PDMI Preprint — 03/2024

Примеры решений уравнения основного состояния скалярной квантовой теории поля в представлении Шредингера

Т. А. Болохов

Санкт-Петербургское отделение Математического Института им. В.А.Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: `timur@pdmi.ras.ru`

13 февраля 2024 г.

Abstract. С помощью расширений квадратичной формы потенциальной части оператора Гамильтона мы строим альтернативные собственные функционалы уравнения основного состояния свободного квантового поля в представлении Шредингера. Оказывается, что в рассматриваемом случае допустимые (положительные) расширения генерируются не менее чем двумя источниками внешнего поля, при этом расстояние между источниками ограничено параметром расширения. Построенные функционалы, в отличие от функционала основного состояния свободной теории, отвечают другим граничным условиям и могут быть проинтерпретированы как собственные функционалы несвободного (асимптотически-свободного) квантового гамильтониана.

Ключевые слова: расширения замкнутых полуограниченных квадратичных форм, квадратный корень из оператора, квантовая теория поля в представлении Шредингера, функционал основного состояния, функционал вакуумного состояния.

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

---

1 Уравнение основного состояния свободной квантовой теории

Гамильтониан теории калибровочного поля представляет из себя выражение [1], [2]

$$H = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \big(E_l^2 + g\partial_k \Delta^{-1}(A)[A_l, E_l])^2 + \frac{1}{2}(\partial_k A_l - \partial_l A_k + g[A_k, A_l])^2\big)\, d^3x,$$

которое зависит от поля $A_l(\boldsymbol{x})$, сопряженного к нему импульса $E_l(\boldsymbol{x})$ и стремящейся к нулю константы взаимодействия g. Здесь мы также обозначили за $\Delta(A)$ оператор Фаддеева-Попова в калибровке Кулона [3]

$$\Delta(A) = \partial_l(\partial_l + g[A_l, \cdot\,]).$$

Процедура квантования сопоставляет наблюдаемой H оператор $\mathcal{H}_g$, действующий на функционалы $\Omega(A)$ от конфигурационной переменной A_l, таким образом, что наблюдаемая $A_l(\boldsymbol{x})$ переходит в оператор умножения на $A_l(\boldsymbol{x})$

$$\mathcal{A}_l(\boldsymbol{x}): \quad \Omega(A) \to A_l(\boldsymbol{x})\Omega(A),$$

а импульс E_l переходит в операцию взятия вариационной производной

$$\mathcal{E}_l(x): \quad \Omega(A) \to \frac{\delta}{i\delta A_l(\boldsymbol{x})}\Omega(A).$$

В результате, с точностью до нетривиальных коммутаторов операторов $\mathcal{A}_l(\boldsymbol{x})$ и $\mathcal{E}_l(\boldsymbol{x})$, для $\mathcal{H}_g$ получается выражение вида

$$\mathcal{H}_g = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \big(\mathcal{E}_l^2 + g\partial_k \Delta^{-1}(\mathcal{A})[\mathcal{A}_l, \mathcal{E}_l])^2 + \frac{1}{2}(\partial_k \mathcal{A}_l - \partial_l \mathcal{A}_k + g[\mathcal{A}_k, \mathcal{A}_l])^2\big)\, d^3x,$$

Квантовый гамильтониан $\mathcal{H}_g$ определен на связном множестве функций, для которых оператор $\Delta(A)$, стоящий в знаменателе в кинетической части, является положительным оператором (первый регион Грибова [4]), и при этом конечна потенциальная часть

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\partial_k A_l - \partial_l A_k + g[A_k, A_l])^2\, d^3x < \infty. \tag{1}$$

Калибровочные поля, лежащие на границе региона Грибова (в горизонте Грибова) и обращающие в бесконечность слагаемое (1) являются возможными особыми точками квантового гамильтониана в смысле теории сингулярных возмущений дифференциальных операторов [5]. То есть выражение $\mathcal{H}_g$ может определять различные операторы, в зависимости от поведения функционалов из их областей определения в этих особых точках.

Процедура перенормировки $g \to 0$ превращает выражение $\mathcal{H}_g$ в действие оператора свободного квантового поля

$$\mathcal{H}\,\Omega(A) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \,\big(-\frac{\delta^2}{\delta A_l(\boldsymbol{x})^2} + (\partial_m A_l)^2\big)\Omega(A). \qquad (2)$$

Ествественно предположить, что действие $\mathcal{H}$ также может задавать различные операторы, в зависимости от поведения функционалов из их областей определения в особых точках.

За счет того, что граница региона Грибова при перенормировке сдвигается на бесконечность, первое слагаемое в (2) не имеет явной сингулярности, при этом второе слагаемое — квадратичная форма оператора Лапласа L —

$$\mathfrak{l}(A) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \,(\partial_m A_l)^2 \equiv (A, LA) \qquad (3)$$

по-прежнему имеет область определения $\mathcal{D}(\mathfrak{l})$ состоящую из множествы функций с определенным ростом в отдельных точках трехмерного пространства. Ближайшим набором функций, лежащих вне области $\mathcal{D}(\mathfrak{l})$, являются функции с поведением

$$A_l(\boldsymbol{x}) \stackrel{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_n}{=} \frac{C_{nl}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n|^{1/2}} \qquad (4)$$

в конечном наборе точек $\boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^3$. Действительно, при любом $\epsilon > 0$, если $A_l(\boldsymbol{x})$ ведет себя в этих точках как

$$A_l(\boldsymbol{x}) = \mathcal{O}\big(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n|^{1/2-\epsilon}}\big), \quad \boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^3,$$

то подинтегральное выражение в (3) имеет сингулярность порядка

$$(\partial_m A_l(\boldsymbol{x}))^2 = \mathcal{O}\big(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n|^{3-2\epsilon}}\big),$$

а значит является интегрируемой функцией на пространстве $\mathbb{R}^3$. При этом в случае $\epsilon = 0$ интеграл от квадратичной формы логарифмически расходится в окрестностях точек $\boldsymbol{x}_n$.

