

**Трехпетлевая перенормировка квантового действия
для четырехмерной скалярной модели с четверным взаимодействием
с использованием метода фонового поля и регуляризации обрезанием**

Александр В. Иванов

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А.Стеклова РАН,
Фонтанка 27, Санкт-Петербург, 191023, Россия

Санкт-Петербургский международный математический институт им. Леонарда Эйлера,
Песочная наб. 10, Санкт-Петербург, 197022, Россия

E-mail: regul1@mail.ru

06 февраля 2024 г.

К 90-летию Л.Д.Фаддеева

Аннотация. В работе изучается квантовое действие для четырехмерной вещественной теории ϕ^4 в случае общего положения с использованием метода фонового поля. Производится трехпетлевая перенормировка с регуляризацией обрезанием в координатном представлении. Также обсуждается отсутствие нелокальных сингулярных вкладов и выполнимость перенормировочной \mathcal{R} -операции на примере отдельных трехпетлевых диаграмм. Представлен явный вид первых трех коэффициентов для констант перенормировки и для β -функции. Показана согласованность с ранее известными результатами.

Ключевые слова и фразы: перенормировка, константа перенормировки, скалярная модель, регуляризация обрезанием, функция Грина, квантовое действие, квантовое уравнение движения, диаграмма Фейнмана, три петли, эффективное действие, импульс обрезания, тепловое ядро, деформация, четверное взаимодействие.

ПРЕПРИНТЫ

Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS

of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В. М. Бабич, А. М. Вершик, М. А. Всемиров, А. И. Генералов,
И. А. Ибрагимов, Л. Ю. Колотилина, Ю. В. Матиясевич,
Н. Ю. Нецветаев, С. И. Репин, Г. А. Серегин

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В.А.Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:
ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г.
Выдано Федеральной службой по надзору
в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные:

191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27
телефоны: (812) 312-40-58; (812) 571-57-54
e-mail: admin@pdmi.ras.ru
<https://www.pdmi.ras.ru/preprint/>

Заведующая информационно-издательским сектором В. Н. Симонова

Содержание

1	Введение	4
2	Результаты	6
3	Базовая постановка задачи	8
3.1	Эффективное действие	8
3.2	Перенормировка	11
4	Правила регуляризации	14
4.1	Общие соображения	14
4.2	Дополнительное условие	15
4.3	Разложение около диагонали	16
4.4	Окончательная формулировка	17
5	Первые две поправки	18
5.1	Одна петля	18
5.2	Две петли	19
6	Три петли	21
6.1	Дополнительные обозначения	21
6.2	Диаграмма d_3	22
6.3	Диаграмма d_4	28
6.4	Диаграмма d_5	30
6.5	Соотношения для диаграмм	34
7	Общая постановка задачи	39
7.1	О переходе от базовой к общей модели	39
7.2	Значения коэффициентов	41
8	Заключение	43
8.1	Некоторые замечания	43
8.2	Благодарности	45
9	Приложение	45
9.1	О коэффициентах теплового ядра	45
9.2	Вспомогательные интегралы	46
9.3	Асимптотики интегралов	48
9.4	Вспомогательное доказательство	59
9.5	Частный случай базовых интегралов	62
9.6	Комбинации констант связи	64
9.7	Локальные части для диаграмм	67
10	Список литературы	70

1 Введение

Одним из наиболее широко используемых методов для изучения моделей в квантовой теории поля [1, 2] является пертурбативный подход. Его суть заключается в разложении исследуемой величины в асимптотический ряд по малому параметру. Как правило, роль параметра играет константа связи. Необходимость такого приема обычно связана с недостаточным математическим пониманием изначального объекта и с громоздкостью вычислений. Для примера можно привести квантовое действие, которое является функциональным интегралом [3] от экспоненты с классическим действием. Такой объект не полностью понятен, поскольку содержит интегрирование по функциональному пространству и, как следствие, включает открытые вопросы с математической точки зрения. Однако, раскладывая часть слагаемых классического действия в ряд по малому параметру, задачу можно свести к вычислению интегралов Гаусса и, таким образом, обойти часть математических проблем.

Тем не менее при переходе к асимптотическому разложению появляется еще одна загвоздка: коэффициенты ряда могут содержать расходящиеся интегралы. Это связано с тем фактом, что обобщенные функции, которые должны рассматриваться на определенном тестовом классе, в действительности действуют на другие обобщенные функции, что приводит к появлению неинтегрируемых особенностей. Ответ на вопрос «Как избавиться от расходимостей?» дала теория перенормировок [4–6]. Согласно доказанному рецепту необходимо сперва регуляризовать расходящиеся интегралы, а затем вычесть сингулярные слагаемые при помощи домножения¹ отдельных частей классического действия на специальные константы перенормировки.

Таким образом, регуляризация является важным и неотъемлемым компонентом при изучении квантово-полевых задач методами пертурбативных разложений. Существуют различные схемы регуляризации, и выбор конкретной зависит от того, какую часть классического действия планируется деформировать и какую симметрию хочется сохранить. Среди наиболее популярных видов можно выделить регуляризацию обрезанием [7–10], размерную [11, 12], неявную [13–15], регуляризацию Паули–Вилларса [16] и высшими ковариантными производными [17]. Другие примеры использования регуляризации можно встретить в теории обобщенных функций² [18, 19], теории представлений [20, 21] и теории интегрируемых моделей [22, 23].

Данная работа посвящена изучению регуляризации обрезанием в координатном представлении на примере трехпетлевых вычислений в четырехмерной обобщенной вещественной теории ϕ^4 , см. [25, 26], в евклидовой формулировке с применением метода фонового поля, плотность действия для которой имеет следующий вид³

$$t^i \phi_i + \frac{1}{2} \phi_i (A_0^{ij} + M^{ij}) \phi_j + \frac{g^{ijk}}{3!} \phi_i \phi_j \phi_k + \frac{\lambda^{ijkn}}{4!} \phi_i \phi_j \phi_k \phi_n.$$

При этом под базовой формулировкой будет подразумеваться случай, когда индексы принимают только одно значение $i = j = k = n = 1$, и коэффициенты при нечетных степенях поля равны нулю. Впервые исследуемая регуляризация была предложена в работе [27] при изучении двухпетлевых расходимостей в кубических моделях. С тех пор она была существенно усовершенствована и применена к ряду других моделей [28–31], в том числе и калибровочным. Стоит отдельно отметить, что данная регуляризация обладает набором интересных и нетривиальных свойств [32]. К примеру, она сохраняет структуру⁴ асимптотического разложения функции Грина около диагонали, также она связана с теорией усреднения, имеет явное спектральное представление и может быть переформулирована при помощи высших ковариантных производных.

На примере главного члена асимптотического разложения $R_0(x - y)$ функции Грина $G(x, y)$

¹Речь идет о перенормируемых и суперперенормируемых теориях.

²Здесь наиболее известным примером является теорема Сохоцкого–Племеля [24], связывающая представления обобщенной функции в двух различных регуляризациях.

³Формула показана для наглядности. Подробное описание приведено при постановке задачи.

⁴Подразумевается, что асимптотический ряд имеет структуру разложения для оператора Лапласа. С дополнительной деформацией входящих в разложение функций.

около диагонали $x \sim y$ регуляризацию можно представить следующей деформацией

$$R_0(z) = \frac{1}{4\pi^2|z|^2} \rightarrow R_0^\Lambda(z) = \frac{\Lambda^2 \mathbf{f}(|z|^2 \Lambda^2)}{4\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} \begin{cases} \Lambda^2, & \text{для } |z| \leq 1/\Lambda; \\ |z|^{-2}, & \text{для } |z| > 1/\Lambda, \end{cases}$$

где Λ – регуляризующий размерный параметр, и \mathbf{f} – непрерывная функция с носителем из $[0, 1]$. Таким образом, $R_0(z) = R_0^\Lambda(z)$ при $|z| > 1/\Lambda$. Схематически такая деформация изображена на рис. 1. Подробное описание с учетом деформации классического действия приведено ниже.

