PDMI Preprint – 04/2024

Об одном критерии для регуляризации обрезанием в координатном представлении

Александр В. Иванов

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А.Стеклова РАН,
Фонтанка 27, Санкт-Петербург, 191023, Россия

Санкт-Петербургский международный математический институт им. Леонарда Эйлера,
Песочная наб. 10, Санкт-Петербург, 197022, Россия

E-mail: regul1@mail.ru

05 марта 2024 г.

К 90-летию Л.Д.Фаддеева

Аннотация. В работе обсуждается критерий допустимости для регуляризации обрезанием в координатном представлении в евклидовом пространстве с размерностью больше двух. Показано, что множество функций, удовлетворяющих критерию, не пусто. В качестве примера приведена функция в явном виде. Доказано путем явного построения, что существуют функции, удовлетворяющие критерию в более строгой формулировке.

Ключевые слова и фразы: регуляризация обрезанием, функция Грина, фундаментальное решение, деформация, координатное представление.

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

---

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В.А.Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:
ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г.
Выдано Федеральной службой по надзору
в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные:
191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27
телефоны: (812) 312-40-58; (812) 571-57-54
e-mail: admin@pdmi.ras.ru
https://www.pdmi.ras.ru/preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором В. Н. Симонова

1 Введение

В различных моделях квантовой теории поля [1,2] возникают расходящиеся интегралы. Как правило, это связано с тем фактом, что обобщенные функции [3], которые должны рассматриваться на определенном тестовом классе, действуют на другие обобщенные функции. Это приводит к появлению неинтегрируемых особенностей. Для работы с такими объектами необходима промежуточная регуляризация, выбор которой зависит от симметрий модели и существенным образом влияет на процесс дальнейших исследований.

В работе [4] была предложена регуляризация обрезанием в координатном представлении. Позже она была усовершенствована [5] и успешно применена к ряду моделей [6–8]. В данной работе планируется сформулировать критерий допустимости для такой регуляризации, доказать его выполнимость и привести конкретные примеры.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $n > 2$. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением векторов $(\,\cdot\,,\cdot\,)$. Определим оператор Лапласа $A_n(x)$ и его фундаментальное решение $G_n(x)$, которые в декартовых координатах имеют вид

$$A_n(x) = -\sum_{k=1}^{n}\partial^2_{x_k}, \quad G_n(x) = \frac{|x|^{2-n}}{(n-2)S_{n-1}}, \quad S_{n-1} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$

Именно $G_n(\cdot)$, как правило, используется в качестве главного приближения функции Грина, и поэтому исследование его свойств является важной задачей. Ясно, что последние объекты решают уравнение $A_n(x)G_n(x-y) = \delta(x-y)$ в смысле обобщенных функций на классе Шварца $S(\mathbb{R}^n)$.

Упомянутая выше регуляризация заключается в деформации следующего вида

$$\begin{aligned} G_n(x) \xrightarrow{\text{рег.}} G_n^{\Lambda,\mathbf{f}}(x) &= \frac{\Lambda^{n-2}}{(n-2)S_{n-1}}\mathbf{f}\big(|x|^2\Lambda^2\big) + \frac{1}{(n-2)S_{n-1}}\begin{cases}\Lambda^{n-2}, & \text{для } |x| \leqslant 1/\Lambda;\\ |x|^{2-n}, & \text{для } |x| > 1/\Lambda,\end{cases} \\ &= \frac{\Lambda^{n-2}}{(n-2)S_{n-1}}\mathbf{f}\big(|x|^2\Lambda^2\big) + G_n^{\Lambda,\mathbf{0}}(x), \end{aligned} \tag{1}$$

где Λ – регуляризующий параметр, и $\mathbf{f}(\cdot) \in C\big([0,+\infty),\mathbb{R}\big)$ – вспомогательная деформирующая функция, удовлетворяющая свойствам

$$\operatorname{supp}\big(\mathbf{f}(\cdot)\big) \subset [0,1] \;\text{ и }\; A_n(x)\Lambda^{n-2}\mathbf{f}\big(|x-y|^2\Lambda^2\big) \xrightarrow{\Lambda\to+\infty} 0.$$

