ПОМИ ПРЕПРИНТ — 6/2024

ОПЕРАТОРНЫЕ ОЦЕНКИ ПРИ УСРЕДНЕНИИ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ЛЕВИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Е. А. Жижина[1,2], **А. Л. Пятницкий**[1,2,3], **В. А. Слоущ**[4], **Т. А. Суслина**[4]

[1]Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН,
пер. Большой Каретный, д. 19, строение 1,
Москва, 127051, Россия

[2] Арктический университет Норвегии, кампус Нарвик,
Лодве Лангес гате 2,
Нарвик 8517, Норвегия

[3] Российский университет дружбы народов,
ул. Миклухо-Маклая, д. 6,
Москва, 117198, Россия

[4]Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., д. 7/9,
Санкт-Петербург, 199034, Россия

e-mail: elena.jijina@gmail.com
e-mail: apiatnitski@gmail.com
e-mail: v.slouzh@spbu.ru
e-mail: t.suslina@spbu.ru

АННОТАЦИЯ

В $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассматривается самосопряженный оператор $\mathbb{A}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, вида

$$(\mathbb{A}_\varepsilon u)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \mu(\mathbf{x}/\varepsilon, \mathbf{y}/\varepsilon) \frac{(u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y}))}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+\alpha}} \, d\mathbf{y},$$

где $0 < \alpha < 2$. Предполагается, что $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — функция, $\mathbb{Z}^d$-периодическая по каждой переменной, причем $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mu(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ и $0 < \mu_- \leqslant \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant \mu_+ < \infty$. Строгое определение оператора $\mathbb{A}_\varepsilon$ дается через соответствующую замкнутую квадратичную форму, заданную на классе Соболева $H^{\alpha/2}(\mathbb{R}^d)$. Показано, что резольвента $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ сходится к резольвенте $(\mathbb{A}^0 + I)^{-1}$ при $\varepsilon \to 0$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Здесь $\mathbb{A}^0$ — эффективный оператор, заданный тем же выражением с коэффициентом μ^0, равным среднему значению функции $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Получена оценка нормы разности резольвент $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + I)^{-1}$ порядка $O(\varepsilon^\alpha)$ при $0 < \alpha < 1$, $O(\varepsilon(1 + |\ln \varepsilon|)^2)$ при $\alpha = 1$ и $O(\varepsilon^{2-\alpha})$ при $1 < \alpha < 2$.

Ключевые слова: операторы типа Леви, периодическое усреднение, операторные оценки погрешности, эффективный оператор.

Исследование выполнено во время визита Е. А. Жижиной и А. Л. Пятницкого в Санкт-Петербургский международный математический институт имени Леонарда Эйлера при поддержке Гранта Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение 075-15-2022-289 от 06.04.2022).

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
РАН

Введение

Работа относится к теории усреднения периодических операторов. Это обширная область теоретической и прикладной науки; мы укажем здесь лишь несколько основных монографий: [2, 3, 11].

Мы получаем операторные оценки в задаче усреднения периодического нелокального оператора типа Леви. Метод является модификацией теоретико-операторного подхода.

0.1. **Операторные оценки в теории усреднения. Теоретико-операторный подход.** В работах Бирмана и Суслиной [4, 5, 6] был предложен и развит теоретико-операторный подход к задачам усреднения периодических дифференциальных операторов в $\mathbb{R}^d$ (вариант спектрального метода). С помощью этого подхода были найдены так называемые *операторные оценки погрешности* для широкого класса задач гомогенизации. Поясним характер результатов на примере усреднения эллиптического оператора $\mathcal{A}_\varepsilon = -\operatorname{div} g(\mathbf{x}/\varepsilon)\nabla$, $\varepsilon > 0$, в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Предполагается, что матрица $g(\mathbf{x})$ ограничена, положительно определена и $\mathbb{Z}^d$-периодична. В [4] было показано, что при $\varepsilon \to 0$ резольвента $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ сходится по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$ к резольвенте *эффективного оператора* $\mathcal{A}^0$ и выполнена оценка

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.1}$$

Эффективный оператор имеет вид $\mathcal{A}^0 = -\operatorname{div} g^0\nabla$, где g^0 — постоянная положительная *эффективная матрица*. Неравенства такого типа получили название операторных оценок погрешности в теории усреднения. В [5] получена более точная аппроксимация резольвенты $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$ при учете корректора с оценкой погрешности порядка $O(\varepsilon^2)$, а в [6] найдена аппроксимация резольвенты $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d)$ в пространство Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$ (также при учете корректора) с оценкой погрешности порядка $O(\varepsilon)$.

Теоретико-операторный подход основан на масштабном преобразовании, теории Флоке–Блоха и аналитической теории возмущений. Поясним метод на примере вывода оценки (0.1). За счет масштабного преобразования оценка (0.1) равносильна неравенству

$$\|(\mathcal{A} + \varepsilon^2 I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + \varepsilon^2 I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon^{-1}, \tag{0.2}$$

где $\mathcal{A} = -\operatorname{div} g(\mathbf{x})\nabla = \mathbf{D}^* g(\mathbf{x})\mathbf{D}$, $\mathbf{D} = -i\nabla$. Далее, с помощью унитарного преобразования Гельфанда оператор $\mathcal{A}$ раскладывается в прямой интеграл по операторам $\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})$, действующим в $L_2(\Omega)$ и зависящим от параметра $\boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}$ (квазиимпульса). Здесь $\Omega = [0,1)^d$ — ячейка решетки $\mathbb{Z}^d$, а $\widetilde{\Omega} = [-\pi,\pi)^d$ — ячейка двойственной решетки. Оператор $\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})$ задается выражением $\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}) = (\mathbf{D}+\boldsymbol{\xi})^* g(\mathbf{x})(\mathbf{D}+\boldsymbol{\xi})$ при периодических граничных условиях. Оценка (0.2) эквивалентна аналогичной оценке для операторов, зависящих от квазиимпульса:

$$\|(\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 I)^{-1} - (\mathcal{A}^0(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 I)^{-1}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C\varepsilon^{-1}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}.$$

Основная часть исследования состоит в изучении операторного семейства $\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})$, которое представляет собой аналитическое семейство с компактной резольвентой. Поэтому можно применить методы аналитической теории возмущений. Выясняется, что резольвенту $(\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 I)^{-1}$ можно приблизить в терминах спектральных характеристик оператора на краю спектра. Поэтому эффект усреднения представляет собой *спектральный пороговый эффект* на краю спектра эллиптического оператора.

Другой подход к получению операторных оценок погрешности в задачах гомогенизации (так называемый “метод сдвига”) был предложен в работах Жикова и Пастуховой (см. [10, 12], а также обзор [13] и цитированную там литературу).

В последние годы операторные оценки погрешности в различных задачах гомогенизации для дифференциальных операторов привлекают внимание все большего числа исследователей; получено много содержательных результатов. Достаточно подробный обзор современного состояния этой области можно найти в [21, пункт 0.2] и в [25, введение].

0.2. **Операторные оценки при усреднении нелокальных операторов сверточного типа.** Впервые операторные оценки при усреднении *нелокальных периодических операторов* были получены в недавних работах авторов [21, 22], где изучался нелокальный оператор A_ε в $L_2(\mathbb{R}^d)$, заданный соотношением

$$(A_\varepsilon u)(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon^{d+2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} a((\mathbf{x}-\mathbf{y})/\varepsilon)\mu(\mathbf{x}/\varepsilon, \mathbf{y}/\varepsilon)\big(u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})\big)\, d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d). \tag{0.3}$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Предполагалось, что $a(\mathbf{x})$ — четная неотрицательная функция класса $L_1(\mathbb{R}^d)$, $\|a\|_{L_1} > 0$; $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — ограниченная и положительно определенная функция, $\mathbb{Z}^d$-периодическая по каждой переменной, причем $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mu(\mathbf{y}, \mathbf{x})$. При этих условиях оператор A_ε ограничен, самосопряжен и неотрицателен. Кроме того, предполагались конечными несколько первых моментов $M_k(a) = \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^k a(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$.

Оператор вида (0.3) возникает в моделях математической биологии и популяционной динамики и активно изучается в последнее время; см. [16, 19, 20]. Усреднению таких операторов была посвящена работа [19], в которой в предположении, что $M_2(a) < \infty$, было показано, что при $\varepsilon \to 0$ резольвента $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ сильно сходится к резольвенте $(A^0 + I)^{-1}$ эффективного оператора. Эффективный оператор представляет собой эллиптический дифференциальный оператор второго порядка с постоянными коэффициентами $A^0 = -\operatorname{div} g^0 \nabla$. Тем самым, в данной задаче наблюдается интересный эффект: при усреднении ограниченного нелокального оператора A_ε возникает неограниченный локальный оператор A^0.

Для операторов с несимметричным ядром аналогичные задачи изучались в [20], где для соответствующих параболических уравнений результат об усреднении справедлив в движущихся координатах. Задача в периодически перфорированной области исследовалась вариационными методами в [7].

В работе [21] при условии $M_3(a) < \infty$ была установлена сходимость резольвенты $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ к резольвенте $(A^0 + I)^{-1}$ эффективного оператора по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$ и была получена точная по порядку оценка погрешности:

$$\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(a, \mu)\varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

В [22] при условии $M_4(a) < \infty$ получена более точная аппроксимация резольвенты $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ с учетом корректора и оценкой погрешности $O(\varepsilon^2)$.

В [21, 22] был модифицирован теоретико-операторный подход, развитый в работах Бирмана и Суслиной, о котором шла речь в пункте 0.1. Первые два шага — масштабное преобразование и разложение оператора A в прямой интеграл по операторам $A(\boldsymbol{\xi})$ с помощью унитарного преобразования Гельфанда — остались прежними. Здесь $A = A_{\varepsilon_0}$, $\varepsilon_0 = 1$. Дело сводится к изучению асимптотики резольвенты $(A(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 I)^{-1}$ при малом $\varepsilon > 0$. Однако, к семейству операторов $A(\boldsymbol{\xi})$, действующих в пространстве $L_2(\Omega)$ и зависящих от параметра $\boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}$, методы аналитической теории возмущений уже неприменимы. В отличие от случая дифференциальных операторов это операторное семейство не является аналитическим. Взамен была использована конечная гладкость семейства $A(\boldsymbol{\xi})$, которая обеспечена предположением о конечности нескольких первых моментов коэффициента $a(\mathbf{x})$.

0.3. **Постановка задачи. Основной результат.** В настоящей работе изучается (неограниченный) *оператор типа Леви* $\mathbb{A}_\varepsilon = \mathbb{A}_\varepsilon(\alpha, \mu)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$, формально заданный соотношением

$$(\mathbb{A}_\varepsilon u)(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mu(\mathbf{x}/\varepsilon, \mathbf{y}/\varepsilon) \frac{(u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y}))}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+\alpha}}\, d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Здесь $0 < \alpha < 2$, $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — ограниченная и положительно определенная функция, $\mathbb{Z}^d$-периодическая по каждой переменной, причем $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mu(\mathbf{y}, \mathbf{x})$. Строгое определение: $\mathbb{A}_\varepsilon$ есть самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d)$, порожденный замкнутой квадратичной формой

$$a_\varepsilon[u,u] := \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x}\,d\mathbf{y}\,\mu(\mathbf{x}/\varepsilon,\mathbf{y}/\varepsilon)\frac{|u(\mathbf{x})-u(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{d+\alpha}}, \quad u\in H^{\alpha/2}(\mathbb{R}^d).$$

Заметим, что квадратичная форма $a_\varepsilon[u,u]$ с областью определения $H^{\alpha/2}(\mathbb{R}^d)$ является регулярной формой Дирихле. Эта форма Дирихле порождает скачкообразный марковский процесс (Hunt process), генератором которого служит оператор $-\mathbb{A}_\varepsilon$. Подробное описание свойств такого процесса может быть найдено в статье [1]. Поскольку в настоящей работе вероятностная интерпретация решений не используется, мы здесь эти детали не приводим. Ядро оператора $\mathbb{A}_\varepsilon$ имеет степенное убывание на бесконечности, и у него отсутствует конечный второй момент. Характерное свойство соответствующих процессов — это дальнодействие, т.е. возможность длинных прыжков (Levy flights), что существенно отличает траектории таких процессов от непрерывных траекторий диффузионных процессов. Поскольку квадратичная форма $a_\varepsilon[u,u]$ сравнима с квадратичной формой дробной степени лапласиана $(-\Delta)^{\alpha/2}$, мы, позволяя себе некоторую вольность в терминологии, будем называть процесс, отвечающий форме $a_\varepsilon[u,u]$, процессом типа Леви, а $\mathbb{A}_\varepsilon$ — оператором типа Леви. В настоящее время процессы Леви широко используются при моделировании поведения сложных систем, в которых дальнодействие играет важную, а порой и ключевую, роль. В частности, на основе этих процессов строятся многие модели биологии и экологии, физики и астрофизики, финансовой математики и механики пористых сред, см., например, [8, 9, 14, 18, 26, 27]. При необходимости изучения таких моделей в средах с переменными характеристиками мы приходим к процессам с генератором вида $-\mathbb{A}_\varepsilon$.

Усреднение оператора $\mathbb{A}_\varepsilon$ изучалось в работе [15]: было показано, что при $\varepsilon\to 0$ резольвента $(\mathbb{A}_\varepsilon+I)^{-1}$ сильно сходится к резольвенте $(\mathbb{A}^0+I)^{-1}$ эффективного оператора. Эффективный оператор $\mathbb{A}^0$ имеет тот же вид с постоянным коэффициентом

$$\mu^0 = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega}\mu(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{y}.$$

Этот оператор лишь множителем отличается от дробной степени оператора Лапласа: $\mathbb{A}^0 = \mu^0 c_0(d,\alpha)(-\Delta)^{\alpha/2}$, $\operatorname{Dom}\mathbb{A}^0 = H^\alpha(\mathbb{R}^d)$.

Наш *основной результат* (теорема 5.1): показано, что резольвента $(\mathbb{A}_\varepsilon+I)^{-1}$ сходится к резольвенте эффективного оператора по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$ и установлена оценка погрешности

$$\|(\mathbb{A}_\varepsilon+I)^{-1}-(\mathbb{A}^0+I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}(\alpha,\mu)\begin{cases}\varepsilon^\alpha, & 0<\alpha<1,\\ \varepsilon(1+|\ln\varepsilon|)^2, & \alpha=1,\\ \varepsilon^{2-\alpha}, & 1<\alpha<2.\end{cases} \tag{0.4}$$

0.4. **Метод.** Для исследования задачи об аппроксимации резольвенты оператора $\mathbb{A}_\varepsilon$ мы модифицируем теоретико-операторный подход.

С помощью масштабного преобразования устанавливается равенство

$$\|(\mathbb{A}_\varepsilon+I)^{-1}-(\mathbb{A}^0+I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = \varepsilon^\alpha\|(\mathbb{A}+\varepsilon^\alpha I)^{-1}-(\mathbb{A}^0+\varepsilon^\alpha I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{0.5}$$

Здесь $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\varepsilon_0}$, $\varepsilon_0 = 1$. Затем с помощью преобразования Гельфанда оператор $\mathbb{A}$ раскладывается в прямой интеграл по операторам $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})$, действующим в $L_2(\Omega)$ и зависящим от параметра $\boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}$. Спектр операторов $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})$ дискретен; первое собственное значение есть $O(|\boldsymbol{\xi}|^\alpha)$, а остальные собственные значения отделены от нуля.

Дело сводится к изучению асимптотики резольвенты $(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^\alpha I)^{-1}$ при малом $\varepsilon>0$. Ясно, что вклад в асимптотику дает лишь нижний край спектра. В отличие от случая дифференциальных операторов семейство $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})$ не является аналитическим, и даже не является гладким (при $0<\alpha<1$). Этим рассматриваемая задача существенно отличается и от случая оператора вида (0.3), когда конечная гладкость была обеспечена предположением о конечности нескольких моментов функции $a(\mathbf{x})$. Тем не менее нам удалось вывести “пороговые аппроксимации”, которые нужны для получения аппроксимации резольвенты $(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^\alpha I)^{-1}$ при малом ε. Имеются ввиду аппроксимации для операторов $F(\boldsymbol{\xi})$ и $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})F(\boldsymbol{\xi})$ при $\boldsymbol{\xi} \to 0$. Здесь $F(\boldsymbol{\xi})$ — спектральный проектор оператора $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})$, отвечающий некоторой окрестности нуля. Традиционно асимптотика оператора $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})F(\boldsymbol{\xi})$ при $\boldsymbol{\xi} \to 0$ вычислялась через асимптотику первого собственного значения $\lambda_1(\boldsymbol{\xi})$ оператора $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})$. Мы применяем альтернативный способ — метод интегрирования резольвенты $(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) - \zeta I)^{-1}$ по подходящему контуру в комплексной плоскости.

Поскольку $\|(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^\alpha I)^{-1}F(\boldsymbol{\xi})^\perp\| \leqslant C$, то предельная точность, которую мы можем получить при аппроксимации резольвенты $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ описанным методом (рассматривая усреднение как пороговый эффект на краю спектра), это $O(\varepsilon^\alpha)$; см. (0.5). Таким образом, при $0 < \alpha < 1$ уже старший член аппроксимации дает предельную точность; см. (0.4). При $1 \leqslant \alpha < 2$ это уже не так, и точность аппроксимации можно улучшать за счет учета корректоров. Авторы планируют посвятить отдельную статью более точным приближениям резольвенты $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ в случае $1 \leqslant \alpha < 2$.