2 Функционал основного состояния оператора свободного поля

Функционал основного состояния оператора свободного поля является гауссианом квадратичной формы $\omega(A)$ квадратного корня оператора Лапласа L

$$\Omega_0(A) = \exp\{-\frac{1}{2}\omega(A)\} = \exp\{-\frac{1}{2}(A, L^{1/2}A)\}.$$

Здесь мы записали формальное равенство для действия квадратичной формы через соответствующий ей оператор и скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^3$. Однако, следует иметь в виду, что область определения полуограниченной квадратичной формы $\mathcal{D}(\omega)$ шире, чем область определения оператора $\mathcal{D}(L^{1/2})$.

За счет того, что выполняется уравнение

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \, \big(\frac{\delta}{\delta A_l(\boldsymbol{x})}\omega(A)\big)^2 = (L^{1/2}A, L^{1/2}A) = \mathfrak{l}(A), \quad A \in \mathcal{D}(\mathfrak{l}), \tag{5}$$

действие операции (2) на функционал $\Omega_0(A)$ сводится к умножению на скаляр $\operatorname{Tr} L^{1/2}$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\,\Omega(A) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \, \big(-\frac{\delta^2}{\delta A_l(\boldsymbol{x})^2} + (\partial_m A_l)^2\big)\Omega(A) = \\ = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \, \big(\frac{\delta^2}{\delta A_l(\boldsymbol{x})^2}\omega(A)\big)\Omega_0(A) = \operatorname{Tr} L^{1/2}\Omega_0(A).\end{aligned}$$

Отметим, что плоское скалярное произведение вариационных производных в первом слагаемом операции (2) определяет выбор плоского скалярного произведения при построении квадратичной формы $\omega(A)$

$$(f(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x})) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \, \overline{f(\boldsymbol{x})} g(\boldsymbol{x}). \tag{6}$$

3 Другие собственные функционалы

Предположим теперь, что в скалярном произведении (6) существует замкнутое неотрицательное расширение $\mathfrak{l}_\kappa(A)$ квадратичной формы $\mathfrak{l}(A)$ на какую-либо из функций с поведением (4)

$$\mathfrak{l}_\kappa(A) = \mathfrak{l}(A), \quad A \in \mathcal{D}(\mathfrak{l}), \tag{7}$$

$$\mathfrak{l}_\kappa(A) < \infty, \quad A_l \overset{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_n}{=} \frac{C_{nl}}{|x-x_n|^{1/2}}. \tag{8}$$

Тогда, если вместо квадратичной формы $\omega(A)$ взять форму квадратного корня из оператора L_κ, определяющего $\mathfrak{l}_\kappa(A)$, то соответствующий гауссов функционал

$$\Omega_\kappa(A) = \exp\{-\frac{1}{2}\omega_\kappa(A)\} = \exp\{-\frac{1}{2}(A, L_\kappa^{1/2}A)\},$$

при условии выполнения равенства

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \, \big(\frac{\delta}{\delta A_l(\boldsymbol{x})}\omega_\kappa(A)\big)^2 = (L_\kappa^{1/2}A, L_\kappa^{1/2}A) = \mathfrak{l}_\kappa(A) = \mathfrak{l}(A), \quad A \in \mathcal{D}(\mathfrak{l}), \tag{9}$$

будет также формально удовлетворять уравнению на собственные функционалы операции $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H}\,\Omega_\kappa(A) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \, \big(\frac{\delta^2}{\delta A_l(\boldsymbol{x})^2}\omega_\kappa(A)\big)\Omega_\kappa(A) = \mathrm{Tr}\, L_\kappa^{1/2}\Omega_\kappa(A). \tag{10}$$

Для того, чтобы проверить выполнение равенств (9) и (10) необходимо зафиксировать множество, по которому производится операция взятия вариационной производной. В уравнении (5) квадратичная форма $\omega(A)$, определяемая с помощью преобразования Фурье, должна восстанавливаться при вариации по области определения квадратичной формы $\mathfrak{l}(A)$

$$\overline{\omega|_{\mathcal{D}(\mathfrak{l})}} = \omega.$$

Здесь в левой части стоит замыкание сужения формы $\omega(A)$ на множество $\mathcal{D}(\mathfrak{l})$ и, таким образом, равенство означает, что для любого $A \in \mathcal{D}(\omega)$ существует последовательность $A_n \in \mathcal{D}(\mathfrak{l})$, такая, что

$$||A_n - A||_{L_2(\mathbb{R}^3)} \overset{n\to\infty}{\to} 0, \quad \omega(A_n - A) \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Очевидно, что это же множество необходимо использовать и для вариации в (10) при простроении альтернативных собственных функций операции $\mathcal{H}$. То есть необходимо убедиться, что для исследуемой квадратичной формы $\omega_\kappa(A)$ выполняется равенство

$$\overline{\omega_\kappa|_{\mathcal{D}(\mathfrak{l})}} = \omega_\kappa.$$

Как мы увидим далее, проверка этого равенства требует отдельных вычислений и возможна не для каждого расширения $\mathfrak{l}_\kappa$ квадратичной формы оператора Лапласа.