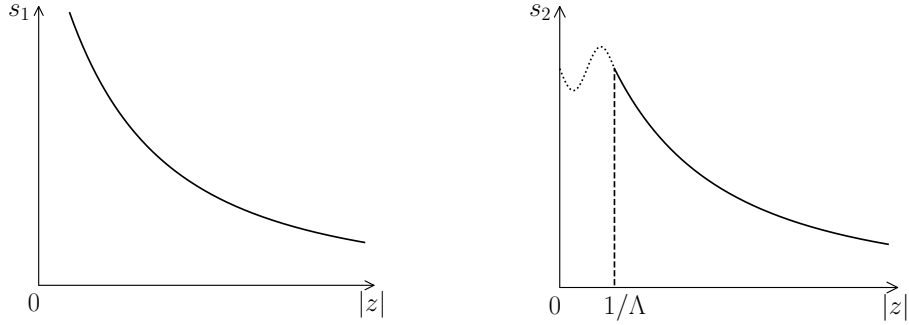


Рис. 1: Схематическое изображение деформации первого слагаемого в асимптотическом разложении функции Грина. Здесь $s_1(|z|) = R_0(z)$ и $s_2(|z|) = R_0^\Lambda(z)$ для некоторой функции $\mathbf{f}(\cdot)$.

Напомним, что модель формулируется с использованием метода фонового поля, поэтому отдельной важной задачей является проверка отсутствия нелокальных сингулярных слагаемых. Также в ходе исследований на примере отдельных диаграмм продемонстрировано выполнение правил перенормировочной \mathcal{R} -операции. Таким образом, при рассмотрении трехпетлевых диаграмм локальная сингулярная часть получается путем вычитания диаграмм с подрасходимостями.

Структура работы.

В разделе 2 формулируются две основные теоремы, посвященные перенормировке как базовой модели, так и обобщенной. В качестве результатов представлены явные ответы для трех первых коэффициентов констант перенормировки. Вычислены первые три коэффициента β -функции, показана согласованность с известными результатами. Также упоминается о явной проверке справедливости перенормировочной \mathcal{R} -операции и об отсутствии расходящихся нелокальных частей.

В разделе 3 обсуждается постановка задачи в базовом случае (см. выше). В дополнение к основным определениям для квантового действия и элементов диаграммной техники Фейнмана также разбирается переход от первоначального эффективного действия к регуляризованному и от регуляризованного к перенормированному. Отдельный акцент делается на перенормировке, контрдиаграммах и на соотношениях для поиска коэффициентов констант перенормировки. Секция завершается кратким списком поставленных задач.

В разделе 4 представлен процесс введения регуляризации. Начиная с общих соображений о связи квантового действия и квантового уравнения движения, выводится ограничение на вид регуляризации. Далее демонстрируется явный рецепт того, как можно ввести регуляризацию обрезанием в координатном представлении, сохранив выполнение дополнительного условия. Выводятся разложения по константе связи для функции Грина, детерминанта, а также асимптотическое разложение около диагонали для функции Грина. В последней части секции показывается, что регуляризация может быть введена деформацией классического действия.

В разделе 5 обсуждается подсчет первых двух поправок (петель) для квантового действия. Выводятся сингулярные части для отдельных диаграмм и окончательные ответы для первых двух коэффициентов констант перенормировки.

В разделе 6 изучаются трехпетлевые диаграммы и производится подсчет третьих коэффициентов констант перенормировки для базовой постановки задачи. Начиная раздел с ряда дополнительных вспомогательных обозначений, часть подсекций посвящается аккуратному выводу (с доказательствами) сингулярных частей для трехпетлевых диаграмм. Также делается акцент на том факте, что в отдельных диаграммах присутствуют нелокальные слагаемые с сингулярными коэффициентами, однако в окончательной сумме все нелокальные части конечны. Предоставлены явные соотношения. В конце раздела выписаны ответы для искоемых коэффициентов, дополненные обсуждениями их проверки и согласованности с известными результатами.

В разделе 7 обсуждается обобщенная постановка задачи. Формулируются основные определения и показывается связь с моделью в базовой формулировке. Рассматривается расширение правил регуляризации и перенормировки. Делается отдельный акцент на процессе подсчета первых трех коэффициентов констант перенормировки с использованием результатов для изученной базовой модели. Формулируются явный рецепт для перехода от базового случая (с обсуждением дополнительных вычислений). В последней части кратко обсуждается получение искоемых коэффициентов, а также выписываются для них явные формулы.

В разделе 8 изложены заключительные замечания, не вошедшие в основные секции. В частности, обсуждаются такие вопросы, как дополнительная деформация при регуляризации, расширение результатов на другие модели и возможные упрощения в дальнейших подсчетах. Также еще раз в краткой форме излагаются основные результаты и их согласованность с другими типами регуляризаций. В конце секции приводятся благодарности.

В разделе 9 собраны доказательства, выводы и обозначения, используемые при подсчетах коэффициентов констант перенормировки. Приведенные результаты являются новыми и представляют из себя неотъемлемую часть работы, однако носят чисто технический характер, поэтому для удобства они вынесены за рамки основного текста.

2 Результаты

Основные результаты работы могут быть сформулированы в виде двух теорем. Начнем с базовой постановки задачи, которая подробно разбирается в разделах 5 и 6.

Теорема 1. Пусть классическое действие модели описывается функционалом (2), и регуляризация квантового действия (5) вводится обрезанием в координатном представлении при помощи деформации квадратичной формы в классическом действии согласно процедуре из раздела 4.4. При этом Λ является регуляризующим параметром и функция $\mathbf{f}(\cdot)$ из (41) отвечает за деформацию функции Грина. В этом случае нелокальные слагаемые сокращаются, и первые три коэффициента для констант перенормировки (17)–(19), то есть для

$$\begin{aligned} Z_2 &= 1 + \hbar z_{2,1} + \hbar^2 z_{2,2} + \hbar^3 z_{2,3} + \dots, \\ Z &= 1 + \hbar z_1 + \hbar^2 z_2 + \hbar^3 z_3 + \dots, \\ Z_4 &= 1 + \hbar z_{4,1} + \hbar^2 z_{4,2} + \hbar^3 z_{4,3} + \dots, \end{aligned}$$

считаются явно и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} z_{2,1} &= \bar{z}_{2,1}, \\ z_1 &= \Lambda^2 q_1 + L\hat{\lambda} + \bar{z}_1, \\ z_{4,1} &= 3L\hat{\lambda} + \bar{z}_{4,1}, \\ z_{2,2} &= -L\hat{\lambda}^2/6 + \bar{z}_{2,2}, \\ z_2 &= \Lambda^2(Lq_3 + q_2) + 2L^2\hat{\lambda}^2 + L(-\hat{\lambda}^2 + \hat{\lambda}(\bar{z}_1 + \bar{z}_{4,1} - 2\bar{z}_{2,1})) + \bar{z}_2, \\ z_{4,2} &= 9L^2\hat{\lambda}^2 + L(-6\hat{\lambda}^2 + 6\hat{\lambda}\bar{z}_{4,1} - 6\hat{\lambda}\bar{z}_{2,1}) + \bar{z}_{4,2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_{2,3} &= -L^2\hat{\lambda}^3/2 + La_1 + \bar{z}_{2,3}, \\
z_3 &= \Lambda^2(L^2b_6 + Lb_5 + b_4) + 14L^3\hat{\lambda}^3/3 + L^2b_2 + Lb_1 + \bar{z}_3, \\
z_{4,3} &= 27L^3\hat{\lambda}^3 + L^2c_2 + Lc_1 + \bar{z}_{4,3}.
\end{aligned}$$