Для такого вида деформации справедлив переход $A_n(x)G_n^{\Lambda,\mathbf{f}}(x-y) \to 0$ при снятии регуляризации $\Lambda \to +\infty$ в смысле обобщенных функций на $S(\mathbb{R}^n)$. Из построения следует, что деформация производится только в замкнутом шаре $\mathrm{B}_{1/\Lambda}$ радиуса $1/\Lambda$ с центром в нуле, поэтому при $|x| > 1/\Lambda$ верно равенство $G_n(x) = G_n^{\Lambda,\mathbf{f}}(x)$. Простыми словами можно сказать, что при введении регуляризации производится обрезание растущей функции в области $\mathrm{B}_{1/\Lambda}$.

При изучении квантово-полевых моделей регуляризованное фундаментальное решение является ядром оператора в квадратичной форме, значение которой не должно быть отрицательным. Другими словами, преобразование Фурье функции $G_n^{\Lambda,\mathbf{f}}(\cdot)$ не должно принимать отрицательных значений при всех значениях аргумента и всех $\Lambda > N > 0$ для некоторого фиксированного числа N. На математическом языке такое соотношение можно сформулировать так

$$\hat{G}_n^{\Lambda,\mathbf{f}}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}^n x\, e^{(y,x)} G_n^{\Lambda,\mathbf{f}}(x) \geqslant 0, \tag{2}$$

для всех $y \in \mathbb{R}^n$ и $\Lambda > N > 0$. Данное соотношение является критерием допустимости для регуляризации. Оно определяет класс допустимых функций $\mathbf{f}(\cdot)$, для которых спектральная плотность не будет иметь отрицательных значений.

В краткой форме основные результаты работы можно изложить следующим образом:

- лемма 1 содержит формулировку критерия относительно деформирующей функции;

- в лемме 2 показано, что множество функций, удовлетворяющих критерию, не пусто;
- в лемме 3 приведен явный вид функции, удовлетворяющей критерию;
- в лемме 4 построена функция, удовлетворяющая критерию в строгой формулировке.

2 Результаты

Лемма 1. *С учетом всего вышеизложенного критерий допустимости* (2) *можно эквивалентно представить условием*

$$\frac{s^2}{n-2}\int_0^1 \mathrm{d}t\, t^{n-1}\rho_n(ts)\mathbf{f}\big(t^2\big)+\rho_n(s)\geqslant 0 \quad \text{для всех } s\geqslant 0, \tag{3}$$

где

$$\rho_n(s)=\Gamma(n/2)(s/2)^{1-n/2}J_{n/2-1}(s), \tag{4}$$

и $J_{n/2-1}(\cdot)$ *– функция Бесселя первого рода.*

Доказательство. Подставим явный вид деформированного фундаментального решения (1) в неравенство (2) и воспользуемся соотношениями, см. формулы (20) и (30) в [5] и теорему 4.15 в [9],

$$\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{d}^n x\, G_n^{\Lambda,\mathbf{0}}(x)e^{(x,y)}=\frac{\rho_n(|y|/\Lambda)}{|y|^2} \quad \text{и} \quad \rho_n(|y|)=\frac{1}{S_{n-1}}\int_{\mathrm{S}^{n-1}}\mathrm{d}^{n-1}\sigma(\hat{x})\, e^{(\hat{x},y)}, \tag{5}$$

где в последнем равенстве было использовано интегрирование по единичной сфере S^{n-1} с центром в нуле со стандартной мерой, $\hat{x}=x/|x|$. Далее, используя тот факт, что $|y|\geqslant 0$ и $\Lambda>N>0$, можно перейти к параметру $s=|y|/\Lambda$, из чего и следует окончательный вид (3). □

Лемма 2. *Пусть* $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$*. Рассмотрим набор мультииндексов* $\{\alpha_i\}_{i=1}^k$*, компоненты которых являются положительными числами из интервала* $(0,1/2]$ *и удовлетворяют соотношению*

$$2\sum_{j=1}^{\dim(\alpha_i)}(\alpha_i)_j\leqslant 1 \quad \text{для всех } i\in\{1,\ldots,k\}. \tag{6}$$

