПРИЛОЖЕНИЕ. НЕОБХОДИМЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА \mathbf{G}

6.1. Формулировка. Здесь предполагается, что функции $a(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d$, и $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$, удовлетворяют условиям (1.1) и (1.2), (1.3) соответственно.

Рассмотрим функцию

$$\tilde{a}(\mathbf{z}) := \tilde{a}(\mathbf{0}, \mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} a(\mathbf{z} + \mathbf{n}), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d, \quad (6.1)$$

см. (1.8). Из (1.1) и (6.1) следует, что $\tilde{a}(\mathbf{z})$ — неотрицательная \mathbb{Z}^d -периодическая функция; $\tilde{a} \in L_1(\Omega)$ и справедливы соотношения

$$\|\tilde{a}\|_{L_1(\Omega)} = \|a\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} > 0. \quad (6.2)$$

Рассмотрим теперь ограниченный оператор $\mathbf{A} := \mathbb{A}(\mathbf{0})$ в $L_2(\Omega)$, определенный согласно (1.6), (1.7):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}u(\mathbf{x}) &= p(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) - \mathbf{B}u(\mathbf{x}), \\ \mathbf{B}u(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} \tilde{a}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad u \in L_2(\Omega), \end{aligned}$$

где

$$p(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \tilde{a}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

см. (1.9). (Прежде оператор \mathbf{B} обозначался $\mathbb{B}(\mathbf{0})$.) Напомним оценки

$$\mu_- \|\tilde{a}\|_{L_1(\Omega)} \leq p(\mathbf{x}) \leq \mu_+ \|\tilde{a}\|_{L_1(\Omega)}, \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

Оператор \mathbf{B} компактен (см. §1, п. 1.2). Нас интересуют некоторые свойства оператора $\mathbf{G} = \mathbf{B}^*[p^{-1}]$. Легко видеть, что $\mathbf{G}^*\mathbf{1}_{\Omega} = \mathbf{1}_{\Omega}$, а потому $1 \in \sigma(\mathbf{G}) \cap \sigma(\mathbf{G}^*)$. В силу компактности операторов \mathbf{G} и \mathbf{G}^* найдется $r > 0$, для которого

$$\sigma(\mathbf{G}) \cap B_{2r}(1) = \{1\}, \quad \sigma(\mathbf{G}^*) \cap B_{2r}(1) = \{1\}.$$

Введем проекторы Рисса операторов \mathbf{G} и \mathbf{G}^* , отвечающие точке 1:

$$\mathcal{P} = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - 1| = r} (\mathbf{G} - \zeta I)^{-1} d\zeta, \quad \mathcal{P}^* = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - 1| = r} (\mathbf{G}^* - \zeta I)^{-1} d\zeta.$$

Теорема 6.1. *Проекторы Рисса \mathcal{P} и \mathcal{P}^* имеют ранг 1; справедливы равенства*

$$\text{Ker}(\mathbf{G}^* - I) = \mathcal{L}\{\mathbf{1}_{\Omega}\}, \quad \text{Ker}(\mathbf{G} - I) = \mathcal{L}\{\psi_0\}.$$

Здесь функция $\psi_0 \in L_2(\Omega)$ удовлетворяет соотношениям

$$0 < \psi_- \leq \psi_0(\mathbf{z}) \leq \psi_+ < +\infty, \quad \mathbf{z} \in \Omega; \quad \int_{\Omega} \psi_0(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = 1.$$

6.2. Доказательству теоремы 6.1 предположим несколько вспомогательных утверждений. Ниже через (\cdot, \cdot) обозначено скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Лемма 6.2. *Всякая вещественная нетривиальная функция $\psi \in \text{Ker}(\mathbf{G} - I)$ знакоопределена и отделена от нуля.*

Доказательство. Пусть $\psi \in \text{Ker}(\mathbf{G} - I)$ — вещественная нетривиальная функция. При всяком $N \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\mathbf{G}^N \psi = \psi. \quad (6.3)$$