Здесь $L = \ln(\Lambda/\sigma)$, $\hat{\lambda} = \lambda/(16\pi^2)$, и числа « \bar{z} » являются свободными параметрами. Зависимость вспомогательных коэффициентов и ссылки на их явные формулы можно представить в виде следующего списка:

$$\begin{aligned}
q_1 &= q_1(\mathbf{f}, m) \rightarrow \text{см. (59)}, \\
q_2 &= q_2(\mathbf{f}, \bar{z}_{2,1}, \bar{z}_{4,1}, m) \rightarrow \text{см. (71)}, \\
q_3 &= q_3(\mathbf{f}, m) \rightarrow \text{см. (71)}, \\
a_1 &= a_1(\mathbf{f}, \bar{z}_{2,1}, \bar{z}_{4,1}) \rightarrow \text{см. (151)}, \\
b_1 &= b_1(\mathbf{f}, \bar{z}_1, \bar{z}_{2,1}, \bar{z}_{4,1}, \bar{z}_{2,2}, \bar{z}_2, \bar{z}_{4,2}) \rightarrow \text{см. (153)}, \\
b_2 &= b_2(\bar{z}_1, \bar{z}_{2,1}, \bar{z}_{4,1}) \rightarrow \text{см. (154)}, \\
b_4 &= b_4(\mathbf{f}, \bar{z}_{2,1}, \bar{z}_{4,1}, \bar{z}_{2,2}, \bar{z}_{4,2}, m) \rightarrow \text{см. (156)}, \\
b_5 &= b_5(\mathbf{f}, \bar{z}_{2,1}, \bar{z}_{4,1}, m) \rightarrow \text{см. (157)}, \\
b_6 &= b_6(\mathbf{f}, m) \rightarrow \text{см. (158)}, \\
c_1 &= c_1(\mathbf{f}, \bar{z}_{2,1}, \bar{z}_{4,1}, \bar{z}_{2,2}, \bar{z}_{4,2}) \rightarrow \text{см. (159)}, \\
c_2 &= c_2(\bar{z}_{2,1}, \bar{z}_{4,1}) \rightarrow \text{см. (160)}.
\end{aligned}$$

Можно заметить, что главные логарифмические особенности для каждого порядка выписаны явно. Они не зависят от свободных « \bar{z} »-параметров и от дополнительной деформации функции Грина. При этом главные полюса для Z и Z_4 согласуются с полученными в размерной регуляризации до третьего порядка включительно, см. [33, 34].

Посчитаем β -функцию. Если ввести обозначение $\lambda_0 = Z_4\lambda/Z_2^2$, то согласно общей теории она определяется равенством

$$\beta(\lambda_0) = -\sigma \frac{d\lambda_0}{d\sigma} = \beta_1\lambda_0^2 + \beta_2\lambda_0^3 + \beta_3\lambda_0^4 + \dots$$

Используя полученные результаты, первые три коэффициента считаются явно и равны

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= 3, \\
\beta_2 &= -\frac{17}{3}, \\
\beta_3 &= \frac{77}{4} + 12\zeta(3) - 36\alpha_1(\mathbf{f}) + 17\alpha_2(\mathbf{f}) + 2\alpha_6(\mathbf{f}) + 18\alpha_2^2(\mathbf{f}) + \\
&\quad + (4\pi^2)^2(16\alpha_{11}(\mathbf{f}) - 4\alpha_3(\mathbf{f}) - 144\alpha_4(\mathbf{f}) - 144\alpha_5(\mathbf{f})) - 12\bar{z}_{2,2} + 6\bar{z}_{4,2},
\end{aligned} \tag{1}$$

где выражения для чисел $\alpha_i(\mathbf{f})$, зависящих от функции $\mathbf{f}(\cdot)$, приведены в разделе 9.3. Важно обратить внимание, что первые два коэффициента схемонезависимы и полностью согласуются с известными результатами [13, 35] для размерной и неявной регуляризаций. Третий коэффициент зависит от процедуры регуляризации и перенормировки.

В дополнение интересно рассмотреть значения для коэффициентов констант перенормировки для каких-нибудь фиксированных значений параметров. К примеру, если выбрать все свободные « \bar{z} »-коэффициенты нулевыми и $\mathbf{f} \equiv 0$, то

$$\begin{aligned}
z_{2,1} &= 0, \quad z_1 = -\frac{2\hat{\lambda}\Lambda^2}{m^2} + L\hat{\lambda}, \quad z_{4,1} = 3L\hat{\lambda}, \\
z_{2,2} &= -\frac{L\hat{\lambda}^2}{6}, \quad z_2 = \frac{\Lambda^2\hat{\lambda}^2}{m^2}(-6L+1) + 2L^2\hat{\lambda}^2 - L\hat{\lambda}^2, \quad z_{4,2} = 9L^2\hat{\lambda}^2 - 6L\hat{\lambda}^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_{2,3} &= -\frac{L^2 \hat{\lambda}^3}{2} + \frac{L \hat{\lambda}^3}{12}, \\
z_3 &= -\frac{\Lambda^2 \hat{\lambda}^3}{m^2} \left(18L^2 - \frac{53L}{3} + 16\Theta_7 + \frac{16\Theta_9}{3} + \frac{28}{9} \right) + \frac{14L^3 \hat{\lambda}^3}{3} - \frac{41L^2 \hat{\lambda}^3}{6} + \frac{65L \hat{\lambda}^3}{18}, \\
z_{4,3} &= 27L^3 \hat{\lambda}^3 - \frac{89L^2 \hat{\lambda}^3}{2} + L \hat{\lambda}^3 \left(12\zeta(3) - 144\Theta_5 + \frac{611}{24} \right).
\end{aligned}$$

Здесь числа Θ_5 , Θ_7 и Θ_9 считаются численно и представлены в формулах (255)–(257). В этом случае третий коэффициент (1) для β -функции принимает более лаконичный вид

$$\beta_3|_{\mathbf{f}=0} = \frac{607}{24} + 12\zeta(3) - 144\Theta_5 = 45.907 \pm 10^{-3} > 0.$$

Перейдем к обобщенному случаю. Учитывая громоздкость окончательных выражений, в теореме будут представлены ссылки на соответствующие формулы без повторной записи.

Теорема 2. Пусть классическое действие модели описывается функционалом (162), и регуляризация квантового действия вводится обрезанием в координатном представлении при помощи деформации квадратичной формы в классическом действии путем добавления функционала (166). При этом Λ является регуляризующим параметром и функция $\mathbf{f}(\cdot)$ из (41) отвечает за деформацию функции Грина. В этом случае нелокальные слагаемые сокращаются, первые три коэффициента для констант перенормировки (167)–(169) считаются явно и равны:

- первый порядок представлен формулами (171)–(175),
- второй порядок представлен формулами (176)–(184),
- третий порядок представлен формулами (185)–(189) с учетом вспомогательных обозначений из секций 9.6 и 9.7.

Можно проверить, что при выборе значений (163) результаты теоремы 2 для обобщенной модели переходят в результаты теоремы 1 для базовой модели. Также можно отметить, что, как и в простом случае, в обобщенной модели главные логарифмические расходимости являются схемоне-зависимыми. В частности, они не зависят от деформирующей функции $\mathbf{f}(\cdot)$.

Дополнительно обратим внимание, что в ходе исследований явными вычислениями была показана справедливость \mathcal{R} -операции на примере трехпетлевых диаграмм с применением метода фонового поля как для базовой постановки, так и для обобщенной.