Также нужно отметить, что необходимым условием представленного построения является положительность квадратичной формы $\mathfrak{l}_\kappa$. В противном случае, при наличии отрицательного собственного подпространства у оператора L_κ, квадратичная форма ω_κ на этом подпространстве принимает чисто мнимые значения. Это, в свою очередь, противоречит требованию самосопряженности операции $\mathcal{H}$ и не позволяет ввести на множестве функционалов скалярное произведение, в котором Ω_κ имеет конечную норму.

4 Расширения квадратичной формы

Перейдем к детальному описанию интересующих нас расширений квадратичной формы оператора Лапласа (7), (8). Ограничимся рассмотрением случая скалярного поля $A(\boldsymbol{x})$, при этом стоит учитывать, что расширения квадратичной формы оператора Лапласа на пространстве функций в калибровке Кулона (соленоидальных функций) могут иметь свои особенности. Мы будем пользоваться импульсным представлением (Фурье-образом) для поля A

$$\hat{A}(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} A(\boldsymbol{x}) e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\, d^3x$$

и для сокращения записи будем опускать у поля $A(\boldsymbol{p})$ знак преобразования Фурье. Действие $\mathcal{H}$ в этом представлении имеет вид

$$\mathcal{H}\,\Omega(A) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3p\, \big(-\frac{\delta^2}{\delta A(\boldsymbol{p})^2} + p^2 A^2(\boldsymbol{p})\big)\, \Omega(A).$$

Квадратичные формы $\mathfrak{l}(A)$ и $\omega(A)$ теперь диагональны

$$\mathfrak{l}(A) = \int_{\mathbb{R}^3} p^2 |A(\boldsymbol{p})|^2 \, d^3p, \qquad L : A(\boldsymbol{p}) \to p^2 A(\boldsymbol{p}),$$
$$\omega(A) = \int_{\mathbb{R}^3} p |A(\boldsymbol{p})|^2 \, d^3p, \qquad L^{1/2} : A(\boldsymbol{p}) \to p A(\boldsymbol{p}),$$

а скалярное произведение, связывающее квадратичные формы и операторы, по-прежнему плоское

$$(f(\boldsymbol{p}), g(\boldsymbol{p})) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3p \, \overline{f(\boldsymbol{p})} g(\boldsymbol{p}). \tag{11}$$

Ключевыми объектами для построения расширений квадратичной формы $\mathfrak{l}(A)$ являются резольвента соответсвующего ей самосопряженного оператора L

$$R_\mu = (L - \mu)^{-1} : \quad A(\boldsymbol{p}) \to \frac{1}{p^2 - \mu} A(\boldsymbol{p}), \quad \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+ \cup 0$$

и сингулярный потенциал $v(\boldsymbol{p})$ — обобщенная функция, удовлетворяющая условиям

$$R_\mu v \in L_2(\mathbb{R}^3) \text{ или } (R_\mu v, R_\nu v) < \infty \tag{12}$$
$$(v, R(\mu) v) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|v(p)|^2}{p^2 - \mu} d^3p = \infty. \tag{13}$$

В качестве кандидатов в потенциалы $v(\boldsymbol{p})$ рассмотрим степенные функции модуля вектора $\boldsymbol{p}$

$$v_\alpha(\boldsymbol{p}) = p^\alpha.$$

Такие потенциалы в координатном представлении имеют определенную локализацию

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} v_\alpha(\boldsymbol{p}) e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \, d^3p = \begin{cases} (2\pi)^{3/2} \delta(\boldsymbol{x}), & \alpha = 0, \\ \frac{2^{3/2+\alpha} \Gamma(\frac{3+\alpha}{2})}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})} x^{-\alpha-3}, & \alpha \neq 0, \end{cases}$$

поэтому также имеет смысл рассматривать их сдвиги в координатном представлении

$$v_{\alpha,\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{p}) = e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} v_\alpha(\boldsymbol{p}).$$

Теория Бирмана-Вишика-Крейна [6] позволяет построить расширения $\mathfrak{l}_\kappa$ квадратичной формы $\mathfrak{l}$ таким образом, что в область определения формы $\mathfrak{l}_\kappa$ попадают векторы $R_\nu v$

$$R_\mu v \in \mathcal{D}(\mathfrak{l}_\kappa), \quad \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+ \cup 0.$$

Как показано в работе [7], если для потенциала $v(\boldsymbol{p})$ не выполнено условие (13), то вектор $R_\mu v$ принадлежит также области определения $\mathcal{D}(\mathfrak{l})$, то есть наше расширение меняет действие формы $\mathfrak{l}$, а значит и действие операции $\mathcal{H}$. В терминах параметра α расходимость интеграла в (13) означает, что

$$-\frac{1}{2} \leq \alpha.$$

Несложно увидеть, что из условия (12) следует ограничение на α с другой стороны, а именно строгое неравенство

$$\alpha < \frac{1}{2}.$$

В область определения оператора L_κ, соответствующего квадратичной форме $\mathfrak{l}_\kappa$, попадают линейные комбинации векторов $R_\rho v$, $R_\rho^2 v$ вида

$$R_\rho v + \xi(\kappa, \rho) R_\rho^2 v, \quad \rho < 0, \quad \xi \in \mathbb{C},$$

