

**Трехпетлевая перенормировка квантового действия  
для пятимерной скалярной кубической модели с использованием  
метода фонового поля и регуляризации обрезанием**

**А. В. Иванов    Н. В. Харук**

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А.Стеклова РАН,  
Фонтанка 27, Санкт-Петербург, 191023, Россия

Санкт-Петербургский международный математический институт им. Леонарда Эйлера,  
Песочная наб. 10, Санкт-Петербург, 197022, Россия

E-mail: regul1@mail.ru

E-mail: natakharuk@mail.ru

09 апреля 2024 г.

*К 90-летию Л.Д.Фаддеева*

**Аннотация.** В работе изучается квантовое действие для пятимерной вещественной теории  $\phi^3$  в случае общего положения с использованием метода фонового поля. Производится трехпетлевая перенормировка с регуляризацией обрезанием в координатном представлении. Представлен явный вид первых трех коэффициентов для констант перенормировки. Обсуждается отсутствие нелокальных сингулярных вкладов и частичные результаты для четвертой поправки.

**Ключевые слова и фразы:** перенормировка, константа перенормировки, скалярная модель, регуляризация обрезанием, функция Грина, квантовое действие, квантовое уравнение движения, диаграмма Фейнмана, три петли, эффективное действие, импульс обрезания, тепловое ядро, деформация, кубическое взаимодействие.

## **ПРЕПРИНТЫ**

Санкт-Петербургского отделения  
Математического института им. В. А. Стеклова  
Российской академии наук

## **PREPRINTS**

of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

---

## **ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР**

С. В. Кисляков

## **РЕДКОЛЛЕГИЯ**

В. М. Бабич, М. А. Всемиров, А. И. Генералов,  
И. А. Ибрагимов, Л. Ю. Колотилина, Ю. В. Матиясевич,  
Н. Ю. Нецветаев, С. И. Репин, Г. А. Серегин

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Санкт-Петербургское отделение Математического института  
им. В.А.Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:  
ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г.  
Выдано Федеральной службой по надзору  
в сфере связи и массовых коммуникаций

## **Контактные данные:**

191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27  
телефоны: (812) 312-40-58; (812) 571-57-54  
e-mail: admin@pdmi.ras.ru  
<https://www.pdmi.ras.ru/preprint/>

Заведующая информационно-издательским сектором В. Н. Симонова

# Содержание

<b>1 Введение</b>	<b>3</b>
<b>2 Постановка задачи и результаты</b>	<b>4</b>
2.1 Основная формулировка . . . . .	4
2.2 Результаты . . . . .	7
<b>3 Первые две поправки</b>	<b>8</b>
<b>4 Третья поправка</b>	<b>10</b>
<b>5 О четвертой петле</b>	<b>13</b>
<b>6 Заключение</b>	<b>14</b>
<b>7 Приложение</b>	<b>15</b>
<b>8 Список литературы</b>	<b>20</b>

## 1 Введение

Регуляризация занимает важное положение в квантовой теории поля [1, 2], особенно, когда речь идет о пертурбативном подходе, в ходе применения которого часто появляются расходящиеся интегралы [3, 4]. К сожалению, в теории регуляризации не существует универсального рецепта, который был бы одинаково хорош для всех моделей. Это, в первую очередь, обусловлено тем фактом, что регуляризация напрямую связана с деформацией классического действия, что в обязательном порядке приводит к потере тех или иных свойств изучаемой модели. Такое положение делает теорию регуляризаций актуальной и востребованной областью исследований.

Данная работа посвящена изучению регуляризации обрезанием в координатном представлении, которая впервые была предложена в работе [5] и успешно применена к ряду моделей [6–9]. Кроме этого в работах [10, 11] был изучен ряд важных свойств данного подхода. К примеру, была получена связь с теорией усреднений, выведено спектральное представление, а также получен критерий применимости. Такие свойства делают предложенную регуляризацию весьма привлекательной и наглядной с вычислительной точки зрения.

В тексте обсуждается трехпетлевая перенормировка пятимерной скалярной кубической модели с применением метода фонового поля и упомянутой регуляризации. Несмотря на то, что теория является суперперенормируемой, изучаемая задача является новой и актуальной. Она позволяет протестировать предложенную регуляризацию. В частности, было показано, что сингулярные слабые «нелокального» типа успешно сокращаются, а результаты согласуются с ранее полученными. Также работа содержит важные вычисления технического характера, которые предоставляют новые интегральные соотношения и основываются на нетривиальных рассуждениях.

Структура работы может быть описана следующим образом. В секции 2 содержится постановка задачи с описанием квантового действия и правил регуляризации. В заключительной части раздела формулируются основные результаты в виде теоремы 1. Далее, в секции 3 производится подсчет первых двух квантовых поправок, а в секции 4 изучается третья поправка и дополнительный метод проверки результата. При этом вычисления технического характера по нахождению асимптотических разложений для базовых интегралов вынесены в отдельный раздел 7. В секции 5 изучается частичный ответ для четвертой поправки. В заключении содержатся полезные комментарии и благодарности.

## 2 Постановка задачи и результаты

### 2.1 Основная формулировка

Рассмотрим стандартное 5-мерное евклидово пространство  $\mathbb{R}^5$ . Поскольку в работе используется регуляризация с обрезанием в координатном представлении, то размерность пространства на протяжении всех вычислений будет оставаться фиксированной (без деформации). Элементы  $\mathbb{R}^5$  будут обозначаться буквами  $x, y, z$  (с возможными индексами), а их отдельные компоненты при помощи греческих индексов  $\mu, \nu$ . Также пусть латинские индексы  $a, b, c$  принимают значения в множестве  $\{1, \dots, n\}$ , где  $n \in \mathbb{N}$ . Далее определим скалярное вещественное поле  $\phi_a(\cdot)$  и классическое действие  $S[\cdot]$  для кубической модели в общем положении

$$S[\phi] = \int_{\mathbb{R}^5} d^5x \left( t^a \phi_a(x) + \frac{1}{2} \phi_a(x) \left( \delta^{ab} A_0(x) + M^{ab} \right) \phi_b(x) + \frac{g^{abc}}{3!} \phi_a(x) \phi_b(x) \phi_c(x) \right), \quad (1)$$

где  $A_0(x) = -\partial_{x_\mu} \partial_{x^\mu}$  – оператор Лапласа, и  $t^a, M^{ab}, g^{abc}$  – полностью симметричные коэффициенты. Также отметим, что  $g^{abc}$  играет роль константы связи.

После формулировки классической теории перейдем к квантовому действию. Оно определяется следующим функциональным интегралом

$$e^{-W/\hbar} = \int_{\mathcal{H}} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]/\hbar}, \quad (2)$$

где  $\hbar$  – постоянная Планка,  $\mathcal{H}$  – функциональное пространство, элементы которого удовлетворяют некоторым фиксированным граничным условиям. Как известно, объект (2) содержит расхожимости, которые при пертурбативном подходе проявляются наличием расходящихся интегралов в коэффициентах асимптотического ряда. Это приводит к необходимости ввести регуляризацию, которая в рамках данной работы заключается в добавлении к классическому действию (1) регуляризующей добавки  $S[\phi, \Lambda]$ . Согласно предложенному ранее методу, см. секцию 4 в [9], добавка имеет следующий вид

$$S[\phi, \Lambda] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^5} d^5x \phi_a(x) \left( A_0^\Lambda(x) - A_0(x) \right) \phi_a(x),$$

где  $A_0^\Lambda(x)$  – деформированный оператор Лапласа, такой что отвечающая ему функция Грина  $R_0^\Lambda(\cdot)$  получается переходом

$$R_0(x) = \frac{1}{8\pi^2|x|^3} \rightarrow R_0^\Lambda(x) = \frac{\Lambda^3}{8\pi^2} \mathbf{f}(|x|^2\Lambda^2) + \frac{1}{8\pi^2} \begin{cases} \Lambda^3, & |x| \leq 1/\Lambda; \\ |x|^{-3}, & |x| > 1/\Lambda. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь  $\Lambda$  – размерный параметр регуляризации, и  $\mathbf{f}(\cdot)$  – вспомогательная регуляризующая функция. Она обладает следующими свойствами

$$\mathbf{f}(\cdot) \in C([0, +\infty), \mathbb{R}), \quad \text{supp}(\mathbf{f}(\cdot)) \subset [0, 1], \quad A_0(x) \Lambda^3 \mathbf{f}(|x-y|^2\Lambda^2) \xrightarrow{\Lambda \rightarrow +\infty} 0.$$

В частности, последнее свойство гарантирует сходимость деформированной функции  $R_0^\Lambda(\cdot)$  к первоначальной  $R_0(\cdot)$ , а также комбинации  $A_0(x) R_0^\Lambda(x-y)$  к  $\delta(x-y)$  в смысле обобщенных функций на классе Шварца  $S(\mathbb{R}^5)$ . В итоге регуляризованное квантовое действие имеет вид

$$W \xrightarrow{\text{рег.}} W[\Lambda] = -\hbar \ln \left( \int_{\mathcal{H}} \mathcal{D}\phi e^{-(S[\phi] + S[\phi, \Lambda])/ \hbar} \right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \hbar^n \kappa_n,$$

где числовые коэффициенты  $\kappa_n$  осуществляют сдвиг сингулярной плотности, не зависящей от граничных условий. Такой объект уже не содержит расхожимостей, хотя имеет коэффициенты, сингулярные по параметру  $\Lambda$ . Для того, чтобы их сократить, необходимо произвести перенормировку.

Учитывая то, что кубическая модель в пятимерном пространстве является суперперенормируемой, см. [12], процедура носит мультипликативный характер и заключается в сдвиге двух коэффициентов

$$t^a \rightarrow t_r^a = t^a + \sum_{k=1}^{+\infty} \hbar^k t_{r,k}^a, \quad M^{ab} \rightarrow M_r^{ab} = M^{ab} + \sum_{k=1}^{+\infty} \hbar^k M_{r,k}^{ab}. \quad (4)$$

В этом случае перенормированные действия получаются в результате переходов

$$S[\phi] \xrightarrow{\text{пен.}} S_{\text{ren}}[\phi] = S[\phi] \Big|_{t^a \rightarrow t_r^a, M^{ab} \rightarrow M_r^{ab}},$$

$$W[\Lambda] \xrightarrow{\text{пен.}} W_{\text{ren}}[\Lambda] = -\hbar \ln \left( \int_{\mathcal{H}} \mathcal{D}\phi e^{-(S_{\text{ren}}[\phi] + S_{\Lambda}[\phi])/\hbar} \right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \hbar^n \kappa_n. \quad (5)$$

Последний объект уже не содержит сингулярных слагаемых, и предельная величина  $W_{\text{ren}}[+\infty]$  является конечной.