3 Базовая постановка задачи

3.1 Эффективное действие

Рассмотрим четырехмерное евклидово пространство \mathbb{R}^4 , см. [36], элементы которого в дальнейшем будем обозначать буквами x, y, z, u, w . В качестве локальных координат воспользуемся декартовыми, а отдельные компоненты будут нумероваться греческими буквами $\alpha, \beta, \mu, \nu \in \{1, 2, 3, 4\}$. Несмотря на тот факт, что метрика в нашем случае представляется символом Кронекера $\delta_{\mu\nu}$, все же будем сохранять наличие верхних и нижних индексов. При этом будет использоваться соглашение Эйнштейна: повторяющийся сверху и снизу индекс подразумевает суммирование по всем значениям. Далее, пусть $m^2 \geq 0$ является квадратом массового параметра, а коэффициент $\lambda \geq 0$ является константой связи и отвечает за четверное взаимодействие. Тогда классическое действие для скалярной модели ϕ^4 в базовой формулировке можно выписать в виде

$$S[\phi] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_{x_\mu} \phi(x)) (\partial_{x^\mu} \phi(x)) + \frac{m^2}{2} \phi^2(x) + \frac{\lambda}{4!} \phi^4(x) \right]. \quad (2)$$

В последней формуле подразумевается, что функция $\phi(\cdot)$ является гладкой и имеет достаточно хорошее убывание на бесконечности, так что интеграл существует. Затем, интегрируя по частям первое слагаемое, можно представить действие в виде

$$S[\phi] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left[\frac{1}{2} \phi(x) A(x) \phi(x) + \frac{\lambda}{4!} \phi^4(x) \right], \quad (3)$$

где было использовано определение для оператора Лапласа $A(x)$ в локальных координатах

$$A(x) = A_0(x) + m^2 = -\partial_{x_\mu} \partial_{x^\mu} + m^2. \quad (4)$$

Далее определим квантовое (эффе́ктивное) действие, которое получается при помощи следующего функционального интегрирования

$$e^{-W/\hbar} = \int_{\mathcal{H}} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]/\hbar}, \quad (5)$$

где константа Планка \hbar играет роль малого параметра, а функциональное пространство \mathcal{H} определяется из физических соображений⁵. Таким образом, квантовое действие W зависит от класса функций в \mathcal{H} , от их поведения на больших расстояниях.

Основным методом изучения квантового действия является пертурбативный подход, то есть разложение по малому параметру в асимптотический ряд. Таким малым параметром в нашем случае является постоянная Планка \hbar . Давайте кратко опишем переход к асимптотическому разложению. Для этого будет использоваться метод фонового поля, см. [35, 37–43], основная идея которого заключается в сдвиге

$$\phi(x) \rightarrow B(x) + \sqrt{\hbar} \phi(x), \quad (6)$$

где функция $B(\cdot)$ называется фоновым полем и решает квантовое уравнение движения⁶. В качестве граничных условий для такого уравнения как правило подразумевается поведение функций на бесконечности, определяющее множество \mathcal{H} . Таким образом, зависимость квантового действия W от набора \mathcal{H} переходит после замены в зависимость от фонового поля $B(\cdot)$. Поэтому квантовое действие является в действительности функционалом $W = W[B]$. Далее будем обозначать символом \mathcal{H}_0 множество функций после упомянутого перехода, то есть $\phi \in \mathcal{H}_0 \leftrightarrow \phi + B/\sqrt{\hbar} \in \mathcal{H}$.

Заметим, что после сдвига (6) классическое действие (3) представимо в виде конечной суммы по степеням постоянной Планка

$$S[B + \sqrt{\hbar} \phi] = S[B] + \sqrt{\hbar} \Gamma_1[B, \phi] + \frac{\hbar}{2} \Gamma_2[B, \phi] + \frac{\lambda \hbar^{3/2}}{3!} \Gamma_3[B, \phi] + \frac{\lambda \hbar^2}{4!} \Gamma_4[\phi], \quad (7)$$

где

$$\Gamma_1[B, \phi] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \phi(x) \left(A(x) + \lambda B^2(x)/3! \right) B(x), \quad (8)$$

$$\Gamma_2[B, \phi] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \phi(x) M(x) \phi(x) = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \phi(x) \left(A(x) + \lambda B^2(x)/2 \right) \phi(x), \quad (9)$$

$$\Gamma_3[B, \phi] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x B(x) \phi^3(x), \quad \Gamma_4[\phi] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \phi^4(x). \quad (10)$$

В дальнейшей работе с такими слагаемыми пригодится их диаграммное представление. На рис. 2 изображены вершины с внешними свободными линиями для $\Gamma_1[B, \phi]$, $\Gamma_3[B, \phi]$ и $\Gamma_4[\phi]$. Функционал $\Gamma_2[B, \phi]$ является квадратичной формой с дифференциальным оператором M . Как известно, внешние свободные линии соединяются элементом, отвечающим регуляризованному ядру $G^\Lambda(\cdot, \cdot)$ обратного оператора к M . Он обозначается сплошной линией, называется пропагатором и также изображен на рис. 2.

⁵Здесь следует сделать замечание, что определение функционального интеграла, так же как и соответствующей меры, содержит некоторые открытые математические вопросы. Поэтому множество функций \mathcal{H} и последующие операции с областью интегрирования носят символический характер. Предполагается, что для функционального интеграла выполняются стандартные свойства обычного интеграла.

⁶На диаграммном языке можно сказать, что фоновое поле является решением уравнения, в котором сумма всех сильно связанных диаграмм с одной внешней свободной линией равна нулю.

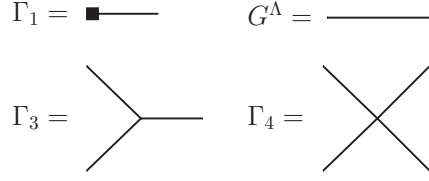


Рис. 2: Элементы диаграммной техники для вершин с одной, тремя и четырьмя внешними свободными линиями, а также для регуляризованной функции Грина G^Λ .

Следовательно, подставляя разложение (7) в функциональный интеграл (5), получаем

$$e^{-W[B]/\hbar} = \exp \left(-\frac{S[B]}{\hbar} - \frac{\Gamma_1[B, \delta_j]}{\sqrt{\hbar}} - \frac{\lambda \hbar^{1/2}}{3!} \Gamma_3[B, \delta_j] - \frac{\lambda \hbar}{4!} \Gamma_4[\delta_j] \right) \times \int_{\mathcal{H}_0} \mathcal{D}\phi e^{-\Gamma_2[B, \phi]/2} \exp \left(\int_{\mathbb{R}^4} d^4x j(x) \phi(x) \right) \Big|_{j=0}, \quad (11)$$

где было использовано обозначение для функциональной производной δ_j по вспомогательному гладкому полю j и следующее соотношение

$$F[\delta_j] \exp \left(\int_{\mathbb{R}^4} d^4x j(x) \phi(x) \right) \Big|_{j=0} = F[\phi] \quad (12)$$

для произвольного функционала $F[\cdot]$, представимого в виде ряда по степеням поля. В свою очередь, функциональный интеграл из формулы (11) является гауссовым, поэтому ответ для него, с учетом подходящей нормировки для меры, выписывается в явном виде

$$\int_{\mathcal{H}_0} \mathcal{D}\phi e^{-\Gamma_2[B, \phi]/2} \exp \left(\int_{\mathbb{R}^4} d^4x j(x) \phi(x) \right) = \frac{e^{g[G, j]}}{\sqrt{\det(M)}}, \quad (13)$$

где функционал $g[\cdot, \cdot]$ и функция Грина $G(\cdot, \cdot)$ определяются соотношениями

$$g[G, j] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x d^4y j(x) G(x, y) j(y), \quad M(x) G(x, y) = \delta(x - y). \quad (14)$$

Разумеется, функция Грина является не только решением последнего уравнения, но и удовлетворяет некоторым граничным условиям, вытекающим из свойств фонового поля и множества \mathcal{H}_0 . Их явный вид не играет важной роли в дальнейших исследованиях, однако, будем подразумевать, что задача для поиска функции Грина корректна.