Оператор \mathbf{G} — интегральный оператор с ядром

$$g_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \tilde{a}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \frac{\mu(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{p(\mathbf{y})}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega.$$

Оператор \mathbf{G}^N — интегральный оператор с ядром $g_N(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, удовлетворяющим оценке

$$\left(\frac{\mu_-}{\mu_+ \|\tilde{a}\|_{L_1(\Omega)}} \right)^N F_N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \leq g_N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \left(\frac{\mu_+}{\mu_- \|\tilde{a}\|_{L_1(\Omega)}} \right)^N F_N(\mathbf{y} - \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega.$$

Здесь $F_1(\mathbf{z}) := \tilde{a}(\mathbf{z})$, $F_N(\mathbf{z}) := \int_{\Omega} F_1(\mathbf{t}) F_{N-1}(\mathbf{z} - \mathbf{t}) d\mathbf{t}$. Нетрудно видеть, что $F_N(\mathbf{z})$ — неотрицательная \mathbb{Z}^d -периодическая функция, $\|F_N\|_{L_1(\Omega)} = \|\tilde{a}\|_{L_1(\Omega)}^N > 0$. В работе [12] (лемма 4.2) было показано, что найдутся $N \in \mathbb{N}$ и $\gamma > 0$ такие, что $F_N(\mathbf{z}) \geq \gamma$, $\mathbf{z} \in \Omega$. Таким образом, при некотором $N \in \mathbb{N}$ ядро $g_N(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ положительно и отделено от нуля.

Фиксируем такого представителя функции ψ , для которого равенство (6.3) выполнено поточечно. Разобьем функцию ψ на положительную и отрицательную части $\psi = \psi^+ - \psi^-$. Предположим, что функции ψ^- и ψ^+ нетривиальны (отличны от нуля на множестве положительной меры). Равенство (6.3) принимает вид

$$\mathbf{G}^N \psi^+ - \psi^+ = \mathbf{G}^N \psi^- - \psi^-.$$

В точках $\mathbf{x} \in \Omega$, для которых $\psi^+(\mathbf{x}) > 0$ (а значит $\psi^-(\mathbf{x}) = 0$), справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^N \psi^+(\mathbf{x}) - \psi^+(\mathbf{x}) &= \mathbf{G}^N \psi^-(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} g_N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi^-(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \geq \\ &\geq \left(\frac{\mu_-}{\mu_+ \|\tilde{a}\|_{L_1(\Omega)}} \right)^N \gamma \int_{\Omega} \psi^-(\mathbf{y}) d\mathbf{y} =: c_1 > 0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

В точках $\mathbf{x} \in \Omega$, для которых $\psi^+(\mathbf{x}) = 0$, имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^N \psi^+(\mathbf{x}) - \psi^+(\mathbf{x}) &= \mathbf{G}^N \psi^+(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} g_N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi^+(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \geq \\ &\geq \left(\frac{\mu_-}{\mu_+ \|\tilde{a}\|_{L_1(\Omega)}} \right)^N \gamma \int_{\Omega} \psi^+(\mathbf{y}) d\mathbf{y} =: c_2 > 0. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Из (6.4) и (6.5) вытекает, что

$$\begin{aligned} 0 &= (\psi^+, (\mathbf{G}^*)^N \mathbf{1}_{\Omega} - \mathbf{1}_{\Omega}) = (\mathbf{G}^N \psi^+ - \psi^+, \mathbf{1}_{\Omega}) = \\ &= \int_{\Omega} (\mathbf{G}^N \psi^+(\mathbf{y}) - \psi^+(\mathbf{y})) d\mathbf{y} \geq \min\{c_1, c_2\} > 0. \end{aligned}$$

Поскольку последняя оценка невозможна, наше предположение неверно, т.е. либо $\psi^+ = 0$ либо $\psi^- = 0$. Тем самым, функция $\psi(\mathbf{x})$ знакоопределена. Следовательно, верны соотношения

$$|\psi(\mathbf{x})| = \mathbf{G}^N |\psi|(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} g_N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) |\psi(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \geq \left(\frac{\mu_-}{\mu_+ \|\tilde{a}\|_{L_1(\Omega)}} \right)^N \gamma \int_{\Omega} |\psi(\mathbf{y})| d\mathbf{y} =: c_3 > 0.$$