Для нахождения коэффициентов перенормировки (4) квантовое действие (5) удобно разложить в ряд. Для этого воспользуемся методом фонового поля [13–18], который заключается в сдвиге

$$\phi_a(x) \rightarrow B_a(x) + \sqrt{\hbar} \phi_a(x),$$

где  $B_a(x)$  – фоновое поле. Оно является решением квантового уравнения движения  $Q_a[B](x) = 0$  и удовлетворяет граничным условиям для функций из  $\mathcal{H}$ . Следовательно, квантовое действие  $W_{\text{ren}}[\Lambda]$  в действительности является функционалом  $W_{\text{ren}}[B, \Lambda]$ , зависящим от фонового поля  $B_a(x)$ .

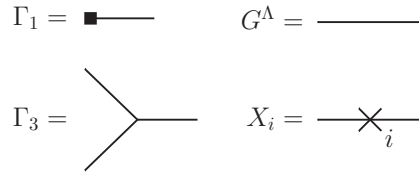


Рис. 1: Элементы диаграммной техники.

Введем ряд вспомогательных определений

$$\Gamma_1[\phi] = \int_{\mathbb{R}^5} d^5x \left( t_r^a \phi_a(x) + B_a(x) A_0^\Lambda(x) \phi_a(x) + B_a(x) M_r^{ab} \phi_b(x) + \frac{g^{abc}}{2} B_a(x) B_b(x) \phi_c(x) \right),$$

$$\Gamma_3[\phi] = \int_{\mathbb{R}^5} d^5x g^{abc} \phi_a(x) \phi_b(x) \phi_c(x),$$

$$S_a[\phi] = \int_{\mathbb{R}^5} d^5x \phi_a(x),$$

$$S_{ab}[\phi] = \int_{\mathbb{R}^5} d^5x \phi_a(x) \phi_b(x), \quad X_i[\phi] = M_{r,i}^{ab} S_{ab}[\phi],$$

$$V^{ab}(x) = M^{ab} + g^{abc} B_c(x),$$

$$(A_0^\Lambda(x) \delta^{ab} + V^{ab}(x)) G_{bc}^\Lambda(x, y) = \delta^{ac} \delta(x - y). \quad (6)$$

Также определим элементы диаграммной техники, которые представлены на Рис. 1. В нашем случае квантовое уравнение движения представляется суммой всех сильно связанных диаграмм с одной

внешней свободной линией, а квантовое действие равно сумме всех сильно связанных вакуумных диаграмм и представимо формулой

$$W_{\text{ren}}[B, \Lambda] = S_{\text{ren}}[B] - \left( \frac{\hbar}{2} \ln \det(G^\Lambda) + \hbar \kappa_1 \right) - \left[ \hbar \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \hbar^k X_k[\delta_j] - \frac{\hbar^{1/2}}{3!} \Gamma_3[\delta_j] \right) e^{g[G^\Lambda, j]} \right]_{j=0}^{\text{1PI}} + \sum_{n=2}^{+\infty} \hbar^n \kappa_n, \quad (7)$$

где  $j_a(x)$  – вспомогательное поле,  $\delta_{j_a(x)}$  – вариационная производная по полю  $j_a(x)$ , и

$$g[G^\Lambda, j] = \frac{1}{2} \int \int_{\mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5} d^5x d^5y j_a(x) G_{ab}^\Lambda(x, y) j_b(y).$$

Также символ «1PI» означает, что в сумме сохраняются только сильно связанные диаграммы. Обратим внимание, что за счет квантового уравнения движения из представления (7) выпала вершина с одной линией  $\Gamma_1[\cdot]$ .

Учитывая то, что в перенормированном действии  $W_{\text{ren}}[B, \Lambda]$  отсутствуют сингулярные слагаемые, можно утверждать, что они отсутствуют и в каждом порядке  $\hbar^k$  по константе Планка. Таким образом получаются соотношения для коэффициентов констант перенормировки. В данной работе будут исследоваться первые три соотношения. Они имеют вид

$$t_{r,1}^a S_a[B] + \frac{1}{2} M_{r,1}^{ab} S_{ab}[B] \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{1}{2} \ln \det(G^\Lambda) + \kappa_1, \quad (8)$$

$$t_{r,2}^a S_a[B] + \frac{1}{2} M_{r,2}^{ab} S_{ab}[B] \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{1}{12} d_1 - \frac{1}{2} c d_1 + \kappa_2, \quad (9)$$

$$t_{r,3}^a S_a[B] + \frac{1}{2} M_{r,3}^{ab} S_{ab}[B] \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{1}{16} d_2 + \frac{1}{24} d_3 - \frac{1}{4} c d_2 + \frac{1}{4} c d_3 - \frac{1}{2} c d_4 + \kappa_3, \quad (10)$$

где знак  $\stackrel{\text{s.p.}}{=}$  означает равенство сингулярных частей. Также здесь используются обозначения для диаграмм, изображенных на Рис. 2, 3 и 4.

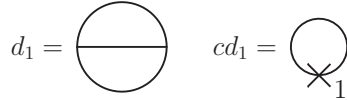


Рис. 2: Диаграмма  $d_1$  и контрдиаграмма  $cd_1$ .

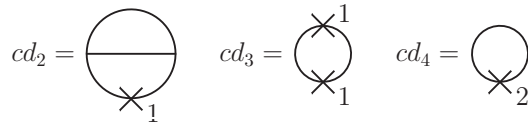


Рис. 3: Контрдиаграммы  $cd_2$ – $cd_4$ .

Обратим внимание на одно важное свойство используемой регуляризации. Она сохраняет связь квантового действия  $W[B]$  и квантового уравнения движения  $Q_a[B](x)$ , см. раздел 4 в [9], вида

$$\frac{\delta W[B]}{\delta B_a(x)} = Q_a[B](x) \quad (11)$$

как после регуляризации, так и после перенормировки. Сами соотношения имеют вид

$$(11) \xrightarrow{\text{пер.}} \frac{\delta W[B, \Lambda]}{\delta B_a(x)} = Q_a[B, \Lambda](x) \xrightarrow{\text{рен.}} \frac{\delta W_{\text{ren}}[B, \Lambda]}{\delta B_a(x)} = Q_a^{\text{ren}}[B, \Lambda](x). \quad (12)$$

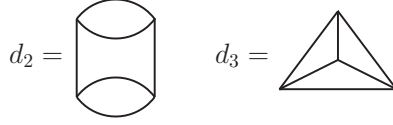


Рис. 4: Диаграммы  $d_2$  и  $d_3$ .

Сохранение такого вида связей обеспечивает перенормируемость квантового уравнения движения. Другими словами, найденные коэффициенты констант перенормировки уберут сингулярности не только в квантовом действии, но и в квантовом уравнении движения. Для того, чтобы убедиться в справедливости переходов (12), достаточно проследить, что соотношения для вариационных производных всех элементов диаграммной техники сохраняют свой внешний вид после регуляризации и перенормировки. Учитывая тот факт, что вершины не подвергаются деформации, достаточно рассмотреть лишь функцию Грина. Из уравнения (6) следует соотношение

$$\frac{\delta}{\delta B_c(z)} G_{ab}(x, y) = -G_{ad}(x, z) g^{dce} G_{eb}(z, y).$$

Пользуясь соображениями из работы [9] и явным видом разложения по степеням потенциала, можно убедиться в справедливости равенства

$$\frac{\delta}{\delta B_c(z)} G_{ab}^\Lambda(x, y) = -G_{ad}^\Lambda(x, z) g^{dce} G_{eb}^\Lambda(z, y),$$

которое и гарантирует выполнимость заявленных свойств.

## 2.2 Результаты

Определим ряд вспомогательных коэффициентов

$$\begin{aligned} h_1^{a_1 a_2} &= g^{a_1 c_1 c_2} g^{a_2 c_1 c_2}, \quad g_1^{a_1 a_2 a_3} = g^{a_1 c_1 c_2} g^{a_2 c_2 c_3} g^{a_3 c_3 c_1}, \\ h_2^{a_1 a_2} &= h_1^{c_1 c_2} g^{c_1 c_3 a_1} g^{c_2 c_3 a_2}, \quad h_3^{a_1 a_2} = g_1^{a_1 c_1 c_2} g^{c_1 c_2 a_2}. \end{aligned}$$

**Теорема 1.** *С учетом всего вышеизложенного, сингулярные слагаемые для первых трех квантовых поправок пропорциональны линейной комбинации функционалов вида  $S_a[B]$  и  $S_{ab}[B]$ . Значения для коэффициентов констант перенормировки (4), удовлетворяющих соотношениям (8)–(10), имеют вид*

$$\begin{aligned} t_{r,1}^a &\rightarrow \text{с.м. (20)}, & M_{r,1}^{ab} &\rightarrow \text{с.м. (21)}, \\ t_{r,2}^a &\rightarrow \text{с.м. (27)}, & M_{r,2}^{ab} &\rightarrow \text{с.м. (28)}, \\ t_{r,3}^a &\rightarrow \text{с.м. (59)}, & M_{r,3}^{ab} &\rightarrow \text{с.м. (60)}. \end{aligned}$$

Частичный ответ для  $t_{r,4}^a$  приводится в формуле (64). Также  $t_{r,i+1}^a \stackrel{s.p.}{=} 0$  и  $M_{r,i}^{ab} \stackrel{s.p.}{=} 0$  для  $i \geq 3$ .

Отдельно выпишем частный случай, когда  $n = 1$ ,  $M^{11} = m^2$  и суммирование в классическом действии (1) отсутствует. Для удобства будем записывать все коэффициенты без индексов, так как они принимают одно значение. Используя приведенные ответы, для упрощенной модели справедливы равенства

$$\begin{aligned} t_r &= t + \hbar \left( -\frac{\Lambda^3 g}{2} R_0^1(0) + \frac{m^2 g}{2} \Lambda \alpha_0(\mathbf{f}) + \tilde{t}_{r,1} \right) + \\ &+ \hbar^2 \left( -\frac{g^3 \Lambda^2}{4} (\alpha_1(\mathbf{f}) - \alpha_0^2(\mathbf{f})) + \frac{g \Lambda}{2} \alpha_0(\mathbf{f}) \tilde{M}_{r,1} + \frac{L g^3 m^2}{12(16\pi^2)^2} + \tilde{t}_{r,2} \right) + \\ &+ \hbar^3 \left( \frac{\Lambda L g^5}{24(16\pi^2)^2} \alpha_0(\mathbf{f}) - \frac{\Lambda g^5}{8} (\alpha_2(\mathbf{f}) + 2\alpha_3(\mathbf{f}) + 2\alpha_4(\mathbf{f})) + \frac{\Lambda g}{2} \alpha_0(\mathbf{f}) \tilde{M}_{r,2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{L g^3}{12(16\pi^2)^2} \tilde{M}_{r,1} + \tilde{t}_{r,3} \right) + \mathcal{O}(\hbar^4), \end{aligned}$$

$$M_r = m^2 + \hbar \left( \frac{\Lambda g^2}{2} \alpha_0(\mathbf{f}) + \tilde{M}_{r,1} \right) + \hbar^2 \left( \frac{L g^4}{12(16\pi^2)^2} + \tilde{M}_{r,2} \right) + \hbar^3 \tilde{M}_{r,3}, \quad (13)$$

где  $L = \ln(\Lambda/\sigma)$ . Обратим внимание, что результат согласуется с ранее изученным, см. [5].