0.5. **План статьи.** Статья состоит из введения и пяти параграфов. В §1 вводится оператор $\mathbb{A}$, обсуждаются разложение этого оператора в прямой интеграл по семейству операторов $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})$ и оценки снизу для квадратичной формы оператора $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})$. В §2 получены оценки разности квадратичных форм $a(\boldsymbol{\xi})$ и $a(\mathbf{0})$. В §3 исследованы пороговые характеристики операторного семейства $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})$ вблизи нижнего края спектра. В §4 найдена аппроксимация резольвенты $(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^\alpha I)^{-1}$ при малом ε, откуда с помощью разложения оператора $\mathbb{A}$ в прямой интеграл получена аппроксимация резольвенты $(\mathbb{A} + \varepsilon^\alpha I)^{-1}$. В §5 из результатов §4 с помощью масштабного преобразования выводится основной результат работы — аппроксимация резольвенты $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$.

0.6. **Обозначения.** Норма в нормированном линейном пространстве X обозначается через $\|\cdot\|_X$ (либо без индекса, если это не ведет к недоразумениям); если пространства X, Y нормированы, то стандартная норма линейного ограниченного оператора $T : X \to Y$ обозначается через $\|T\|_{X\to Y}$ либо $\|T\|$ (без индекса). Линейная оболочка системы векторов $F \subset X$ обозначается через $\mathcal{L}\{F\}$.

Пусть $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Если $A : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$ — линейный оператор, то через $\operatorname{Dom} A$ обозначается его область определения, а через $\operatorname{Ker} A$ — его ядро. Для самосопряженного оператора $\mathbb{A}$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ через $\sigma(\mathbb{A})$ обозначается спектр оператора $\mathbb{A}$; если δ — борелевское множество на оси $\mathbb{R}$, то $E_{\mathbb{A}}(\delta)$ означает спектральный проектор оператора $\mathbb{A}$, отвечающий множеству δ.

Если $\mathcal{O}$ — область в $\mathbb{R}^d$, то через $L_p(\mathcal{O})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, обозначаются стандартные L_p-классы. Стандартное скалярное произведение в пространстве $L_2(\mathcal{O})$ обозначается через $(\cdot,\cdot)_{L_2(\mathcal{O})}$ либо без индекса. Стандартные классы Соболева порядка $s > 0$ в области $\mathcal{O}$ обозначаются через $H^s(\mathcal{O})$.

Далее, используем обозначения $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)^t \in \mathbb{R}^d$, $iD_j = \partial_j = \partial/\partial x_j$, $j = 1, \dots, d$; $\mathbf{D} = -i\nabla = (D_1, \dots, D_d)^t$. Через $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ обозначим класс Шварца в $\mathbb{R}^d$. Характеристическая функция множества $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ обозначается через $\mathbf{1}_{\mathcal{O}}$.

§ 1. Операторы типа Леви с периодическими коэффициентами: разложение в прямой интеграл и оценки

1.1. **Оператор $\mathbb{A}(\alpha, \mu)$.** Пусть $\mu \in L_\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, причем

$$0 < \mu_- \leqslant \mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leqslant \mu_+ < \infty, \quad \mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mu(\mathbf{y},\mathbf{x}), \quad \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d; \tag{1.1}$$

$$\mu(\mathbf{x}+\mathbf{m},\mathbf{y}+\mathbf{n}) = \mu(\mathbf{x},\mathbf{y}), \quad \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{m},\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d. \tag{1.2}$$

Пусть $0 < \alpha < 2$ и $\gamma := \frac{\alpha}{2}$. В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим квадратичную форму

$$a(\alpha,\mu)[u,u] := \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x}\,d\mathbf{y}\,\mu(\mathbf{x},\mathbf{y})\frac{|u(\mathbf{x})-u(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{d+\alpha}}, \quad u \in H^\gamma(\mathbb{R}^d). \tag{1.3}$$

В силу (1.1) и (1.3) форма $a(\alpha,\mu)$ плотно определена, неотрицательна и удовлетворяет оценкам

$$\mu_- a_0(\alpha)[u,u] \leqslant a(\alpha,\mu)[u,u] \leqslant \mu_+ a_0(\alpha)[u,u], \quad u \in H^\gamma(\mathbb{R}^d). \tag{1.4}$$

Здесь

$$a_0(\alpha)[u,u] := \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x}\,d\mathbf{y}\,\frac{|u(\mathbf{x})-u(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{d+\alpha}}, \quad u \in H^\gamma(\mathbb{R}^d). \tag{1.5}$$

Хорошо известно следующее утверждение (см., например, [23, § 6.31]); для полноты изложения мы приведем доказательство.

Лемма 1.1. *Пусть* $0 < \alpha < 2$. *Форма* (1.5) *допускает представление*

$$a_0(\alpha)[u,u] = c_0(d,\alpha)\int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{k}\,|\mathbf{k}|^\alpha |\widehat{u}(\mathbf{k})|^2, \quad u \in H^\gamma(\mathbb{R}^d), \tag{1.6}$$

где $\widehat{u}(\mathbf{k})$ *— Фурье-образ функции* $u(\mathbf{x})$, *а постоянная* $c_0(d,\alpha)$ *определяется интегралом*

$$c_0(d,\alpha) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{1-\cos z_1}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha}}\,d\mathbf{z} = \frac{\pi^{d/2}|\Gamma(-\alpha/2)|}{2^\alpha \Gamma((d+\alpha)/2)}. \tag{1.7}$$

Доказательство. Выполняя замену переменной $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$, а затем применяя равенство Парсеваля для преобразования Фурье, получаем

$$\begin{aligned} a_0(\alpha)[u,u] &= \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x}\,d\mathbf{z}\,\frac{|u(\mathbf{x})-u(\mathbf{x}+\mathbf{z})|^2}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha}} \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{k}\,d\mathbf{z}\,\frac{|\widehat{u}(\mathbf{k})|^2|1-e^{i\langle\mathbf{k},\mathbf{z}\rangle}|^2}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha}} = \int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{k}\,V_\alpha(\mathbf{k})|\widehat{u}(\mathbf{k})|^2, \end{aligned}$$

где

$$V_\alpha(\mathbf{k}) := \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{z}\,\frac{|1-e^{i\langle\mathbf{k},\mathbf{z}\rangle}|^2}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha}} = \int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{z}\,\frac{1-\cos(\langle\mathbf{k},\mathbf{z}\rangle)}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha}}. \tag{1.8}$$

Нетрудно убедиться, что

$$V_\alpha(\mathbf{k}) = c_0(d,\alpha)|\mathbf{k}|^\alpha, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d, \tag{1.9}$$

где $c_0(d,\alpha)$ определено в (1.7) (по поводу конкретного выражения этой константы в терминах гамма-функции см., например, [17]). Отметим, что $c_0(d,\alpha) = O((2-\alpha)^{-1})$ при $\alpha \to 2$. $\square$

Из леммы 1.1 следует замкнутость формы $a_0(\alpha)$, а с учетом оценок (1.4), также и замкнутость формы $a(\alpha,\mu)$.

По определению $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\alpha,\mu)$ *есть самосопряженный оператор в* $L_2(\mathbb{R}^d)$, *порожденный замкнутой формой* (1.3). Формально можно записать (см. [15])

$$(\mathbb{A}u)(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mu(\mathbf{x},\mathbf{y})\frac{(u(\mathbf{x})-u(\mathbf{y}))}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{d+\alpha}}\,d\mathbf{y}.$$

Обозначим через $\mathbb{A}_0 = \mathbb{A}_0(\alpha)$ самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d)$, порожденный замкнутой формой (1.5). В силу представления (1.6) оператор $\mathbb{A}_0(\alpha)$ отличается от дробной степени оператора Лапласа лишь множителем:

$$\mathbb{A}_0(\alpha) = c_0(d,\alpha)(-\Delta)^\gamma, \quad \operatorname{Dom}\mathbb{A}_0(\alpha) = H^\alpha(\mathbb{R}^d).$$

Из представления (1.6) следует, что точка $\lambda_0 = 0$ является краем спектра оператора $\mathbb{A}_0(\alpha)$. В силу оценок (1.4) точка $\lambda_0 = 0$ является также нижним краем спектра оператора $\mathbb{A}(\alpha, \mu)$.

1.2. **Семейство операторов** $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; \alpha, \mu)$**.** Обозначим через $\Omega := [0,1)^d$ ячейку решетки $\mathbb{Z}^d$ и через $\widetilde{\Omega} := [-\pi, \pi)^d$ — ячейку двойственной решетки $(2\pi\mathbb{Z})^d$. При $s > 0$ обозначим через $\widetilde{H}^s(\Omega)$ подпространство в $H^s(\Omega)$, состоящее из функций, $\mathbb{Z}^d$-периодическое продолжение которых принадлежит классу $H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

С решеткой $\mathbb{Z}^d$ связано унитарное дискретное преобразование Фурье $\mathcal{F} : L_2(\Omega) \to \ell_2(\mathbb{Z}^d)$, заданное соотношениями:

$$\mathcal{F}u(\mathbf{n}) = \widehat{u}_{\mathbf{n}} = \int\limits_{\Omega} u(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle} d\mathbf{x}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d, \quad u \in L_2(\Omega);$$

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} \widehat{u}_{\mathbf{n}} e^{2\pi i \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle}, \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

Соотношение $u \in \widetilde{H}^s(\Omega)$ равносильно сходимости ряда

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} (1 + |2\pi \mathbf{n}|^2)^s |\widehat{u}_{\mathbf{n}}|^2,$$

причем это выражение допускает двусторонние оценки через $\|u\|^2_{H^s(\Omega)}$.

В пространстве $L_2(\Omega)$ рассмотрим семейство квадратичных форм $a(\boldsymbol{\xi}) = a(\boldsymbol{\xi}; \alpha, \mu)$, зависящих от параметра $\boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}$:

$$a(\boldsymbol{\xi}; \alpha, \mu)[u, u] := \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int\limits_{\Omega} d\mathbf{x}\, \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{|e^{i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} \rangle} u(\mathbf{x}) - e^{i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{y} \rangle} u(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+\alpha}}, \quad u \in \widetilde{H}^{\gamma}(\Omega). \tag{1.10}$$

Здесь считается, что функция $u \in \widetilde{H}^{\gamma}(\Omega)$ продолжена до $\mathbb{Z}^d$-периодической функции в $\mathbb{R}^d$. В силу (1.1) форма $a(\boldsymbol{\xi}; \alpha, \mu)$ плотно определена, неотрицательна и удовлетворяет оценкам

$$\mu_- a_0(\boldsymbol{\xi}; \alpha)[u, u] \leqslant a(\boldsymbol{\xi}; \alpha, \mu)[u, u] \leqslant \mu_+ a_0(\boldsymbol{\xi}; \alpha)[u, u], \quad u \in \widetilde{H}^{\gamma}(\Omega). \tag{1.11}$$

Здесь

$$a_0(\boldsymbol{\xi}; \alpha)[u, u] := \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int\limits_{\Omega} d\mathbf{x}\, \frac{|e^{i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} \rangle} u(\mathbf{x}) - e^{i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{y} \rangle} u(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+\alpha}}, \quad u \in \widetilde{H}^{\gamma}(\Omega). \tag{1.12}$$

Лемма 1.2. *Пусть* $0 < \alpha < 2$. *Форма* (1.12) *допускает представление*

$$a_0(\boldsymbol{\xi}; \alpha)[u, u] = c_0(d, \alpha) \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} |2\pi \mathbf{n} + \boldsymbol{\xi}|^{\alpha} |\widehat{u}_{\mathbf{n}}|^2, \quad u \in \widetilde{H}^{\gamma}(\Omega). \tag{1.13}$$

Здесь $\widehat{u}_{\mathbf{n}}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$, *— коэффициенты Фурье функции* u, *а* $c_0(d, \alpha)$ *— постоянная* (1.7).

Доказательство. Выполняя замену переменной $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$, а затем применяя равенство Парсеваля для дискретного преобразования Фурье, получаем

$$\begin{aligned} a_0(\boldsymbol{\xi}; \alpha)[u, u] &= \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{z} \int\limits_{\Omega} d\mathbf{x}\, \frac{|u(\mathbf{x}) - e^{i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{z} \rangle} u(\mathbf{x} + \mathbf{z})|^2}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha}} \\ &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} |\widehat{u}_{\mathbf{n}}|^2 \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{z}\, \frac{|1 - e^{i\langle 2\pi \mathbf{n} + \boldsymbol{\xi}, \mathbf{z} \rangle}|^2}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha}} = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} V_{\alpha}(2\pi \mathbf{n} + \boldsymbol{\xi}) |\widehat{u}_{\mathbf{n}}|^2, \end{aligned}$$

где $V_{\alpha}(2\pi \mathbf{n} + \boldsymbol{\xi})$ определено в (1.8). Остается учесть (1.9). $\square$

Из леммы 1.2 следует замкнутость формы $a_0(\boldsymbol{\xi};\alpha)$, а с учетом оценок (1.11), также и замкнутость формы $a(\boldsymbol{\xi};\alpha,\mu)$.

По определению $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{A}(\boldsymbol{\xi};\alpha,\mu)$ *есть самосопряженный оператор в* $L_2(\Omega)$*, порожденный замкнутой формой* (1.10). Формально можно записать

$$(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})u)(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) \frac{\left(u(\mathbf{x}) - e^{-i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}-\mathbf{y}\rangle} u(\mathbf{y})\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{d+\alpha}}\, d\mathbf{y}.$$

Обозначим через $\mathbb{A}_0(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{A}_0(\boldsymbol{\xi};\alpha)$ самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d)$, порожденный замкнутой формой (1.12). В силу представления (1.13) оператор $\mathbb{A}_0(\boldsymbol{\xi};\alpha)$ отличается от дробной степени оператора $|\mathbf{D}+\boldsymbol{\xi}|$ лишь множителем:

$$\mathbb{A}_0(\boldsymbol{\xi};\alpha) = c_0(d,\alpha)|\mathbf{D}+\boldsymbol{\xi}|^{\alpha}, \quad \operatorname{Dom} \mathbb{A}_0(\boldsymbol{\xi};\alpha) = \widetilde{H}^{\alpha}(\Omega). \tag{1.14}$$

В силу компактности вложения пространства $\widetilde{H}^{\gamma}(\Omega)$ (области определения формы $a(\boldsymbol{\xi};\alpha,\mu)$) в $L_2(\Omega)$ спектр оператора $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi};\alpha,\mu)$, как и оператора $\mathbb{A}_0(\boldsymbol{\xi};\alpha)$, дискретен при всяком $\boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}$.

1.3. **Разложение оператора $\mathbb{A}(\alpha,\mu)$ в прямой интеграл.** При $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$ обозначим через $S_{\mathbf{n}}$ (унитарный) оператор сдвига в $L_2(\mathbb{R}^d)$, определенный по правилу

$$S_{\mathbf{n}}u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}+\mathbf{n}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

Очевидно, что при условиях (1.1), (1.2) выполнено тождество

$$a(\alpha,\mu)[S_{\mathbf{n}}u, S_{\mathbf{n}}u] = a(\alpha,\mu)[u,u], \quad u \in H^{\gamma}(\mathbb{R}^d), \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d.$$

Это означает, что оператор $\mathbb{A}(\alpha,\mu)$ коммутирует с операторами $S_{\mathbf{n}}$ при всех $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$, то есть *является* $\mathbb{Z}^d$*-периодическим оператором.*

Определим преобразование Гельфанда $\mathcal{G}$ (см., например, [24] или [4, глава 2]). Первоначально $\mathcal{G}$ задается на классе Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ равенством

$$\mathcal{G}u(\boldsymbol{\xi},\mathbf{x}) = \widetilde{u}(\boldsymbol{\xi},\mathbf{x}) := (2\pi)^{-d/2} \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} u(\mathbf{x}+\mathbf{n}) e^{-i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}+\mathbf{n}\rangle}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Затем $\mathcal{G}$ распространяется по непрерывности до унитарного отображения

$$\mathcal{G} : L_2(\mathbb{R}^d) \to \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \oplus L_2(\Omega)\, d\boldsymbol{\xi} = L_2(\widetilde{\Omega} \times \Omega).$$

Напомним, что класс Соболева $H^s(\mathbb{R}^d)$, где $s > 0$, под действием преобразования Гельфанда отображается на прямой интеграл пространств $\widetilde{H}^s(\Omega)$:

$$\mathcal{G} : H^s(\mathbb{R}^d) \to \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \oplus \widetilde{H}^s(\Omega)\, d\boldsymbol{\xi} = L_2(\widetilde{\Omega}; \widetilde{H}^s(\Omega)).$$

Как и все периодические операторы, оператор $\mathbb{A}(\alpha,\mu)$ раскладывается в прямой интеграл с помощью преобразования Гельфанда (т. е. частично диагонализуется). Это демонстрирует следующая лемма.