Далее для каждого мультииндекса α_i *определим интегральный оператор вида*

$$\mathrm{H}_{\alpha_i}^{\Lambda}:\; g(x)\to \mathrm{H}_{\alpha_i}^{\Lambda}(g)(x)=\left(\prod_{j=1}^{2\dim(\alpha_i)}\int_{\mathrm{S}^{n-1}}\frac{\mathrm{d}^{n-1}x_j}{S_{n-1}}\right)g\left(x+\Lambda^{-1}\sum_{m=1}^{\dim(\alpha_i)}\big(x_{2m}+x_{2m-1}\big)(\alpha_i)_m\right), \tag{7}$$

где $g(\cdot)$ *– вспомогательная функция, для которой интегралы существуют. Также определим набор положительных чисел* $\{\kappa_i\}_{i=1}^k$*, таких что* $\kappa_1+\ldots+\kappa_k=1$*. Тогда функция*

$$\sum_{i=1}^k \kappa_i \mathrm{H}_{\alpha_i}^{\Lambda}(G_n)(x) \tag{8}$$

имеет деформацию $G_n^{\Lambda,\mathbf{f}_n}(x)$ *вида* (1)*, и деформирующая функция* $\mathbf{f}_n(\cdot)\in C\big([0,+\infty),\mathbb{R}\big)$ *выписывается в виде*

$$\mathbf{f}_n(s)=(n-2)S_{n-1}\sum_{i=1}^k\kappa_i\mathrm{H}_{\alpha_i}^1(G_n)(\sqrt{s}\hat{x})-\begin{cases}1, & \text{для } s\leqslant 1;\\ s^{1-n/2}, & \text{для } s>1.\end{cases} \tag{9}$$

Доказательство. Обратим внимание, что если каждая функция из набора удовлетворяет критерию (3), то их выпуклая линейная комбинация тоже будет ему удовлетворять. Поэтому без ограничения общности достаточно рассмотреть лишь случай α_i для одного фиксированного i.

Заметим, по определению (7) оператор является многократным усреднением ($2\dim(\alpha_i)$ раз). При этом из формул (5) следует, что уже однократное усреднение с радиусом $r>0$ функции $G_n(x)$ равно

$$\frac{1}{S_{n-1}}\int_{\mathrm{S}^{n-1}}\mathrm{d}^{n-1}\sigma(\hat{x})G_n(y+r\hat{x})=G_n^{1/r,\mathbf{0}}(y)$$

и является ограниченной функцией. Следовательно, оператор $\mathrm{H}^{\Lambda}_{\alpha_i}$ регуляризует фундаментальное решение. Убедимся, что при такой деформации выполняется критерий (2). Для этого применим преобразование Фурье и воспользуемся формулами (5), тогда получим неотрицательную плотность

$$\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{d}^n x\, e^{(y,x)}\mathrm{H}^{\Lambda}_{\alpha_i}(G_n)(x)=\frac{1}{|y|^2}\prod_{j=1}^{\dim(\alpha_i)}\Big(\rho_n\big(|y|(\alpha_i)_j/\Lambda\big)\Big)^2\geqslant 0.$$

Далее проверим, что функция $\mathrm{H}^{\Lambda}_{\alpha_i}(G_n)(x)$ вписывается в представление (1). Для этого заметим, что если носитель некоторой вспомогательной функции $g(\cdot)$ лежит в шаре B_{r_1} радиуса r_1, то для носителя усреднения с радиусом r_2 выполнено соотношение

$$\mathrm{supp}\left(\int_{\mathrm{S}^{n-1}}\frac{\mathrm{d}^{n-1}\sigma(\hat{y})}{S_{n-1}}\,g(\,\cdot\,+r_2\hat{y})\right)\subset\mathrm{B}_{r_1+r_2}.$$

Следовательно, если на каком-то шаге получается функция $\tilde{G}(x)$, которая может быть получена из $G_n(x)$ путем деформации в шаре B_{r_1}, то есть $\tilde{G}(x)=G_n(x)$ в $\mathbb{R}^n\setminus\mathrm{B}_{r_1}$, то дополнительное усреднение с радиусом r_2 приведет к соотношению

$$\int_{\mathrm{S}^{n-1}}\frac{\mathrm{d}^{n-1}\sigma(\hat{y})}{S_{n-1}}\,\tilde{G}(x+r_2\hat{y})=\int_{\mathrm{S}^{n-1}}\frac{\mathrm{d}^{n-1}\sigma(\hat{y})}{S_{n-1}}\Big(\tilde{G}(x+r_2\hat{y})-G_n(x+r_2\hat{y})\Big)+G_n^{1/r_2,\mathbf{0}}=G_n(x)$$