Сразу отметим, что вычисление  $\alpha_1(\mathbf{f})$ – $\alpha_4(\mathbf{f})$  для конкретной функции  $\mathbf{f}(\cdot)$  является менее важной задачей, поскольку такие числа входят лишь в линейное слагаемое. В то же время их подсчет не является тривиальным и требует применения численных методов.

Рассмотрим  $\alpha_0(\mathbf{f})$ . Оно входит в перенормировку массы, см. (21) и (13), и представляется формулой (19). С учетом подстановки явного вида деформации, получаем

$$\alpha_0(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^5} d^5x \left( R_0^1(x) \right)^2 = \frac{1}{3(8\pi^2)} \left( 1 + \int_0^1 ds s^4 \left( \mathbf{f}(s^2) + 1 \right)^2 \right) \geq \frac{1}{3(8\pi^2)}.$$

В данном случае интересно обратить внимание на два конкретных выбора функции  $\mathbf{f}(\cdot)$ .

- Первый определяется равенством  $\mathbf{f}_1(s^2) = 0$  и является наиболее тривиальным. В этом случае  $\alpha_0(\mathbf{f}_1) = 1/(20\pi^2)$ . Однако такой выбор не удовлетворяет условию применимости обрезания в координатном представлении, см. [11].
- Второй выбор определяется равенством  $\mathbf{f}_2(s^2) = 7 - 9s + 2s^3$ . Согласно результатам из работы [11] он удовлетворяет критерию применимости. В этом случае  $\alpha_0(\mathbf{f}_2) = 167/(2310\pi^2) > \alpha_0(\mathbf{f}_1)$ .

### 3 Первые две поправки

Рассмотрим асимптотическое разложение функции Грина  $G_{ab}^\Lambda(x, y)$  около диагонали  $x \sim y$ . Согласно работам [5, 9, 19, 20] ряд имеет следующий вид

$$G_{ab}^\Lambda(x, y) = R_0^\Lambda(x - y)\delta_{ab} - R_1^\Lambda(x - y) \frac{V^{ab}(x) + V^{ab}(y)}{2} + \\ + R_2^\Lambda(x - y) \frac{V^{ac}(x)V^{cb}(y) + V^{ac}(y)V^{cb}(x)}{4} + PS_{1ab}^\Lambda(x, y), \quad (14)$$

где деформированная функция  $R_0^\Lambda(\cdot)$  была определена в (3), а остальные определяются равенствами

$$R_1^\Lambda(z) = \int_{B_{1/\sigma}} d^5x R_0^\Lambda(x) R_0^\Lambda(x + z), \quad (15)$$

$$R_2^\Lambda(z) = 2 \int \int_{B_{1/\sigma} \times B_{1/\sigma}} d^5x d^5y R_0^\Lambda(x) R_0^\Lambda(x + y) R_0^\Lambda(y + z) - 2\tilde{c}_2, \quad (16)$$

$$\tilde{c}_2 = \int \int_{B_{1/\sigma} \times B_{1/\sigma}} d^5x d^5y R_0(x) R_0(x + y) R_0(y). \quad (17)$$

В последних формулах  $B_{1/\sigma}$  – замкнутый шар с центром в нуле и радиусом  $1/\sigma$ . Параметр  $\sigma$  является вспомогательным. Он размерный, конечный и фиксированный. Функция Грина от него не зависит. Разложение (14) специально выписано в симметричной форме для удобства. Функция  $PS_1^\Lambda(x, y)$  содержит все остальные невязочные слагаемые, которые в том числе обеспечивают выполнимость граничных условий. Ниже будет показано, что такая функция не входит во вклады с сингулярными коэффициентами.

Перейдем к подсчету первой петли. Правая часть формулы (8) выражается в виде ряда, зависящего от функции Грина. С помощью разложения (14) формула из работы [9, 21, 22] может быть представлена в виде

$$\frac{1}{2} \ln \det \left( G^\Lambda / G^\Lambda|_{B=0} \right) \stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{1}{2} R_0^\Lambda(0) \int_{\mathbb{R}^5} d^5x \left( V^{aa}(x) - M^{aa} \right) + \\ + \frac{1}{4} \left( \int_{B_{1/\sigma}} d^5y \left( R_0^\Lambda(y) \right)^2 \right) \int_{\mathbb{R}^5} d^5x \left( V^{ab}(x) V^{ba}(x) - M^{ab} M^{ba} \right). \quad (18)$$



Введем для удобства следующее обозначение

$$A(\sigma) = \int_{B_{1/\sigma}} d^5x \left( R_0^\Lambda(x) \right)^2 = \Lambda \alpha_0(\mathbf{f}) - \frac{\sigma}{3(8\pi^2)}, \quad (19)$$

тогда правая часть (18) содержит сингулярный вклад вида

$$S_a[B] \left( -\frac{1}{2} R_0^\Lambda(0) g^{abb} + \frac{1}{2} A(\sigma) M^{bc} g^{abc} \right) + S_{ab}[B] \left( \frac{1}{4} A(\sigma) g^{acd} g^{bcd} \right).$$

Таким образом константы из левой части (8) имеют следующие представления

$$t_{r,1}^a = -\frac{\Lambda^3}{2} R_0^\Lambda(0) g^{abb} + \frac{\Lambda}{2} \alpha_0(\mathbf{f}) M^{bc} g^{abc} + \tilde{t}_{r,1}^a, \quad (20)$$

$$M_{r,1}^{ab} = \frac{\Lambda}{2} \alpha_0(\mathbf{f}) h_1^{ab} + \tilde{M}_{r,1}^{ab}, \quad (21)$$

где  $\tilde{t}_{r,1}^a$  и  $\tilde{M}_{r,1}^{ab}$  – симметричные константы. Они носят вспомогательный характер, не содержат сингулярностей и играют роль «граничных условий» при перенормировочной процедуре. Заметим, что обе константы имеют степенное поведение при  $\Lambda \rightarrow +\infty$ .

Перейдем к изучению второй поправки. В этом случае помимо диаграммы  $d_1$  имеется также контрдиаграмма  $cd_1$ . Метод их подсчета ранее был многократно показан, см. [5, 9], поэтому ограничимся результатом для случая нашей регуляризации. Для диаграммы  $d_1$  выражение имеет вид

$$\begin{aligned} & -3I_1(\Lambda, \sigma) S_a[B] g_1^{abb} \\ & + 3I_2(\Lambda, \sigma) \left( 2S_a[B] g_1^{ab_1b_2} M^{b_1b_2} + S_{a_1a_2}[B] h_3^{a_1a_2} \right) \\ & + \frac{3}{2} I_3(\Lambda, \sigma) \left( 2S_a[B] g^{ab_1b_2} M^{b_2b_3} h_1^{b_3b_1} + S_{a_1a_2}[B] h_2^{a_1a_2} \right) \\ & + 3A(\sigma) \int_{\mathbb{R}^5} d^5x P S_{1a_1a_2}^\Lambda(x, x) h_1^{a_1a_2}, \end{aligned} \quad (22)$$

где были введены обозначения для вспомогательных интегралов

$$I_1(\Lambda, \sigma) = \int_{B_{1/\sigma}} d^5x \left( R_0^\Lambda(x) \right)^2 R_1^\Lambda(x), \quad (23)$$

$$I_2(\Lambda, \sigma) = \int_{B_{1/\sigma}} d^5x \left( R_1^\Lambda(x) \right)^2 R_0^\Lambda(x), \quad (24)$$

$$I_3(\Lambda, \sigma) = \int_{B_{1/\sigma}} d^5x \left( R_0^\Lambda(x) \right)^2 R_2^\Lambda(x). \quad (25)$$

Далее, учитывая тот факт, что  $R_2^\Lambda(0)$  ведет себя как  $\Lambda^{-1}$ , см. (92), ответ для сингулярной части контрдиаграммы принимает вид

$$-\frac{1}{2} A(0) A(\sigma) S_a[B] g_1^{abb} - A(\sigma) S_a[B] \tilde{M}_{r,1}^{b_1b_2} g^{b_1b_2a} + \frac{1}{2} A(0) \int_{\mathbb{R}^5} d^5x P S_{1a_1a_2}^\Lambda(x, x) h_1^{a_1a_2}. \quad (26)$$

Для окончательного результата рассмотрим линейную комбинацию  $d_1/12 - cd_1/2$ . Заметим, что нелокальные части (22) и (26) сокращаются. Локальные же части дают вклад в коэффициенты из левой части (9). С учетом асимптотических разложений (69), (70) и (73) ответ выписывается следующим образом

$$t_{r,2}^a = -\frac{\Lambda^2}{4} \left( \alpha_1(\mathbf{f}) - \alpha_0^2(\mathbf{f}) \right) g_1^{abb} + \frac{\Lambda}{2} \alpha_0(\mathbf{f}) \tilde{M}_{r,1}^{b_1b_2} g^{b_1b_2a} + \quad (27)$$

$$+ \frac{L}{12(16\pi^2)^2} \left( 2g_1^{ab_1b_2} M^{b_1b_2} - g^{ab_1b_2} M^{b_2b_3} h_1^{b_3b_1} \right) + \tilde{t}_{r,2}^a,$$

$$M_{r,2}^{a_1a_2} = \frac{L}{12(16\pi^2)^2} \left( 2h_3^{a_1a_2} - h_2^{a_1a_2} \right) + \tilde{M}_{r,2}^{a_1a_2}, \quad (28)$$

где  $\tilde{t}_{r,2}^a$  и  $\tilde{M}_{r,2}^{a_1a_2}$  – дополнительные конечные симметричные коэффициенты.

## 4 Третья поправка

Начнем рассмотрение третьей поправки с диаграммы  $d_2$ . Для этого удобно ввести вспомогательный интеграл

$$\rho_1^{ab}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^5} d^5 z g^{aa_1 a_2} G_{a_1 b_1}^\Lambda(x, z) G_{a_2 b_2}^\Lambda(x, z) g^{b_1 b_2 b_3} G_{b_3 b}^\Lambda(z, y). \quad (29)$$

Ясно, что при снятии регуляризации такой интеграл расходится, поскольку первые два множителя в правой части пропорциональны  $|x - z|^{-6}$  при  $x \sim z$ . Используя это обозначение, диаграмма  $d_2$  имеет вид

$$d_2 = \int_{\mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5} d^5 x d^5 y \rho_1^{ab}(x, y) \rho_1^{ba}(y, x). \quad (30)$$

Для анализа такой диаграммы воспользуемся методом добавления и вычитания, подробно разобранном для четверного взаимодействия в [9].