Лемма 1.3. *Пусть выполнены условия* (1.1), (1.2) *и* $0 < \alpha < 2$. *Пусть форма* $a = a(\alpha,\mu)$ *в* $L_2(\mathbb{R}^d)$ *определена выражением* (1.3). *Пусть семейство форм* $a(\boldsymbol{\xi}) = a(\boldsymbol{\xi};\alpha,\mu)$ *в* $L_2(\Omega)$ *определено в* (1.10). *Здесь* $\boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}$. *Пусть* $\mathcal{G} : L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\widetilde{\Omega}\times\Omega)$ *— унитарное преобразование Гельфанда. Соотношение* $u \in H^{\gamma}(\mathbb{R}^d)$ *равносильно соотношению* $\mathcal{G}u = \widetilde{u} \in L_2(\widetilde{\Omega}; \widetilde{H}^{\gamma}(\Omega))$. *При почти всех* $\boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}$ *выполнено* $\widetilde{u}(\boldsymbol{\xi},\cdot) \in \widetilde{H}^{\gamma}(\Omega)$ *и*

$$a[u,u] = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} a(\boldsymbol{\xi})[\widetilde{u}(\boldsymbol{\xi},\cdot), \widetilde{u}(\boldsymbol{\xi},\cdot)]\, d\boldsymbol{\xi}, \quad u \in H^{\gamma}(\mathbb{R}^d). \tag{1.15}$$

Доказательство. Пусть $u \in H^\gamma(\mathbb{R}^d)$. Записывая интеграл по $d\mathbf{x}$ в выражении (1.3) как сумму интегралов по ячейкам $\Omega + \mathbf{n}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$, а затем выполняя замену $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{y} + \mathbf{n}$ в интеграле по $d\mathbf{y}$, с учетом периодичности функции μ получаем

$$a[u,u] = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int\limits_{\Omega} d\mathbf{x}\, \mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) \frac{|u(\mathbf{x}+\mathbf{n}) - u(\mathbf{y}+\mathbf{n})|^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{d+\alpha}}. \tag{1.16}$$

В силу формулы обращения для преобразования Гельфанда имеем

$$u(\mathbf{x}+\mathbf{n}) = (2\pi)^{-d/2} \int\limits_{\widetilde{\Omega}} e^{i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}+\mathbf{n}\rangle} \widetilde{u}(\boldsymbol{\xi},\mathbf{x})\, d\boldsymbol{\xi},$$

$$u(\mathbf{y}+\mathbf{n}) = (2\pi)^{-d/2} \int\limits_{\widetilde{\Omega}} e^{i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{y}+\mathbf{n}\rangle} \widetilde{u}(\boldsymbol{\xi},\mathbf{y})\, d\boldsymbol{\xi}.$$

Следовательно,

$$u(\mathbf{x}+\mathbf{n}) - u(\mathbf{y}+\mathbf{n}) = (2\pi)^{-d/2} \int\limits_{\widetilde{\Omega}} e^{i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{n}\rangle} \Big(e^{i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}\rangle} \widetilde{u}(\boldsymbol{\xi},\mathbf{x}) - e^{i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{y}\rangle} \widetilde{u}(\boldsymbol{\xi},\mathbf{y}) \Big)\, d\boldsymbol{\xi}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d.$$

Это означает, что при фиксированных $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ последовательность $u(\mathbf{x}+\mathbf{n}) - u(\mathbf{y}+\mathbf{n})$, $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$, представляет собой последовательность коэффициентов Фурье для $(2\pi\mathbb{Z})^d$-периодической функции $e^{i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}\rangle} \widetilde{u}(\boldsymbol{\xi},\mathbf{x}) - e^{i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{y}\rangle} \widetilde{u}(\boldsymbol{\xi},\mathbf{y})$ от переменной $\boldsymbol{\xi}$. Тогда в силу равенства Парсеваля выполнено

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} |u(\mathbf{x}+\mathbf{n}) - u(\mathbf{y}+\mathbf{n})|^2 = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \Big| e^{i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}\rangle} \widetilde{u}(\boldsymbol{\xi},\mathbf{x}) - e^{i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{y}\rangle} \widetilde{u}(\boldsymbol{\xi},\mathbf{y}) \Big|^2\, d\boldsymbol{\xi}.$$

Вместе с (1.16) это влечет искомое равенство (1.15). $\square$

С учетом того, что оператор $\mathbb{A}$, а также операторы $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})$ определены через соответствующие квадратичные формы, лемма 1.3 показывает, что

$$\mathbb{A}(\alpha,\mu) = \mathcal{G}^* \Big(\int_{\widetilde{\Omega}} \oplus \mathbb{A}(\boldsymbol{\xi};\alpha,\mu)\, d\boldsymbol{\xi} \Big) \mathcal{G}. \tag{1.17}$$

1.4. **Оценки квадратичной формы оператора $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi};\alpha,\mu)$.** В силу леммы 1.2 операторы $\mathbb{A}_0(\boldsymbol{\xi};\alpha)$, $\boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}$, диагонализуются унитарным дискретным преобразованием Фурье $\mathcal{F}$:

$$\mathbb{A}_0(\boldsymbol{\xi};\alpha) = c_0(d,\alpha) \mathcal{F}^* \big[|2\pi\mathbf{n} + \boldsymbol{\xi}|^\alpha \big] \mathcal{F}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}. \tag{1.18}$$

Здесь через $[|2\pi\mathbf{n} + \boldsymbol{\xi}|^\alpha]$ обозначается оператор умножения на функцию $|2\pi\mathbf{n} + \boldsymbol{\xi}|^\alpha$, $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$, в пространстве $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$.

Из описанной диагонализации легко следует, что $\operatorname{Ker} \mathbb{A}_0(\mathbf{0};\alpha) = \mathcal{L}\{\mathbf{1}_\Omega\}$. Следовательно, в силу (1.11) имеет место $\operatorname{Ker} \mathbb{A}(\mathbf{0};\alpha,\mu) = \mathcal{L}\{\mathbf{1}_\Omega\}$. Мы приходим к следующему утверждению.

Лемма 1.4. *Пусть выполнены условия* (1.1), (1.2) *и* $0 < \alpha < 2$. *Тогда число* $\lambda_0 = 0$ *является простым собственным значением оператора* $\mathbb{A}(\mathbf{0};\alpha,\mu)$. *При этом* $\operatorname{Ker} \mathbb{A}(\mathbf{0};\alpha,\mu) = \mathcal{L}\{\mathbf{1}_\Omega\}$.

Очевидно, выполнены соотношения

$$|2\pi\mathbf{n} + \boldsymbol{\xi}|^\alpha \geqslant |\boldsymbol{\xi}|^\alpha, \quad \boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d, \tag{1.19}$$

$$|2\pi\mathbf{n} + \boldsymbol{\xi}|^\alpha \geqslant \pi^\alpha, \quad \boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d \setminus \mathbf{0}, \tag{1.20}$$

$$\min_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d\setminus\mathbf{0}} |2\pi\mathbf{n}|^\alpha = (2\pi)^\alpha. \tag{1.21}$$

Из (1.19), (1.20) и леммы 1.2 вытекают оценки для квадратичной формы $a_0(\boldsymbol{\xi};\alpha)$:

$$a_0(\boldsymbol{\xi};\alpha)[u,u] \geqslant c_0(d,\alpha)|\boldsymbol{\xi}|^\alpha \|u\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad u \in \widetilde{H}^\gamma(\Omega), \quad \boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}, \tag{1.22}$$

$$a_0(\boldsymbol{\xi};\alpha)[u,u] \geqslant c_0(d,\alpha)\pi^\alpha \|u\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad u \in \widetilde{H}^\gamma(\Omega), \quad \int\limits_\Omega u(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0, \quad \boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}. \tag{1.23}$$

Из соотношений (1.11), (1.22), (1.23) вытекает следующее утверждение.

Предложение 1.5. *Пусть выполнены условия* (1.1), (1.2) *и* $0 < \alpha < 2$. *Тогда для формы* (1.10) *справедливы оценки*

$$a(\boldsymbol{\xi};\alpha,\mu)[u,u] \geqslant \mu_- c_0(d,\alpha)|\boldsymbol{\xi}|^\alpha \|u\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad u \in \widetilde{H}^\gamma(\Omega), \quad \boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega},$$

$$a(\boldsymbol{\xi};\alpha,\mu)[u,u] \geqslant \mu_- c_0(d,\alpha)\pi^\alpha \|u\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad u \in \widetilde{H}^\gamma(\Omega), \quad \int\limits_\Omega u(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0, \quad \boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}.$$

§ 2. Оценки разности квадратичных форм $a(\boldsymbol{\xi})$ и $a(\mathbf{0})$

В настоящем параграфе мы получаем оценки для разности квадратичных форм $a(\boldsymbol{\xi})$ и $a(\mathbf{0})$, которые понадобятся в дальнейшем. Оказывается, что случаи $0 < \alpha < 1$ и $1 \leqslant \alpha < 2$ существенно различаются.

2.1. **Случай $0 < \alpha < 1$.**

Лемма 2.1. *Пусть выполнены условия* (1.1), (1.2) *и* $0 < \alpha < 1$. *Пусть* $\boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}$. *Пусть* $a(\boldsymbol{\xi})[u,v]$, $u,v \in \widetilde{H}^\gamma(\Omega)$, *— полуторалинейная эрмитова форма, отвечающая квадратичной форме* (1.10). *Для разности полуторалинейных форм* $a(\boldsymbol{\xi}) - a(\mathbf{0})$ *справедливо представление*

$$a(\boldsymbol{\xi})[u,v] - a(\mathbf{0})[u,v] = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} \int\limits_\Omega d\mathbf{y} \int\limits_\Omega d\mathbf{x}\, \mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) \frac{u(\mathbf{x})\overline{v(\mathbf{y})}(1 - e^{i\langle\boldsymbol{\xi},\mathbf{x}+\mathbf{n}-\mathbf{y}\rangle})}{|\mathbf{x}+\mathbf{n}-\mathbf{y}|^{d+\alpha}}, \quad u,v \in \widetilde{H}^\gamma(\Omega).$$

Доказательство. Пусть $u,v \in \widetilde{H}^\gamma(\Omega)$; эти функции считаем периодически продолженными на $\mathbb{R}^d$. Учитывая периодичность функций u,v,μ, а также условие симметрии $\mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mu(\mathbf{y},\mathbf{x})$, имеем

$$\begin{aligned}
a(\boldsymbol{\xi})[u,v] - a(\mathbf{0})[u,v] &= \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int\limits_\Omega d\mathbf{x}\, \mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) \frac{(u(\mathbf{x}) - e^{i\langle\boldsymbol{\xi},\mathbf{y}-\mathbf{x}\rangle}u(\mathbf{y}))(\overline{v(\mathbf{x})} - e^{-i\langle\boldsymbol{\xi},\mathbf{y}-\mathbf{x}\rangle}\overline{v(\mathbf{y})})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{d+\alpha}} \\
&- \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int\limits_\Omega d\mathbf{x}\, \mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) \frac{(u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y}))(\overline{v(\mathbf{x})} - \overline{v(\mathbf{y})})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{d+\alpha}} \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int\limits_\Omega d\mathbf{x}\, \mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) \frac{(u(\mathbf{x})\overline{v(\mathbf{y})}(1 - e^{-i\langle\boldsymbol{\xi},\mathbf{y}-\mathbf{x}\rangle}) + u(\mathbf{y})\overline{v(\mathbf{x})}(1 - e^{i\langle\boldsymbol{\xi},\mathbf{y}-\mathbf{x}\rangle})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{d+\alpha}} \\
&= \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} \frac{1}{2}\int\limits_\Omega d\mathbf{y} \int\limits_\Omega d\mathbf{x}\, \mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) \frac{u(\mathbf{x})\overline{v(\mathbf{y})}(1 - e^{-i\langle\boldsymbol{\xi},\mathbf{y}-\mathbf{n}-\mathbf{x}\rangle})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{n}|^{d+\alpha}} \\
&+ \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} \frac{1}{2}\int\limits_\Omega d\mathbf{y} \int\limits_\Omega d\mathbf{x}\, \mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) \frac{u(\mathbf{y})\overline{v(\mathbf{x})}(1 - e^{i\langle\boldsymbol{\xi},\mathbf{y}+\mathbf{n}-\mathbf{x}\rangle})}{|\mathbf{x}-\mathbf{n}-\mathbf{y}|^{d+\alpha}} \\
&= \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} \int\limits_\Omega d\mathbf{y} \int\limits_\Omega d\mathbf{x}\, \mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) \frac{u(\mathbf{x})\overline{v(\mathbf{y})}(1 - e^{-i\langle\boldsymbol{\xi},\mathbf{y}-\mathbf{n}-\mathbf{x}\rangle})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{n}|^{d+\alpha}}.
\end{aligned}$$

$\square$

Из леммы 2.1 выводится следующее утверждение.

Лемма 2.2. *При* $0<\alpha<1$ *оператор* $\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})=\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi};\alpha,\mu):=\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi};\alpha,\mu)-\mathbb{A}(\mathbf{0};\alpha,\mu)$ *корректно определен и ограничен в* $L_2(\Omega)$: *это интегральный оператор с ядром*

$$K(\mathbf{x},\mathbf{y};\boldsymbol{\xi}):=\mu(\mathbf{x},\mathbf{y})\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}\frac{(1-e^{i\langle\boldsymbol{\xi},\mathbf{x}+\mathbf{n}-\mathbf{y}\rangle})}{|\mathbf{x}+\mathbf{n}-\mathbf{y}|^{d+\alpha}},\quad \mathbf{x},\mathbf{y}\in\Omega,\ \boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}. \tag{2.1}$$

Справедлива оценка

$$\|\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant\mu_+c_1(d,\alpha)|\boldsymbol{\xi}|^\alpha, \tag{2.2}$$

где постоянная $c_1(d,\alpha)$ *определена ниже в* (2.3).

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_\Omega|K(\mathbf{x},\mathbf{y};\boldsymbol{\xi})|\,d\mathbf{y}\leqslant\mu_+\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}\int\limits_\Omega\frac{|1-e^{i\langle\boldsymbol{\xi},\mathbf{x}+\mathbf{n}-\mathbf{y}\rangle}|}{|\mathbf{x}+\mathbf{n}-\mathbf{y}|^{d+\alpha}}\,d\mathbf{y}=\mu_+\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{|1-e^{i\langle\boldsymbol{\xi},\mathbf{x}-\mathbf{y}\rangle}|}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{d+\alpha}}\,d\mathbf{y}$$
$$=\mu_+\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{|1-e^{i\langle\boldsymbol{\xi},\mathbf{z}\rangle}|}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha}}\,d\mathbf{z}=\mu_+\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{2\left|\sin\frac{\langle\boldsymbol{\xi},\mathbf{z}\rangle}{2}\right|}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha}}\,d\mathbf{z}=\mu_+c_1(d,\alpha)|\boldsymbol{\xi}|^\alpha,$$

где

$$c_1(d,\alpha):=\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{2\left|\sin\frac{z_1}{2}\right|}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha}}\,d\mathbf{z}<\infty,\quad 0<\alpha<1. \tag{2.3}$$

Интеграл в выражении для $c_1(d,\alpha)$ конечен за счет условия $0<\alpha<1$ (заметим, что $c_1(d,\alpha)=O((1-\alpha)^{-1})$ при $\alpha\to1$). Следовательно,

$$\sup_{\mathbf{x}\in\Omega}\int\limits_\Omega|K(\mathbf{x},\mathbf{y};\boldsymbol{\xi})|\,d\mathbf{y}\leqslant\mu_+c_1(d,\alpha)|\boldsymbol{\xi}|^\alpha.$$

Аналогичную оценку допускает и $\sup_{\mathbf{y}\in\Omega}\int_\Omega|K(\mathbf{x},\mathbf{y};\boldsymbol{\xi})|\,d\mathbf{x}$.

Обозначим через $\mathbb{K}(\boldsymbol{\xi})$ интегральный оператор в $L_2(\Omega)$ с ядром (2.1). В силу теста Шура оператор $\mathbb{K}(\boldsymbol{\xi})$ ограничен и его норма допускает оценку

$$\|\mathbb{K}(\boldsymbol{\xi})\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant\mu_+c_1(d,\alpha)|\boldsymbol{\xi}|^\alpha,\quad\boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega},\quad 0<\alpha<1. \tag{2.4}$$

Теперь из леммы 2.1 следует, что

$$a(\boldsymbol{\xi})[u,v]-a(\mathbf{0})[u,v]=\int\limits_\Omega d\mathbf{y}\int\limits_\Omega d\mathbf{x}\,K(\mathbf{x},\mathbf{y};\boldsymbol{\xi})u(\mathbf{x})\overline{v(\mathbf{y})}=(\mathbb{K}(\boldsymbol{\xi})u,v)_{L_2(\Omega)},\quad u,v\in\widetilde{H}^\gamma(\Omega).$$

Поскольку оператор $\mathbb{K}(\boldsymbol{\xi})$ ограничен, это означает, что области определения операторов $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})$ и $\mathbb{A}(\mathbf{0})$ совпадают и имеет место равенство

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})u-\mathbb{A}(\mathbf{0})u=\mathbb{K}(\boldsymbol{\xi})u,\quad u\in\operatorname{Dom}\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})=\operatorname{Dom}\mathbb{A}(\mathbf{0}).$$

Это позволяет распространить оператор $\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}):=\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})-\mathbb{A}(\mathbf{0})$, изначально определенный на области $\operatorname{Dom}\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})=\operatorname{Dom}\mathbb{A}(\mathbf{0})$ (плотной в $L_2(\Omega)$), по непрерывности до ограниченного оператора, совпадающего с интегральным оператором $\mathbb{K}(\boldsymbol{\xi})$. Тогда оценка (2.2) вытекает из (2.4). $\square$

2.2. **Случай** $1 \leqslant \alpha < 2$.