для всех $x\in\mathbb{R}^n\setminus\mathrm{B}_{r_1+r_2}$. Такая процедура шаг за шагом может быть применена к усреднениям из (7). Таким образом, учитывая соотношение (6), можно утверждать, что $\mathrm{H}^{\Lambda}_{\alpha_i}(G_n)(x)=G_n(x)$ для всех $x\in\mathbb{R}^n\setminus\mathrm{B}_{1/\Lambda}$. В том числе и для $|x|=1/\Lambda$ в силу непрерывности усредненной функции. Это означает, что функция $\mathrm{H}^{\Lambda}_{\alpha_i}(G_n)(\cdot)$ имеет деформацию вида (1).

Последнее соотношение (9) получается обращением равенства (1) с дополнительным масштабированием переменных. Полученная функция является сферически симметричной и в действительности не зависит от выбора единичного вектора $\hat{x}$. □

Лемма 3. *Пусть верны предположения леммы 2. Выберем* $k=1$, $\dim(\alpha_1)=1$ *и* $(\alpha_1)_1=1/2$, *тогда функция* (9) *выписывается в явном виде*

$$\mathbf{f}_n(s)=2^{n-2}-1-\frac{2^{n-1}\sqrt{s}S_{n-2}}{S_{n-1}}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{3-n}{2};\frac{3}{2};s\right)+\frac{2^{n-1}\sqrt{s}S_{n-2}}{(n-1)S_{n-1}}\,{}_2F_1\left(\frac{3-n}{2},\frac{n-1}{2};\frac{n+1}{2};s\right)\quad(10)$$

при $s\in[0,1]$, *и* $\mathbf{f}_n(s)=0$ *при* $s>1$. *Здесь* ${}_2F_1$ *обозначает гипергеометрическую функцию. В частности, в размерностях* $n\in\{3,4,5,6\}$ *в области* $s\in[0,1]$ *имеем следующий явный вид*

$$\mathbf{f}_3(s)=1-\sqrt{s},$$

$$\mathbf{f}_4(s)=3-\frac{4s+2}{\pi}\left(\frac{1-s}{s}\right)^{1/2}+\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{s}-4\right)\arcsin\big(\sqrt{s}\big),$$

$$\mathbf{f}_5(s)=7-9\sqrt{s}+2s^{3/2},$$

$$\mathbf{f}_6(s)=15+\frac{2}{3\pi}\big(16s^3-56s^2-2s-3\big)\left(\frac{1-s}{s^3}\right)^{1/2}+\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{s^2}-16\right)\mathrm{arssin}\big(\sqrt{s}\big).$$

Функции изображены на рис. 1.

Доказательство. Подействуем оператором Лапласа на функцию (8) при условии $\Lambda = 1$, тогда можно выписать следующее соотношение с δ-функцией в n-мерном пространстве

$$A_n(x)\mathrm{H}^1_{\alpha_1}(G_n)(x) = \int_{\mathrm{S}^{n-1}} \frac{\mathrm{d}^{n-1}\sigma(\hat{y})}{S_{n-1}} \int_{\mathrm{S}^{n-1}} \frac{\mathrm{d}^{n-1}\sigma(\hat{z})}{S_{n-1}}\, \delta(x+\hat{y}/2+\hat{z}/2). \tag{11}$$

Далее воспользуемся формулой

$$\int_{\mathrm{S}^{n-1}} \mathrm{d}^{n-1}\sigma(\hat{z})\,\delta(x+\hat{y}/2+\hat{z}/2) = 2^{n-1}\delta(|x+y/2|-1/2), \tag{12}$$