Определим дополнительную вспомогательную функцию

$$\rho_2^{ab}(x, y) = \left( A(0) h_1^{aa_3} + 2 \tilde{M}_{r,1}^{aa_3} \right) G_{a_3 b}^\Lambda(x, y), \quad (31)$$

тогда представление (30) для диаграммы  $d_2$  приобретает вид

$$\begin{aligned} 2 \int_{\mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5} d^5 x d^5 y \rho_1^{ab}(x, y) \rho_2^{ba}(y, x) - \int_{\mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5} d^5 x d^5 y \rho_2^{ab}(x, y) \rho_2^{ba}(y, x) + \\ + \int_{\mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5} d^5 x d^5 y \left( \rho_1^{ab}(x, y) - \rho_2^{ab}(x, y) \right) \left( \rho_1^{ba}(y, x) - \rho_2^{ba}(y, x) \right). \end{aligned}$$

Такое представление примечательно тем, что в нем первые два слагаемых в действительности являются контрдиаграммами  $4cd_2$  и  $-4cd_3$ . В этом легко убедиться, подставив функции (29) и (31). Следовательно, было доказано следующее соотношение

$$\frac{d_2}{16} - \frac{cd_2}{4} + \frac{cd_3}{4} + \tilde{\kappa}_1 = \frac{1}{16} \int_{\mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5} d^5 x d^5 y \left( \rho_1^{ab}(x, y) - \rho_2^{ab}(x, y) \right) \left( \rho_1^{ba}(y, x) - \rho_2^{ba}(y, x) \right) + \tilde{\kappa}_2, \quad (32)$$

где  $\tilde{\kappa}_1$  и  $\tilde{\kappa}_2$  вычитают расходимости, не зависящие от фонового поля. Именно такая линейная комбинация появляется в правой части (10). Следовательно, анализ трех диаграмм сводится к изучению интеграла из (32).

Введем для удобства следующее преобразование

$$\hat{R}_i^\Lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^5} d^5 y \left( R_0^\Lambda(y) \right)^2 R_i^\Lambda(y + x) - A(0) R_i^\Lambda(x). \quad (33)$$

Особенность такого преобразования заключается в том, что трансформированная функция существует при снятии регуляризации, так как расходящаяся особенность вычитается. Более того,  $\hat{R}_0^\Lambda(x)$  имеет поведение вида  $|x|^{-4}$ , а  $\hat{R}_1^\Lambda(x) \sim |x|^{-2}$ . Также заметим, что в правой части (32) сингулярные слагаемые будут появляться лишь в том случае, если плотность будет иметь поведение  $|x - y|^{-5}$  или сильнее. Поэтому справедлив следующий переход

$$\rho_1^{ab}(x, y) - \rho_2^{ab}(x, y) \rightarrow \sum_{i=3}^8 \rho_i^{ab}(x, y),$$

где

$$\rho_3^{ab}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^5} d^5 z h_1^{ab} \left( R_0^\Lambda(x - z) \right)^2 R_0^\Lambda(z - y) - A(0) h_1^{ab} R_0^\Lambda(x - y) = \hat{R}_0^\Lambda(x - y) h_1^{ab}, \quad (34)$$

$$\rho_4^{ab}(x, y) = -2 \tilde{M}_{r,1}^{ab} R_0^\Lambda(x - y), \quad (35)$$

$$\rho_5^{ab}(x, y) = -\hat{R}_1^\Lambda(x - y) h_1^{ab_3} g^{b_3 b_4 b} B_{b_4}(x), \quad (36)$$

$$\rho_6^{ab}(x, y) = 2R_1^\Lambda(x - y)\tilde{M}_{r,1}^{aa_3}g^{a_3a_4b}B_{a_4}(x), \quad (37)$$

$$\rho_7^{ab}(x, y) = -2 \int_{\mathbb{R}^5} d^5z R_0^\Lambda(x - z)R_1^\Lambda(x - z)R_0^\Lambda(z - y)g^{aa_1a_2}g^{a_1a_4a_5}B_{a_4}(x)g^{a_5a_2b}, \quad (38)$$

$$\rho_8^{ab}(x, y) = 2 \int_{\mathbb{R}^5} d^5z R_0^\Lambda(x - z)R_0^\Lambda(z - y)g^{aa_1a_2}PS_{1a_1a_3}^\Lambda(x, x)g^{a_2a_3b}. \quad (39)$$

С помощью последних определений сингулярную часть линейной комбинации (32), зависящую от фонового поля, можно представить следующим образом

$$\frac{d_2}{16} - \frac{cd_2}{4} + \frac{cd_3}{4} + \tilde{\kappa}_1 \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{2}{16} \sum_{i=5}^8 J_{3i}[B] + \frac{2}{16} \sum_{i=5,7} J_{4i}[B], \quad (40)$$

где была использована симметричность  $\rho_3^{ab}(x, y)$  и  $\rho_4^{ab}(x, y)$  по индексам и аргументам, и введено обозначение для  $i, k \in \{3, \dots, 8\}$

$$J_{ik}[B] = \int_{B_{1/\sigma} \times \mathbb{R}^5} d^5x d^5y \rho_i^{ba}(y, x + y) \rho_k^{ba}(y, x + y).$$

В дополнение для удобства определим серию сингулярных интегралов

$$I_4(\Lambda, \sigma) = \int_{B_{1/\sigma}} d^5x \hat{R}_0^\Lambda(x) \hat{R}_1^\Lambda(x), \quad (41)$$

$$I_5(\Lambda, \sigma) = \int_{B_{1/\sigma}} d^5x \hat{R}_0^\Lambda(x) R_1^\Lambda(x), \quad (42)$$

$$I_6(\Lambda, \sigma) = \int_{B_{1/\sigma} \times \mathbb{R}^5} d^5x d^5z \hat{R}_0^\Lambda(x) R_0^\Lambda(x - z) R_1^\Lambda(x - z) R_0^\Lambda(z), \quad (43)$$

$$I_7(\Lambda, \sigma) = \int_{B_{1/\sigma} \times \mathbb{R}^5} d^5x d^5z \hat{R}_0^\Lambda(x) R_0^\Lambda(x - z) R_0^\Lambda(z), \quad (44)$$

$$I_8(\Lambda, \sigma) = \int_{B_{1/\sigma}} d^5x R_0^\Lambda(x) \hat{R}_1^\Lambda(x), \quad (45)$$

$$I_9(\Lambda, \sigma) = \int_{B_{1/\sigma} \times \mathbb{R}^5} d^5x d^5z R_0^\Lambda(x) R_0^\Lambda(x - z) R_1^\Lambda(x - z) R_0^\Lambda(z). \quad (46)$$

Тогда отдельные части из формулы (40) можно переписать в виде

$$J_{35}[B] \stackrel{\text{s.p.}}{=} -\Lambda S_a[B] h_1^{a_1a_2} h_1^{a_2a_3} g^{a_1a_3a} \alpha_2(\mathbf{f}), \quad (47)$$

$$J_{36}[B] \stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{L}{3(16\pi^2)^2} S_a[B] h_1^{a_1a_2} \tilde{M}_{r,1}^{a_2a_3} g^{a_1a_3a}, \quad (48)$$

$$J_{37}[B] \stackrel{\text{s.p.}}{=} -2 \left( \Lambda \alpha_3(\mathbf{f}) - \frac{L(A(\sigma) - A(0))}{6(16\pi^2)^2} \right) S_a[B] g_1^{ab_1b_2} h_1^{b_1b_2}, \quad (49)$$

$$J_{38}[B] \stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{L}{3(16\pi^2)^2} \int_{\mathbb{R}^5} d^5x PS_{1ab}^\Lambda(x, x) g^{ac_1c_3} g^{bc_1c_2} h_1^{c_2c_3}, \quad (50)$$

$$J_{45}[B] \stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{L}{3(16\pi^2)^2} S_a[B] \tilde{M}_{r,1}^{a_1a_2} h_1^{a_2a_3} g^{a_1a_3a}, \quad (51)$$

$$J_{47}[B] \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{4L}{3(16\pi^2)^2} S_a[B] \tilde{M}_{r,1}^{a_1a_2} g_1^{a_1a_2a}, \quad (52)$$

где были использованы равенства (75), (82), (85) и (87).

В итоге осталось рассмотреть контрдиаграмму  $cd_4$  и диаграмму  $d_3$ . Начнем с первой. Используя ответ (28) для второго коэффициента и схему вычисления  $cd_1$ , выписываем сингулярную составляющую, зависящую от фонового поля, в виде

$$-\frac{1}{2}cd_4 + \tilde{\kappa}_3 = A(\sigma)S_a[B] \left( \frac{L}{12(16\pi^2)^2} h_3^{a_1 a_2} g^{a_1 a_2 a} - \frac{L}{24(16\pi^2)^2} h_2^{a_1 a_2} g^{a_1 a_2 a} + \frac{1}{2} \tilde{M}_{r,2}^{a_1 a_2} g^{a_1 a_2 a} \right) \quad (53)$$

$$+ \left( \int_{\mathbb{R}^5} d^5 x PS_{1ab}^\Lambda(x, x) \right) \left( -\frac{L}{12(16\pi^2)^2} h_3^{ab} + \frac{L}{24(16\pi^2)^2} h_2^{ab} \right), \quad (54)$$

где  $\tilde{\kappa}_3$  вычитает сингулярную плотность, не зависящую от фонового поля. Перейдем к последней диаграмме  $d_3$ . В действительности она содержит только два сингулярных вклада, зависящих от фонового поля. Это связано с тем, что интеграл вида

$$\int_{\mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5} d^5 x d^5 y R_0(x) R_0(y) R_0(x-y) R_0(x-z) R_0(y-z)$$

сходится и пропорционален  $|z|^{-5}$ . При этом любая замена  $R_0(\cdot)$  на более гладкую функцию лишь ослабит поведение в нуле по переменной  $z$ . Поэтому в диаграмме  $d_3$  необходимо сохранить пять функций  $R_0^\Lambda(\cdot)$ , а шестую выбрать либо равной  $R_1^\Lambda(\cdot)$ , либо единицей. Тогда получаем

$$\frac{1}{24}d_3 + \tilde{\kappa}_4 = -\frac{1}{4}I_{10}(\Lambda, \sigma)S_a[B]g^{aa_1 a_2}h_3^{a_1 a_2} + \frac{1}{4}I_{11}(\Lambda, \sigma) \int_{\mathbb{R}^5} d^5 x PS_{1a_1 a_2}^\Lambda(x, x)h_3^{a_1 a_2}, \quad (55)$$

где

$$I_{10}(\Lambda, \sigma) = \int_{B_{1/\sigma} \times \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5} d^5 z d^5 x d^5 y R_1^\Lambda(z) R_0^\Lambda(z-y) R_0^\Lambda(z-x) R_0^\Lambda(x-y) R_0^\Lambda(x) R_0^\Lambda(y), \quad (56)$$

$$I_{11}(\Lambda, \sigma) = \int_{B_{1/\sigma} \times \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5} d^5 z d^5 x d^5 y R_0^\Lambda(z-y) R_0^\Lambda(z-x) R_0^\Lambda(x-y) R_0^\Lambda(x) R_0^\Lambda(y), \quad (57)$$