Лемма 2.3. *При* $1 \leqslant \alpha < 2$ *выполнена оценка*

$$|a(\boldsymbol{\xi})[u,u] - a(\mathbf{0})[u,u]| \leqslant \check{c}(d,\alpha)\Theta(\boldsymbol{\xi})\left(a(\mathbf{0})[u,u] + \mu_+\|u\|^2_{L_2(\Omega)}\right), \quad u \in \widetilde{H}^\gamma(\Omega), \quad \boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}, \tag{2.5}$$

где

$$\Theta(\boldsymbol{\xi}) := \begin{cases} |\boldsymbol{\xi}|, & 1 < \alpha < 2, \\ |\boldsymbol{\xi}|\left(1 + |\ln|\boldsymbol{\xi}||\right), & \alpha = 1. \end{cases} \tag{2.6}$$

Доказательство. Согласно (1.10) при $u \in \widetilde{H}^\gamma(\Omega)$ имеем

$$a(\boldsymbol{\xi})[u,u] - a(\mathbf{0})[u,u] := \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int\limits_{\Omega} d\mathbf{x}\, \mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) \frac{\left(|u(\mathbf{x}) - e^{i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{y}-\mathbf{x}\rangle} u(\mathbf{y})|^2 - |u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|^2\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{d+\alpha}}.$$

Легко проверить равенство

$$|u(\mathbf{x}) - e^{i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{y}-\mathbf{x}\rangle} u(\mathbf{y})|^2 - |u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|^2 = |u(\mathbf{x})|^2 |1 - e^{i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{y}-\mathbf{x}\rangle}|^2 + 2\,\mathrm{Re}(u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y}))\overline{u(\mathbf{x})}(e^{i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{y}-\mathbf{x}\rangle} - 1).$$

Следовательно,

$$a(\boldsymbol{\xi})[u,u] - a(\mathbf{0})[u,u] = b_1(\boldsymbol{\xi})[u,u] + b_2(\boldsymbol{\xi})[u,u], \tag{2.7}$$

где

$$b_1(\boldsymbol{\xi})[u,u] := \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int\limits_{\Omega} d\mathbf{x}\, \mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) \frac{|u(\mathbf{x})|^2 |1 - e^{i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{y}-\mathbf{x}\rangle}|^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{d+\alpha}}, \tag{2.8}$$

$$b_2(\boldsymbol{\xi})[u,u] := \mathrm{Re}\int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int\limits_{\Omega} d\mathbf{x}\, \mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) \frac{(u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y}))\overline{u(\mathbf{x})}(e^{i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{y}-\mathbf{x}\rangle} - 1)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{d+\alpha}}. \tag{2.9}$$

Начнем с оценки (неотрицательной) формы (2.8):

$$b_1(\boldsymbol{\xi})[u,u] \leqslant \frac{\mu_+}{2}\int\limits_{\Omega} d\mathbf{x}\, |u(\mathbf{x})|^2 \int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{z} \frac{|1 - e^{i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{z}\rangle}|^2}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha}} = \mu_+ V_\alpha(\boldsymbol{\xi})\|u\|^2_{L_2(\Omega)} = \mu_+ c_0(d,\alpha)|\boldsymbol{\xi}|^\alpha \|u\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{2.10}$$

Здесь использовано обозначение (1.8) и равенство (1.9).

Перейдем к оценке формы (2.9):

$$|b_2(\boldsymbol{\xi})[u,u]| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int\limits_{\Omega} d\mathbf{x}\, \mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) \frac{|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})||u(\mathbf{x})||e^{i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{y}-\mathbf{x}\rangle} - 1|}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{d+\alpha}} = J_1(\boldsymbol{\xi})[u] + J_2(\boldsymbol{\xi})[u], \tag{2.11}$$

где

$$J_1(\boldsymbol{\xi})[u] := \int\limits_{[-2,2]^d} d\mathbf{y} \int\limits_{\Omega} d\mathbf{x}\, \mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) \frac{|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})||u(\mathbf{x})||e^{i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{y}-\mathbf{x}\rangle} - 1|}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{d+\alpha}}, \tag{2.12}$$

$$J_2(\boldsymbol{\xi})[u] := \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus [-2,2]^d} d\mathbf{y} \int\limits_{\Omega} d\mathbf{x}\, \mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) \frac{|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})||u(\mathbf{x})||e^{i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{y}-\mathbf{x}\rangle} - 1|}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{d+\alpha}}. \tag{2.13}$$

В силу неравенства Коши для формы (2.13) справедлива оценка

$$J_2(\boldsymbol{\xi})[u] \leqslant \mu_+ \left(J_2^{(1)}(\boldsymbol{\xi})[u]\right)^{1/2} \left(J_2^{(2)}(\boldsymbol{\xi})[u]\right)^{1/2}, \tag{2.14}$$

где

$$J_2^{(1)}(\boldsymbol{\xi})[u] := \int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus[-2,2]^d} d\mathbf{y} \int\limits_{\Omega} d\mathbf{x}\, \frac{|u(\mathbf{x})-u(\mathbf{y})|^2|e^{i\langle\boldsymbol{\xi},\mathbf{y}-\mathbf{x}\rangle}-1|}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{d+\alpha}}, \tag{2.15}$$

$$J_2^{(2)}(\boldsymbol{\xi})[u] := \int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus[-2,2]^d} d\mathbf{y} \int\limits_{\Omega} d\mathbf{x}\, \frac{|u(\mathbf{x})|^2|e^{i\langle\boldsymbol{\xi},\mathbf{y}-\mathbf{x}\rangle}-1|}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{d+\alpha}}. \tag{2.16}$$

Оценим форму (2.16):

$$J_2^{(2)}(\boldsymbol{\xi})[u] = \int\limits_{\Omega} d\mathbf{x}\,|u(\mathbf{x})|^2 \int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus[-2,2]^d} d\mathbf{y}\frac{|e^{i\langle\boldsymbol{\xi},\mathbf{y}-\mathbf{x}\rangle}-1|}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{d+\alpha}} \leqslant \int\limits_{\Omega} d\mathbf{x}\,|u(\mathbf{x})|^2 \int\limits_{|\mathbf{z}|\geqslant 1} d\mathbf{z}\frac{|e^{i\langle\boldsymbol{\xi},\mathbf{z}\rangle}-1|}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha}}. \tag{2.17}$$

С помощью замены $\mathbf{w} = |\boldsymbol{\xi}|\mathbf{z}$ получаем (здесь $\boldsymbol{\xi} = |\boldsymbol{\xi}|\widehat{\boldsymbol{\xi}}$)

$$\int\limits_{|\mathbf{z}|\geqslant 1} d\mathbf{z}\frac{|e^{i\langle\boldsymbol{\xi},\mathbf{z}\rangle}-1|}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha}} = |\boldsymbol{\xi}|^{\alpha} \int\limits_{|\mathbf{w}|\geqslant|\boldsymbol{\xi}|} d\mathbf{w}\frac{|e^{i\langle\widehat{\boldsymbol{\xi}},\mathbf{w}\rangle}-1|}{|\mathbf{w}|^{d+\alpha}} = |\boldsymbol{\xi}|^{\alpha} \int\limits_{|\mathbf{w}|\geqslant|\boldsymbol{\xi}|} d\mathbf{w}\frac{|e^{iw_1}-1|}{|\mathbf{w}|^{d+\alpha}}.$$

Если $|\boldsymbol{\xi}| \geqslant 1$, то

$$\int\limits_{|\mathbf{w}|\geqslant|\boldsymbol{\xi}|} d\mathbf{w}\frac{|e^{iw_1}-1|}{|\mathbf{w}|^{d+\alpha}} \leqslant \int\limits_{|\mathbf{w}|\geqslant 1} d\mathbf{w}\frac{|e^{iw_1}-1|}{|\mathbf{w}|^{d+\alpha}} \leqslant \frac{2\omega_d}{\alpha},$$

где ω_d — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^d$. Если $|\boldsymbol{\xi}| \leqslant 1$, то

$$\int\limits_{|\mathbf{w}|\geqslant|\boldsymbol{\xi}|} d\mathbf{w}\frac{|e^{iw_1}-1|}{|\mathbf{w}|^{d+\alpha}} \leqslant \frac{2\omega_d}{\alpha} + \int\limits_{|\boldsymbol{\xi}|\leqslant|\mathbf{w}|\leqslant 1} d\mathbf{w}\frac{|e^{iw_1}-1|}{|\mathbf{w}|^{d+\alpha}} \leqslant \frac{2\omega_d}{\alpha} + 2\int\limits_{|\boldsymbol{\xi}|\leqslant|\mathbf{w}|\leqslant 1} d\mathbf{w}\frac{1}{|\mathbf{w}|^{d+\alpha-1}}.$$

Очевидно,

$$\int\limits_{|\boldsymbol{\xi}|\leqslant|\mathbf{w}|\leqslant 1} d\mathbf{w}\frac{1}{|\mathbf{w}|^{d+\alpha-1}} \leqslant \begin{cases} \frac{\omega_d}{\alpha-1}|\boldsymbol{\xi}|^{1-\alpha}, & 1<\alpha<2,\\ \omega_d|\ln|\boldsymbol{\xi}||, & \alpha=1. \end{cases}$$

В итоге получаем

$$\int\limits_{|\mathbf{z}|\geqslant 1} d\mathbf{z}\frac{|e^{i\langle\boldsymbol{\xi},\mathbf{z}\rangle}-1|}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha}} \leqslant c_2(d,\alpha)\Theta(\boldsymbol{\xi}). \tag{2.18}$$

Заметим, что $c_2(d,\alpha) = O((\alpha-1)^{-1})$ при $\alpha \to 1$, а $c_2(d,1) = 2\omega_d$. Вместе с (2.17) это влечет оценку

$$J_2^{(2)}(\boldsymbol{\xi})[u] \leqslant c_2(d,\alpha)\Theta(\boldsymbol{\xi})\|u\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{2.19}$$

Рассмотрим теперь форму (2.15):

$$J_2^{(1)}(\boldsymbol{\xi})[u] \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus[-2,2]^d} d\mathbf{y} \int\limits_{\Omega} d\mathbf{x}\, \frac{(2|u(\mathbf{x})|^2+2|u(\mathbf{y})|^2)|e^{i\langle\boldsymbol{\xi},\mathbf{y}-\mathbf{x}\rangle}-1|}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{d+\alpha}} = 2J_2^{(2)}(\boldsymbol{\xi})[u] + 2\widetilde{J}_2^{(1)}(\boldsymbol{\xi})[u], \tag{2.20}$$

где

$$\begin{aligned}\widetilde{J}_2^{(1)}(\boldsymbol{\xi})[u] &:= \int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus[-2,2]^d} d\mathbf{y} \int\limits_{\Omega} d\mathbf{x}\, \frac{|u(\mathbf{y})|^2|e^{i\langle\boldsymbol{\xi},\mathbf{y}-\mathbf{x}\rangle}-1|}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{d+\alpha}}\\ &= \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d:(\Omega+\mathbf{n})\subset\mathbb{R}^d\setminus(-2,2)^d} \int\limits_{\Omega} d\mathbf{y}|u(\mathbf{y})|^2 \int\limits_{\Omega} d\mathbf{x}\, \frac{|e^{i\langle\boldsymbol{\xi},\mathbf{y}+\mathbf{n}-\mathbf{x}\rangle}-1|}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}-\mathbf{n}|^{d+\alpha}}.\end{aligned}$$

Отсюда и из (2.18) вытекает оценка

$$\widetilde{J}_2^{(1)}(\boldsymbol{\xi})[u] \leqslant \int\limits_{\Omega} d\mathbf{y}|u(\mathbf{y})|^2 \int\limits_{|\mathbf{z}|\geqslant 1} d\mathbf{z}\, \frac{|e^{i\langle\boldsymbol{\xi},\mathbf{z}\rangle}-1|}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha}} \leqslant c_2(d,\alpha)\Theta(\boldsymbol{\xi})\|u\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Вместе с (2.19) и (2.20) это дает

$$J_2^{(1)}(\boldsymbol{\xi})[u] \leqslant 4c_2(d,\alpha)\Theta(\boldsymbol{\xi})\|u\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{2.21}$$

Сопоставляя (2.14), (2.19) и (2.21), приходим к неравенству

$$J_2(\boldsymbol{\xi})[u] \leqslant 2\mu_+ c_2(d,\alpha)\Theta(\boldsymbol{\xi})\|u\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{2.22}$$

Остается рассмотреть форму (2.12). В силу очевидной оценки $|e^{i\langle\boldsymbol{\xi},\mathbf{y}-\mathbf{x}\rangle}-1| \leqslant |\boldsymbol{\xi}||\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ и неравенства Коши имеем

$$\begin{aligned} J_1(\boldsymbol{\xi})[u] &\leqslant |\boldsymbol{\xi}| \int\limits_{[-2,2]^d} d\mathbf{y} \int\limits_{\Omega} d\mathbf{x}\, \mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) \frac{|u(\mathbf{x})-u(\mathbf{y})||u(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{d+\alpha-1}} \\ &\leqslant |\boldsymbol{\xi}| \Big(\int\limits_{[-2,2]^d} d\mathbf{y} \int\limits_{\Omega} d\mathbf{x}\, \mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) \frac{|u(\mathbf{x})-u(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{d+\alpha}} \Big)^{1/2} \Big(\mu_+ \int\limits_{[-2,2]^d} d\mathbf{y} \int\limits_{\Omega} d\mathbf{x}\, \frac{|u(\mathbf{x})|^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{d+\alpha-2}} \Big)^{1/2} \\ &\leqslant |\boldsymbol{\xi}| \left(\mu_+ c_3(d,\alpha)\right)^{1/2} \left(a(\mathbf{0})[u,u]\right)^{1/2} \|u\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Мы учли очевидное неравенство

$$\int\limits_{[-2,2]^d} d\mathbf{y} \int\limits_{\Omega} d\mathbf{x}\, \frac{|u(\mathbf{x})|^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{d+\alpha-2}} \leqslant \int\limits_{\Omega} d\mathbf{x}\, |u(\mathbf{x})|^2 \int\limits_{|\mathbf{z}|\leqslant 4\sqrt{d}} \frac{d\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha-2}} = c_3(d,\alpha)\|u\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Здесь $c_3(d,\alpha) = \frac{\omega_d(4\sqrt{d})^{2-\alpha}}{2-\alpha}$.

Сопоставляя (2.11), (2.22) и (2.23), получаем

$$|b_2(\boldsymbol{\xi})[u,u]| \leqslant |\boldsymbol{\xi}| \left(\mu_+ c_3(d,\alpha)\right)^{1/2} \left(a(\mathbf{0})[u,u]\right)^{1/2} \|u\|_{L_2(\Omega)} + 2\mu_+ c_2(d,\alpha)\Theta(\boldsymbol{\xi})\|u\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{2.24}$$

В итоге, из (2.7), (2.10) и (2.24) вытекает искомая оценка (2.5). $\square$

§ 3. Пороговые характеристики оператора типа Леви вблизи нижнего края спектра

3.1. **Край спектра оператора** $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi};\alpha,\mu)$**.** Обозначим через $\lambda_j(\boldsymbol{\xi})$, $j \in \mathbb{N}$, собственные значения оператора $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})$, занумерованные в порядке неубывания с учетом кратностей. Через $\lambda_j^0(\boldsymbol{\xi})$, $j \in \mathbb{N}$, обозначим последовательные собственные значения оператора $\mathbb{A}_0(\boldsymbol{\xi})$. Из (1.11) и вариационного принципа для нахождения собственных значений вытекают неравенства

$$\mu_- \lambda_j^0(\boldsymbol{\xi}) \leqslant \lambda_j(\boldsymbol{\xi}) \leqslant \mu_+ \lambda_j^0(\boldsymbol{\xi}), \quad j \in \mathbb{N}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}. \tag{3.1}$$

Благодаря диагонализации собственные значения оператора $\mathbb{A}_0(\boldsymbol{\xi})$ можно найти явно: это числа вида $c_0(d,\alpha)|2\pi\mathbf{n}+\boldsymbol{\xi}|^\alpha$, $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$, соответствующие собственные элементы — это функции $e^{2\pi i\langle\mathbf{n},\mathbf{x}\rangle}$. Первое собственное значение имеет вид

$$\lambda_1^0(\boldsymbol{\xi}) = c_0(d,\alpha)|\boldsymbol{\xi}|^\alpha, \quad \boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}, \tag{3.2}$$

$\mathbf{1}_\Omega$ — собственная функция. Поскольку

$$|\boldsymbol{\xi}| < |2\pi\mathbf{n}+\boldsymbol{\xi}|, \quad \boldsymbol{\xi} \in \operatorname{Int}\widetilde{\Omega} = (-\pi,\pi)^d, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d \setminus \mathbf{0},$$

то при $\boldsymbol{\xi} \in (-\pi,\pi)^d$ первое собственное значение оператора $\mathbb{A}_0(\boldsymbol{\xi})$ — простое и отвечающее ему собственное подпространство — это $\mathcal{L}\{\mathbf{1}_\Omega\}$. В силу (1.20), (1.21) справедливы соотношения

$$\lambda_2^0(\boldsymbol{\xi}) = c_0(d,\alpha) \min_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d\setminus\mathbf{0}} |2\pi\mathbf{n}+\boldsymbol{\xi}|^\alpha \geqslant c_0(d,\alpha)\pi^\alpha, \quad \boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}, \tag{3.3}$$

$$\lambda_2^0(\mathbf{0}) = c_0(d,\alpha)(2\pi)^\alpha. \tag{3.4}$$

Из (3.1)–(3.4) вытекают оценки

$$\mu_- c_0(d,\alpha)|\boldsymbol{\xi}|^\alpha \leqslant \lambda_1(\boldsymbol{\xi}) \leqslant \mu_+ c_0(d,\alpha)|\boldsymbol{\xi}|^\alpha, \quad \boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}, \tag{3.5}$$

$$\lambda_2(\boldsymbol{\xi}) \geqslant \mu_- c_0(d,\alpha)\pi^\alpha =: d_0, \quad \boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}, \tag{3.6}$$

$$\lambda_2(\mathbf{0}) \geqslant \mu_- c_0(d,\alpha)(2\pi)^\alpha = 2^\alpha d_0. \tag{3.7}$$

Согласно лемме 1.4 при условиях (1.1), (1.2) нижний край спектра оператора $\mathbb{A}(\mathbf{0};\alpha,\mu)$ есть изолированное простое собственное значение $\lambda_1(\mathbf{0}) = 0$; отвечающее ему собственное подпространство — это $\mathcal{L}\{\mathbf{1}_\Omega\}$. В силу (3.7) расстояние от точки $\lambda_1(\mathbf{0}) = 0$ до остального спектра оператора $\mathbb{A}(\mathbf{0};\alpha,\mu)$ не меньше величины $2^\alpha d_0$.