Таким образом, функция $\psi(\mathbf{x})$ отделена от нуля. \square

Лемма 6.3. Ядро $\text{Ker}(\mathbf{G} - I)$ содержит функцию $\psi_0 \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющую условию

$$\psi_0(\mathbf{z}) \geq \psi_- > 0, \quad \mathbf{z} \in \Omega. \quad (6.6)$$

Доказательство. Поскольку ядро $g_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ интегрального оператора \mathbf{G} вещественно, нетривиальную собственную функцию $\psi_0 \in \text{Ker}(\mathbf{G} - I)$ можно выбрать вещественной. По лемме 6.2 функция ψ_0 знакоопределена и отделена от нуля. Следовательно, можно выбрать функцию ψ_0 , удовлетворяющую условию (6.6). \square

Далее фиксируем какую-либо функцию $\psi_0 \in \text{Ker}(\mathbf{G} - I)$, удовлетворяющую условию (6.6).

Лемма 6.4. Всякая вещественная функция ψ_1 , удовлетворяющая условию

$$(\mathbf{G} - I)\psi_1 = \psi_0,$$

знакоопределена.

Доказательство. Очевидно равенство

$$(\mathbf{G}^N - I)\psi_1 = N\psi_0. \quad (6.7)$$

Выберем такого представителя функции ψ_1 , чтобы равенство (6.7) выполнялось поточечно. Разобьем ψ_1 на положительную и отрицательную части $\psi_1 = \psi_1^+ - \psi_1^-$. Предположим, что функции ψ_1^- и ψ_1^+ нетривиальны. Равенство (6.7) принимает вид

$$\mathbf{G}^N \psi_1^+ - \psi_1^+ = \mathbf{G}^N \psi_1^- - \psi_1^- + N\psi_0.$$

В точках $\mathbf{x} \in \Omega$, для которых $\psi_1^+(\mathbf{x}) > 0$ (а значит $\psi_1^-(\mathbf{x}) = 0$), справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^N \psi_1^+(\mathbf{x}) - \psi_1^+(\mathbf{x}) &= \mathbf{G}^N \psi_1^-(\mathbf{x}) + N\psi_0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} g_N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi_1^-(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + N\psi_0(\mathbf{x}) \geq \\ &\geq \left(\frac{\mu_-}{\mu_+ \|\tilde{a}\|_{L_1(\Omega)}} \right)^N \gamma \int_{\Omega} \psi_1^-(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + N\psi_- =: s_1 > 0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

В точках $\mathbf{x} \in \Omega$, для которых $\psi_1^+(\mathbf{x}) = 0$, имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^N \psi_1^+(\mathbf{x}) - \psi_1^+(\mathbf{x}) &= \mathbf{G}^N \psi_1^+(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} g_N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi_1^+(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \geq \\ &\geq \left(\frac{\mu_-}{\mu_+ \|\tilde{a}\|_{L_1(\Omega)}} \right)^N \gamma \int_{\Omega} \psi_1^+(\mathbf{y}) d\mathbf{y} =: s_2 > 0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Из (6.8) и (6.9) вытекает, что

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\psi_1^+, (\mathbf{G}^*)^N \mathbf{1}_{\Omega} - \mathbf{1}_{\Omega} \right) = (\mathbf{G}^N \psi_1^+ - \psi_1^+, \mathbf{1}_{\Omega}) = \\ &= \int_{\Omega} (\mathbf{G}^N \psi_1^+(\mathbf{y}) - \psi_1^+(\mathbf{y})) d\mathbf{y} \geq \min\{s_1, s_2\} > 0. \end{aligned}$$

Поскольку последняя оценка невозможна, наше предположение неверно, т.е. либо $\psi_1^+ = 0$ либо $\psi_1^- = 0$. Следовательно, функция $\psi_1(\mathbf{x})$ знакоопределена. \square

Лемма 6.5. Всякая вещественная функция $\psi \in \text{Ker}(\mathbf{G} - I)$ пропорциональна ψ_0 .