где в правой части стоит уже δ-функция в 1-мерном пространстве. Затем в оставшемся интегрировании по сфере перейдем в сферические координаты

$$\hat{y}_1 = \cos(\phi_1),\ \ \hat{y}_2 = \sin(\phi_1)\cos(\phi_2),\ \ \ldots\ \ \hat{y}_{n-1} = \sin(\phi_1)\cdot\ldots\cdot\sin(\phi_{n-2})\cos(\phi_{n-1}),$$
$$\mathrm{d}^{n-1}\sigma(\hat{y}) = \sin^{n-2}(\phi_1)\sin^{n-3}(\phi_2)\cdot\ldots\cdot\sin(\phi_{n-2})\,\mathrm{d}\phi_1\ldots\mathrm{d}\phi_{n-1},$$

где $\phi_i\in[0,\pi]$ при $i\in\{1,\ldots,n-2\}$, и $\phi_{n-1}\in[0,2\pi)$. Из удобства выберем их таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$(x,\hat{y}) = |x|\cos(\phi_1).$$

Тогда, с учетом (12), правая часть (11) переписывается в виде

$$\frac{2^{n-1}}{S^2_{n-1}}\int_{\mathrm{S}^{n-1}} \mathrm{d}^{n-1}\sigma(\hat{y})\,\delta(|x+y/2|-1/2) = \frac{2^{n-1}S_{n-2}}{S^2_{n-1}}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\phi_1\ \sin^{n-2}(\phi_1)\delta\left(\sqrt{|x|^2+|x|\cos(\phi_1)+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right).$$

Последний интеграл явно вычисляется, и промежуточный ответ принимает вид

$$A_n(x)\mathrm{H}^1_{\alpha_1}(G_n)(x) = \frac{2^{n-1}S_{n-2}}{S^2_{n-1}}\begin{cases}|x|^{-1}\big(1-|x|^2\big)^{\frac{(n-3)}{2}}, & \text{для}\ \ |x|\leqslant 1;\\ \qquad 0, & \text{для}\ \ |x|>1.\end{cases} \tag{13}$$

Используя тот факт, что последняя функция зависит лишь от $|x|$, оператор $A_n(x)$ можно представить в виде $-|x|^{1-n}\partial_{|x|}|x|^{n-1}\partial_{|x|}$. Тогда, интегрируя функцию (13), с учетом того условия, что результат должен совпадать с $G_n(x)$ при $|x|>1$, и подставляя ее в формулу (9), получаем заявленное соотношение (10). Частные случаи следуют из определения гипергеометрической функции. $\square$

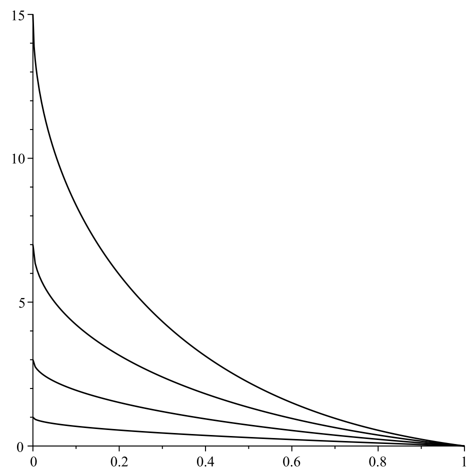

Рис. 1: Функция $\mathbf{f}_n(s)$ для $n\in\{3,4,5,6\}$ и $s\in[0,1]$. На изображении $\mathbf{f}_3(0)<\mathbf{f}_4(0)<\mathbf{f}_5(0)<\mathbf{f}_6(0)$.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия леммы 3. Рассмотрим два набора положительных чисел* $\{\kappa_i\}_{i=1}^{+\infty}$ *и* $\{r_i\}_{i=1}^{+\infty}$*, удовлетворяющих следующим условиям*

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\kappa_i=1,\quad \lim_{i\to+\infty}(r_i)=0,\quad \sum_{i=1}^{+\infty}\kappa_i r_i^{-n}=\kappa<+\infty. \tag{14}$$

Пусть $r=\max_{i\geqslant1}(r_i)$*. Далее каждому* r_i *сопоставим деформированное фундаментальное решение* $G_n^{\Lambda/r_i,\mathbf{f}_n}$*, где* $\mathbf{f}_n(\cdot)$ *из* (10)*. Тогда функция*

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\kappa_i G_n^{\Lambda/r_i,\mathbf{f}_n} \tag{15}$$

является деформацией $G_n^{\Lambda/r,\tilde{\mathbf{f}}_n}$ *вида* (1) *для решения* $G_n(x)$*, а соответствующая деформирующая функция* $\tilde{\mathbf{f}}_n(\cdot)$ *решает неравенство* (3) *в строгой формулировке, то есть со знаком* $>$ *вместо* $\geqslant$*.*

Замечание. В качестве примеров последовательностей можно взять $\kappa_i=2^{-i}$ и $r_i=2^{-i/(2n)}$.