Положим

$$\delta_0(\alpha,\mu) := \pi\left(\frac{\mu_-}{3\mu_+}\right)^{1/\alpha}. \tag{3.8}$$

Очевидно, $\delta_0(\alpha,\mu) < \pi$, а потому шар $|\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(\alpha,\mu)$ лежит внутри множества $\widetilde{\Omega}$. Из оценок (3.5), (3.6) видно, что при $|\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(\alpha,\mu)$ первое собственное значение оператора $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi};\alpha,\mu)$ находится на интервале $[0,d_0/3]$, а остальной спектр — на полуоси $[d_0,\infty)$. Тем самым,

$$\operatorname{rank} E_{\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi};\alpha,\mu)}[0,d_0/3] = 1, \quad \sigma(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi};\alpha,\mu)) \cap (d_0/3;d_0) = \varnothing, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(\alpha,\mu).$$

Мы пришли к следующему утверждению.

Предложение 3.1. *Пусть выполнены условия* (1.1), (1.2) *и* $0<\alpha<2$. *Пусть* $d_0 := \mu_- c_0(d,\alpha)\pi^\alpha$, *а число* $\delta_0(\alpha,\mu)$ *определено в* (3.8). *При* $|\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(\alpha,\mu)$ *спектр оператора* $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{A}(\boldsymbol{\xi};\alpha,\mu)$ *на отрезке* $[0,d_0/3]$ *состоит из однократного собственного значения*; *на интервале* $(d_0/3,d_0)$ *нет точек спектра оператора* $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi};\alpha,\mu)$.

3.2. **Пороговые аппроксимации.** Обозначим через $F(\boldsymbol{\xi})$ спектральный проектор оператора $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi};\alpha,\mu)$, отвечающий отрезку $[0,d_0/3]$. Через $\mathfrak{N}$ обозначим ядро $\operatorname{Ker}\mathbb{A}(\mathbf{0};\alpha,\mu) = \mathcal{L}\{\mathbf{1}_\Omega\}$; через P обозначим ортопроектор на $\mathfrak{N}$; имеем $P = (\cdot,\mathbf{1}_\Omega)\mathbf{1}_\Omega$. Пусть Γ — контур на комплексной плоскости, проходящий через середину интервала $(d_0/3,d_0)$ и эквидистантно охватывающий отрезок $[0,d_0/3]$. Длина контура Γ равна

$$l_\Gamma = \frac{d_0(2\pi+2)}{3}. \tag{3.9}$$

В силу формулы Рисса справедливы представления

$$F(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma (\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) - \zeta I)^{-1}\,d\zeta, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(\alpha,\mu), \tag{3.10}$$

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})F(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma (\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) - \zeta I)^{-1}\zeta\,d\zeta, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(\alpha,\mu). \tag{3.11}$$

Здесь в интегралах направление обхода контура идет против часовой стрелки.

Наша цель — получить приближения к операторам $F(\boldsymbol{\xi})$ и $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})F(\boldsymbol{\xi})$ при $|\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(\alpha,\mu)$. Начнем со случая, когда $0<\alpha<1$.

Предложение 3.2. *Пусть выполнены условия* (1.1), (1.2) *и* $0<\alpha<1$. *Тогда справедлива оценка*

$$\|F(\boldsymbol{\xi}) - P\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C_1(\alpha,\mu)|\boldsymbol{\xi}|^\alpha, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(\alpha,\mu). \tag{3.12}$$

Постоянная $C_1(\alpha,\mu)$ *контролируется в терминах величин* d, α, μ_-, μ_+.

Доказательство. Введем обозначения

$$R(\boldsymbol{\xi},\zeta) := (\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) - \zeta I)^{-1}, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(\alpha,\mu), \quad \zeta \in \Gamma; \tag{3.13}$$

$$R_0(\zeta) := R(\mathbf{0},\zeta), \quad \zeta \in \Gamma. \tag{3.14}$$

В силу формулы Рисса (3.10) разность $F(\boldsymbol{\xi}) - P$ допускает представление

$$F(\boldsymbol{\xi}) - P = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} (R(\boldsymbol{\xi},\zeta) - R_0(\zeta))\, d\zeta, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(\alpha,\mu). \tag{3.15}$$

Согласно лемме 2.2 при $0 < \alpha < 1$ оператор $\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})$ ограничен, а потому справедливо резольвентное тождество

$$R(\boldsymbol{\xi},\zeta) = R_0(\zeta) - R(\boldsymbol{\xi},\zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta), \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(\alpha,\mu), \quad \zeta \in \Gamma. \tag{3.16}$$

Длина контура Γ определена в (3.9), и обе резольвенты допускают на контуре Γ оценки

$$\|R(\boldsymbol{\xi},\zeta)\| \leqslant 3d_0^{-1}, \quad \|R_0(\zeta)\| \leqslant 3d_0^{-1}, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(\alpha,\mu), \quad \zeta \in \Gamma. \tag{3.17}$$

Теперь из (2.2) и (3.15)–(3.17) вытекает оценка (3.12) с постоянной

$$C_1(\alpha,\mu) = \frac{3(\pi+1)\mu_+ c_1(d,\alpha)}{\pi d_0} = \frac{3(\pi+1)\mu_+ c_1(d,\alpha)}{\pi^{1+\alpha}\mu_- c_0(d,\alpha)} =: c_1'(d,\alpha)\frac{\mu_+}{\mu_-}.$$

□

Предложение 3.3. *Пусть выполнены условия* (1.1), (1.2) *и* $0 < \alpha < 1$. *Тогда при* $|\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(\alpha,\mu)$ *справедливо представление*

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})F(\boldsymbol{\xi}) = P\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})P + \Phi(\boldsymbol{\xi}), \tag{3.18}$$

где оператор $\Phi(\boldsymbol{\xi})$ *подчинен оценке*

$$\|\Phi(\boldsymbol{\xi})\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C_2(\alpha,\mu)|\boldsymbol{\xi}|^{2\alpha}, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(\alpha,\mu). \tag{3.19}$$

Постоянная $C_2(\alpha,\mu)$ *контролируется в терминах величин* d, α, μ_-, μ_+.

Доказательство. Итерируя резольвентное тождество (3.16), получаем

$$R(\boldsymbol{\xi},\zeta) = R_0(\zeta) - R_0(\zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta) + R(\boldsymbol{\xi},\zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta), \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(\alpha,\mu), \quad \zeta \in \Gamma. \tag{3.20}$$

В силу (2.2) и (3.17) для оператора $Z_1(\boldsymbol{\xi},\zeta) := R(\boldsymbol{\xi},\zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)$ справедлива оценка

$$\|Z_1(\boldsymbol{\xi},\zeta)\| \leqslant (3d_0^{-1})^3\mu_+^2 c_1(d,\alpha)^2|\boldsymbol{\xi}|^{2\alpha}, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(\alpha,\mu), \quad \zeta \in \Gamma. \tag{3.21}$$

Применяя формулу Рисса (3.11) и представление (3.20), получаем

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})F(\boldsymbol{\xi}) = G_0 + G_1(\boldsymbol{\xi}) + \Phi(\boldsymbol{\xi}), \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(\alpha,\mu),$$

где

$$G_0 = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} R_0(\zeta)\zeta\, d\zeta, \tag{3.22}$$

$$G_1(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} R_0(\zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\zeta\, d\zeta, \tag{3.23}$$

$$\Phi(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} Z_1(\boldsymbol{\xi},\zeta)\zeta\, d\zeta. \tag{3.24}$$

Из (3.11) при $\boldsymbol{\xi} = 0$ следует, что $G_0 = \mathbb{A}(\mathbf{0})P = 0$. Из (3.21) с учетом (3.9) и неравенства $|\zeta| \leqslant 2d_0/3$ при $\zeta \in \Gamma$ вытекает оценка (3.19) для оператора (3.24) с постоянной

$$C_2(\alpha,\mu) := \frac{6(\pi+1)\mu_+^2 c_1(d,\alpha)^2}{\pi d_0} = \frac{6(\pi+1)\mu_+^2 c_1(d,\alpha)^2}{\pi^{1+\alpha}\mu_- c_0(d,\alpha)}.$$

Для вычисления интеграла в (3.23) используем разложение резольвенты оператора $\mathbb{A}(\mathbf{0})$:

$$R_0(\zeta) = R_0(\zeta)P + R_0(\zeta)P^{\perp} = -\frac{1}{\zeta}P + R_0(\zeta)P^{\perp}, \quad \zeta \in \Gamma. \tag{3.25}$$

Подставим разложение (3.25) в контурный интеграл (3.23) и воспользуемся тем, что оператор-функция $R_0^{\perp}(\zeta) := R_0(\zeta)P^{\perp}$ голоморфна внутри контура Γ. Получаем

$$G_1(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\Big(-\frac{1}{\zeta}P + R_0^{\perp}(\zeta)\Big)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})\Big(-\frac{1}{\zeta}P + R_0^{\perp}(\zeta)\Big)\zeta\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{1}{\zeta}P\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})P\,d\zeta = P\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})P.$$

В итоге мы приходим к представлению (3.18). $\square$

Перейдем к пороговым аппроксимациям в случае $1 \leqslant \alpha < 2$.

Предложение 3.4. *Пусть выполнены условия* (1.1), (1.2) *и* $1 \leqslant \alpha < 2$. *Тогда справедлива оценка*

$$\|F(\boldsymbol{\xi}) - P\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C_1(\alpha,\mu)\Theta(\boldsymbol{\xi}), \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(\alpha,\mu), \tag{3.26}$$

где $\Theta(\boldsymbol{\xi})$ *определено в* (2.6). *Постоянная* $C_1(\alpha,\mu)$ *контролируется в терминах величин* d, α, μ_-, μ_+.

Доказательство. При $1 \leqslant \alpha < 2$ мы уже не можем использовать обычное резольвентное тождество (3.16). Взамен воспользуемся резольвентным тождеством для операторов, порожденных замкнутыми неотрицательными формами с общей областью определения; см. [4, гл. 1, §2]. Обозначим через $\mathfrak{D}$ гильбертово пространство $\operatorname{Dom} a(\mathbf{0}) = \widetilde{H}^{\gamma}(\Omega)$, снабженное скалярным произведением

$$(u,v)_{\mathfrak{D}} := a(\mathbf{0})[u,v] + \mu_+(u,v)_{L_2(\Omega)}, \quad u,v \in \widetilde{H}^{\gamma}(\Omega).$$

Сразу отметим очевидную оценку

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \mu_+^{-1/2}\|u\|_{\mathfrak{D}}, \quad u \in \mathfrak{D}. \tag{3.27}$$

Форма $a(\boldsymbol{\xi}) - a(\mathbf{0})$ непрерывна в $\mathfrak{D}$, а потому порождает непрерывный самосопряженный оператор $\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})$ в $\mathfrak{D}$. Таким образом,

$$a(\boldsymbol{\xi})[u,v] - a(\mathbf{0})[u,v] = (\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})u,v)_{\mathfrak{D}}, \quad u,v \in \mathfrak{D}, \tag{3.28}$$

$$\|\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})\|_{\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}} = \sup_{0\neq u\in\mathfrak{D}}\frac{|a(\boldsymbol{\xi})[u,u] - a(\mathbf{0})[u,u]|}{\|u\|_{\mathfrak{D}}^2}.$$

В силу леммы 2.3 отсюда следует оценка

$$\|\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})\|_{\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}} \leqslant \check{c}(d,\alpha)\Theta(\boldsymbol{\xi}). \tag{3.29}$$

С учетом (3.27) справедливо также неравенство

$$\|\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})\|_{\mathfrak{D}\to L_2(\Omega)} \leqslant \mu_+^{-1/2}\check{c}(d,\alpha)\Theta(\boldsymbol{\xi}). \tag{3.30}$$

Для резольвент операторов $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})$ и $\mathbb{A}(\mathbf{0})$ используем прежние обозначения (3.13), (3.14). Согласно [4, гл. 1, §2] справедливо резольвентное тождество

$$R(\boldsymbol{\xi},\zeta) - R_0(\zeta) = -\Upsilon(\zeta)\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})R(\boldsymbol{\xi},\zeta), \tag{3.31}$$

где

$$\Upsilon(\zeta) := I + (\zeta + \mu_+)R_0(\zeta). \tag{3.32}$$

Для дальнейших оценок разности резольвент нам понадобится оценить величину

$$\beta^2(\boldsymbol{\xi}) := \sup_{0\neq u\in\mathfrak{D}}\frac{a(\mathbf{0})[u,u] + \mu_+\|u\|_{L_2(\Omega)}^2}{a(\boldsymbol{\xi})[u,u] + \mu_+\|u\|_{L_2(\Omega)}^2}. \tag{3.33}$$

Имеем

$$\begin{aligned}a(\mathbf{0})[u,u] &= \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int\limits_{\Omega} d\mathbf{x}\,\mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) \frac{|u(\mathbf{x})(e^{i\langle\boldsymbol{\xi},\mathbf{y}-\mathbf{x}\rangle}-1)+(u(\mathbf{x})-e^{i\langle\boldsymbol{\xi},\mathbf{y}-\mathbf{x}\rangle}u(\mathbf{y}))|^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{d+\alpha}} \\ &\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int\limits_{\Omega} d\mathbf{x}\,\mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) \frac{|u(\mathbf{x})|^2|e^{i\langle\boldsymbol{\xi},\mathbf{y}-\mathbf{x}\rangle}-1|^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{d+\alpha}} + \int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int\limits_{\Omega} d\mathbf{x}\,\mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) \frac{|u(\mathbf{x})-e^{i\langle\boldsymbol{\xi},\mathbf{y}-\mathbf{x}\rangle}u(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{d+\alpha}} \\ &= 2b_1(\boldsymbol{\xi})[u,u]+2a(\boldsymbol{\xi})[u,u],\end{aligned}$$

где использовано обозначение (2.8). Отсюда и из оценки (2.10) следует, что

$$\begin{aligned}a(\mathbf{0})[u,u]+\mu_+\|u\|^2_{L_2(\Omega)} &\leqslant 2a(\boldsymbol{\xi})[u,u]+\mu_+(1+2c_0(d,\alpha)|\boldsymbol{\xi}|^\alpha)\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \\ &\leqslant \max\{2,1+2c_0(d,\alpha)\pi^\alpha d^{\alpha/2}\}(a(\boldsymbol{\xi})[u,u]+\mu_+\|u\|^2_{L_2(\Omega)}).\end{aligned}$$

Мы учли, что $|\boldsymbol{\xi}|\leqslant\pi\sqrt{d}$ при $\boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}$. Следовательно,

$$\beta^2(\boldsymbol{\xi})\leqslant\beta_0^2(d,\alpha):=\max\{2,1+2c_0(d,\alpha)\pi^\alpha d^{\alpha/2}\}. \tag{3.34}$$

Оценим теперь разность резольвент при $\zeta\in\Gamma$, применяя тождество (3.31):

$$\|R(\boldsymbol{\xi},\zeta)-R_0(\zeta)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant\|\Upsilon(\zeta)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\|\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})\|_{\mathfrak{D}\to L_2(\Omega)}\|R(\boldsymbol{\xi},\zeta)\|_{L_2(\Omega)\to\mathfrak{D}}. \tag{3.35}$$

С учетом (3.17), (3.32) и оценки $|\zeta|\leqslant 2d_0/3$ при $\zeta\in\Gamma$ получаем

$$\|\Upsilon(\zeta)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant 1+|\zeta+\mu_+|\|R_0(\zeta)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant 3+3\mu_+d_0^{-1},\quad \zeta\in\Gamma. \tag{3.36}$$