и  $\tilde{\kappa}_4$  вычитает сингулярную плотность, не зависящую от фонового поля. Используя вычисленные сингулярные слагаемые для последних интегралов, см. (89) и (90), соотношение (55) переписывается следующим образом

$$\frac{1}{24}d_3 + \tilde{\kappa}_4 = \left( -\frac{\Lambda\alpha_4(\mathbf{f})}{4} - \frac{L(A(\sigma) - A(0))}{12(16\pi^2)^2} \right) S_a[B]g^{aa_1 a_2}h_3^{a_1 a_2} + \frac{L}{12(16\pi^2)^2} \int_{\mathbb{R}^5} d^5 x PS_{1a_1 a_2}^\Lambda(x, x)h_3^{a_1 a_2}. \quad (58)$$

В итоге, с учетом ответов (47)–(52), в соотношениях (32), (53)–(54) и (58) представлены результаты для сингулярных вкладов в отдельные диаграммы и их линейные комбинации. Сразу заметим, что нелокальная часть  $PS_1^\Lambda$  в сумме сокращается, также как и логарифмическая расходимость, зависящая степенным образом от вспомогательного параметра  $\sigma$ , то есть  $LA(\sigma)$ . Далее обратим внимание, что массовое слагаемое не требует перенормировки. Такой результат полностью соответствует ожиданиям из общей теории. Суммируя изученные вклады, получаем

$$\begin{aligned} t_{r,3}^a &= \frac{\Lambda L \alpha_0(\mathbf{f})}{24(16\pi^2)^2} \left( 2g^{aa_1 a_2} h_3^{a_1 a_2} - g^{aa_1 a_2} h_2^{a_1 a_2} \right) - \\ &- \Lambda \left( \frac{\alpha_2(\mathbf{f})}{8} h_1^{a_1 a_2} h_1^{a_2 a_3} g^{a_1 a_3 a} + \frac{\alpha_3(\mathbf{f})}{4} h_2^{a_1 a_2} g^{a_1 a_2 a} + \frac{\alpha_4(\mathbf{f})}{4} h_3^{a_1 a_2} g^{a_1 a_2 a} - \frac{\alpha_0(\mathbf{f})}{2} \tilde{M}_{r,2}^{a_1 a_2} g^{a_1 a_2 a} \right) \\ &- \frac{L}{24(16\pi^2)^2} \left( 2h_1^{a_1 a_2} \tilde{M}_{r,1}^{a_2 a_3} g^{a_1 a_3 a} - 4\tilde{M}_{r,1}^{a_1 a_2} g_1^{a_1 a_2 a} \right) + \tilde{t}_{r,3}^a, \end{aligned} \quad (59)$$

$$M_{r,3}^{ab} = \tilde{M}_{r,3}^{ab}, \quad (60)$$

где  $\tilde{t}_{r,3}^a$  и  $\tilde{M}_{r,3}^{ab}$  – константы. Поскольку в третьей петле перенормировка массового слагаемого не требуется, разумно выбрать  $\tilde{M}_{r,3}^{ab} = 0$ . Равно как и последующие коэффициенты в старших петлях.

Стоит сказать несколько слов о дополнительной проверке. Известно, что расходимости вида  $\Lambda^k L^n$  и  $L^{n+1}$ , где  $k > 0$  и  $n > 0$ , можно посчитать, используя лишь контрдиаграммы. Действительно, применяя оператор  $-\sigma\partial_\sigma$  к обеим сторонам соотношений (8)–(10), будут получаться равенства для сингулярных частей. При этом с правой стороны обратятся в нуль все диаграммы, поскольку они не зависят от параметра  $\sigma$ , а останутся лишь контрдиаграммы, содержащие коэффициенты перенормировки с параметром  $\sigma$ .

В случае исследуемой модели обозначенные выше расходимости содержатся лишь в третьей петле, см. (59). Следовательно, дифференцирование равенства (10) приводит к нетривиальному соотношению

$$-\sigma \frac{d}{d\sigma} \left( t_{r,3}^a S_a[B] + \frac{1}{2} M_{r,3}^{ab} S_{ab}[B] \right) \stackrel{\text{s.p.}}{=} -\sigma \frac{d}{d\sigma} \left( -\frac{1}{2} cd_4 + \bar{\kappa}_3 \right),$$

которое в правой части содержит производную одной контрдиаграммы. Таким образом, подобная проверка в случае пятимерной кубической модели малоинформативна, поскольку она сводится к дифференцированию одной контрдиаграммы, см. (53) и (54), которая вносит прямой вклад в линейную часть, см. (59), пропорциональную  $\Lambda L$ .

## 5 О четвертой петле

На примере пятимерной кубической модели было показано, что константа перенормировки для массового коэффициента обрывается. То есть на определенном шаге перенормировка массы становится ненужной. В нашем случае было показано, что  $M_{r,3}^a \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0$ , см. формулу (60). Это связано с суперперенормируемостью теории. Похожим свойством обладает и линейный коэффициент  $t_{r,i}^a$ . Из соображений размерности можно утверждать, что  $t_{r,i}^a \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0$  для всех  $i \geq 5$ . Однако в четвертой петле сингулярности все еще появляются и имеют логарифмический характер. Это означает, что анзац для четвертой поправки следует брать в виде

$$t_{r,4}^a \stackrel{\text{s.p.}}{=} \sum_{k=1}^N L^k t_{r,4,k}^a, \quad (61)$$

где  $N \in \mathbb{N}$  и  $L = \ln(\Lambda/\sigma)$ .

Как было упомянуто ранее, вычислить сингулярности с  $L^{k+1}$  при  $k > 0$  можно более простым методом, дифференцируя соотношения для коэффициентов констант перенормировки по вспомогательному параметру  $\sigma$ . В четырехпетлевом порядке имеем

$$-\sigma \frac{d}{d\sigma} \left( \sum_{k=1}^N L^k t_{r,4,k}^a S_a[B] \right) = -\sigma \frac{d}{d\sigma} (4\text{-х петлевые диаграммы и контрдиаграммы}). \quad (62)$$

Ясно, что производная по  $\sigma$  обратит в нуль все диаграммы и контрдиаграммы, не содержащие двухпетлевого коэффициента  $M_{r,2}^{ab}$ . Это означает, что останется лишь два нетривиальных вклада. Следовательно, соотношение (62) переписывается в виде

$$\sum_{k=2}^N k L^{k-1} t_{r,4,k}^a = -\sigma \frac{d}{d\sigma} \left( -\frac{1}{4} cd_5 + \frac{1}{2} cd_6 \right) + \tilde{\kappa}_5, \quad (63)$$

где  $\tilde{\kappa}_5$  вычитает сингулярную плотность, не зависящую от фонового поля, и контрдиаграммы  $cd_5$  и  $cd_6$  изображены на Рис. 5.

Ясно, что производная в правой части (63) будет действовать на  $M_{r,2}^{ab}$ , поэтому для удобства введем вспомогательное обозначение  $\mu^{ab} = -\sigma\partial_\sigma M_{r,2}^{ab}$ . Учитывая тот факт, что  $M_{r,2}^{ab}$  линейно по  $L$ , см. (28), то  $\mu^{ab}$  не зависит от  $\Lambda$  и конечно.

Воспользуемся обозначениями (21), (29) и (31). Тогда правую часть равенства можно переписать в виде

$$-\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5} d^5 x d^5 y \left( G_{ab}^\Lambda(x, y) \rho_1^{ac}(x, y) \mu^{bc} - G_{ab}^\Lambda(x, y) \rho_2^{ac}(x, y) \mu^{bc} \right) + \tilde{\kappa}_5.$$

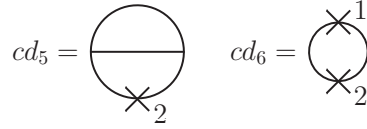


Рис. 5: Контрдиаграммы  $cd_5$  и  $cd_6$ .

Сразу заметим, что в первом слагаемом сингулярность могут дать только части  $\rho_1^{ac}(x, y)$ , содержащие

$$\int_{\mathbb{R}^5} d^5 z g^{aa_1 a_2} \left( R_0^\Lambda(x - z) \right)^2 g^{a_1 a_2 b_3} G_{b_3 b}^\Lambda(z, y)$$

и

$$- \int_{\mathbb{R}^5} d^5 z g^{aa_1 a_2} R_0^\Lambda(x - z) R_1^\Lambda(x - z) g^{a_2 b_1 a_3} B_{b_1}(x) g^{a_1 a_3 b} R_0^\Lambda(z - y).$$

Воспользуемся преобразованием (33). Тогда часть с  $\Lambda(0)$  сократится с сингулярностью из  $\rho_2^{ac}(x, y)$ , и в ответ войдут части, содержащие  $\hat{R}_0^\Lambda(\cdot)$  и  $\hat{R}_1^\Lambda(\cdot)$ . В терминах функций (34), (36) и (38) искомые вклады выписываются в виде

$$- \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^5 \times B_{1/\sigma}} d^5 x d^5 y \left( R_0^\Lambda(y) \rho_5^{ab}(x, y + x) \mu^{ab} - R_1^\Lambda(y) g^{aa_1 c} B_{a_1}(x) \rho_3^{ab}(x, y + x) \mu^{cb} + \right. \\ \left. + R_0^\Lambda(y) \rho_7^{ab}(x, y + x) \mu^{ab} \right),$$

а с использованием формул (42), (45) и (46), они преобразуются так

$$- \frac{1}{4} S_{a_1}[B] \left( -I_8(\Lambda, \sigma) h_1^{ab} g^{ba_1 c} \mu^{ca} - I_5(\Lambda, \sigma) g^{ba_1 c} h_1^{ab} \mu^{ca} - 2I_9(\Lambda, \sigma) g_1^{ba_1 c} \mu^{cb} \right).$$

Используя асимптотическое разложение для вспомогательных интегралов (82), окончательно получаем, что в формуле (61) параметр  $N = 2$  и четвертый коэффициент имеет вид

$$t_{r,4}^a = - \frac{L^2 (2h_1^{a_1 b} g^{bac} h_3^{ca_1} - h_1^{a_1 b} g^{bac} h_2^{ca_1} - 4g_1^{ba_1 c} h_3^{cb} + 2g_1^{ba_1 c} h_2^{cb})}{2^5 3^2 (16\pi^2)^4} + L t_{r,4,1}^a + \tilde{t}_{r,4}^a, \quad (64)$$

где  $\tilde{t}_{r,4}^a$  – константа. Таким образом был найден квадратичный логарифмический вклад в четвертый коэффициент. Слагаемое, пропорциональное первой степени логарифма  $L$ , необходимо искать прямыми вычислениями четвертой поправки в полном объеме.

## 6 Заключение

В работе была изучена трехпетлевая поправка в квантовое действие для скалярной кубической модели в случае общего положения. Основные результаты сформулированы в теореме 1 в разделе 2. Они включают ответы для коэффициентов констант перенормировки в первых трех петлях, частичный ответ для четырехпетлевого слагаемого, обсуждение отсутствия нелокальных слагаемых, а также следствие суперперенормируемости теории, которое заключается в конечном количестве сингулярных коэффициентов. После теоремы представлены некоторые интересные частные случаи.