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$u = \psi - \frac{(\psi, \psi_0)}{(\psi_0, \psi_0)} \psi_0.$$

Отметим, что функция $u \in \text{Ker}(\mathbf{G} - I)$ вещественна и ортогональна ψ_0 . Если функция u нетривиальна, то по лемме 6.2 она знакоопределена и отделена от нуля, а потому

$$|(u, \psi_0)| = \int_{\Omega} |u(\mathbf{y})| \psi_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \geq \psi_- \int_{\Omega} |u(\mathbf{y})| d\mathbf{y} > 0.$$

Последняя оценка невозможна. Следовательно, верно равенство $u = 0$, т.е. $\psi = \frac{(\psi, \psi_0)}{(\psi_0, \psi_0)} \psi_0$. \square

Лемма 6.6. *Справедливо соотношение*

$$\text{Ker}(\mathbf{G} - I)^2 = \text{Ker}(\mathbf{G} - I) = \mathcal{L}\{\psi_0\}.$$

Доказательство. Поскольку \mathbf{G} — интегральный оператор с вещественным ядром, для всякой функции $\psi \in \text{Ker}(\mathbf{G} - I)$ справедливы включения $\text{Re } \psi \in \text{Ker}(\mathbf{G} - I)$, $\text{Im } \psi \in \text{Ker}(\mathbf{G} - I)$. По лемме 6.5 $\text{Re } \psi = \lambda \psi_0$, $\text{Im } \psi = \nu \psi_0$; следовательно, $\psi = (\lambda + i\nu) \psi_0$, т.е. $\text{Ker}(\mathbf{G} - I) = \mathcal{L}\{\psi_0\}$.

Предположим, что найдется $\psi \in \text{Ker}(\mathbf{G} - I)^2 \setminus \text{Ker}(\mathbf{G} - I)$. В этом случае $(\mathbf{G} - I)\psi = \alpha \psi_0$, $\alpha \neq 0$. Следовательно, справедливо равенство $(\mathbf{G} - I)(\alpha^{-1}\psi) = \psi_0$, а потому

$$(\mathbf{G} - I) \text{Re}(\alpha^{-1}\psi) = \psi_0, \quad (\mathbf{G} - I) \text{Im}(\alpha^{-1}\psi) = 0.$$

Таким образом, найдется вещественная функция ψ_1 , удовлетворяющая условию

$$(\mathbf{G} - I)\psi_1 = \psi_0.$$

Рассмотрим функцию $u = \psi_1 - \frac{(\psi_1, \psi_0)}{(\psi_0, \psi_0)} \psi_0$. Отметим, что функция u вещественна, ортогональна функции ψ_0 и удовлетворяет условию $(\mathbf{G} - I)u = \psi_0$. Согласно лемме 6.4 функция u знакоопределена. Следовательно, справедливы соотношения

$$0 = |(u, \psi_0)| = \int_{\Omega} |u(\mathbf{y})| \psi_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \geq \psi_- \int_{\Omega} |u(\mathbf{y})| d\mathbf{y}.$$

Таким образом, $u = 0$, что невозможно в силу равенства $(\mathbf{G} - I)u = \psi_0$. Мы пришли к противоречию, а потому

$$\text{Ker}(\mathbf{G} - I)^2 = \text{Ker}(\mathbf{G} - I).$$

\square

Зафиксируем выбор функции $\psi_0 \in \text{Ker}(\mathbf{G} - I)$ требованиями

$$\psi_0(\mathbf{z}) \geq \psi_- > 0, \quad \mathbf{z} \in \Omega; \quad \int_{\Omega} \psi_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1.$$

Из леммы 6.6 вытекает следующее утверждение.