Далее,

$$\begin{aligned}&\|R(\boldsymbol{\xi},\zeta)\|_{L_2(\Omega)\to\mathfrak{D}}=\|(\mathbb{A}(\mathbf{0})+\mu_+I)^{1/2}R(\boldsymbol{\xi},\zeta)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \\ &\leqslant\|(\mathbb{A}(\mathbf{0})+\mu_+I)^{1/2}(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})+\mu_+I)^{-1/2}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\|(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})+\mu_+I)^{1/2}R(\boldsymbol{\xi},\zeta)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{3.37}$$

Первый сомножитель справа равен $\beta(\boldsymbol{\xi})$; см. (3.33). Для второго сомножителя с помощью тождества Гильберта

$$R(\boldsymbol{\xi},\zeta)=(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})+\mu_+I)^{-1}(I+(\mu_++\zeta)R(\boldsymbol{\xi},\zeta)) \tag{3.38}$$

имеем

$$\begin{aligned}&\|(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})+\mu_+I)^{1/2}R(\boldsymbol{\xi},\zeta)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}=\|(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})+\mu_+I)^{-1/2}(I+(\mu_++\zeta)R(\boldsymbol{\xi},\zeta))\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \\ &\leqslant\mu_+^{-1/2}(1+(\mu_++2d_0/3)3d_0^{-1})=\mu_+^{-1/2}(3+3\mu_+d_0^{-1}),\quad\zeta\in\Gamma,\quad|\boldsymbol{\xi}|\leqslant\delta_0(\alpha,\mu).\end{aligned} \tag{3.39}$$

Мы использовали (3.17) и оценку $|\zeta|\leqslant 2d_0/3$ при $\zeta\in\Gamma$. В итоге с учетом (3.34) получаем

$$\|R(\boldsymbol{\xi},\zeta)\|_{L_2(\Omega)\to\mathfrak{D}}\leqslant\beta_0(d,\alpha)\mu_+^{-1/2}(3+3\mu_+d_0^{-1}),\quad\zeta\in\Gamma,\quad|\boldsymbol{\xi}|\leqslant\delta_0(\alpha,\mu). \tag{3.40}$$

Сопоставляя (3.30), (3.35), (3.36) и (3.40), приходим к неравенству

$$\|R(\boldsymbol{\xi},\zeta)-R_0(\zeta)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant\mu_+^{-1}\check{c}(d,\alpha)\beta_0(d,\alpha)(3+3\mu_+d_0^{-1})^2\Theta(\boldsymbol{\xi}),\quad\zeta\in\Gamma,\quad|\boldsymbol{\xi}|\leqslant\delta_0(\alpha,\mu). \tag{3.41}$$

Теперь из представления (3.15) и из (3.9), (3.41) вытекает оценка

$$\|F(\boldsymbol{\xi})-P\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant\frac{(\pi+1)\check{c}(d,\alpha)\beta_0(d,\alpha)d_0(3+3\mu_+d_0^{-1})^2}{3\pi\mu_+}\Theta(\boldsymbol{\xi}),\quad|\boldsymbol{\xi}|\leqslant\delta_0(\alpha,\mu).$$

Это завершает доказательство искомой оценки (3.26). □

Предложение 3.5. *Пусть выполнены условия* (1.1), (1.2) *и* $1\leqslant\alpha<2$. *Тогда при* $|\boldsymbol{\xi}|\leqslant\delta_0(\alpha,\mu)$ *справедливо представление*

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})F(\boldsymbol{\xi})=\mu_+P\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})P+\widetilde{\Phi}(\boldsymbol{\xi}). \tag{3.42}$$

Оператор $\widetilde{\Phi}(\boldsymbol{\xi})$ *подчинен оценке*

$$\|\widetilde{\Phi}(\boldsymbol{\xi})\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C_2(\alpha,\mu)\Theta(\boldsymbol{\xi})^2, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(\alpha,\mu), \tag{3.43}$$

где $\Theta(\boldsymbol{\xi})$ *определено в* (2.6). *Постоянная* $C_2(\alpha,\mu)$ *контролируется в терминах величин* d, α, μ_-, μ_+.

Доказательство. Итерируя резольвентное тождество (3.31), получаем

$$R(\boldsymbol{\xi},\zeta) = R_0(\zeta) - \Upsilon(\zeta)\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta) + \Upsilon(\zeta)\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})\Upsilon(\zeta)\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})R(\boldsymbol{\xi},\zeta). \tag{3.44}$$

Оценим оператор $\widetilde{Z}_1(\boldsymbol{\xi},\zeta) := \Upsilon(\zeta)\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})\Upsilon(\zeta)\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})R(\boldsymbol{\xi},\zeta)$. С учетом (3.32) имеем

$$\widetilde{Z}_1(\boldsymbol{\xi},\zeta) = \Upsilon(\zeta)\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})^2R(\boldsymbol{\xi},\zeta) + (\zeta+\mu_+)\Upsilon(\zeta)\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})R(\boldsymbol{\xi},\zeta).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\|\widetilde{Z}_1(\boldsymbol{\xi},\zeta)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant{}& \|\Upsilon(\zeta)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\|\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})\|_{\mathfrak{D}\to L_2(\Omega)}\|R(\boldsymbol{\xi},\zeta)\|_{L_2(\Omega)\to\mathfrak{D}} \\ &\times \left(\|\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})\|_{\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}} + |\zeta+\mu_+|\|\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})\|_{\mathfrak{D}\to L_2(\Omega)}\|R_0(\zeta)\|_{L_2(\Omega)\to\mathfrak{D}}\right).\end{aligned} \tag{3.45}$$

Аналогично (3.37)–(3.39) получаем

$$\begin{aligned}&\|R_0(\zeta)\|_{L_2(\Omega)\to\mathfrak{D}} = \|(\mathbb{A}(\mathbf{0})+\mu_+I)^{1/2}R_0(\zeta)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \\ &= \|(\mathbb{A}(\mathbf{0})+\mu_+I)^{-1/2}(I+(\mu_++\zeta)R_0(\zeta))\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mu_+^{-1/2}(3+3\mu_+d_0^{-1}).\end{aligned} \tag{3.46}$$

Сопоставляя (3.29), (3.30), (3.36), (3.40), (3.45) и (3.46), приходим к неравенству

$$\|\widetilde{Z}_1(\boldsymbol{\xi},\zeta)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \widetilde{C}_2(\alpha,\mu)\Theta(\boldsymbol{\xi})^2, \quad \zeta\in\Gamma, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(\alpha,\mu), \tag{3.47}$$

с постоянной

$$\widetilde{C}_2(\alpha,\mu) = \check{c}(d,\alpha)^2\beta_0(d,\alpha)\mu_+^{-1}(3+3\mu_+d_0^{-1})^2\left(1+(\mu_++2d_0/3)\mu_+^{-1}(3+3\mu_+d_0^{-1})\right).$$

Применяя формулу Рисса (3.11) и представление (3.44), получаем

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})F(\boldsymbol{\xi}) = G_0 + \widetilde{G}_1(\boldsymbol{\xi}) + \widetilde{\Phi}(\boldsymbol{\xi}), \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(\alpha,\mu),$$

где G_0 определено в (3.22) и

$$\widetilde{G}_1(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \Upsilon(\zeta)\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\zeta\,d\zeta, \tag{3.48}$$

$$\widetilde{\Phi}(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \widetilde{Z}_1(\boldsymbol{\xi},\zeta)\zeta\,d\zeta. \tag{3.49}$$

Как уже было проверено, $G_0=0$. Оператор (3.49) оценим с помощью (3.47):

$$\|\widetilde{\Phi}(\boldsymbol{\xi})\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{2(\pi+1)d_0^2}{9\pi}\widetilde{C}_2(\alpha,\mu)\Theta(\boldsymbol{\xi})^2 =: C_2(\alpha,\mu)\Theta(\boldsymbol{\xi})^2, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(\alpha,\mu),$$

что доказывает (3.43).

Подставим разложение (3.25) в контурный интеграл (3.48) и воспользуемся тем, что оператор-функция $R_0^\perp(\zeta)$ голоморфна внутри контура Γ. Получаем

$$\begin{aligned}\widetilde{G}_1(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \Big(I+(\zeta+\mu_+)\Big(-\frac{1}{\zeta}P+R_0^\perp(\zeta)\Big)\Big)\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})\Big(-\frac{1}{\zeta}P+R_0^\perp(\zeta)\Big)\zeta\,d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{1}{\zeta}\mu_+P\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})P\,d\zeta = \mu_+P\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})P.\end{aligned}$$

В итоге приходим к представлению (3.42). $\square$

Замечание 3.6. *Согласно определению оператора* $\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})$ (*см.* (3.28)) *с учетом того, что* P — *ортопроектор на* $\operatorname{Ker}\mathbb{A}(\mathbf{0})$, *а потому* $a(\mathbf{0})[\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})Pu, Pv] = 0$, *имеем*

$$a(\boldsymbol{\xi})[Pu, Pv] - a(\mathbf{0})[Pu, Pv] = \mu_+(\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})Pu, Pv)_{L_2(\Omega)}, \quad u, v \in L_2(\Omega). \tag{3.50}$$

Это означает, что оператор $\mu_+ P\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})P$ *ограничен в* $L_2(\Omega)$ *и отвечает форме в левой части* (3.50). *Для единообразия записи при* $1 \leqslant \alpha < 2$ *будем использовать для этого оператора то же обозначение, что и в случае* $0 < \alpha < 1$:

$$\mu_+ P\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})P = P\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})P.$$

3.3. **Анализ оператора $P\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})P$.** Согласно определению оператора $\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})$ и равенству $P = (\cdot, \mathbf{1}_\Omega)\mathbf{1}_\Omega$ с учетом замечания 3.6 имеем

$$P\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})P = \rho(\boldsymbol{\xi})P, \tag{3.51}$$

где

$$\rho(\boldsymbol{\xi}) = a(\boldsymbol{\xi})[\mathbf{1}_\Omega, \mathbf{1}_\Omega] - a(\mathbf{0})[\mathbf{1}_\Omega, \mathbf{1}_\Omega] = a(\boldsymbol{\xi})[\mathbf{1}_\Omega, \mathbf{1}_\Omega] = \int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int\limits_{\Omega} d\mathbf{x}\, \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{1 - \cos(\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} - \mathbf{y}\rangle)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+\alpha}}. \tag{3.52}$$

Разложим периодическую функцию $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ в ряд Фурье:

$$\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d} \widehat{\mu}_{\mathbf{m},\mathbf{l}} e^{2\pi i(\langle \mathbf{m}, \mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{l}, \mathbf{y}\rangle)}. \tag{3.53}$$

Коэффициенты ряда (3.53) заданы выражениями

$$\widehat{\mu}_{\mathbf{m},\mathbf{l}} = \int\limits_{\Omega} \int\limits_{\Omega} d\mathbf{x}\, d\mathbf{y}\, \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) e^{-2\pi i(\langle \mathbf{m}, \mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{l}, \mathbf{y}\rangle)}, \quad \mathbf{m}, \mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d.$$

Из условия симметрии $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mu(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ следует, что $\widehat{\mu}_{\mathbf{m},\mathbf{l}} = \widehat{\mu}_{\mathbf{l},\mathbf{m}}$, $\mathbf{m}, \mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d$.

Положим

$$\mu^0 := \widehat{\mu}_{\mathbf{0},\mathbf{0}} = \int\limits_{\Omega} \int\limits_{\Omega} d\mathbf{x}\, d\mathbf{y}\, \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \tag{3.54}$$

Лемма 3.7. *Функция* $\rho(\boldsymbol{\xi})$, *определенная выражением* (3.52), *допускает представление*

$$\rho(\boldsymbol{\xi}) = \mu^0 V_\alpha(\boldsymbol{\xi}) + \rho_*(\boldsymbol{\xi}), \tag{3.55}$$

$$\rho_*(\boldsymbol{\xi}) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{z}\, \mu_*(\mathbf{z}) \frac{1 - \cos(\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{z}\rangle)}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha}}, \tag{3.56}$$

где μ^0 *определено в* (3.54), $V_\alpha(\boldsymbol{\xi})$ *определено в* (1.9), *а* μ_* — $\mathbb{Z}^d$*-периодическая четная функция с нулевым средним, определенная выражением* $\mu_*(\mathbf{z}) = \int_\Omega \mu(\mathbf{x}, \mathbf{z} + \mathbf{x})\, d\mathbf{x} - \mu^0$. *Для функции* μ_* *справедливы оценки* (3.59) *и представление* (3.60).

Доказательство. Из (3.52) с помощью замены $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ получаем

$$\rho(\boldsymbol{\xi}) = \int\limits_{\Omega} d\mathbf{x} \int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{z}\, \mu(\mathbf{x}, \mathbf{z} + \mathbf{x}) \frac{1 - \cos(\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{z}\rangle)}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha}} = \int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{z}\, f(\mathbf{z}) \frac{1 - \cos(\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{z}\rangle)}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha}}, \tag{3.57}$$

где

$$f(\mathbf{z}) = \int\limits_{\Omega} d\mathbf{x}\, \mu(\mathbf{x}, \mathbf{z} + \mathbf{x}).$$

Отметим, что в силу свойств (1.1), (1.2) функция $f(\mathbf{z})$ — $\mathbb{Z}^d$-периодическая, выполнено $f(\mathbf{z}) = f(-\mathbf{z})$, справедливы оценки $\mu_- \leqslant f(\mathbf{z}) \leqslant \mu_+$.

Вычислим среднее значение функции $f(\mathbf{z})$, учитывая периодичность функции μ:

$$\int\limits_{\Omega} f(\mathbf{z})\,d\mathbf{z} = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} d\mathbf{z}\,d\mathbf{x}\,\mu(\mathbf{x},\mathbf{z}+\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} d\mathbf{y}\,d\mathbf{x}\,\mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mu^0.$$

Положим

$$\mu_*(\mathbf{z}) := f(\mathbf{z}) - \mu^0. \tag{3.58}$$

Из (3.57), (3.58) с учетом (1.8) вытекает представление (3.55), (3.56).

Отметим, что $\mu_*(\mathbf{z})$ — $\mathbb{Z}^d$-периодическая четная функция с нулевым средним, выполнены оценки

$$\mu_- - \mu^0 \leqslant \mu_*(\mathbf{z}) \leqslant \mu_+ - \mu^0. \tag{3.59}$$

Вычислим коэффициенты Фурье для функции μ_*. Нулевой коэффициент равен нулю. При $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ имеем:

$$\widehat{\mu}_{*,\mathbf{m}} = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} d\mathbf{z}\,d\mathbf{x}\,(\mu(\mathbf{x},\mathbf{z}+\mathbf{x}) - \mu^0)e^{-2\pi i\langle \mathbf{m},\mathbf{z}\rangle} = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} d\mathbf{x}\,d\mathbf{y}\,\mu(\mathbf{x},\mathbf{y})e^{-2\pi i\langle \mathbf{m},\mathbf{y}-\mathbf{x}\rangle} = \widehat{\mu}_{-\mathbf{m},\mathbf{m}}.$$

Следовательно,

$$\mu_*(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^d\setminus\{\mathbf{0}\}} \widehat{\mu}_{-\mathbf{m},\mathbf{m}} e^{2\pi i\langle \mathbf{m},\mathbf{z}\rangle}.$$

С учетом условий симметрии $\widehat{\mu}_{\mathbf{m},-\mathbf{m}} = \widehat{\mu}_{-\mathbf{m},\mathbf{m}}$ окончательно получаем

$$\mu_*(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^d\setminus\{\mathbf{0}\}} \widehat{\mu}_{\mathbf{m},-\mathbf{m}} \cos(2\pi\langle \mathbf{m},\mathbf{z}\rangle). \tag{3.60}$$

$\square$

Лемма 3.8. *Пусть выполнены условия* (1.1), (1.2) *и* $0<\alpha<2$. *Функция* $\rho_*(\boldsymbol{\xi})$, *определенная выражением* (3.56), *при* $\boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}$ *допускает оценку*

$$|\rho_*(\boldsymbol{\xi})| \leqslant C_3(\alpha,\mu)\begin{cases} |\boldsymbol{\xi}|^{1+\alpha}, & 0<\alpha<1,\\ |\boldsymbol{\xi}|^2(1+|\ln|\boldsymbol{\xi}||), & \alpha=1,\\ |\boldsymbol{\xi}|^2, & 1<\alpha<2.\end{cases} \tag{3.61}$$

Постоянная $C_3(\alpha,\mu)$ *контролируется в терминах величин* d, α, μ_+.