Стоит отдельно обратить внимание, что для перенормировки массового параметра в действительности было достаточно рассмотреть первые две петли, поскольку начиная с третьей петли сингулярные вклады отсутствуют. Этот факт легко проверить, пользуясь методом сопоставления размерностей. Параметр для линейного слагаемого приобретает сингулярные вклады до четвертой поправки включительно. В частности, пользуясь дифференцированием по вспомогательному параметру, была исследована поправка из четвертой петли, пропорциональная  $L^2$ , см. раздел 5 и формулу (64).

**Благодарности.** Работа финансово поддержана Министерством науки и высшего образования РФ, грант 075-15-2022-289, и фондом развития теоретической физики и математики «БАЗИС», грант «Молодая Математика России».

Авторы выражают особую благодарность К.А.Иванову за создание благоприятной и стимулирующей обстановки для написания работы.

**Заявление о доступности данных.** Обмен данными неприменим к данной статье, поскольку в ходе текущего исследования не были сгенерированы или проанализированы никакие наборы данных.

**Заявление о конфликте интересов.** Авторы утверждают, что конфликта интересов нет.

## 7 Приложение

Рассмотрим подсчет сингулярных частей для вспомогательных интегралов. Для этого напомним соотношение, связывающее функцию Грина для свободного оператора Лапласа с ее усредненной версией

$$\frac{3}{8\pi^2} \int_{S^4} d^4\hat{x} R_0(r\hat{x} + y) = \frac{1}{8\pi^2} \begin{cases} r^{-3}, & |y| \leq r; \\ |y|^{-3}, & |y| > r, \end{cases} \quad (65)$$

где использовалось интегрирование по четырехмерной единичной сфере  $S^4$  с центром в нуле и со стандартной мерой. Здесь  $\hat{x} = x/|x| \in S^4 \subset \mathbb{R}^5$  и  $r > 0$ .

Используя соотношение (65), прямым интегрированием можно проверить следующий ряд равенств

$$\tilde{c}_2 = \int_{B_{1/\sigma} \times B_{1/\sigma}} d^5x d^5y R_0(x) R_0(x+y) R_0(y) = \frac{1}{72\pi^2\sigma}, \quad (66)$$

$$R_1^\Lambda(y) \Big|_{\Lambda \rightarrow +\infty} = \int_{B_{1/\sigma}} d^5x R_0(x) R_0(x+y) = \frac{1}{24\pi^2} \begin{cases} \frac{3}{2|y|} - \sigma, & |y| \leq 1/\sigma; \\ \frac{1}{2|y|^3\sigma^2}, & |y| > 1/\sigma, \end{cases} \quad (67)$$

$$\begin{aligned} R_2^\Lambda(z) \Big|_{\Lambda \rightarrow +\infty} &= 2 \int_{B_{1/\sigma} \times B_{1/\sigma}} d^5x d^5y R_0(x) R_0(x+y) R_0(y+z) - 2\tilde{c}_2 \\ &= \frac{1}{36\pi^2} \begin{cases} -\frac{9|z|}{8} + \frac{3}{10}\sigma|z|^2, & |z| \leq 1/\sigma; \\ \frac{7}{40|z|^3\sigma^4} - \frac{1}{\sigma}, & |z| > 1/\sigma. \end{cases} \end{aligned} \quad (68)$$

Они полезны при вычислении сингулярных частей для вспомогательных величин, в частности, для (24) и (25). Действительно, можно заметить, что функции  $R_1^\Lambda(x)$  и  $R_2^\Lambda(x)$  в интегралах  $I_2(\Lambda, \sigma)$  и  $I_3(\Lambda, \sigma)$  можно заменить на предельные значения при  $\Lambda \rightarrow +\infty$ . Это связано с тем фактом, что переходы

$$R_i^\Lambda(x) \rightarrow R_i^{+\infty}(x), \quad \text{для } i = 2, 3,$$

происходят за счет добавления функции с компактным носителем к каждому  $R_0^\Lambda$  в (15) и (16). Поэтому интегралы

$$\int_{B_{1/\sigma}} d^5x R_0^\Lambda(x) \left( (R_1^\Lambda(x))^2 - (R_1^{+\infty}(x))^2 \right) \quad \text{и} \quad \int_{B_{1/\sigma}} d^5x (R_0^\Lambda(x))^2 (R_2^\Lambda(x) - R_2^{+\infty}(x))$$

как функции параметра  $\Lambda$  конечны при  $\Lambda \rightarrow +\infty$ . Таким образом, пользуясь равенствами (67) и (68), получаем

$$I_2(\Lambda, \sigma) = \int_{1/\Lambda}^{1/\sigma} dr r^4 \frac{8\pi^2}{3} \frac{1}{8\pi^2 r^3} \frac{1}{2^8 \pi^4 r^2} + \mathcal{O}(1) = \frac{L}{3(16\pi^2)^2} + \mathcal{O}(1), \quad (69)$$

$$I_3(\Lambda, \sigma) = \int_{1/\Lambda}^{1/\sigma} dr r^4 \frac{8\pi^2}{3} \frac{1}{2^6 \pi^4 r^6} \left( -\frac{r}{32\pi^2} \right) + \mathcal{O}(1) = -\frac{L}{3(16\pi^2)^2} + \mathcal{O}(1). \quad (70)$$

Перейдем к рассмотрению интеграла  $I_1(\Lambda, \sigma)$ . Он содержит степенную расходимость, поэтому процедура его анализа отличается. Выпишем сперва явную формулу

$$I_1(\Lambda, \sigma) = \int_{B_{1/\sigma} \times B_{1/\sigma}} d^5x d^5y (R_0^\Lambda(x))^2 R_0^\Lambda(y) R_0^\Lambda(y+x).$$

Обратим внимание, что в интеграле по переменной  $x$  область интегрирования  $B_{1/\sigma}$  можно заменить на  $\mathbb{R}^5$ , так как в этом случае добавляется конечный интеграл по  $\mathbb{R}^5 \setminus B_{1/\sigma}$  от функции без сингулярностей. Дополнительно добавим и вычтем аналогичную область для второго интегрирования, тогда получим

$$I_1(\Lambda, \sigma) = \int_{\mathbb{R}^5} d^5x (R_0^\Lambda(x))^2 \left( \int_{\mathbb{R}^5} d^5y R_0^\Lambda(y) R_0^\Lambda(y+x) - \int_{\mathbb{R}^5 \setminus B_{1/\sigma}} d^5y R_0^\Lambda(y) R_0^\Lambda(y+x) \right) + \mathcal{O}(1). \quad (71)$$

Далее заметим, что интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^5} d^5x (R_0^\Lambda(x))^2 \left( \int_{\mathbb{R}^5 \setminus B_{1/\sigma}} d^5y \left[ (R_0^\Lambda(y))^2 - R_0^\Lambda(y) R_0^\Lambda(y+x) \right] \right) \quad (72)$$

сходится и конечен при снятии регуляризации  $\Lambda \rightarrow +\infty$ . Действительно, для доказательства достаточно заметить, что в регионе  $|y| > 1/\sigma$  и  $|x| \leq 1/\sigma_1$  при  $\Lambda > \sigma$ , где фиксированное число  $\sigma_1 > 0$  удовлетворяет неравенству  $1/\sigma_1 + 1/\Lambda \leq 1/\sigma$ , выполняются соотношения

$$R_0^\Lambda(y) = R_0(y), \quad \int_{S^4} d^4\hat{x} R_0^\Lambda(y + |x|\hat{x}) = R_0(y),$$

и, таким образом, справедливо равенство

$$\int_{B_{1/\sigma_1}} d^5x (R_0^\Lambda(x))^2 \left( \int_{\mathbb{R}^5 \setminus B_{1/\sigma}} d^5y \left[ (R_0^\Lambda(y))^2 - R_0^\Lambda(y) R_0^\Lambda(y+x) \right] \right) = 0.$$

Это означает, что интеграл (72) при снятии регуляризации стремится к конечному числу

$$\int_{\mathbb{R}^5 \setminus B_{1/\sigma}} d^5x (R_0(x))^2 \left( \int_{\mathbb{R}^5 \setminus B_{1/\sigma}} d^5y \left[ (R_0(y))^2 - R_0(y) R_0(y+x) \right] \right).$$

Следовательно, вводя вспомогательное определение

$$\alpha_1(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^5} d^5x (R_0^1(x))^2 \int_{\mathbb{R}^5} d^5y R_0^1(y) R_0^1(y+x)$$

и масштабируя переменные  $x \rightarrow x/\Lambda$  и  $y \rightarrow y/\Lambda$  в первом слагаемом (71), получаем

$$\begin{aligned} I_1(\Lambda, \sigma) &= \Lambda^2 \alpha_1(\mathbf{f}) - \int_{\mathbb{R}^5} d^5x (R_0^\Lambda(x))^2 \int_{\mathbb{R}^5 \setminus B_{1/\sigma}} d^5y (R_0^\Lambda(y))^2 + \mathcal{O}(1) = \\ &= \Lambda^2 \alpha_1(\mathbf{f}) - A(0)(A(0) - A(\sigma)) + \mathcal{O}(1). \end{aligned} \quad (73)$$

Изучим сингулярные слагаемые вспомогательных интегралов (41)–(46) для третьей поправки. Начнем с  $I_4(\Lambda, \sigma)$ . В данном случае следует обратить внимание на то, что параметр  $\sigma$  появляется в двух местах: при финальном интегрировании, см. (41), и в определении функции  $R_1^\Lambda(\cdot)$ , см. (15). В обоих случаях  $\sigma$  отвечает за радиус  $1/\sigma$  шара  $B_{1/\sigma}$ , по которому производится интегрирование. Докажем, что достаточно рассматривать случай  $\sigma \rightarrow +0$ .



Сперва покажем, что можно заменить  $B_{1/\sigma}$  на  $\mathbb{R}^5$  в определении  $R_1^\Lambda(\cdot)$ . Рассмотрим разность вида

$$I_4(\Lambda, \sigma) - \int_{B_{1/\sigma}} d^5x \hat{R}_0^\Lambda(x) \left( \hat{R}_1^\Lambda(x) \Big|_{\sigma \rightarrow +0} \right) = \int_{B_{1/\sigma}} d^5x \hat{R}_0^\Lambda(x) \left( \hat{R}_1^\Lambda(x) - \hat{R}_1^\Lambda(x) \Big|_{\sigma \rightarrow +0} \right) \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0,$$

где был использован тот факт, что комбинация  $R_1^\Lambda(x) - R_1^\Lambda(x)|_{\sigma \rightarrow +0}$  не содержит сингулярностей и непрерывна. В частности, она имеет конечный предел при  $x = 0$ .