После всех упомянутых манипуляций квантовое действие выписывается в виде

$$W[B] = S[B] - \frac{\hbar}{2} \ln \det(G) - \hbar \exp \left(-\frac{\lambda \hbar^{1/2}}{3!} \Gamma_3[B, \delta_j] - \frac{\lambda \hbar}{4!} \Gamma_4[\delta_j] \right) e^{g[G, j]} \Big|_{j=0}^{1\text{PI}}, \quad (15)$$

где символ 1PI означает, что в сумме остаются только сильно связанные^{7,8} диаграммы. Именно по этой причине в формуле (15) отсутствуют функционал $\Gamma_1[B, \delta_j]$ и отрицательные степени постоянной Планка. Это приводит к тому, что квантовое действие содержит в асимптотическом разложении

⁷Здесь следует отметить, что после логарифмирования функционального интеграла в поправках остаются только связанные графы. При этом нужно помнить, что фоновое поле B является решением квантового уравнения движения, которое зануляет сумму сильно связанных диаграмм с одной внешней свободной линией. Таким образом, в сумме остается только сильно связанная часть.

⁸Отслеживая переход от формулы (11), в третьем слагаемом перед экспонентой следовало бы написать логарифм \ln . Он отсутствует, поскольку знак 1PI оставляет только сильно связанные слагаемые, а операция логарифмирования сохраняет связанные. Следовательно, более слабую операцию можно опустить.

только положительные степени постоянной Планка \hbar , и, как следствие, представимо в виде суммы классического действия и квантовых поправок

$$W[B] = S[B] + \sum_{k=1}^{+\infty} \hbar^k W_k[B],$$

где $W_k[B]$ отвечает поправке, включающей сильно связанные диаграммы с k петлями.

Из общей теории известно, что объект $W[B]$ плохо определен, поскольку каждое поправочное слагаемое $W_k[B]$ асимптотического ряда содержит расходящиеся интегралы. Поэтому, согласно общей логике, вводится регуляризация с некоторым вспомогательным параметром Λ , которая делает интегралы, зависящие от фонового поля, сходящимися. При этом вместо расходящихся интегралов появляются слагаемые, содержащие сингулярности⁹ по регуляризующему параметру Λ . В свою очередь интегралы, которые не зависят от фонового поля, не обязаны регуляризовываться в общем случае. Они не несут важной информации (это просто число) и могут быть убраны подходящим вычитанием в каждой петле. Таким образом, квантовое действие после дополнительного преобразования выглядит так

$$W[B] \xrightarrow{\text{per.}} W[B, \Lambda] = S[B] + \sum_{k=1}^{+\infty} \hbar^k (W_k[B, \Lambda] - \kappa_k), \quad (16)$$

где величины κ_k вычитают расходимости, не зависящие от фонового поля. Отсюда вытекает, что регуляризованное квантовое действие конечно, но содержит набор слагаемых, которые будут стремиться к бесконечности при снятии регуляризации. Сразу отметим, что в данной работе под регуляризацией понимается деформация¹⁰ функции Грина

$$G(x, y) \xrightarrow{\text{per.}} G^\Lambda(x, y).$$

Снятие регуляризации производится переходом к пределу $\Lambda \rightarrow +\infty$.

3.2 Перенормировка

Существует общий рецепт, который позволяет убирать (вычитать) сингулярные слагаемые путем домножения составляющих классического действия на дополнительные константы, которые называются константами перенормировки. В случае исследуемой модели таких констант¹¹ должно быть три

$$Z_2 = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \hbar^k z_{2,k}(\Lambda), \quad (17)$$

$$Z = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \hbar^k z_k(\Lambda), \quad (18)$$

$$Z_4 = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \hbar^k z_{4,k}(\Lambda). \quad (19)$$

Они не зависят от пространственной координаты или фонового поля. Вводятся такие константы в квантовое действие $W[B, \Lambda]$ через серию замен

$$\phi(x) \rightarrow \sqrt{Z_2} \phi(x), \quad m^2 \rightarrow Z Z_2^{-1} m^2, \quad \lambda \rightarrow Z_4 Z_2^{-2} \lambda \quad (20)$$

⁹Они конечны, но стремятся к бесконечности при снятии регуляризации. Например, функция Λ^2 сингулярна в окрестности бесконечности по регуляризующему параметру Λ .

¹⁰Далее будет показано, что регуляризацию нужно вводить специальным согласованным образом, который позволяет сохранить связь действия и уравнения движения.

¹¹Коэффициенты разложения для констант зависят от регуляризующего параметра Λ , обозначение которого, как правило, будет опускаться для удобства.

в плотности классического действия (2). Следовательно, после такой процедуры получается третий объект – перенормированное регуляризованное квантовое действие

$$W[B, \Lambda] \xrightarrow{\text{рен.}} W_{\text{рен}}[B, \Lambda]. \quad (21)$$

Последний функционал уже не содержит сингулярностей, поэтому после снятия регуляризации

$$W_{\text{рен}}[B, +\infty] \text{ конечен.}$$

Заметим, что масштабирование поля (20) производится до сдвига. Следовательно, работая с элементами после сдвига, необходимо домножить на $\sqrt{Z_2}$ как поле ϕ , так и фоновое поле B . Тогда перенормированное действие из (21) представимо в виде

$$W_{\text{рен}}[B, \Lambda] = \frac{Z_2}{2} S_2[B] + \frac{m^2 Z}{2} S_m[B] + \frac{\lambda Z_4}{4!} S_4[B] - \left(\frac{\hbar}{2} \ln \det(G^\Lambda) + \hbar \kappa_1 \right) - \\ - \left[\hbar \exp \left(\frac{1}{2} (\Gamma_2[B, \delta_j] - \Gamma_2^{\text{рен}}[B, \delta_j]) - \frac{\lambda \hbar^{1/2}}{3!} \Gamma_3[B, \delta_j] - \frac{\lambda \hbar}{4!} \Gamma_4[\delta_j] \right) e^{g[G^\Lambda, j]} \right]_{j=0}^{\text{1PI}} + \sum_{k=2}^{+\infty} \hbar^k \kappa_k, \quad (22)$$

где¹²

$$S_2[B] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x (\partial_{x_\mu} B(x)) (\partial_{x^\mu} B(x)), \quad S_m[B] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x B^2(x), \quad S_4[B] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x B^4(x), \quad (23)$$

$$\Gamma_2^{\text{рен}}[B, \delta_j] - \Gamma_2[B, \delta_j] = \sum_{k=1}^{+\infty} \hbar^k X_k[B, \delta_j]. \quad (24)$$

Явный вид функционалов $X_k[B, \delta_j]$ представлен в формуле (52) после окончательного описания процесса регуляризации. Согласно общему правилу, при появлении новых вершин необходимо закрепить за ними элементы диаграммной техники. Они представлены на рис. 3.

$$\Gamma_2^{\text{рен}} - \Gamma_2 = \hbar \text{---}\bigtimes_1 \text{---} + \hbar^2 \text{---}\bigtimes_2 \text{---} + \mathcal{O}(\hbar^3)$$

Рис. 3: Элементы диаграммной техники для дополнительных вершин (24) и (52) с двумя внешними свободными линиями.