Доказательство. Выберем число $R = R(d,\alpha)$ из условия

$$\left(\frac{R}{R-\sqrt{d}}\right)^{d+\alpha+1} = 2,$$

то есть

$$R(d,\alpha) = \frac{\sqrt{d}\,2^{\frac{1}{d+\alpha+1}}}{2^{\frac{1}{d+\alpha+1}} - 1}.$$

Пусть Σ — множество индексов $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$, для которых ячейка $\Omega+\mathbf{n}$ имеет непустое пересечение с множеством $\{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d : R \leqslant |\mathbf{z}| \leqslant R\pi\sqrt{d}|\boldsymbol{\xi}|^{-1}\}$. Положим

$$\Xi_1 = \bigcup_{\mathbf{n}\in\Sigma}(\Omega+\mathbf{n}),\quad \Xi_2 = (\mathbb{R}^d\setminus\Xi_1)\cap\{\mathbf{z} : |\mathbf{z}|<R\},\quad \Xi_3 = (\mathbb{R}^d\setminus\Xi_1)\cap\{\mathbf{z} : |\mathbf{z}| > R\pi\sqrt{d}|\boldsymbol{\xi}|^{-1}\}.$$

Из условия на R, в частности, следует, что

$$\frac{|\mathbf{z}_1|^{d+\alpha-1}}{|\mathbf{z}_2|^{d+\alpha-1}} \leqslant 2,\quad \mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2 \in \Omega+\mathbf{n},\quad \mathbf{n}\in\Sigma. \tag{3.62}$$

Очевидно,

$$\rho_*(\boldsymbol{\xi}) = \rho_*^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) + \rho_*^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) + \rho_*^{(3)}(\boldsymbol{\xi}), \tag{3.63}$$

где

$$\rho_*^{(j)}(\boldsymbol{\xi}) = \int\limits_{\Xi_j} d\mathbf{z}\,\mu_*(\mathbf{z})\frac{1-\cos(\langle\boldsymbol{\xi},\mathbf{z}\rangle)}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha}}, \quad j = 1,2,3.$$

Оценим функцию $\rho_*^{(2)}(\boldsymbol{\xi})$, используя неравенство $|\mu_*(\mathbf{x})| \leqslant \mu_+$ (вытекающее из (3.59)) и очевидные соотношения $1-\cos(\langle\boldsymbol{\xi},\mathbf{z}\rangle) = 2\sin^2(\frac{\langle\boldsymbol{\xi},\mathbf{z}\rangle}{2}) \leqslant \frac{|\boldsymbol{\xi}|^2|\mathbf{z}|^2}{2}$:

$$|\rho_*^{(2)}(\boldsymbol{\xi})| \leqslant \frac{1}{2}\mu_+|\boldsymbol{\xi}|^2 \int\limits_{|\mathbf{z}|<R} \frac{d\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha-2}} = C_3^{(2)}|\boldsymbol{\xi}|^2, \quad C_3^{(2)} = \frac{\mu_+\omega_d R^{2-\alpha}}{2(2-\alpha)}. \tag{3.64}$$

Пусть $\mathbf{n}\in\Sigma$. Введем обозначения

$$\varphi_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{z}) := \frac{1-\cos(\langle\boldsymbol{\xi},\mathbf{z}\rangle)}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha}}, \quad \varphi_{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathbf{n})} := \int\limits_{\Omega+\mathbf{n}} \varphi_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{z})\,d\mathbf{z}.$$

В силу условия $\int_\Omega \mu_*(\mathbf{z})\,d\mathbf{z} = 0$ и периодичности функции μ_* имеем

$$\int\limits_{\Omega+\mathbf{n}} d\mathbf{z}\,\mu_*(\mathbf{z})\varphi_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{z}) = \int\limits_{\Omega+\mathbf{n}} d\mathbf{z}\,\mu_*(\mathbf{z})\big(\varphi_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{z}) - \varphi_{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathbf{n})}\big).$$

Воспользуемся неравенством

$$\max_{\mathbf{z}\in\Omega+\mathbf{n}} |\varphi_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{z}) - \varphi_{\boldsymbol{\xi}}^{(\mathbf{n})}| \leqslant \sqrt{d}\max_{\mathbf{z}\in\Omega+\mathbf{n}} |\nabla\varphi_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{z})| \leqslant \sqrt{d}\max_{\mathbf{z}\in\Omega+\mathbf{n}} \frac{(d+2+\alpha)|\boldsymbol{\xi}|^2}{2|\mathbf{z}|^{d+\alpha-1}}.$$

Мы учли, что

$$|\nabla\varphi_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{z})| \leqslant \frac{|\boldsymbol{\xi}||\sin(\langle\boldsymbol{\xi},\mathbf{z}\rangle)|}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha}} + (d+\alpha)\frac{1-\cos(\langle\boldsymbol{\xi},\mathbf{z}\rangle)}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha+1}} \leqslant \frac{(d+2+\alpha)|\boldsymbol{\xi}|^2}{2|\mathbf{z}|^{d+\alpha-1}}.$$

Следовательно,

$$\left|\int_{\Omega+\mathbf{n}} d\mathbf{z}\,\mu_*(\mathbf{z})\varphi_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{z})\right| \leqslant \mu_+\sqrt{d}\max_{\mathbf{z}\in\Omega+\mathbf{n}} \frac{(d+2+\alpha)|\boldsymbol{\xi}|^2}{2|\mathbf{z}|^{d+\alpha-1}} \leqslant \mu_+\sqrt{d}(d+2+\alpha)|\boldsymbol{\xi}|^2 \int\limits_{\Omega+\mathbf{n}} \frac{d\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha-1}}.$$

В последнем переходе мы учли (3.62). Суммируя полученные оценки по $\mathbf{n}\in\Sigma$, приходим к неравенству

$$|\rho_*^{(1)}(\boldsymbol{\xi})| \leqslant \sqrt{d}(d+2+\alpha)\mu_+|\boldsymbol{\xi}|^2 \int\limits_{R-\sqrt{d}\leqslant|\mathbf{z}|\leqslant R\pi\sqrt{d}|\boldsymbol{\xi}|^{-1}+\sqrt{d}} \frac{d\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha-1}}. \tag{3.65}$$

Вычисляя интеграл в правой части, получаем

$$\begin{gathered}
|\rho_*^{(1)}(\boldsymbol{\xi})| \leqslant C_3^{(1)} \begin{cases} |\boldsymbol{\xi}|^{1+\alpha}, & 0<\alpha<1, \\ |\boldsymbol{\xi}|^2(1+|\ln|\boldsymbol{\xi}||), & \alpha = 1, \\ |\boldsymbol{\xi}|^2, & 1<\alpha<2, \end{cases} \\
C_3^{(1)} = C_3^{(1)}(d,\alpha) = \sqrt{d}(d+2+\alpha)\mu_+\omega_d \begin{cases} (1-\alpha)^{-1}(R\pi\sqrt{d}+d\pi)^{1-\alpha}, & 0<\alpha<1, \\ \ln(R\pi\sqrt{d}+d\pi), & \alpha=1, \\ (\alpha-1)^{-1}(R-\sqrt{d})^{1-\alpha}, & 1<\alpha<2. \end{cases}
\end{gathered} \tag{3.66}$$

По аналогии с выводом неравенства (3.65), используя на этот раз оценку

$$|\nabla\varphi_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{z})| \leqslant \frac{|\boldsymbol{\xi}||\sin(\langle\boldsymbol{\xi},\mathbf{z}\rangle)|}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha}} + (d+\alpha)\frac{1-\cos(\langle\boldsymbol{\xi},\mathbf{z}\rangle)}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha+1}} \leqslant \frac{|\boldsymbol{\xi}|}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha}} + \frac{2(d+\alpha)}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha+1}},$$

получаем

$$
\begin{aligned}
&|\rho_*^{(3)}(\boldsymbol{\xi})| \leqslant 2\mu_+\sqrt{d} \int\limits_{|\mathbf{z}|>R\pi\sqrt{d}|\boldsymbol{\xi}|^{-1}-\sqrt{d}} d\mathbf{z}\, \left(\frac{|\boldsymbol{\xi}|}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha}} + \frac{2(d+\alpha)}{|\mathbf{z}|^{d+\alpha+1}} \right) \leqslant C_3^{(3)} |\boldsymbol{\xi}|^{1+\alpha},\\
&C_3^{(3)} = 2\mu_+\sqrt{d}\,\omega_d \left(\frac{(R\pi\sqrt{d}-d\pi)^{-\alpha}}{\alpha} + \frac{2(d+\alpha)(R\pi\sqrt{d}-d\pi)^{-1-\alpha}}{1+\alpha} \right).
\end{aligned}
\tag{3.67}
$$

Из (3.63), (3.64), (3.66), (3.67) с учетом неравенства $|\boldsymbol{\xi}| \leqslant \pi\sqrt{d}$ при $\boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}$ получаем искомую оценку (3.61) с постоянной

$$
C_3(\alpha,\mu) = \begin{cases} C_3^{(1)} + C_3^{(2)}(\pi\sqrt{d})^{1-\alpha} + C_3^{(3)}, & 0<\alpha<1,\\ C_3^{(1)} + C_3^{(2)} + C_3^{(3)}, & \alpha=1,\\ C_3^{(1)} + C_3^{(2)} + C_3^{(3)}(\pi\sqrt{d})^{\alpha-1}, & 1<\alpha<2. \end{cases}
$$

□

Теперь из предложений 3.3, 3.5, равенства (3.51) и лемм 3.7, 3.8 вытекает следующее утверждение.

Предложение 3.9. *Пусть выполнены условия* (1.1), (1.2) *и* $0<\alpha<2$. *Тогда при* $|\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(\alpha,\mu)$ *справедлива оценка*

$$
\left\| \mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})F(\boldsymbol{\xi}) - \mu^0 V_\alpha(\boldsymbol{\xi})P \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C_4(\alpha,\mu) \begin{cases} |\boldsymbol{\xi}|^{2\alpha}, & 0<\alpha<1,\\ |\boldsymbol{\xi}|^2(1+|\ln|\boldsymbol{\xi}||)^2, & \alpha=1,\\ |\boldsymbol{\xi}|^2, & 1<\alpha<2. \end{cases}
$$

Здесь μ^0 *определено в* (3.54), *а* $V_\alpha(\boldsymbol{\xi})$ — *в* (1.9). *Постоянная* $C_4(\alpha,\mu)$ *задана выражением*

$$
C_4(\alpha,\mu) = \begin{cases} C_2(\alpha,\mu) + C_3(\alpha,\mu)(\pi\sqrt{d})^{1-\alpha}, & 0<\alpha<1,\\ C_2(\alpha,\mu) + C_3(\alpha,\mu), & 1\leqslant\alpha<2, \end{cases}
$$

и контролируется в терминах величин d, α, μ_-, μ_+.

§ 4. Аппроксимация резольвенты $(\mathbb{A}+\varepsilon^\alpha I)^{-1}$

4.1. **Аппроксимация резольвенты оператора $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})$.** Положим

$$
\Theta(\boldsymbol{\xi}) := \begin{cases} |\boldsymbol{\xi}|^\alpha, & 0<\alpha<1,\\ |\boldsymbol{\xi}|(1+|\ln|\boldsymbol{\xi}||), & \alpha=1,\\ |\boldsymbol{\xi}|, & 1<\alpha<2. \end{cases}
\tag{4.1}
$$

Это обозначение согласовано с (2.6) при $1\leqslant\alpha<2$.

Предложение 4.1. *Пусть выполнены условия* (1.1), (1.2) *и* $0<\alpha<2$. *Положим*

$$
\Xi(\boldsymbol{\xi},\varepsilon) := (\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^\alpha I)^{-1}F(\boldsymbol{\xi}) - \left(\mu^0 V_\alpha(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^\alpha\right)^{-1}P, \quad \boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}, \quad \varepsilon>0.
$$

Здесь μ^0 *определено в* (3.54), *а* $V_\alpha(\boldsymbol{\xi})$ — *в* (1.9). *Справедлива оценка*

$$
\|\Xi(\boldsymbol{\xi},\varepsilon)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{2C_1(\alpha,\mu)\Theta(\boldsymbol{\xi})}{\mu_- c_0(d,\alpha)|\boldsymbol{\xi}|^\alpha+\varepsilon^\alpha} + \frac{C_4(\alpha,\mu)\Theta(\boldsymbol{\xi})^2}{(\mu_- c_0(d,\alpha)|\boldsymbol{\xi}|^\alpha+\varepsilon^\alpha)^2}, \quad |\boldsymbol{\xi}|\leqslant\delta_0(\alpha,\mu), \quad \varepsilon>0,
\tag{4.2}
$$

где $\Theta(\boldsymbol{\xi})$ *определено в* (4.1).

Доказательство. Из предложения 1.5 и (1.9) вытекают оценки

$$\|(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^\alpha I)^{-1}\| \leqslant (\mu_- c_0(d,\alpha)|\boldsymbol{\xi}|^\alpha+\varepsilon^\alpha)^{-1}, \quad \varepsilon>0, \quad \boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}; \tag{4.3}$$

$$(\mu^0 V_\alpha(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^\alpha)^{-1} \leqslant (\mu_- c_0(d,\alpha)|\boldsymbol{\xi}|^\alpha+\varepsilon^\alpha)^{-1}, \quad \varepsilon>0, \quad \boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}. \tag{4.4}$$

Справедливо очевидное тождество

$$\begin{aligned}\Xi(\boldsymbol{\xi},\varepsilon) = F(\boldsymbol{\xi})(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^\alpha I)^{-1}(F(\boldsymbol{\xi})-P)+(F(\boldsymbol{\xi})-P)(\mu^0V_\alpha(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^\alpha)^{-1}P- \\ - F(\boldsymbol{\xi})(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^\alpha I)^{-1}\left(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})F(\boldsymbol{\xi})-\mu^0V_\alpha(\boldsymbol{\xi})P\right)(\mu^0V_\alpha(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^\alpha)^{-1}P.\end{aligned} \tag{4.5}$$

Теперь (4.2) следует из предложений 3.2, 3.4, 3.9 и соотношений (4.3)–(4.5). □

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия* (1.1), (1.2) *и* $0<\alpha<2$. *Тогда при* $\varepsilon>0$ *и* $|\boldsymbol{\xi}|\leqslant\delta_0(\alpha,\mu)$ *справедлива оценка*

$$\left\|(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^\alpha I)^{-1}-(\mu^0V_\alpha(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^\alpha)^{-1}P\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C_5(\alpha,\mu)\begin{cases}1, & 0<\alpha<1,\\ (1+|\ln\varepsilon|)^2, & \alpha=1,\\ \varepsilon^{2-2\alpha}, & 1<\alpha<2.\end{cases} \tag{4.6}$$

Здесь μ^0 *определено в* (3.54), *а* $V_\alpha(\boldsymbol{\xi})$ — *в* (1.9). *Величина* $C_5(\alpha,\mu)$ *контролируется в терминах параметров* d, α, μ_-, μ_+.

Доказательство. Из определения $F(\boldsymbol{\xi})$ и предложения 3.1 следует очевидное неравенство

$$\|(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^\alpha I)^{-1}(I-F(\boldsymbol{\xi}))\| \leqslant \frac{1}{d_0}, \quad |\boldsymbol{\xi}|\leqslant\delta_0(\alpha,\mu), \quad \varepsilon>0. \tag{4.7}$$

При $0<\alpha<1$ из (4.2) непосредственно вытекает оценка

$$\|\Xi(\boldsymbol{\xi},\varepsilon)\| \leqslant \frac{2C_1(\alpha,\mu)}{\mu_-c_0(d,\alpha)}+\frac{C_4(\alpha,\mu)}{(\mu_-c_0(d,\alpha))^2} =: \widetilde{C}_5(\alpha,\mu), \quad |\boldsymbol{\xi}|\leqslant\delta_0(\alpha,\mu), \quad \varepsilon>0, \quad 0<\alpha<1. \tag{4.8}$$

Очевидно, оператор под знаком нормы в (4.6) равен $(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^\alpha I)^{-1}(I-F(\boldsymbol{\xi}))+\Xi(\boldsymbol{\xi},\varepsilon)$, а потому из (4.7) и (4.8) следует оценка (4.6) с постоянной $C_5(\alpha,\mu)=d_0^{-1}+\widetilde{C}_5(\alpha,\mu)$ (в случае $0<\alpha<1$).

В случае $1<\alpha<2$ из (4.2) следует, что

$$\begin{aligned}\|\Xi(\boldsymbol{\xi},\varepsilon)\| &\leqslant |\boldsymbol{\xi}|^{\alpha-1}\cdot\frac{2C_1(\alpha,\mu)|\boldsymbol{\xi}|^{2-\alpha}}{(\mu_-c_0(d,\alpha)|\boldsymbol{\xi}|^\alpha+\varepsilon^\alpha)^{2/\alpha-1}}\cdot\frac{1}{(\mu_-c_0(d,\alpha)|\boldsymbol{\xi}|^\alpha+\varepsilon^\alpha)^{2-2/\alpha}} \\ &+\frac{C_4(\alpha,\mu)|\boldsymbol{\xi}|^2}{(\mu_-c_0(d,\alpha)|\boldsymbol{\xi}|^\alpha+\varepsilon^\alpha)^{2/\alpha}}\cdot\frac{1}{(\mu_-c_0(d,\alpha)|\boldsymbol{\xi}|^\alpha+\varepsilon^\alpha)^{2-2/\alpha}} \\ &\leqslant\Big(\frac{2C_1(\alpha,\mu)(\pi\sqrt{d})^{\alpha-1}}{(\mu_-c_0(d,\alpha))^{2/\alpha-1}}+\frac{C_4(\alpha,\mu)}{(\mu_-c_0(d,\alpha))^{2/\alpha}}\Big)\varepsilon^{2-2\alpha}=:\widetilde{C}_5(\alpha,\mu)\varepsilon^{2-2\alpha}, \\ &\quad |\boldsymbol{\xi}|\leqslant\delta_0(\alpha,\mu), \quad \varepsilon>0, \quad 1<\alpha<2.\end{aligned}$$

Отсюда и из (4.7) следует оценка (4.6) с постоянной $C_5(\alpha,\mu)=d_0^{1-2/\alpha}+\widetilde{C}_5(\alpha,\mu)$ (в случае $1<\alpha<2$).