Доказательство. Заметим, что каждое отдельное слагаемое в сумме (15) имеет деформацию вида (1). Более того, функция $G_n^{\Lambda/r_i,\mathbf{f}_n}$ совпадает с $G_n(x)$ при всех $i\geqslant1$ и $x\in\mathbb{R}^n\setminus\mathrm{B}_{r/\Lambda}$. Следовательно, учитывая первое равенство из (14), убеждаемся, что сумма (15) равна $G_n(x)$ в области $x\in\mathbb{R}^n\setminus\mathrm{B}_{r/\Lambda}$. Далее проверим, что сумма конечна в области $\mathrm{B}_{r/\Lambda}$. Определим следующее число

$$M=\max_{x\in\mathrm{B}_1}\left(\frac{\big|\mathbf{f}_n\big(|x|^2\big)\big|+1}{(n-2)S_{n-1}}\right).$$

Тогда, учитывая справедливость $\mathrm{B}_{r_i/\Lambda}\subset\mathrm{B}_{r/\Lambda}$ для всех $i\geqslant1$, каждую функцию $G_n^{\Lambda/r_i,\mathbf{f}_n}$ в шаре радиусом r/Λ можно оценить следующим образом

$$\big|G_n^{\Lambda/r_i,\mathbf{f}_n}(x)\big|\leqslant\frac{(\Lambda/r_i)^{n-2}}{(n-2)S_{n-1}}\big|\mathbf{f}_n\big(|x|^2\Lambda^2/r_i^2\big)\big|+\frac{(\Lambda/r_i)^{n-2}}{(n-2)S_{n-1}}\leqslant(\Lambda/r_i)^{n-2}M.$$

Таким образом, справедлива следующая оценка

$$\left|\sum_{i=1}^{+\infty}\kappa_i G_n^{\Lambda/r_i,\mathbf{f}_n}(x)\right|\leqslant\sum_{i=1}^{+\infty}\kappa_i\Big|G_n^{\Lambda/r_i,\mathbf{f}_n}(x)\Big|\leqslant\Lambda^{n-2}Mr^2\sum_{i=1}^{+\infty}\kappa_i r_i^{-n}(r_i/r)^2\leqslant\Lambda^{n-2}Mr^2\kappa,$$

из которой следует ограниченность и существование деформированной функции. Непрерывность предельной функции следует из равномерной сходимости, которая может быть получена с применением признака Вейерштрасса. Несмотря на то, что для последней оценки достаточно иметь сходимость ряда с членами $\kappa_i r_i^{2-n}$, запас в степени (r_i^{-n} вместо r_i^{2-n}) обеспечивает существование двух производных.

Покажем, что соотношение (2) выполняется в строгой форме для функции $G_n^{\Lambda/r,\tilde{\mathbf{f}}_n}$. Для этого применим преобразование Фурье

$$\hat{G}_n^{\Lambda/r,\tilde{\mathbf{f}}_n}(y)=\sum_{i=1}^{+\infty}\kappa_i\hat{G}_n^{\Lambda/r_i,\mathbf{f}_n}(y)=\frac{1}{|y|^2}\sum_{i=1}^{+\infty}\kappa_i\Big(\rho_n\big(|y|r_i/(2\Lambda)\big)\Big)^2. \tag{16}$$