Предложение 6.7. *Проекторы Рисса \mathcal{P} и \mathcal{P}^* имеют ранг 1; справедливы равенства*

$$\text{Ker}(\mathbf{G} - I) = \mathcal{L}\{\psi_0\}, \quad \text{Ker}(\mathbf{G}^* - I) = \mathcal{L}\{\mathbf{1}_{\Omega}\};$$

$$\mathcal{P} = (\cdot, \mathbf{1}_{\Omega})\psi_0, \quad \mathcal{P}^* = (\cdot, \psi_0)\mathbf{1}_{\Omega}.$$

Для завершения доказательства теоремы 6.1 остается проверить ограниченность функции ψ_0 . Этому посвящены следующие четыре пункта.

6.3. Аппроксимация функции \tilde{a} ограниченными. При каждом $N \in \mathbb{N}$ положим

$$\tilde{a}_N(\mathbf{z}) := \begin{cases} \tilde{a}(\mathbf{z}), & \text{если } \tilde{a}(\mathbf{z}) \leq N, \\ N, & \text{если } \tilde{a}(\mathbf{z}) > N. \end{cases} \quad (6.10)$$

Очевидно, $\tilde{a}_N(\mathbf{z})$ — \mathbb{Z}^d -периодическая функция, причем

$$0 \leq \tilde{a}_N(\mathbf{z}) \leq \tilde{a}(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d, \quad N \in \mathbb{N},$$

и

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{a}_N(\mathbf{z}) = \tilde{a}(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d.$$

Тогда в силу теоремы Лебега

$$\|\tilde{a}_N - \tilde{a}\|_{L_1(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \quad (6.11)$$

Для каждой функции \tilde{a}_N рассмотрим функцию $a_N(\mathbf{z}) = \tilde{a}_N(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{1}_\Omega(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d$. Нетрудно видеть, что функции a_N удовлетворяют условиям

$$a_N \in L_1(\mathbb{R}^d), \quad a_N(\mathbf{z}) \geq 0, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d, \quad \|a_N\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} = \|\tilde{a}_N\|_{L_1(\Omega)},$$

$$\tilde{a}_N(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} a_N(\mathbf{z} + \mathbf{n}).$$

Согласно (6.2), $\tilde{a}(\mathbf{z}) > 0$ на множестве положительной меры на Ω . Из (6.10) следует, что $\tilde{a}_N(\mathbf{z}) > 0$ на том же множестве (при всех $N \in \mathbb{N}$). Кроме того,

$$\tilde{a}_N(\mathbf{z}) \leq \tilde{a}_{N+1}(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Следовательно,

$$0 < \|\tilde{a}_1\|_{L_1(\Omega)} \leq \|\tilde{a}_N\|_{L_1(\Omega)} \leq \|\tilde{a}\|_{L_1(\Omega)}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, a_N удовлетворяет условию (1.1).

При каждом $N \in \mathbb{N}$ определим ограниченный оператор \mathbf{A}_N в $L_2(\Omega)$ по правилу

$$\mathbf{A}_N u(\mathbf{x}) := p_N(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) - \mathbf{B}_N u(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{B}_N u(\mathbf{x}) := \int_{\Omega} \tilde{a}_N(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad u \in L_2(\Omega),$$

где

$$p_N(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \tilde{a}_N(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Очевидно,

$$0 < \mu_- \|\tilde{a}_1\|_{L_1(\Omega)} \leq \mu_- \|\tilde{a}_N\|_{L_1(\Omega)} \leq p_N(\mathbf{x}) \leq \mu_+ \|\tilde{a}_N\|_{L_1(\Omega)}, \\ \|p_N - p\|_{L_\infty} \leq \mu_+ \|\tilde{a}_N - \tilde{a}\|_{L_1(\Omega)}.$$

В силу леммы Шура

$$\|\mathbf{B}_N - \mathbf{B}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mu_+ \|\tilde{a}_N - \tilde{a}\|_{L_1(\Omega)}. \quad (6.12)$$

Следовательно,

$$\|\mathbf{A}_N - \mathbf{A}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq 2\mu_+ \|\tilde{a}_N - \tilde{a}\|_{L_1(\Omega)}.$$

С учетом (6.11) отсюда следует, что $\|\mathbf{A}_N - \mathbf{A}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.