но нам удобнее иметь описание резольвенты этого оператора. Формула Крейна описывает резольвенту оператора L_κ следующим образом

$$R_\mu^\kappa = R_\mu + \frac{R_\mu v (R_{\bar{\mu}} v, \,\cdot\,)}{\kappa - \gamma(\mu)}, \tag{14}$$

где κ — это вещественный параметр расширения, а $\gamma(\mu)$ — функция Неванлинны (Герглотца) [8], определяемая соотношением

$$\gamma(\mu) - \gamma(\nu) = (\mu - \nu)(R_{\bar{\mu}} v, R_\nu v) = (v, (R_\mu - R_\nu) v).$$

Заметим, что в случае $\kappa = \infty$ второе слагаемое в правой части (14) пропадает и мы приходим к резольвенте R_μ оператора L

$$R_\mu^\infty = R_\mu.$$

Далее мы ограничимся рассмотрением понтенциалов $v(\boldsymbol{p})$ вида $p^{-1/2}$, таких, что векторы $R_\mu v$ лежат максимально близко к области определения квадратичной формы $\mathfrak{l}(A)$. Действительно, в координатном представлении вектор $R_\mu v$ задается интегралом

$$(R_\mu v)(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\, d^3p}{(p^2-\mu)p^{1/2}} = \frac{4\pi}{(2\pi)^{3/2}x} \int_0^\infty \frac{\sin px}{p^2-\mu} p^{1/2}\, dp,$$

который после замены переменной интегрирования превращается в выражение

$$(R_\mu v)(\boldsymbol{x}) = \frac{4\pi}{(2\pi)^{3/2}x^{1/2}} \int_0^\infty \frac{\sin s}{s^2-\mu x^2} s^{1/2}\, ds.$$

Интеграл по переменной s не имеет особенности в окрестности $x = 0$ и не равен нулю в этой точке, отсюда можно сделать вывод, что функция $(R_\mu v)(\boldsymbol{x})$ имеет особенность степени $-1/2$, то есть приводится к виду (4).

Для сингулярного потенциала $v(\boldsymbol{p}) = p^{-1/2}$ функция Неванлинны $\gamma(\mu)$ задается следующим соотношением

$$\gamma(\mu) - \gamma(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^3} \Big(\frac{1}{p^2-\mu} - \frac{1}{p^2-\lambda}\Big)\frac{d^3p}{p} = 2\pi(\ln(-\lambda) - \ln(-\mu)), \qquad (15)$$

здесь у логарифма выбрана главная ветвь, а разрез направлен вдоль отрицательной полуоси, таким образом, что правая часть (15) определена при $\mu, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+ \cup 0$. Отсюда следует, что знаменатель в правой части (14) можно выбрать в следующем виде

$$\kappa - \gamma(\mu) = 2\pi \ln(-\frac{\mu}{\tilde{\kappa}}), \quad 0 < \tilde{\kappa}, \qquad (16)$$

где $\tilde{\kappa}$ — это неотрицательный параметр, включающий в себя размерную константу, необходимую для определения логарифма, и параметр расширения κ.

Как несложно заметить, функция (16) при любом значении κ непрерывно убывает на интервале $-\infty < \mu < 0$ и меняет знак. Следовательно, при любом κ резольвента (14) имеет полюс в точке $\mu = -\tilde{\kappa}$, а соответствующий ей оператор и квадратичная форма имеют отрицательные собственные подпространства. Это обстоятельство противоречит требованию положительности искомого расширения $\mathfrak{l}_\kappa$ квадратичной формы оператора Лапласа и показывает, что нетривиальные решения уравнения на собственные функционалы операции $\mathcal{H}$, связанные с одиночными локализованными внешними источниками, отсутствуют.

5 Взаимодействие с двумя источниками

Для исправления описанной в предыдущей части ситуации попробуем подобрать более сложный потенциал. Формула Крейна (14) в оригинальной работе [9] была выведена для случая взаимодействия с несколькими источниками $v_m(\boldsymbol{p})$

$$R_\mu^\kappa = R_\mu + R_\mu v_m(\kappa - \gamma(\mu))^{-1}_{ml}(R_{\bar\mu} v_l,\,\cdot\,),$$

где κ_{jk} — это вещественная симметричная матрица, а матрица γ_{jk} определяется соотношением

$$\gamma_{jk}(\mu) - \gamma_{jk}(\nu) = (v_j, (R_\mu - R_\nu)v_k).$$

В нашей ситуации, наряду с потенциалом $v(\boldsymbol{p}) = p^{-1/2}$, естественно рассмотреть потенциал $v_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{p}) = e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}v(\boldsymbol{p})$, сдвинутый в координатном представлении на вектор $\boldsymbol{x}$. Для того, чтобы не заниматься анализом нулей 2×2 матрицы $\kappa_{jk} - \gamma_{jk}(\lambda)$ мы сразу перейдем к базису

$$v_-(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2}(v(\boldsymbol{p}) - e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}v(\boldsymbol{p})) = \frac{1}{2}p^{-1/2}(1 - e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}),$$
$$v_+(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2}(v(\boldsymbol{p}) + e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}v(\boldsymbol{p})) = \frac{1}{2}p^{-1/2}(1 + e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}})$$

и остановимся на резольвентах с нетривиальным вторым слагаемым, порожденным только потенциалом $v_-(\boldsymbol{p})$

$$R_\mu^\kappa = R_\mu + \frac{R_\mu v_-(R_{\bar\mu}v_-,\,\cdot\,)}{\kappa - \gamma_-(\mu)}. \tag{17}$$