Далее, с учетом определений для элементов диаграммной техники, объект в квадратных скобках из формулы (22) можно переписать в диаграммном виде, см. рис. 4, 5 и 6,

$$\hbar \left(\frac{\lambda^2 d_1}{12} - \frac{\lambda d_2}{8} - \frac{cd_1}{2} + \kappa_2 \right) + \hbar^2 \left(\frac{\lambda^2 z_{4,1} d_1}{6} - \frac{\lambda z_{4,1} d_2}{8} + \frac{\lambda^4 d_3}{16} + \frac{\lambda^4 d_4}{24} - \right. \\ \left. - \frac{\lambda^3 d_5}{8} - \frac{\lambda^3 d_6}{8} + \frac{\lambda^2 d_7}{48} + \frac{\lambda^2 d_8}{16} - \frac{\lambda^2 cd_2}{4} + \frac{\lambda cd_3}{4} + \frac{cd_4}{4} - \frac{cd_5}{2} + \kappa_3 \right) + \mathcal{O}(\hbar^3). \quad (25)$$

Диаграммы d_i и контрдиаграммы cd_i являются функционалами, зависящими от фонового поля. Также они конечны¹³ и зависят от регуляризующего параметра Λ .

¹²Здесь необходимо пояснить появление дополнительного слагаемого $(\Gamma_2[B, \delta_j] - \Gamma_2^{\text{рен}}[B, \delta_j])/2$ во второй строке (22). Дело в том, что после перенормировки (20) квадратичная форма содержит константы перенормировки. Следовательно, после вычисления гауссова интеграла во второй строке формулы (11) получаются константы перенормировки в детерминанте и в функции Грина. Желая их (детерминант и функцию Грина) оставить прежними, дополнительные слагаемые были вынесены согласно правилу (12) в виде функциональных производных.

¹³Диаграммы $\{d_2, d_7, d_8\}$ и контрдиаграммы $\{cd_1, cd_3, cd_4, cd_5\}$ могут содержать расходимости, не зависящие от фонового поля. Они представляют собой интегрирование константы по \mathbb{R}^4 . Такие плотности вычитаются при помощи κ_2 и κ_3 . Именно благодаря легкой устранимости и отсутствию физического смысла они не принимаются во внимание.

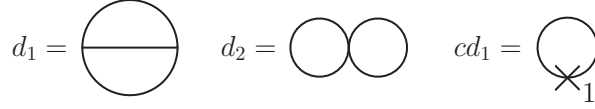


Рис. 4: Диаграммы d_1 и d_2 и контрдиаграмма cd_1 , дающие вклад в двухпетлевое слагаемое.

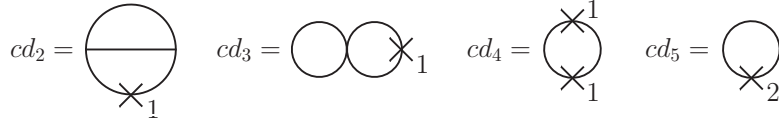


Рис. 5: Контрдиаграммы cd_2 – cd_5 из трехпетлевого вклада.

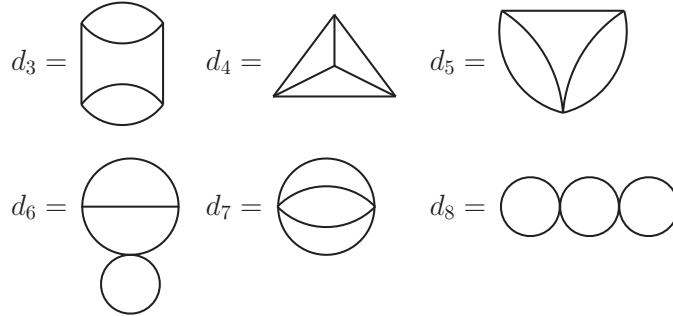


Рис. 6: Диаграммы d_3 – d_8 из трехпетлевого вклада $W_3[B, \Lambda]$.

Разложение (22) с учетом (25) является основным рабочим объектом данной секции. Учитывая тот факт, что константы перенормировки убирают (вычитают) слагаемые с сингулярностями по регуляризующему параметру, можно утверждать, что это должно выполняться и в каждом порядке по константе Планка. Следовательно, изучая расходимости в отдельных диаграммах, можно их просуммировать и получить значения для коэффициентов констант перенормировки. Для каждого порядка постоянной Планка получается свое линейное уравнение

$$\frac{z_{2,1}}{2} S_2[B] + \frac{m^2 z_1}{2} S_m[B] + \frac{\lambda z_{4,1}}{4!} S_4[B] \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{1}{2} \ln \det(G^\Lambda) + \kappa_1, \quad (26)$$

$$\frac{z_{2,2}}{2} S_2[B] + \frac{m^2 z_2}{2} S_m[B] + \frac{\lambda z_{4,2}}{4!} S_4[B] \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{\lambda^2 d_1}{12} - \frac{\lambda d_2}{8} - \frac{cd_1}{2} + \kappa_2, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{z_{2,3}}{2} S_2[B] + \frac{m^2 z_3}{2} S_m[B] + \frac{\lambda z_{4,3}}{4!} S_4[B] &\stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{\lambda^2 z_{4,1} d_1}{6} - \frac{\lambda z_{4,1} d_2}{8} + \\ &+ \frac{\lambda^4 d_3}{16} + \frac{\lambda^4 d_4}{24} - \frac{\lambda^3 d_5}{8} - \frac{\lambda^3 d_6}{8} + \frac{\lambda^2 d_7}{48} + \frac{\lambda^2 d_8}{16} - \frac{\lambda^2 cd_2}{4} + \frac{\lambda cd_3}{4} + \frac{cd_4}{4} - \frac{cd_5}{2} + \kappa_3, \end{aligned} \quad (28)$$

где сокращение s.p. означает равенство сингулярных слагаемых.

Основные задачи для базовой постановки:

- изучить расходящиеся части в диаграммах d_1 – d_8 и контрдиаграммах cd_1 – cd_5 с использованием регуляризации обрезанием в координатном представлении;
- проверить справедливость \mathcal{R} -операции на примере трехпетлевых диаграмм;

- найти первые три коэффициента $\{z_{2,i}, z_i, z_{4,i}\}_{i=1}^3$ для констант перенормировки Z_2 , Z и Z_4 ;
- убедиться, что нелокальные слагаемые сокращаются.

4 Правила регуляризации

4.1 Общие соображения

В секциях 1 и 3 были упомянуты некоторые общие сведения о регуляризации, однако четкого рецепта предоставлено не было, поэтому восполним этот пробел в данном разделе. Известно, что функцию Грина можно деформировать $G(x, y) \rightarrow G^\Lambda(x, y)$ различными способами. Причем к регуляризованной функции может быть добавлена произвольная «малая» добавка $h^\Lambda(x, y)$, такая что

$$M(x)h^\Lambda(x, y) \rightarrow 0 \quad (29)$$

при $\Lambda \rightarrow +\infty$ в смысле обобщенных функций. В данной секции будет сформулировано дополнительное естественное ограничение, сужающее класс деформаций.