Рассмотрим теперь второй параметр  $\sigma$ . Начнем с формулы для  $\hat{R}_0^\Lambda(\cdot)$ . С учетом определения (33) и формулы (65), при  $|x| > 1/\Lambda$  функция может быть записана в виде

$$\hat{R}_0^\Lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^5} d^5z (R_0^\Lambda(z))^2 (R_0^\Lambda(z+x) - R_0(z+x)) - \Lambda(0) (R_0^\Lambda(x) - R_0(x)) - \frac{1}{(16\pi^2)^2 |x|^4}, \quad (74)$$

где для региона  $|x| > 1/\Lambda$  была использована цепочка равенств

$$\begin{aligned} \hat{R}_0^\Lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}^5} d^5z (R_0^\Lambda(z))^2 (R_0(z+x) - R_0(x)) = \int_{\mathbb{R}^5} d^5z (R_0^\Lambda(z))^2 (R_0^{1/|z|}(x) - R_0(x)) = \\ &= \frac{1}{(8\pi^2)^3} \int_{\mathbb{R}^5 \setminus B_{|x|}} d^5z \left( \frac{1}{|z|^9} - \frac{1}{|x|^3 |z|^6} \right) = -\frac{1}{(16\pi^2)^2 |x|^4}. \end{aligned}$$

При  $|x| \leq 1/\Lambda$  верно следующее соотношение

$$\hat{R}_0^\Lambda(x) = \frac{\Lambda^4}{3(8\pi^2)^2} \int_{\Lambda|x|}^1 dt \left( t - \frac{t^4}{\Lambda^3 |x|^3} \right) \left( \mathbf{f}(t^2) + 1 \right)^2 - \frac{\Lambda^4}{(16\pi^2)^2}.$$

Отметим, что  $\text{supp}(R_0^\Lambda(\cdot) - R_0(\cdot)) \subset B_{1/\Lambda}$ , поэтому  $\hat{R}_0^\Lambda(x)$  при больших значениях  $|x|$  имеет в главном порядке  $|x|^{-4}$ . Аналогично проверяется, что  $\hat{R}_1^\Lambda(x)$  имеет поведение  $|x|^{-2}$ . Следовательно, заменяя  $B_{1/\sigma}$  на  $\mathbb{R}^5$  в (41), добавляется лишь конечная часть. Таким образом было показано, что

$$\begin{aligned} I_4(\Lambda, \sigma) &= \Lambda \int_{\mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5} d^5x d^5z \left( \int_{\mathbb{R}^5} d^5y (R_0^1(y))^2 R_0^1(y+x) - \Lambda(0) R_0^1(x) \right) R_0^1(x+z) \times \\ &\quad \times \left( \int_{\mathbb{R}^5} d^5u (R_0^1(u))^2 R_0^1(u+z) - \Lambda(0) R_0^1(z) \right) = \Lambda \alpha_2(\mathbf{f}), \quad (75) \end{aligned}$$

где было выполнено масштабирование переменных и использовано соотношение

$$\hat{R}_1^\Lambda(x) \Big|_{\sigma \rightarrow +0} = \int_{\mathbb{R}^5} d^5y \hat{R}_0^\Lambda(y) R_0^\Lambda(x+y). \quad (76)$$

Перейдем к интегралу  $I_5(\Lambda, \sigma)$  из (42). Пользуясь предыдущими аргументами замены  $B_{1/\sigma}$  на  $\mathbb{R}^5$  в определении  $R_1^\Lambda(\cdot)$ , исследуемая функция переписывается в форме

$$I_5(\Lambda, \sigma) = \int_{B_{\Lambda/\sigma} \times \mathbb{R}^5} d^5x d^5y \hat{R}_0^1(x) R_0^1(x+y) R_0^1(y) + \mathcal{O}(1), \quad (77)$$

где дополнительно в первом слагаемом было сделано масштабирование  $x \rightarrow x/\Lambda$  и  $y \rightarrow y/\Lambda$ . Далее заметим, что функции  $R_0^1(x+y)$  и  $R_0^1(y)$  можно заменить на  $R_0(x+y)$  и  $R_0(y)$ , так как замена происходит за счет добавления функции с компактным носителем, которая изменяет интеграл (77) на конечную (не сингулярную) величину. Следовательно, пользуясь формулами (67) и (74) и тем фактом, что сингулярность в (77) логарифмическая, имеем

$$\begin{aligned} I_5(\Lambda, \sigma) &\stackrel{\text{s.p.}}{=} L \left( \Lambda \frac{d}{d\Lambda} \int_{B_{\Lambda/\sigma} \times \mathbb{R}^5} d^5x d^5y \hat{R}_0^1(x) R_0(x+y) R_0(y) \right) \Big|_{\Lambda \rightarrow +\infty} = \\ &= L \left( \frac{8\pi^2}{3} \left( \frac{\Lambda}{\sigma} \right)^5 \hat{R}_0^1(x) R_1^{+\infty}(x) \Big|_{\sigma \rightarrow +0, x=\Lambda/\sigma} \right) \Big|_{\Lambda \rightarrow +\infty} = -\frac{L}{6(16\pi^2)^2}. \quad (78) \end{aligned}$$

Ясно, что интеграл  $I_7(\Lambda, \sigma)$  равен первому слагаемому из (77) и, следовательно, ответ для него также (78). Также, с учетом формулы (76), не трудно показать, что интеграл  $I_8(\Lambda, \sigma)$  отличается от  $I_7(\Lambda, \sigma)$  на конечную величину. Действительно, справедлива следующая цепочка соотношений

$$I_8(\Lambda, \sigma) = \int_{B_{1/\sigma} \times \mathbb{R}^5} d^5x d^5y R_0^\Lambda(x) R_0^\Lambda(x+y) \hat{R}_0^\Lambda(y) + \mathcal{O}(1) = \quad (79)$$

$$= I_7(\Lambda, \sigma) + \int_{B_{1/\sigma} \times (\mathbb{R}^5 \setminus B_{1/\sigma})} d^5x d^5y R_0^\Lambda(x) R_0^\Lambda(x+y) \hat{R}_0^\Lambda(y) - \quad (80)$$

$$- \int_{(\mathbb{R}^5 \setminus B_{1/\sigma}) \times B_{1/\sigma}} d^5x d^5y R_0^\Lambda(x) R_0^\Lambda(x+y) \hat{R}_0^\Lambda(y) + \mathcal{O}(1) = I_7(\Lambda, \sigma) + \mathcal{O}(1). \quad (81)$$

Тогда общий ответ можно выписать в виде

$$I_5(\Lambda, \sigma) \stackrel{\text{s.p.}}{=} I_7(\Lambda, \sigma) \stackrel{\text{s.p.}}{=} I_8(\Lambda, \sigma) \stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{L}{6(16\pi^2)^2}. \quad (82)$$

Перейдем к интегралу  $I_6(\Lambda, \sigma)$ . В этом случае воспользуемся общей логикой, предложенной при анализе  $I_4(\Lambda, \sigma)$ , то есть сведем области интегрирования  $B_{1/\sigma} \times \mathbb{R}^5$ . Начнем с параметра в  $R_1^\Lambda(x)$ . В отличие от интеграла  $I_4(\Lambda, \sigma)$ , в котором  $R_1^\Lambda(x)$  входит через  $\hat{R}_1^\Lambda(x)$  и, следовательно, строится через разность согласно (33), в интеграле  $I_6(\Lambda, \sigma)$  нельзя заменить  $B_{1/\sigma}$  на  $\mathbb{R}^5$  без сохранения невязки. В этом случае необходимо сохранить первый поправочный член. Другими словами, можно произвести замену вида

$$R_1^\Lambda(x-z) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^5} d^5y R_0^\Lambda(x-y) R_0^\Lambda(y-z) + (A(\sigma) - A(0)), \quad (83)$$

и получить

$$I_6(\Lambda, \sigma) = \int_{B_{1/\sigma} \times \mathbb{R}^5} d^5x d^5z \hat{R}_0^\Lambda(x) R_0^\Lambda(x-z) \left( R_1^\Lambda(x-z) \Big|_{\sigma \rightarrow +0} \right) R_0^\Lambda(z) + (A(\sigma) - A(0)) I_7(\Lambda, \sigma) + \mathcal{O}(1). \quad (84)$$

Далее, учитывая свойство убывания функции, использованное выше, можно заменить  $B_{1/\sigma}$  на  $\mathbb{R}^5$  в первом слагаемом (84). Затем, выполняя масштабирование и используя ответ (82), получаем

$$I_6(\Lambda, \sigma) = \Lambda \alpha_3(\mathbf{f}) - \frac{L(A(\sigma) - A(0))}{6(16\pi^2)^2} + \mathcal{O}(1), \quad (85)$$

где было введено обозначение

$$\alpha_3(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5} d^5x d^5y d^5z \hat{R}_0^1(x) R_0^1(x-z) R_0^1(x-y) R_0^1(y-z) R_0^1(z).$$

Переходя к последней функции (46), сразу заметим, что в  $R_1^\Lambda(x-z)$  можно выбрать точку  $\sigma = 0$ . Несмотря на тот факт, что  $R_1^\Lambda(x-z)$  не входит в виде разности, как это было в  $I_4(\Lambda, \sigma)$ , поправочный член (как в (83)) отслеживать не нужно, поскольку  $I_9(\Lambda, \sigma)$  содержит логарифмическую сингулярность. В отличие от  $I_6(\Lambda, \sigma)$ , который содержит степенную особенность, и поправка в нем играет существенную роль. Таким образом, делая дополнительную перестановку множителей, имеем

$$I_9(\Lambda, \sigma) = \int_{B_{1/\sigma} \times \mathbb{R}^5} d^5x d^5z R_0^\Lambda(x) R_0^\Lambda(x+z) R_0^\Lambda(z) \left( R_1^\Lambda(z) \Big|_{\sigma \rightarrow +0} \right) + \mathcal{O}(1).$$

Далее, применяя процедуру, аналогичную (79)–(81), урежем область интегрирования по  $z$  с  $\mathbb{R}^5$  до  $B_{1/\sigma}$ , а интеграл по  $x$  дополним с  $B_{1/\sigma}$  до  $\mathbb{R}^5$ . В итоге получим

$$I_9(\Lambda, \sigma) = \int_{B_{1/\sigma} \times \mathbb{R}^5} d^5z d^5x R_0^\Lambda(z) \left( R_1^\Lambda(z) \Big|_{\sigma \rightarrow +0} \right) R_0^\Lambda(x+z) R_0^\Lambda(x) + \mathcal{O}(1). \quad (86)$$

Заметим, что в интеграле по  $x$  образовалась функция  $R_1^\Lambda(z)$  при  $\sigma = 0$ . Изменяя первое слагаемое в (86) на конечную величину, перейдем от  $R_1^\Lambda(z)$  к  $R_1^{+\infty}(z)$ . Окончательно имеем после масштабирования переменных

$$I_9(\Lambda, \sigma) \stackrel{\text{s.p.}}{=} L \left( \Lambda \frac{d}{d\Lambda} \int_{B_{1/\sigma}} d^5 z R_0^1(z) \left( R_1^{+\infty}(z) \Big|_{\sigma \rightarrow +0} \right)^2 \right) \Big|_{\Lambda=+\infty} = \frac{L}{3(16\pi^2)^2}. \quad (87)$$

В дополнение заметим, что  $I_9(\Lambda, \sigma) \stackrel{\text{s.p.}}{=} I_2(\Lambda, \sigma)$ .