В этом случае мы имеем для функции $\gamma_-(\mu)$ следующее соотношение

$$\gamma_-(\mu) - \gamma_-(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^3}\Big(\frac{1-\cos(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}{p^2-\mu} - \frac{1-\cos(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}{p^2-\lambda}\Big)\frac{d^3p}{p} =$$
$$= 4\pi\int_0^\infty\Big(p - \frac{\sin px}{x}\Big)\Big(\frac{1}{p^2-\mu} - \frac{1}{p^2-\lambda}\Big)dp. \tag{18}$$

Как и в формуле (16) введем размерный параметр $\tilde\kappa$ включающий в себя параметр расширения κ и определим $\gamma_-(\mu)$ следующим образом

$$\gamma_-(\mu) - \kappa = 4\pi\int_0^\infty\Big(\frac{p}{p^2-\mu} - \frac{\sin px}{x(p^2-\mu)} - \frac{p}{p^2+\tilde\kappa}\Big)dp =$$
$$= 2\pi\ln\frac{\tilde\kappa}{-\mu} - 4\pi\int_0^\infty\frac{\sin px}{x}\frac{dp}{p^2-\mu}. \tag{19}$$

Функция $\gamma_-(\mu)$ корректно определена при всех $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+ \cup 0$ и удовлетворяет соотношению (18).

Рассмотрим поведение функции $\gamma_-(\mu)$ на отрицательной полуоси. При $\mu \to -\infty$ осциллирующий интеграл в правой части (19) имеет следующее разложение

$$4\pi \int_0^\infty \frac{\sin px}{x} \frac{dp}{p^2-\mu} = \frac{4\pi}{\mu x^2} - \frac{8\pi}{\mu^2 x^4} + \mathcal{O}(\frac{1}{\mu^3 x^6}), \tag{20}$$

и, таким образом, вся сумма (19) стремится к $-\infty$

$$\gamma_-(\mu) - \kappa = 2\pi \ln \frac{\tilde{\kappa}}{-\mu} - \frac{4\pi}{\mu x^2} + \mathcal{O}(\mu^{-2}) \to -\infty, \quad \mu \to -\infty.$$

Производная функции $\gamma_-(\mu)$ на интервале $-\infty < \mu < 0$ строго положительна

$$\gamma_-'(\mu) = 4\pi \int_0^\infty \big(p - \frac{\sin px}{x}\big) \frac{dp}{(p^2-\mu)^2} > 0, \tag{21}$$

следовательно эта функция монотонно возрастает. Для того, чтобы определить величину $\gamma_-(0)$ запишем значение осциллирующего интеграла при конечных μ, x в терминах интегрального синуса и косинуса

$$4\pi \int_0^\infty \frac{\sin px}{x} \frac{dp}{p^2-\mu} = \frac{4\pi}{\sqrt{\mu}x}\big(\cos\sqrt{\mu}x \ \mathrm{Si}\,\sqrt{\mu}x - \sin\sqrt{\mu}x \ \mathrm{Ci}\,\sqrt{\mu}x\big) =$$
$$\overset{\mu x^2 \to 0}{=} 4\pi(1 - \boldsymbol{\gamma} - \frac{1}{2}\ln(-\mu x^2) + \mathcal{O}(\mu x^2)),$$

где $\boldsymbol{\gamma}$ — это константа Эйлера. Подставляя это выражение в (19) мы приходим к следующему разложению для функции $\gamma_-(\mu)$ в нуле

$$\gamma_-(\mu) - \kappa = 2\pi \ln \tilde{\kappa} x^2 + 4\pi(\boldsymbol{\gamma} - 1) + \mathcal{O}(\mu x^2), \quad \mu \to 0. \tag{22}$$

Эта формула показывает, что мы всегда можем выбрать параметр $\tilde{\kappa}$ таким образом, чтобы правая часть была отрицательной в окрестности нуля. Из чего следует, ввиду положительности производной (21), что функция $\gamma_-(\mu) - \kappa$ не будет обращаться в ноль на всей отрицательной полуоси и значит при таких $\tilde{\kappa}$ резольвента (17) будет определять положительный оператор L_κ и вещественный функционал $\Omega_\kappa(A)$.

Посмотрим на формулу (22) с другой стороны. Пусть для выбранных значений $\tilde{\kappa}$ и $x = x_1$ предел в правой части (22) отрицательный и мы можем корректно определить функционал $\Omega_\kappa(A)$. При увеличении расстояния x между источниками предел в правой части (22) возрастает и при некотором $x = x_2$ обращается в ноль

$$\gamma_-(\mu, x_2)|_{\mu=0} - \kappa = 0.$$

При $x > x_2$ у функции $\gamma_-(\mu, x) - \kappa$ появляется ноль уже на интервале $-\infty < \mu < 0$, а у соответствующего оператора L_κ появляется отрицательное собственное значение. То есть при любом выбранном значении параметра расширения $\tilde{\kappa}$ допустимые положения источников друг относительно друга всегда существуют и всегда ограничены некоторым шаром, квадрат радиуса которого обратно пропорционален параметру $\tilde{\kappa}$.