Обозначим через \mathbf{G}_N оператор $\mathbf{B}_N^*[p_N^{-1}]$. В силу (6.11), (6.12) и неравенства

$$\|p_N^{-1} - p^{-1}\|_{L_\infty} \leq (\mu_- \|\tilde{a}_1\|_{L_1(\Omega)})^{-2} \mu_+ \|\tilde{a}_N - \tilde{a}\|_{L_1(\Omega)}$$

справедливо соотношение

$$\|\mathbf{G}_N - \mathbf{G}\| \rightarrow 0, \quad N \rightarrow +\infty. \quad (6.13)$$

6.4. Приближение проектора Рисса \mathcal{P} и функции ψ_0 . Поскольку $\mathbf{G}_N^* \mathbf{1}_\Omega = \mathbf{1}_\Omega$, имеем $1 \in \sigma(\mathbf{G}_N) \cap \sigma(\mathbf{G}_N^*)$. В силу компактности операторов \mathbf{G}_N и \mathbf{G}_N^* найдется $r_N > 0$, для которого

$$\sigma(\mathbf{G}_N) \cap B_{2r_N}(1) = \{1\}, \quad \sigma(\mathbf{G}_N^*) \cap B_{2r_N}(1) = \{1\}.$$

Введем проекторы Рисса операторов \mathbf{G}_N и \mathbf{G}_N^* , отвечающие точке 1:

$$\mathcal{P}_N = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-1|=r_N} (\mathbf{G}_N - \zeta I)^{-1} d\zeta, \quad \mathcal{P}_N^* = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-1|=r_N} (\mathbf{G}_N^* - \zeta I)^{-1} d\zeta.$$

Согласно предложению 6.7 существуют функции $\psi_N \in \text{Ker}(\mathbf{G}_N - I)$, удовлетворяющие условиям

$$\psi_N(\mathbf{z}) \geq \gamma_N > 0, \quad \mathbf{z} \in \Omega, \quad (\psi_N, \mathbf{1}_\Omega) = 1, \quad \text{Ker}(\mathbf{G}_N - I) = \mathcal{L}\{\psi_N\}, \quad \mathcal{P}_N = (\cdot, \mathbf{1}_\Omega) \psi_N.$$

Лемма 6.8. *Имеют место сходимости*

$$\|\mathcal{P}_N - \mathcal{P}\| \rightarrow 0, \quad \|\psi_N - \psi_0\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow +\infty.$$

Доказательство. Точка 1 — простое изолированное собственное значение оператора \mathbf{G} ; обозначим через d_0 расстояние от точки 1 до остального спектра оператора \mathbf{G} . Согласно предложению 5.2, кольцо $\{\zeta \in \mathbb{C} : d_0/3 \leq |\zeta - 1| \leq 2d_0/3\}$ не пересекается со спектрами операторов \mathbf{G}_N , $N \geq N_0$. При этом спектр оператора \mathbf{G}_N в круге $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - 1| < d_0/3\}$ состоит из одного простого собственного значения, а мы знаем, что это точка 1. Таким образом, справедливо равенство

$$\mathcal{P}_N - \mathcal{P} = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-1|=d_0/2} ((\mathbf{G}_N - \zeta I)^{-1} - (\mathbf{G} - \zeta I)^{-1}) d\zeta, \quad N \geq N_0. \quad (6.14)$$

Из (5.2), (6.13) и (6.14) вытекают свойства

$$\|\mathcal{P}_N - \mathcal{P}\| \rightarrow 0, \quad \psi_N = \mathcal{P}_N \psi_0 \rightarrow \mathcal{P} \psi_0 = \psi_0 \quad \text{в } L_2(\Omega), \quad N \rightarrow +\infty.$$