Далее необходимо показать, что для любого значения $y\in\mathbb{R}^n$ и для всех $\Lambda>N>0$ для некоторого фиксированного N последняя сумма строго больше нуля. Заметим, что функция $\rho_n(\cdot)$ является осциллирующей, см. (4), при этом она начинается с точки $\rho_n(0)=1$. Пусть число θ обозначает первый нуль. Затем обратим внимание, что из второго соотношения из (14) следует, что существуют числа r_j со сколь угодно малой величиной. Далее фиксируем произвольное $N>0$. Тогда для любого $y\in\mathbb{R}^n$ можно найти такое малое r_j, что неравенство $|y|r_j/\Lambda\leqslant\theta$ будет выполняться для всех $\Lambda>N$. В этом случае, продолжая (16), можно написать

$$\hat{G}_n^{\Lambda/r,\tilde{\mathbf{f}}_n}(y)\geqslant\frac{\kappa_j m^2}{|y|^2}>0,\ \text{ где }\ m=\min_{s\in[0,|y|]}\Big(\rho_n\big(sr_j/(2\Lambda)\big)\Big),$$

из чего и следует выполнимость неравенства в строгой форме. □

3 Заключение

В работе изучен критерий допустимости для регуляризации обрезанием в координатном представлении в евклидовом пространстве с размерностью больше двух. Построены примеры деформаций, удовлетворяющих критерию. Разобрано условие в более строгой формулировке.

В тексте целенаправленно опущен случай с размерностью $n = 2$. Это связано с тем фактом, что в деформации могут участвовать логарифмические особенности вида $\ln(\Lambda/\sigma)$, поэтому анзац может содержать несколько слагаемых. Такой случай предполагается изучить в отдельной работе с соответствующими примерами. Применение регуляризации с $n = 2$ может быть найдено в [10].

Благодарности. Работа финансово поддержана Министерством науки и высшего образования РФ, грант 075-15-2022-289, и фондом развития теоретической физики и математики «БАЗИС», грант «Молодая Математика России».

Автор выражает благодарность Н.В.Харук за аккуратное прочтение текста, многочисленные комментарии, критику и предложения. Дополнительно А.В.Иванов выражает особую благодарность Н.В.Харук и К.А.Иванову за создание благоприятной и стимулирующей обстановки для написания работы.

Заявление о доступности данных. Обмен данными неприменим к данной статье, поскольку в ходе текущего исследования не были сгенерированы или проанализированы никакие наборы данных.

Заявление о конфликте интересов. Автор утверждает, что конфликта интересов нет.

Список литературы

[1] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley, 1–868 (1995)

[2] O. I. Zavialov, *Renormalized quantum field theory*, Kluwer Academic Publishers, Dodrecht, Boston, 1–524 (1990)

[3] I. M. Gel'fand, G. E. Shilov, *Generalized Functions, Volume 1: Properties and Operations*, AMS Chelsea Publishing **377**, 1–423 (1964)

[4] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Quantum equation of motion and two-loop cutoff renormalization for ϕ^3 model*, Zap. Nauchn. Sem. POMI, **487**, POMI, St. Petersburg, 2019, 151–166; J. Math. Sci. (N. Y.), **257**:4 (2021), 526–536, arXiv:2203.04562, 10.1007/s10958-021-05500-5

[5] A. V. Ivanov, *Explicit Cutoff Regularization in Coordinate Representation*, 2022 J. Phys. A: Math. Theor. **55**, 495401, arXiv:2209.01783, 10.1088/1751-8121/aca8dc

[6] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Two-Loop Cutoff Renormalization of 4-D Yang–Mills Effective Action*, 2020 J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **48**, 015002, arXiv:2004.05999, 10.1088/1361-6471/abb939

[7] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Formula for two-loop divergent part of 4-D Yang–Mills effective action*, Eur. Phys. J. C **82**, 997 (2022), arXiv:2203.07131, 10.1140/epjc/s10052-022-10921-w

[8] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Three-loop divergences in effective action of 4-dimensional Yang–Mills theory with cutoff regularization: Γ_4^2-contribution*, Zap. Nauchn. Sem. POMI, **520**, POMI, St. Petersburg, 2023, 162–188

[9] E. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton, NJ: Princeton University Press, 1–312 (1971)

[10] P. V. Akacevich, A. V. Ivanov, *On Two-Loop Effective Action of 2D Sigma Model*, Eur. Phys. J. C **83**, 653 (2023), arXiv:2304.02374, 10.1140/epjc/s10052-023-11797-0