Наконец, в случае $\alpha=1$ из (4.2) следует, что

$$\begin{aligned}\|\Xi(\boldsymbol{\xi},\varepsilon)\| &\leqslant \frac{2C_1(1,\mu)|\boldsymbol{\xi}|(1+|\ln|\boldsymbol{\xi}||)}{\mu_-c_0(d,1)|\boldsymbol{\xi}|+\varepsilon}+\frac{C_4(1,\mu)|\boldsymbol{\xi}|^2(1+|\ln|\boldsymbol{\xi}||)^2}{(\mu_-c_0(d,1)|\boldsymbol{\xi}|+\varepsilon)^2} \\ &\leqslant \widetilde{C}_5(1,\mu)(1+|\ln\varepsilon|)^2, \quad |\boldsymbol{\xi}|\leqslant\delta_0(\alpha,\mu), \quad \varepsilon>0, \quad \alpha=1.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Мы воспользовались элементарным неравенством

$$\sup_{0<s\leqslant\delta_0}\frac{s(1+|\ln s|)}{cs+\varepsilon}\leqslant C_{\max}(c)(1+|\ln\varepsilon|), \quad \varepsilon>0,$$

которое несложно проверить, исследуя задачу на максимум функции $f(s) = \frac{s(1+|\ln s|)}{cs+\varepsilon}$. В (4.9) константа имеет вид $\widetilde{C}_5(1,\mu) = 2C_1(1,\mu)C_{\max}(\mu_- c_0(d,1)) + C_4(1,\mu)C^2_{\max}(\mu_- c_0(d,1))$. Из (4.7) и (4.9) следует оценка (4.6) с постоянной $C_5(1,\mu) = d_0^{-1} + \widetilde{C}_5(1,\mu)$ (в случае $\alpha = 1$). $\square$

Введем *эффективный оператор* — самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d)$, порожденный формой вида (1.3) с постоянным коэффициентом μ^0, определенным в (3.54):

$$\mathbb{A}^0 := \mathbb{A}(\alpha,\mu^0) = \mu^0\mathbb{A}_0(\alpha) = \mu^0 c_0(d,\alpha)(-\Delta)^\gamma, \quad \operatorname{Dom}\mathbb{A}^0 = H^\alpha(\mathbb{R}^d). \tag{4.10}$$

С помощью унитарного преобразования Гельфанда оператор $\mathbb{A}^0$ раскладывается в прямой интеграл:

$$\mathbb{A}^0 = \mathcal{G}^*\Big(\int_{\widetilde{\Omega}} \oplus \mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi}\Big)\mathcal{G}. \tag{4.11}$$

Здесь

$$\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{A}(\boldsymbol{\xi};\alpha,\mu^0) = \mu^0\mathbb{A}_0(\boldsymbol{\xi};\alpha) = \mu^0 c_0(d,\alpha)|\mathbf{D}+\boldsymbol{\xi}|^\alpha, \quad \operatorname{Dom}\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi}) = \widetilde{H}^\alpha(\Omega);$$

см. (1.14).

Из теоремы 4.2 легко выводится следующий результат.

Теорема 4.3. *Пусть выполнены условия* (1.1), (1.2) *и* $0 < \alpha < 2$. *Тогда при* $\varepsilon > 0$ *и* $\boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}$ *справедлива оценка*

$$\big\|(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^\alpha I)^{-1} - (\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^\alpha I)^{-1}\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathrm{C}(\alpha,\mu)\begin{cases} 1, & 0<\alpha<1,\\ (1+|\ln\varepsilon|)^2, & \alpha = 1,\\ \varepsilon^{2-2\alpha}, & 1<\alpha<2.\end{cases} \tag{4.12}$$

Постоянная $\mathrm{C}(\alpha,\mu)$ *контролируется в терминах параметров* d, α, μ_-, μ_+.

Доказательство. Из (4.3) и (4.4) вытекают очевидные оценки

$$\begin{gathered}\big\|(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^\alpha I)^{-1}\big\| \leqslant (\mu_- c_0(d,\alpha)\delta_0(\alpha,\mu)^\alpha)^{-1}, \quad \varepsilon>0, \quad \boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}, \quad |\boldsymbol{\xi}| \geqslant \delta_0(\alpha,\mu),\\ \big(\mu^0 V_\alpha(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^\alpha\big)^{-1} \leqslant (\mu_- c_0(d,\alpha)\delta_0(\alpha,\mu)^\alpha)^{-1}, \quad \varepsilon>0, \quad \boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}, \quad |\boldsymbol{\xi}| \geqslant \delta_0(\alpha,\mu).\end{gathered}$$

Отсюда и из теоремы 4.2 следует оценка

$$\big\|(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^\alpha I)^{-1} - (\mu^0 V_\alpha(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^\alpha)^{-1}P\big\| \leqslant \check{C}_5(\alpha,\mu)\begin{cases} 1, & 0<\alpha<1,\\ (1+|\ln\varepsilon|)^2, & \alpha = 1,\\ \varepsilon^{2-2\alpha}, & 1<\alpha<2,\end{cases} \tag{4.13}$$

при $\varepsilon > 0$ и $\boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}$, где $\check{C}_5(\alpha,\mu) = \max\{C_5(\alpha,\mu), 2(\mu_- c_0(d,\alpha)\delta_0(\alpha,\mu)^\alpha)^{-1}\}$ при $0 < \alpha \leqslant 1$ и $\check{C}_5(\alpha,\mu) = \max\{C_5(\alpha,\mu), 2(\mu_- c_0(d,\alpha)\delta_0(\alpha,\mu)^\alpha)^{1-2/\alpha}\}$ при $1 < \alpha < 2$.

Далее, справедливо очевидное равенство

$$\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi})P = \mu^0 V_\alpha(\boldsymbol{\xi})P,$$

а потому

$$(\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^\alpha I)^{-1}P = \big(\mu^0 V_\alpha(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^\alpha\big)^{-1}P.$$

Перепишем (4.13) в виде

$$\big\|(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^\alpha I)^{-1} - (\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^\alpha I)^{-1}P\big\| \leqslant \check{C}_5(\alpha,\mu)\begin{cases} 1, & 0<\alpha<1,\\ (1+|\ln\varepsilon|)^2, & \alpha = 1,\\ \varepsilon^{2-2\alpha}, & 1<\alpha<2,\end{cases} \tag{4.14}$$

при $\varepsilon > 0$ и $\boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}$. С помощью дискретного преобразования Фурье имеем

$$\big\|(\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^\alpha I)^{-1}(I-P)\big\| = \sup_{0\neq\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}(\mu^0 V_\alpha(2\pi\mathbf{n}+\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^\alpha)^{-1} \leqslant (\mu_- c_0(d,\alpha)\pi^\alpha + \varepsilon^\alpha)^{-1}.$$

Мы учли (1.18) и очевидное неравенство $|2\pi\mathbf{n}+\boldsymbol{\xi}| \geqslant \pi$ при $\boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}$ и $0 \neq \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$. Следовательно,

$$\left\|(\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^\alpha I)^{-1}(I-P)\right\| \leqslant (\mu_- c_0(d,\alpha)\pi^\alpha)^{-1}, \quad \varepsilon > 0, \quad \boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}.$$

Отсюда и из (4.14) вытекает искомая оценка (4.12) с постоянной $\mathrm{C}(\alpha,\mu)$, равной $\check{C}_5(\alpha,\mu) + (\mu_- c_0(d,\alpha)\pi^\alpha)^{-1}$ при $0 < \alpha \leqslant 1$ и равной $\check{C}_5(\alpha,\mu) + (\mu_- c_0(d,\alpha)\pi^\alpha)^{1-2/\alpha}$ при $1 < \alpha < 2$. $\square$

4.2. **Аппроксимация резольвенты** $(\mathbb{A} + \varepsilon^\alpha I)^{-1}$**.**

Теорема 4.4. *Пусть выполнены условия* (1.1), (1.2) *и* $0 < \alpha < 2$. *Тогда при* $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\left\|(\mathbb{A} + \varepsilon^\alpha I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + \varepsilon^\alpha I)^{-1}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}(\alpha,\mu) \begin{cases} 1, & 0 < \alpha < 1, \\ (1 + |\ln\varepsilon|)^2, & \alpha = 1, \\ \varepsilon^{2-2\alpha}, & 1 < \alpha < 2. \end{cases} \tag{4.15}$$

Постоянная $\mathrm{C}(\alpha,\mu)$ *контролируется в терминах параметров* d, α, μ_-, μ_+.

Доказательство. Из разложений (1.17) и (4.11) следует, что оператор под знаком нормы в (4.15) с помощью преобразования Гельфанда раскладывается в прямой интеграл по операторам $(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^\alpha I)^{-1} - (\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^\alpha I)^{-1}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} &\left\|(\mathbb{A} + \varepsilon^\alpha I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + \varepsilon^\alpha I)^{-1}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\qquad = \sup_{\boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}} \left\|(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^\alpha I)^{-1} - (\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^\alpha I)^{-1}\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Поэтому оценка (4.15) вытекает из (4.12). $\square$

§ 5. Усреднение оператора типа Леви

5.1. **Основной результат.** Предполагая выполненными условия (1.1), (1.2) и $0 < \alpha < 2$, рассмотрим семейство операторов $\mathbb{A}_\varepsilon := \mathbb{A}(\alpha, \mu^\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Здесь $\mu^\varepsilon(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \mu(\mathbf{x}/\varepsilon, \mathbf{y}/\varepsilon)$. Тем самым, $\mathbb{A}_\varepsilon$ — самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d)$, порожденный замкнутой квадратичной формой

$$a_\varepsilon[u,u] = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x}\, d\mathbf{y}\, \mu^\varepsilon(\mathbf{x},\mathbf{y}) \frac{|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{d+\alpha}}, \quad u \in H^\gamma(\mathbb{R}^d), \quad \varepsilon > 0.$$

Пусть эффективный оператор $\mathbb{A}^0$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$ определен в (4.10). Напомним, что эффективный коэффициент μ^0 определен в (3.54).

Из теоремы 4.4 с помощью масштабного преобразования выводится следующий результат.

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия* (1.1), (1.2) *и* $0 < \alpha < 2$. *Тогда при* $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\|(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}(\alpha,\mu) \begin{cases} \varepsilon^\alpha, & 0 < \alpha < 1, \\ \varepsilon(1 + |\ln\varepsilon|)^2, & \alpha = 1, \\ \varepsilon^{2-\alpha}, & 1 < \alpha < 2. \end{cases} \tag{5.1}$$

Постоянная $\mathrm{C}(\alpha,\mu)$ *контролируется через величины* d, α, μ_-, μ_+.

Доказательство. Введем масштабное преобразование (семейство унитарных операторов):

$$T_\varepsilon u(\mathbf{x}) := \varepsilon^{d/2} u(\varepsilon\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d), \quad \varepsilon > 0.$$

Нетрудно проверить равенство

$$\mathbb{A}_\varepsilon = \varepsilon^{-\alpha} T_\varepsilon^* \mathbb{A} T_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Следовательно,

$$(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} = T_\varepsilon^* \varepsilon^\alpha (\mathbb{A} + \varepsilon^\alpha I)^{-1} T_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \tag{5.2}$$

Для эффективного оператора также выполнено тождество

$$\mathbb{A}^0 = \varepsilon^{-\alpha} T_\varepsilon^* \mathbb{A}^0 T_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

а потому

$$(\mathbb{A}^0 + I)^{-1} = T_\varepsilon^* \varepsilon^\alpha (\mathbb{A}^0 + \varepsilon^\alpha I)^{-1} T_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \tag{5.3}$$

Из (5.2) и (5.3) с учетом унитарности оператора T_ε вытекает равенство

$$\|(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = \varepsilon^\alpha \|(\mathbb{A} + \varepsilon^\alpha I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + \varepsilon^\alpha I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Отсюда и из теоремы 4.4 вытекает искомая оценка (5.1). □

5.2. **Заключительные замечания.** 1. Погрешность $O(\varepsilon^\alpha)$ в оценке (5.1) — это предельная точность, которую можно достичь, рассматривая процесс усреднения как пороговый эффект на краю спектра. Это ясно из оценки (4.7) и равенства (5.2). Таким образом, при $0 < \alpha < 1$ мы получаем предельную точность уже в старшем порядке приближения. При $1 \leqslant \alpha < 2$ точность хуже предельно возможной и порядок $O(\varepsilon^{2-\alpha})$ ухудшается при росте $\alpha \in (1,2)$. Аппроксимацию можно уточнять за счет учета корректоров. Авторы планируют посвятить этому отдельную работу.

2. Из выражений для постоянных в оценках видно, что постоянная $\mathrm{C}(\alpha,\mu)$ в оценке (5.1) контролируется через величины d, α, μ_-, μ_+ и задается по-разному в трех случаях: $0 < \alpha < 1$, $\alpha = 1$ и $1 < \alpha < 2$. При этом $\mathrm{C}(\alpha,\mu)$ стремится к бесконечности при приближении α к 1 (и слева, и справа), а также при приближении α к 2. При $\alpha = 1$ постоянная $\mathrm{C}(1,\mu)$ зависит лишь от d, μ_-, μ_+.

3. Теорема 5.1 сохраняет силу, если решетку периодов $\mathbb{Z}^d$ заменить на произвольную решетку в $\mathbb{R}^d$. Тогда постоянная в оценке (5.1) будет зависеть не только от d, α, μ_-, μ_+, но и от параметров решетки.

Список литературы

[1] Barlow M., Bass R., Chen Z.-Q., Kassmann M., *Nonlocal Dirichlet forms and symmetric jump processes*, Transactions of the AMS **361** (2009), no. 4, 1963–1999.

[2] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.

[3] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publishing Co., Amsterdam–New York, 1978.

[4] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), вып. 5, 1–108.

[5] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учётом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), вып. 6, 1–104.

[6] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учётом корректора. Приближение решений в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$*, Алгебра и анализ **18** (2006), вып. 6, 1–130.

[7] Braides A., Piatnitski A., *Homogenization of quadratic convolution energies in periodically perforated domains*, Adv. Calc. Var. (2019), https://doi.org/10.1515/acv-2019-0083.

[8] Cont R., Tankov P., *Financial modelling with jump processes*, Chapman and Hall/CRC Financial Mathematics Series, FL, 2004.

[9] Edwards A. M., Phillips R. A., Watkins N. W., Freeman M. P., Murphy E. J., Afanasyev V., Buldyrev S. V., Da Luz M. G. E., Raposo E. P., Stanley H. E., Viswanathan G. M., *Revisiting Lévy flight search patterns of wandering albatrosses, bumblebees and deer*, Nature **449** (2007), 1044–1048.

[10] Жиков В. В., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Докл. РАН **403** (2005), вып. 3, 305–308.

[11] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1993.

[12] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys. **12** (2005), no. 4, 515–524.

[13] Жиков В. В., Пастухова С. Е., *Операторные оценки в теории усреднения*, Успехи матем. наук **71** (2016), вып. 3, 27–122.

[14] Humphries N., Sims D., *Optimal foraging strategies: Lévy walks balance searching and patch exploitation under a very broad range of conditions*, J. Theoret. Biol. **358** (2014), 179–193.

[15] Kassmann M., Piatnitski A., Zhizhina E., *Homogenization of Lévy-type operators with oscillating coefficients*, SIAM J. Math. Anal. **51** (2019), no. 5, 3641–3665.

[16] Kondratiev Yu., Molchanov S., Pirogov S., Zhizhina E., *On ground state of some non local Schrödinger operators*, Appl. Anal. **96** (2017), no. 8, 1390–1400.

[17] Kwasnicki M., *Ten equivalent definitions of the fractional Laplace operator*, Fractional Calculus and Applied Analysis **20** (2017), 7–51.

[18] Nualart D., Schoutens W., *Backward stochastic differential equations and Feynman-Kac formula for Lévy processes, with applications in finance*, Bernoulli **7** (2001), 761–776.

[19] Piatnitski A., Zhizhina E., *Periodic homogenization of nonlocal operators with a convolution-type kernel*, SIAM J. Math. Anal. **49** (2017), no. 1, 64–81.

[20] Piatnitski A., Zhizhina E., *Homogenization of biased convolution type operators*, Asymptot. Anal. **115** (2019), no. 3-4, 241–262.

[21] Piatnitski A., Sloushch V., Suslina T., Zhizhina E., *On operator estimates in homogenization of nonlocal operators of convolution type*, J. Diff. Equ. **352** (2023), 153–188.

[22] Piatnitski A. L., Sloushch V. A., Suslina T. A., Zhihina E. A., *On the homogenization of nonlocal convolution type operators*, Russian J. Math. Phys. **31** (2024), no. 1, 137–145.

[23] Sato K. i., *Lévy processes and infinitely divisible distributions*, Cambridge Stud. Adv. Math. 68, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[24] Скриганов М. М., *Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов*, Тр. МИАН СССР **171** (1985), 3–122.

[25] Суслина Т. А., *Теоретико-операторный подход к усреднению уравнений типа Шрёдингера с периодическими коэффициентами*, Успехи матем. наук **78** (2023), вып. 6.

[26] Uchaikin V. V., Zolotarev V. M., *Chance and stability. Stable distributions and their applications*, in Modern Probability and Statistics, VSP, Utrecht, 1999.

[27] Woyczynski W. A., *Lévy processes in the physical sciences*, in Lévy Processes, Birkhäuser, Boston, MA, 2001, pp. 241-266.