□

6.5. Равномерная оценка нормы функции ψ_N в L_∞ . В силу равенства

$$\psi_N(\mathbf{x}) = \mathbf{G}_N \psi_N(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \tilde{a}_N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \mu(\mathbf{y}, \mathbf{x}) p_N^{-1}(\mathbf{y}) \psi_N(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (6.15)$$

из соотношений $\tilde{a}_N \leq N$, $\mu \leq \mu_+$, $p_N^{-1} \leq (\mu_- \|\tilde{a}_1\|_{L_1(\Omega)})^{-1}$, $\psi_N \geq 0$ и $(\psi_N, \mathbf{1}_\Omega) = 1$ вытекает ограниченность функции ψ_N и оценка

$$\|\psi_N\|_{L_\infty} \leq N \mu_+ (\mu_- \|\tilde{a}_1\|_{L_1(\Omega)})^{-1}.$$

Наша цель в этом пункте — получить оценку нормы функции ψ_N в классе L_∞ , не зависящую от N .

Обозначим для краткости

$$C_0 := \mu_+ (\mu_- \|\tilde{a}_1\|_{L_1(\Omega)})^{-1}, \quad \Omega_{N,1} := \{\mathbf{x} \in \Omega : \psi_N(\mathbf{x}) > \|\psi_N\|_{L_\infty}^{1/2}\}, \quad \Omega_{N,2} := \Omega \setminus \Omega_{N,1}.$$

Лемма 6.9. *Справедлива оценка*

$$|\psi_N(\mathbf{x})| \leq C(\tilde{a}, C_0), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad N \in \mathbb{N}. \quad (6.16)$$

Доказательство. Из равенства (6.15) следуют соотношения

$$\begin{aligned} \psi_N(\mathbf{x}) &\leq C_0 \|\psi_N\|_{L_\infty} \int_{\Omega_{N,1}} \tilde{a}_N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{y} + C_0 \|\psi_N\|_{L_\infty}^{1/2} \int_{\Omega_{N,2}} \tilde{a}_N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{y} \leq \\ &\leq C_0 \|\psi_N\|_{L_\infty} \int_{\Omega_{N,1}} \tilde{a}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{y} + C_0 \|\psi_N\|_{L_\infty}^{1/2} \int_{\Omega} \tilde{a}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Оценим меру множества $\Omega_{N,1}$:

$$\text{mes } \Omega_{N,1} \leq \int_{\Omega_{N,1}} \|\psi_N\|_{L_\infty}^{-1/2} \psi_N(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \leq \|\psi_N\|_{L_\infty}^{-1/2} \int_{\Omega} \psi_N(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \|\psi_N\|_{L_\infty}^{-1/2}. \quad (6.18)$$

Введем обозначение

$$F_{\tilde{a}}(t) := \sup \left\{ \int_{\mathcal{O}} \tilde{a}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} : \mathcal{O} \subset [-2, 2]^d, \text{mes } \mathcal{O} \leq t \right\}, \quad t > 0. \quad (6.19)$$

Очевидно, функция $F_{\tilde{a}}(t)$ — монотонно неубывающая и $F_{\tilde{a}}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +0$. Из (6.18), (6.19) вытекает оценка

$$\int_{\Omega_{N,1}} \tilde{a}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{y} \leq F_{\tilde{a}} \left(\|\psi_N\|_{L_\infty}^{-1/2} \right).$$

Вместе с (6.17) это влечет

$$\|\psi_N\|_{L_\infty} \leq C_0 \|\psi_N\|_{L_\infty} F_{\tilde{a}} \left(\|\psi_N\|_{L_\infty}^{-1/2} \right) + C_0 \|\psi_N\|_{L_\infty}^{1/2} \|\tilde{a}\|_{L_1(\Omega)}. \quad (6.20)$$

Фиксируем число $t_0 = t_0(\tilde{a}, C_0) > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$C_0 \cdot F_{\tilde{a}}(t_0) \leq \frac{1}{2}.$$