6 Оператор $L_\kappa^{1/2}$

Оператор квадратного корня записывается с помощью спектрального разложения оператора через его резольвенту следующим образом

$$L_\kappa^{1/2} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty (R^\kappa_{\lambda+i\epsilon} - R^\kappa_{\lambda-i\epsilon})\lambda^{1/2}\, d\lambda.$$

Подставим сюда выражение для R^κ_λ и воспользуемся стандартным обозначением $\pm i0$ для предела по ϵ

$$\begin{aligned} L_\kappa^{1/2} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \big(R_{\lambda+i0} - R_{\lambda-i0} + \\ + \frac{R_{\lambda+i0} v_-(R_{\lambda-i0} v_-,\,\cdot\,)}{\kappa - \gamma_-(\lambda+i0)} - \frac{R_{\lambda-i0} v_-(R_{\lambda+i0} v_-,\,\cdot\,)}{\kappa - \gamma_-(\lambda-i0)}\big)\lambda^{1/2}\, d\lambda = \\ = p + \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \big(\frac{R_{\lambda+i0} v_-(R_{\lambda-i0} v_-,\,\cdot\,)}{\kappa - \gamma_-(\lambda+i0)} - \frac{R_{\lambda-i0} v_-(R_{\lambda+i0} v_-,\,\cdot\,)}{\kappa - \gamma_-(\lambda-i0)}\big)\lambda^{1/2}\, d\lambda, \end{aligned} \tag{23}$$

где p — это операция умножения на значение модуля импульсной переменной $\boldsymbol{p}$. В выражении, стоящем под интегралом, функция $R_{\lambda\pm i0}$ имеет сингулярность по переменной p при $p^2 = \lambda$, а функции $\gamma_-(\lambda \pm i0)$ отличаются друго от друга на величину скачка

$$\begin{aligned} \gamma_-(\lambda+i0) - \gamma_-(\lambda-i0) = 2\pi \ln\frac{\tilde{\kappa}}{-\lambda - i0} - 2\pi\ln\frac{\tilde{\kappa}}{-\lambda+i0} - \\ - 4\pi\int_0^\infty \frac{\sin px}{x}\big(\frac{1}{p^2-\lambda-i0} - \frac{1}{p^2-\lambda+i0}\big)\, dp = 4\pi^2 i - 8\pi^2 i\frac{\sin\lambda x}{x}. \end{aligned} \tag{24}$$

7 Восстановление квадратичной формы оператора $L_\kappa^{1/2}$

Как было сказано в части 1, для построения собственных функционалов операции $\mathcal{H}$ необходимо показать, что квадратичная форма оператора $L_\kappa^{1/2}$ восстанавливается по своему действию на множестве $\mathcal{D}(\mathfrak{l})$, всюду плотном в пространстве $L_2(\mathbb{R}^3)$. Пусть функция $A(\boldsymbol{p})$ принадлежит $\mathcal{D}(\omega_\kappa)$, тогда существует последовательность $A_n \in \mathcal{D}(L_\kappa^{1/2})$, сходящаяся к A по норме, индуцированной формой ω_κ,

$$||A - A_n||_{L_2(\mathbb{R}^3)} \to 0, \quad \omega_\kappa(A - A_n) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Таким образом, нам достаточно показать, что любая функция $A_n(p)$ из $\mathcal{D}(L_\kappa^{1/2})$ может быть сколь угодно точно приближена по норме формы ω_κ функциями из $\mathcal{D}(\mathfrak{l})$. Если элемент A_n принадлежит $\mathcal{D}(L_\kappa^{1/2})$, то он принадлежит и области определения квадратичной формы $\mathfrak{l}_\kappa$ оператора L_κ

$$\mathfrak{l}_\kappa(A_n) = (L_\kappa^{1/2} A_n, L_\kappa^{1/2} A_n) < \infty.$$

Так как область $\mathcal{D}(\mathfrak{l}_\kappa)$ является прямой суммой $\mathcal{D}(\mathfrak{l})$ и линейного подпространства, порождаемого вектором $R_\rho v_-$, $\rho < 0$, то любой такой элемент A_n однозначно раскладывается в сумму

$$A_n = a_n + \chi_n R_\rho v_-, \quad a_n \in \mathcal{D}(\mathfrak{l}), \quad \chi_n \in \mathbb{C}, \quad \rho < 0.$$

Такми образом, нам необходимо показать, что функция $R_\rho v_-$ для некоторого $\rho < 0$ может быть приближена элементами из $\mathcal{D}(\mathfrak{l})$ по норме квадратичной формы ω_κ.

Для проверки этого утверждения воспользуемся явным выражением (23) для оператора $L_\kappa^{1/2}$ и запишем действие его квадратичной формы

$$\omega_\kappa(R_\rho v_-) = \omega(R_\rho v_-) + \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \Big(\frac{(R_\rho v_-, R_{\lambda+i0} v_-)(R_{\lambda-i0} v_-, R_\rho v_-)}{\kappa - \gamma_-(\lambda + i0)} - \\ - \frac{(R_\rho v_-, R_{\lambda-i0} v_-)(R_{\lambda+i0} v_-, R_\rho v_-)}{\kappa - \gamma_-(\lambda - i0)} \Big) \lambda^{1/2}\, d\lambda. \quad (25)$$

Каждое из слагаемых, стоящих под интегралом может быть преобразовано к следующему виду

$$\frac{(R_\rho v_-, R_{\lambda\pm i0}v_-)(R_{\lambda\mp i0}v_-, R_\rho v_-)}{\kappa-\gamma_-(\lambda\pm i0)} = \frac{(\gamma_-(\lambda\pm i0)-\gamma_-(\rho))^2}{(\lambda-\rho)^2(\kappa-\gamma_-(\lambda\pm i0))} =$$
$$= \frac{(2\gamma(\rho)-\kappa-\gamma_-(\lambda\pm i0)}{(\lambda-\rho)^2} + \frac{(\kappa-\gamma_-(\rho))^2}{(\lambda-\rho)^2(\kappa-\gamma_-(\lambda\pm i0))}, \quad (26)$$