Перейдем к вычислению интегралов, возникающих в диаграмме  $d_3$ , то есть  $I_{10}(\Lambda, \sigma)$  и  $I_4(\Lambda, \sigma)$  из (56) и (57). Начнем с последнего, поскольку он будет использоваться в  $I_{10}(\Lambda, \sigma)$ . В равенстве (57) представлена явная формула, однако она не является удобной для подсчета. Сделаем несколько преобразований. Сперва сократим область интегрирования по переменной  $y$  с  $\mathbb{R}^5$  до  $B_{1/\sigma}$ , а область для переменной  $z$  дополним до  $\mathbb{R}^5$ . При этом  $I_{11}(\Lambda, \sigma)$  изменится на конечную величину, поскольку интегралы

$$\int_{B_{1/\sigma} \times \mathbb{R}^5 \times (\mathbb{R}^5 \setminus B_{1/\sigma})} d^5 z d^5 x d^5 y R_0^\Lambda(z-y) R_0^\Lambda(z-x) R_0^\Lambda(x-y) R_0^\Lambda(x) R_0^\Lambda(y),$$

$$\int_{(\mathbb{R}^5 \setminus B_{1/\sigma}) \times \mathbb{R}^5 \times B_{1/\sigma}} d^5 z d^5 x d^5 y R_0^\Lambda(z-y) R_0^\Lambda(z-x) R_0^\Lambda(x-y) R_0^\Lambda(x) R_0^\Lambda(y),$$

существуют и конечны, в том числе и после снятия регуляризации. Далее заменим четыре функции  $R_0^\Lambda(\cdot)$  кроме той, что имеет аргумент  $y$ , на предельные  $R_0(\cdot)$ . При этом изначальный интеграл изменится на конечную величину, поскольку преобразование выполнялось добавлением функций с компактными носителями. Также отметим, что подобные преобразования являются допустимыми, поскольку сингулярность является наиболее слабой, то есть логарифмической. Также легко убедиться (сделать оценки), что невязочные слагаемые конечны. В итоге получаем промежуточный ответ в виде

$$I_{11}(\Lambda, \sigma) = \int_{\mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5 \times B_{1/\sigma}} d^5 z d^5 x d^5 y R_0(z-y) R_0(z-x) R_0(x-y) R_0(x) R_0^\Lambda(y) + \mathcal{O}(1). \quad (88)$$

Далее воспользуемся формулой (67) в форме

$$\int_{\mathbb{R}^5} d^5 z R_0(z-y) R_0(z-x) = \frac{1}{16\pi^2|x-y|},$$

сделаем замену  $x \rightarrow x+y$  в (88) и применим соотношение (65), тогда интеграл переписывается следующим образом

$$I_{11}(\Lambda, \sigma) = \int_{\mathbb{R}^5 \times B_{1/\sigma}} d^5 x d^5 y \frac{2}{(16\pi^2)^2 |x|^4} \left( \frac{1}{8\pi^2} \begin{cases} |x|^{-3}, & |y| \leq |x|; \\ |y|^{-3}, & |y| > |x|. \end{cases} \right) R_0^\Lambda(y) + \mathcal{O}(1) =$$

$$= \frac{L}{3(16\pi^2)^2} + \mathcal{O}(1). \quad (89)$$

Переходя к интегралу  $I_{10}(\Lambda, \sigma)$  из (56), сразу отметим, что в нем удобно рассмотреть переход к  $\sigma = +0$ . При этом, как и в интеграле  $I_6(\Lambda, \sigma)$ , параметр  $\sigma$  в нем находится в области интегрирования (внешней, см. (56)), и в функции  $R_1^\Lambda(\cdot)$ . В последнем случае, как уже было отмечено, необходимо сохранить поправочный член, то есть воспользоваться переходом (83). Область же интегрирования (56) можно просто заменить на  $\mathbb{R}^5$ , так как на бесконечности интеграл является сходящимся и, следовательно, сингулярная часть при такой замене не изменяется. Таким образом, после дополнительного масштабирования переменных, получаем

$$I_{10}(\Lambda, \sigma) = \Lambda \alpha_4(\mathbf{f}) + (A(\sigma) - A(0)) I_{11}(\Lambda, \sigma) + \mathcal{O}(1)$$

$$= \Lambda \alpha_4(\mathbf{f}) + \frac{L(A(\sigma) - A(0))}{3(16\pi^2)^2} + \mathcal{O}(1), \quad (90)$$

где

$$\alpha_4(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^{5 \times 4}} d^5 x_1 d^5 x_2 d^5 x_3 d^5 x_4 R_0^1(x_1) R_0^1(x_2) R_0^1(x_1 - x_2) R_0^1(x_1 - x_3) R_0^1(x_2 - x_3) R_0^1(x_3 - x_4) R_0^1(x_4).$$

В работе также используется тот факт (см. текст до (26)), что  $R^\Lambda(0)$  ведет себя как  $\Lambda^{-1}$  при  $\Lambda \rightarrow +\infty$ . Покажем это. Воспользуемся определениями (16) и (17), тогда

$$R_2^\Lambda(0) = 2 \int_{B_{1/\sigma} \times B_{1/\sigma}} d^5 x d^5 y \left( R_0^\Lambda(x) R_0^\Lambda(x+y) R_0^\Lambda(y) - R_0(x) R_0(x+y) R_0(y) \right).$$

Сделаем масштабирование  $x \rightarrow x/\Lambda$  и  $y \rightarrow y/\Lambda$ , тогда формула (27) переписывается в виде

$$R_2^\Lambda(0) = \frac{2}{\Lambda} \int_{B_{\Lambda/\sigma} \times B_{\Lambda/\sigma}} d^5 x d^5 y \left( R_0^1(x) R_0^1(x+y) R_0^1(y) - R_0(x) R_0(x+y) R_0(y) \right). \quad (91)$$

Заметим, что подынтегральное выражение переписывается в виде конечной суммы, в каждом слагаемом которой содержится не менее одной функции  $R_0^1(\cdot) - R_0(\cdot)$ , носитель которой лежит в  $B_1$ . Следовательно, интеграл в (91) сходится при  $\Lambda \rightarrow +\infty$ . Тогда ответ имеет вид

$$R_2^\Lambda(0) = \frac{2}{\Lambda} \int_{\mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5} d^5 x d^5 y \left( R_0^1(x) R_0^1(x+y) R_0^1(y) - R_0(x) R_0(x+y) R_0(y) \right) + o(1/\Lambda). \quad (92)$$

## 8 Список литературы

- [1] C. Itzykson, J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-hill, New York (1980)
- [2] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley, 1–868 (1995)
- [3] J. C. Collins, *Renormalization: An Introduction to Renormalization, the Renormalization Group and the Operator-Product Expansion*, Cambridge University Press (1984)
- [4] O. I. Zavialov, *Renormalized quantum field theory*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, 1–524 (1990)
- [5] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Quantum equation of motion and two-loop cutoff renormalization for  $\phi^3$  model*, Zap. Nauchn. Sem. POMI, **487**, POMI, St. Petersburg, 2019, 151–166; J. Math. Sci. (N. Y.), **257**:4 (2021), 526–536, arXiv:2203.04562, 10.1007/s10958-021-05500-5
- [6] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Two-Loop Cutoff Renormalization of 4-D Yang–Mills Effective Action*, 2020 J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **48**, 015002, arXiv:2004.05999, 10.1088/1361-6471/abb939
- [7] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Formula for two-loop divergent part of 4-D Yang–Mills effective action*, Eur. Phys. J. C **82**, 997 (2022), arXiv:2203.07131, 10.1140/epjc/s10052-022-10921-w
- [8] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Three-loop divergences in effective action of 4-dimensional Yang–Mills theory with cutoff regularization:  $\Gamma_4^2$ -contribution*, Zap. Nauchn. Sem. POMI, **520**, POMI, St. Petersburg, 2023, 162–188
- [9] A. V. Ivanov, *Three-loop renormalization of the quantum action for a four-dimensional scalar model with quartic interaction with the usage of the background field method and a cutoff regularization*, (2024), arXiv:2402.14549, <https://www.pdmi.ras.ru/preprint/2024/24-02.html>
- [10] A. V. Ivanov, *Explicit Cutoff Regularization in Coordinate Representation*, 2022 J. Phys. A: Math. Theor. **55**, 495401, arXiv:2209.01783, 10.1088/1751-8121/aca8dc
- [11] A. V. Ivanov, *On a criterion for a cutoff regularization in the coordinate representation*, (2024), arXiv:2403.09218, <https://www.pdmi.ras.ru/preprint/2024/24-04.html>

- [12] D. I. Kazakov, *Radiative Corrections, Divergences, Regularization, Renormalization, Renormalization Group and All That in Examples in Quantum Field Theory*, arXiv:0901.2208 [hep-ph] (2009)
- [13] B. S. DeWitt, *Quantum Theory of Gravity. 2. The Manifestly Covariant Theory*, Phys. Rev. **162**, 1195–1239 (1967)
- [14] B. S. DeWitt, *Quantum Theory of Gravity. 3. Applications of the Covariant Theory*, Phys. Rev. **162**, 1239–1256 (1967)
- [15] G. 't Hooft, *The background field method in gauge field theories*, (Karpacz, 1975), Proceedings, Acta Universitatis Wratislaviensis, **1**, Wroclaw, 345–369 (1976)
- [16] L. F. Abbott, *Introduction to the background field method*, Acta Phys. Polon. B, **13**:1–2, 33–50 (1982)
- [17] I. Ya. Aref'eva, A. A. Slavnov, L. D. Faddeev, *Generating functional for the S-matrix in gauge-invariant theories*, TMF, **21**:3, 311–321 (1974)
- [18] L. D. Faddeev, *Mass in Quantum Yang–Mills theory (comment on a Clay millenium problem)*, Bull. Braz. Math. Soc. (N. S.), **33**:2, 201–212 (2002) arXiv: 0911.1013
- [19] M. Lüscher, *Dimensional regularisation in the presence of large background fields*, Annals of Physics **142**, 359–392 (1982)
- [20] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Special Functions for Heat Kernel Expansion*, Eur. Phys. J. Plus **137**, 1060 (2022), arXiv:2106.00294v2, 10.1140/epjp/s13360-022-03176-7
- [21] E. Hille, R. S. Phillips, *Functional Analysis and Semi-groups*, Providence: American Mathematical Society, 1-808 (1957)
- [22] A. N. Vasil'ev, *Functional methods in quantum field theory and statistics*, London: Gordon & Breach, (1998)