Как это было отмечено ранее, эффективное действие $W[B]$ является функционалом, зависящим от фонового поля. В своем асимптотическом разложении оно содержит только сильно связанные диаграммы. Это следует из того факта, что фоновое поле $B(x)$ является решением квантового уравнения движения $Q[B](x) = 0$, в котором сумма всех сильно связанных диаграмм с одной свободной внешней линией равна нулю. При этом квантовое уравнение движения и квантовое действие имеют прямую связь: первое получается вариацией второго по фоновому полю, то есть

$$\frac{\delta W[B]}{\delta B(x)} = Q[B](x). \quad (30)$$

Если в процессе регуляризации $W[\cdot] \rightarrow W[\cdot, \Lambda]$ и $Q[\cdot] \rightarrow Q[\cdot, \Lambda]$ такая связь нарушается, то квантовое действие $W[\cdot, \Lambda]$ становится зависимым не от экстремального поля, то есть решения квантового уравнения движения

$$\frac{\delta W[B, \Lambda]}{\delta B(x)} = 0,$$

а от некоторого другого поля \tilde{B} , которое решает уравнение $Q[\tilde{B}, \Lambda] = 0$. Следовательно, желание сохранить зависимость эффективного действия от экстремального поля, как это было до регуляризации, приводит к необходимости сохранить связь

$$\frac{\delta W[B, \Lambda]}{\delta B(x)} = Q[B, \Lambda](x). \quad (31)$$

Для выполнения последнего соотношения предлагается¹⁴ придерживаться следующей логики. Ясно, что каждой диаграмме в квантовом действии соответствует некоторая сумма диаграмм в $Q[B]$, которые связаны функциональным дифференцированием по фоновому полю. Давайте потребуем, чтобы это соотношение (для каждой отдельной диаграммы) выполнялось и после регуляризации.

Учитывая тот факт, что диаграммообразующие вершины $\Gamma_3[B]$ и $\Gamma_4[B]$ не деформируются¹⁵ в процессе регуляризации, необходимо проследить только за деформацией функции Грина. Как известно, функция G удовлетворяет следующему соотношению

$$\frac{\delta}{\delta B(z)} G(x, y) = -\lambda G(x, z) B(z) G(z, y),$$

которое получается вариацией второго соотношения из (14) по $B(z)$. Следовательно, условие (31) будет выполнено, если для регуляризованной функции Грина будет выполняться соотношение

$$\frac{\delta}{\delta B(z)} G^\Lambda(x, y) = -\lambda G^\Lambda(x, z) B(z) G^\Lambda(z, y). \quad (32)$$

¹⁴ Не утверждается, что предложенная процедура является единственной.

¹⁵ В более общем случае можно рассмотреть ситуацию, когда вершины тоже деформируются. Такой вариант в данной работе не изучается.

Именно это равенство и будет дополнительным ограничением для рассматриваемой регуляризации.

4.2 Дополнительное условие

Рассмотрим функциональный интеграл, возникший в формуле (11). Формальный¹⁶ ответ для него представлен в (13). Следовательно, используя функциональную производную по полю $j(x)$, можно выписать детерминант и функцию Грина в виде

$$\ln \det(G) = 2 \ln \left[\int_{\mathcal{H}_0} \mathcal{D}\phi e^{-\Gamma_2[0, \phi]/2} \exp \left(-\frac{\lambda}{4} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x B^2(x) \phi^2(x) \right) \right], \quad (33)$$

$$G(x, y) = \sqrt{\det(M)} \int_{\mathcal{H}_0} \mathcal{D}\phi e^{-\Gamma_2[0, \phi]/2} \phi(x) \phi(y) \exp \left(-\frac{\lambda}{4} \int_{\mathbb{R}^4} d^4z B^2(z) \phi^2(z) \right), \quad (34)$$

где было использовано определение (9) для квадратичной формы

$$\Gamma_2[B, \phi] = \Gamma_2[0, \phi] + \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x B^2(x) \phi^2(x).$$

Процедуру регуляризации можно описать так. Пусть $G_0(x - y)$ – функция Грина для оператора $A(x)$, см. (4), из квадратичной формы $\Gamma_2[0, \phi]$, см. (9). Тогда под регуляризацией будем понимать такую деформацию квадратичной формы $\Gamma_2[0, \phi] \rightarrow \Gamma_2^\Lambda[0, \phi]$ путем деформации оператора¹⁷ $A \rightarrow A_0^\Lambda + m^2$, при которой функция Грина $G_0 \rightarrow G_0^\Lambda$ удовлетворяет следующим условиям:

- $A(x)G_0^\Lambda(x - y) \rightarrow \delta(x - y)$ при $\Lambda \rightarrow +\infty$ в смысле обобщенных функций;
- существуют такие $N > 0$ и $\mu > 0$, что $G_0^\Lambda(x)$ ограничено в области $|x| < 1/\mu$ для любого конечного $\Lambda > N$.

Оба требования являются вполне естественными. Действительно, первое условие обеспечивает сходимость регуляризованной функции Грина к первоначальной. В то время как второе условие позволяет рассматривать функцию на диагонали, что необходимо, поскольку в модели (2) появляются диаграммы с «пузырями»¹⁸.

В итоге, раскладывая экспоненты в (33) и (34) в ряд по степеням поля, получаем¹⁹ явные, уже аккуратные в математическом смысле, формулы²⁰ для регуляризованного детерминанта и функции Грина

$$\ln \det(G^\Lambda/G_0^\Lambda) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k 2^k} \int_{\mathbb{R}^{4 \times k}} d^4x_1 \dots d^4x_k G_0^\Lambda(x_k - x_1) B^2(x_1) G_0^\Lambda(x_1 - x_2) B^2(x_2) \times \dots \\ \dots \times G_0^\Lambda(x_{k-1} - x_k) B^2(x_k), \quad (35)$$

$$G^\Lambda(x, y) = G_0^\Lambda(x - y) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-\lambda)^k}{2^k} \int_{\mathbb{R}^{4 \times k}} d^4x_1 \dots d^4x_k G_0^\Lambda(x - x_1) B^2(x_1) G_0^\Lambda(x_1 - x_2) B^2(x_2) \times \dots \\ \dots \times G_0^\Lambda(x_{k-1} - x_k) B^2(x_k) G_0^\Lambda(x_k - y). \quad (36)$$

Не трудно проверить справедливость следующего утверждения.

¹⁶Так как рассуждения производятся до введения регуляризации. После объяснения правил все рассуждения легко повторяются с учетом регуляризации и имеют аккуратный математический вид.

¹⁷Заметим, что можно деформировать не только A_0 , но и $A_0 + m^2$ в целом. Однако, это усложнит вид асимптотических разложений и вычисления. В данной работе такая ситуация не рассматривается.

¹⁸То есть с плотностями, включающими $G^\Lambda(x, x)$.

¹⁹Правая часть (34) содержит только связанные диаграммы, так называемые «цепочки». Общий «вакуумный» множитель сокращается фактором $\sqrt{\det(M)}$.

²⁰Формула (36) является аналогом второго резольвентного тождества, см. теорему 4.8.2 в [44].

Лемма 1. *С учетом всего вышеизложенного, функция (36) удовлетворяет соотношениям (32) и*

$$\frac{\delta}{\delta B(x)} \ln \det(G^\Lambda/G_0^\Lambda) = -\lambda B(x) G^\Lambda(x, x)$$

для всех $x \in \mathbb{R}^4$.

С учетом последнего утверждения и того факта, что переход от регуляризованного квантового действия (16) к перенормированному (21) осуществляется при помощи добавления дополнительных вершин, которые либо не зависят от фонового поля, либо в которых составляющая с фоновым полем не деформируется в процессе регуляризации, то можно обобщить соотношение (31) на перенормированное квантовое действие

$$\frac{\delta W_{\text{ren}}[B, \Lambda]}{\delta B(x)} = Q_{\text{ren}}[B, \Lambda](x). \quad (37)$$

4.3 Разложение около диагонали

В продолжение данной секции сделаем несколько полезных замечаний о деформации функции Грина $G_0(x - y)$. Как это уже было упомянуто, она удовлетворяет уравнению

$$A(x)G_0(x - y) = (-\partial_{x_\mu}\partial_{x^\mu} + m^2)G_0(x - y) = \delta(x - y),$$

которое решается явно

$$G_0(x) = \frac{mK_1(m|x|)}{(2\pi)^2|x|},$$

где $K_1(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя второго рода. С учетом свойств специальной функции около диагонали, можно выписать разложение в ряд

$$G_0(x) = R_0(x) - R_{10}(x)m^2 + R_{20}(x)\frac{m^4}{2} + PS_0(x) + o(|x|^2), \quad (38)$$

где $PS_0(x)$ – гладкая составляющая, и остальные функции определяются равенствами

$$R_0(x) = \frac{1}{4\pi^2|x|^2}, \quad R_{10}(x) = -\frac{\ln(|x|^2\sigma^2)}{16\pi^2}, \quad R_{20}(x) = \frac{|x|^2(\ln(|x|^2\sigma^2) - 1)}{64\pi^2}. \quad (39)$$

Здесь, $\sigma > 0$ – фиксированный параметр²¹ для обезразмеривания аргумента.