и в результате

$$\omega_\kappa(R_\rho v_-) = 4\pi\int_0^\infty \frac{p^2\,dp}{(p^2-\rho)^2} - \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{\gamma_-(\lambda+i0)-\gamma_-(\lambda-i0)}{(\lambda-\rho)^2}\lambda^{1/2}d\lambda$$
$$+\frac{1}{2\pi i}(\kappa-\gamma_-(\rho))^2\int_0^\infty \frac{\gamma_-(\lambda+i0)-\gamma_-(\lambda-i0)}{(\lambda-\rho)^2(\kappa-\gamma_-(\lambda+i0))(\kappa-\gamma_-(\lambda-i0))}\lambda^{1/2}d\lambda \quad (27)$$

Скачок функции $\gamma_-(\lambda)$, вычисленный в (24), ограничен по модулю, поэтому все три интеграла в (27) сходятся абсолютно. Далее для приближения функции $R_\rho v_-$ функцией $(\Lambda+\rho)R_{-\Lambda}R_\rho v_- \in \mathcal{D}(\mathfrak{l})$ можно воспользоваться пределом по норме $L_2(\mathbb{R}^3)$

$$R_\rho v_- - (\Lambda+\rho)R_{-\Lambda}R_\rho v_- = R_{-\Lambda}v_- = \frac{1}{(p^2+\Lambda)p^{1/2}} \overset{L_2(\mathbb{R}^3)}{\to} 0, \quad \Lambda\to\infty.$$

Этот же предел верен и по норме формы ω

$$\omega(R_{-\Lambda}v_-) = \int_{\mathbb{R}_3}\frac{d^3p}{(p^2+\Lambda)^2} \to 0, \quad \Lambda\to\infty,$$

то есть, для того, чтобы показать, что

$$\omega_\kappa(R_{-\Lambda}v_-) \to 0, \quad \Lambda\to\infty,$$

необходимо убедиться, что второй и третий интегралы в (27) стремятся к нулю, если $\rho=-\Lambda\to-\infty$. Заменой $\tilde\lambda=\lambda/\Lambda$ эти интегралы приводятся, соответственно, к виду

$$-\frac{1}{2\pi i\Lambda^{1/2}}\int_0^\infty \frac{\gamma_-(\tilde\lambda\Lambda+i0)-\gamma_-(\tilde\lambda\Lambda-i0)}{(\tilde\lambda+1)^2}\tilde\lambda^{1/2}d\tilde\lambda$$
$$\frac{(\kappa-\gamma_-(-\Lambda))^2}{2\pi i\Lambda^{1/2}}\int_0^\infty \frac{\gamma_-(\tilde\lambda\Lambda+i0)-\gamma_-(\tilde\lambda\Lambda-i0)}{(\tilde\lambda+1)^2(\kappa-\gamma_-(\tilde\lambda\Lambda+i0))(\kappa-\gamma_-(\tilde\lambda\Lambda-i0))}\tilde\lambda^{1/2}d\tilde\lambda.$$

Здесь оба интеграла сходятся абсолютно и, ввиду ограниченности скачка функции $\gamma_-(\lambda)$, ограничены по Λ. Учитывая коэффициенты $\Lambda^{-1/2}$ можно сделать вывод, что вся квадратичная форма $\omega_\kappa(R_{-\Lambda}v_-)$ стремится к нулю при $\Lambda \to \infty$.

Таким образом, мы показали, что квадратичная форма оператора $L_\kappa^{1/2}$ восстанавливается по своему действию на множестве $\mathcal{D}(\mathfrak{l})$.

8 Восстановление квадратичной формы для взаимодействия с δ-потенциалом

Рассмотрим, как квадратичная форма ω_κ восстанавливается по своему действию на множестве $\mathcal{D}(\mathfrak{l})$ для случая сингулярного потенциала типа δ-функции [10]. Такой сингулярный потенциал в импульсном представлении является константой

$$v_c(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \delta(\boldsymbol{x}) e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\, d^3x = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}.$$

Соответствующий ему аналитический дефектный вектор имеет вид

$$R_\mu v_c = \frac{(2\pi)^{-3/2}}{k^2 - \mu},$$

а функция Неванлинны пропорциональна квадратному корню из спектрального параметра со значением в верхней полуплоскости

$$\gamma_c(\mu) - \gamma_c(\lambda) = (v, (R_\mu - R_\lambda)) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \Big(\frac{1}{p^2 - \mu} - \frac{1}{p^2 - \lambda}\Big)\, d^3p = \\ = \frac{i\sqrt{\mu}}{4\pi} - \frac{i\sqrt{\lambda}}{4\pi}.$$

Самосопряженные операторы расширений квадратичной формы Лапласиана определяются резольвентами

$$R_\mu^\kappa = R_\mu + 4\pi \frac{R_\mu v_c (R_{\bar\mu} v_c, \,\cdot\,)}{4\pi\kappa - i\sqrt{\mu}}.$$

Для того, чтобы знаменатель второго слагаемого не обращался в ноль при $\mu < 0$, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие

$$\kappa > 0.$$

Действие квадратичной формы ω на вектор $R_\rho v_c$ логарифмически расходится

$$\omega(R_\rho v_c) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{p\, d^3p}{(p^2-\rho)^2} = \infty, \quad \rho \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+ \cup 0, \tag{28}$$