В случае, когда $\|\psi_N\|_{L_\infty}^{-1/2} > t_0$, очевидно, что

$$\|\psi_N\|_{L_\infty} \leq t_0^{-2}(\tilde{a}, C_0).$$

В случае, когда $\|\psi_N\|_{L_\infty}^{-1/2} \leq t_0$, из (6.20) следует неравенство

$$\|\psi_N\|_{L_\infty} \leq \frac{1}{2}\|\psi_N\|_{L_\infty} + C_0\|\psi_N\|_{L_\infty}^{1/2}\|\tilde{a}\|_{L_1(\Omega)},$$

откуда получаем

$$\|\psi_N\|_{L_\infty} \leq 4C_0^2\|\tilde{a}\|_{L_1(\Omega)}^2.$$

В итоге приходим к оценке

$$\|\psi_N\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \max\{t_0^{-2}(\tilde{a}, C_0), 4C_0^2\|\tilde{a}\|_{L_1(\Omega)}^2\} =: C(\tilde{a}, C_0).$$

□

6.6. Ограниченность функции ψ_0 . Согласно лемме 6.8

$$\|\psi_N - \psi_0\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Тогда в силу теоремы Рисса существует подпоследовательность $N_k \rightarrow \infty$, такая что

$$\psi_{N_k}(\mathbf{x}) \rightarrow \psi_0(\mathbf{x}), \quad k \rightarrow \infty, \quad \text{при почти всех } \mathbf{x} \in \Omega.$$

Отсюда с учетом (6.16) следует неравенство $|\psi_0(\mathbf{x})| \leq C(\tilde{a}, C_0)$, $\mathbf{x} \in \Omega$.

Это завершает доказательство теоремы 6.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.
- [2] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publishing Co., Amsterdam–New York, 1978.
- [3] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), вып. 5, 1–108.
- [4] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учётом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), вып. 6, 1–104.
- [5] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учётом корректора. Приближение решений в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$* , Алгебра и анализ **18** (2006), вып. 6, 1–130.
- [6] Braides A., Piatnitski A., *Homogenization of quadratic convolution energies in periodically perforated domains*, Adv. Calc. Var. (2019), <https://doi.org/10.1515/acv-2019-0083>.
- [7] Жиков В. В., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Докл. РАН **403** (2005), вып. 3, 305–308.
- [8] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1993.
- [9] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys. **12** (2005), no. 4, 515–524.
- [10] Жиков В. В., Пастухова С. Е., *Операторные оценки в теории усреднения*, Успехи матем. наук **71** (2016), вып. 3, 27–122.
- [11] Piatnitski A., Zhizhina E., *Periodic homogenization of nonlocal operators with a convolution-type kernel*, SIAM J. Math. Anal. **49** (2017), no. 1, 64–81.
- [12] Piatnitski A., Zhizhina E., *Homogenization of biased convolution type operators*, Asymptotic Anal. **115** (2019), no. 3-4, 241–262.
- [13] Piatnitski A., Sloushch V., Suslina T., Zhizhina E., *On operator estimates in homogenization of nonlocal operators of convolution type*, J. Diff. Equ. **352** (2023), 153–188.
- [14] Piatnitski A., Sloushch V., Suslina T., Zhizhina E., *On the homogenization of nonlocal convolution type operators*, Russ. J. Math. Phys. **31** (2024), 137–145. <https://doi.org/10.1134/S106192084010114>
- [15] Piatnitski A., Sloushch V., Suslina T., Zhizhina E., *Homogenization of nonlocal convolution type operators: Approximation for the resolvent with corrector*, arXiv:2311.16574.
- [16] Скриганов М. М., *Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов*, Тр. МИАН СССР **171** (1985), 3–122.

- [17] Суслина Т. А., *Теоретико-операторный подход к усреднению уравнений типа Шрёдингера с периодическими коэффициентами*, Успехи матем. наук **78** (2023), вып. 6.
- [18] Като Т., *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.
- [19] Gohberg I., Goldberg S., Kaashoek M. A., *Classes of Linear Operators*, Vol. I, Operator Theory: Advances and Applications (OT, Vol. 49), Springer, Basel, 1990.