но, в то же время, действие формы ω_κ на этом векторе вполне конечно. Для того, чтобы это увидеть, необходимо ввести регуляризацию. В случае расширения с помощью δ-потенциала форма ω_κ имеет вид суммы (27), в которой первое слагаемое заменено на (28). Для регуляризации этой суммы заменим, в соответствии с размерностью переменной интегрирования, верхний предел в (28) на Λ, а верхний предел во втором интеграле в (27) на Λ^2, получим

$$\omega_\kappa(R_\rho v_c) = \lim_{\Lambda\to\infty} \Big(\frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\Lambda \frac{p^3\, dp}{(p^2-\rho)^2} - \frac{1}{(2\pi i)} \frac{i}{4\pi} \int_0^{\Lambda^2} \frac{2\lambda\, d\lambda}{(\lambda-\rho)^2} \Big) + \\ + \frac{1}{2\pi i}(4\pi\kappa - i\sqrt{\rho})^2 \int_0^\infty \frac{2i\lambda\, d\lambda}{(\lambda-\rho)^2(4\pi\kappa - i\sqrt{\lambda})(4\pi\kappa + i\sqrt{\lambda})}.$$

Первые два интеграла сокращают друг друга, зависимость от параметра регуляризации пропадает, в итоге остается

$$\omega_\kappa(R_\rho v_c) = \frac{1}{\pi}(4\pi\kappa - i\sqrt{\rho})^2 \int_0^\infty \frac{\lambda\, d\lambda}{(\lambda-\rho)^2(16\pi^2\kappa^2+\lambda)} = \\ = \frac{(4\pi\kappa - i\sqrt{\rho})^2}{-\pi\rho} \int_0^\infty \frac{\tilde\lambda\, d\tilde\lambda}{(\tilde\lambda+1)^2(\tilde\lambda - 16\pi^2\kappa^2/\rho)}, \quad \tilde\lambda = \frac{\lambda}{-\rho}. \tag{29}$$

Правая часть при $\rho \to -\infty$ стремится к $\frac{1}{\pi}$, а не к нулю, как мы ожидаем, в случае если значение формы $\omega_\kappa(R_{\tilde\rho} v_c)$ восстанавливается по ее действию на векторах из $\mathcal{D}(\mathfrak{l})$ вида

$$R_{\tilde\rho} v_c - R_\rho v_c = (\tilde\rho - \rho) R_\rho R_{\tilde\rho} v_c.$$

Более того, можно показать, что значение предела выражения типа (29) зависит от последовательности стремящихся к нулю векторов. Однако, доказательства того, что этот предел не может быть нулем для какой-либо последовательности разностей вектора $R_{\tilde\rho} v_c$ и векторов из $\mathcal{D}(\mathfrak{l})$ у автора не имеется.

Таким образом, мы можем сделать предположение, что квадратичная форма ω_κ для расширения с помощью δ-потенциала не восстанавливается по своему действию на области $\mathcal{D}(\mathfrak{l})$.

Заключение

Схема построения решений уравнения основного состояния свободного квантового поля через расширения квадратичной формы потенциальной части Гамильтониана была предложена в [11] для расширений, связанных с δ-потенциалом. Однако, доказательство возможности восстановления формы квадратного корня по ее действию на область определения Лапласиана натолкнулось на определенные трудности. В настоящей работе используется такая же техника, но расширения квадратичной формы оператора Лапласа строятся с помощью потенциала с сингулярностями типа $x^{-5/2}$, а не $\delta(\boldsymbol{x})$. Мы показываем, что для построения решений уравнения основного состояния квантовой теории необходимо использовать потенциал, определяемый двумя связанными сингулярностями, расстояние между которыми оказывается ограничено константой расширения. Для данного потенциала мы приводим доказательство, что действие формы квадратного корня восстанавливается по действию на области определения квадратичной формы Лапласиана.

Список литературы

[1] J. Schwinger, "NonAbelian gauge fields. Relativistic invariance", Phys. Rev. 127 (1962) 324–330.

[2] N. H. Christ, T. D. Lee, "Operator Ordering and Feynman Rules in Gauge Theories", Phys. Rev. D **22** (1980) 970–972.

[3] В. Н. Попов, Л. Д. Фаддеев, "Теория возмущений для калибровочно-инвариантных полей", Препринт ИТФ-67-036, Киев, 1967.

[4] V. N. Gribov, "Quantization of non-Abelian gauge theories", Nucl. Phys. B **139** (1978) 1–19.

[5] S. Albeverio, P. Kurasov, *Singular Perturbation of Differential Operators. Solvable Schrödinger type Operators*, Cambridge University Press, 2000.

[6] A. Alonso, B. Simon, "The Birman - Krein - Vishik theory of selfadjoint extensions of semibounded operators", J. Operator Theory, **4** (1980), 251–270.

[7] A. Kiselev, B. Simon, “Rank one perturbations with infinitesimal coupling”, J. Funct. Anal. **130** (1995), 345–356.

[8] F. Gesztesy, E. Tsekanovskii, “On Matrix-Valued Herglotz Functions”, arXiv:funct-an/9712004.

[9] М. Г. Крейн, “Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения I”, Математический сборник том **20**(63), 1947, 431–495.

[10] Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев, “Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом”, Доклады АН СССР **137** вып. 5 (1961), 1011–1014.

[11] T. A. Bolokhov, “Singular perturbations of a free quantum field Hamiltonian”, arXiv:1912.01458 (math-ph).