В процессе регуляризации $G_0 \rightarrow G_0^\Lambda$ каждое слагаемое в разложении (38) подвергается деформации, и поэтому каждая функция приобретает дополнительный параметр Λ . Новое разложение имеет вид

$$G_0^\Lambda(x) = R_0^\Lambda(x) - R_{10}^\Lambda(x)m^2 + R_{20}^\Lambda(x)\frac{m^4}{2} + PS_0^\Lambda(x) + o(|x|^2) + o(\Lambda^{-2}). \quad (40)$$

Предполагается, что негладкая часть²² каждой функции с параметром Λ сходится к негладкой части функции без параметра при снятии регуляризации. Также дополнительно будем предполагать, что главный член асимптотики ведет себя следующим образом:

$$R_0^\Lambda(x) = \frac{\Lambda^2 \mathbf{f}(|x|^2 \Lambda^2)}{4\pi^2} + \begin{cases} \Lambda^2/(4\pi^2), & \text{для } |x| \leq 1/\Lambda; \\ R_0(x), & \text{для } |x| > 1/\Lambda, \end{cases} \quad (41)$$

²¹Функция (38) не зависит от параметра σ , так как в PS_0 содержится слагаемое, зависящее от σ , с противоположным знаком. Обезразмеривание аргумента выбранного логарифма было достигнуто добавлением и вычитанием. При этом аргумент логарифма в PS_0 обезразмеривается массовым параметром m .

²²Гладкая составляющая может переходить из PS -части в R -функции и наоборот.

где новая ограниченная функция обладает свойствами²³

$$\text{supp}(\mathbf{f}(\cdot)) \subset [0, 1], \quad \mathbf{f}(\cdot) \in C(\mathbb{R}_+) \quad \text{и} \quad \partial_{x_\mu} \partial_{x^\mu} \Lambda^2 \mathbf{f}(|x-y|^2 \Lambda^2) \xrightarrow{\Lambda \rightarrow +\infty} 0. \quad (42)$$

Здесь последнее соотношение понимается в смысле обобщенных функций.

Далее выпишем асимптотику для функции Грина (36). Она имеет вид

$$G^\Lambda(x, y) = R_0^\Lambda(x-y) - R_{10}^\Lambda(x-y)m^2 - R_{11}^\Lambda(x-y) \frac{\lambda(B^2(x) + B^2(y))}{4} + PS^\Lambda(x, y), \quad (43)$$

где

$$PS^\Lambda(x, y) = R_{20}^\Lambda(x-y) \frac{m^4}{2} + R_{21}^\Lambda(x-y) \frac{m^2 \lambda(B^2(x) + B^2(y))}{4} + R_{22}^\Lambda(x-y) \frac{\lambda^2(B^4(x) + B^4(y))}{16} + PS_1^\Lambda(x, y), \quad (44)$$

$$R_{11}^\Lambda(x) = \int_{B_{1/\sigma}} d^4 z R_0^\Lambda(z) R_0^\Lambda(z+x), \quad (45)$$

$$R_{21}^\Lambda(x) = \int_{B_{1/\sigma}} d^4 z R_0^\Lambda(z) R_{10}^\Lambda(z+x) + \int_{B_{1/\sigma}} d^4 z R_{10}^\Lambda(z) R_0^\Lambda(z+x) - 2\tilde{c}_2, \quad (46)$$

$$R_{22}^\Lambda(x) = 2 \int_{B_{1/\sigma} \times B_{1/\sigma}} d^4 z d^4 y R_0^\Lambda(z) R_0^\Lambda(z+y) R_0^\Lambda(y+x) - 2\tilde{c}_2, \quad (47)$$

где σ – все тот же вспомогательный фиксированный параметр, и $B_{1/\sigma}(x)$ – замкнутый шар радиуса $1/\sigma$ с центром в точке x , $B_{1/\sigma} \equiv B_{1/\sigma}(0)$. Функции $PS^\Lambda(x, y)$ и $PS_1^\Lambda(x, y)$ являются симметричными. Явный вид для $PS_1^\Lambda(x, y)$ представлен в секции 9.4. Константа \tilde{c}_2 определяется равенством

$$\tilde{c}_2 = \int_{B_{1/\sigma} \times B_{1/\sigma}} d^4 z d^4 y R_0(z) R_0(z+y) R_0(y) = \frac{1}{32\pi^2 \sigma^2} \quad (48)$$

и явно вычислена в (246). Такое вычитание можно сделать, поскольку все гладкие и нелокальные части, как это будет показано, не входят в сингулярную часть. При этом сдвиг вычитает постоянное слагаемое и обеспечивает в (46) и (47) при $x = 0$ асимптотику вида L/Λ^2 , см. (248).

Также для удобства введем несколько вспомогательных функционалов

$$J_1[B] = \int_{\mathbb{R}^2} d^4 x PS_1^\Lambda(x, x), \quad J_2[B] = \int_{\mathbb{R}^2} d^4 x PS_1^\Lambda(x, x) B^2(x), \quad (49)$$

$$J_3[B] = \int_{\mathbb{R}^2} d^4 x \left(\partial_{y_\mu} \partial_{y^\mu} PS_1^\Lambda(y, x) \right) \Big|_{y=x}, \quad J_4[B] = \int_{\mathbb{R}^2} d^4 x PS_1^\Lambda(x, x) PS_1^\Lambda(x, x). \quad (50)$$

4.4 Окончательная формулировка

С учетом всех сделанных выше замечаний, необходимо сформулировать правила регуляризации в окончательном виде. Более того, важно проверить, что регуляризация вводится при помощи деформации исходного классического действия, а не задается произвольным образом и не меняется при переходе от одной диаграммы к другой. Итак, изначальное квантовое действие (с расходимостями) с учетом метода фонового поля имеет вид

$$W[B] = -\hbar \ln \left(\int_{\mathcal{H}_0} \mathcal{D}\phi e^{-S[B + \sqrt{\hbar} \phi]/\hbar} \right).$$

Далее производится деформация классического действия. Для этого нужно прибавить регуляризующий функционал $S[\phi, \Lambda]$, который бы делал все слагаемые, зависящие от фонового поля, конечными. С учетом рассуждений из секции 4.2, необходимо деформировать оператор (29) в квадратичной форме

$$A_0(x) \rightarrow A_0^\Lambda(x),$$

²³Заметим, что последний предельный переход будет справедлив, к примеру, при выполнении дополнительных соотношений $\mathbf{f}(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}_+)$ и $\mathbf{f}'(1) = 0$.

так что $A_0^\Lambda(x) \rightarrow A_0(x)$ при $\Lambda \rightarrow +\infty$. В этом случае добавочный функционал имеет вид

$$S[\phi, \Lambda] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \phi(x) \left(A_0^\Lambda(x) - A_0(x) \right) \phi(x), \quad (51)$$

и регуляризованное квантовое действие с учетом (16) выписывается в форме

$$W[B, \Lambda] = -\hbar \ln \left(\int_{\mathcal{H}_0} \mathcal{D}\phi e^{-S[B+\sqrt{\hbar}\phi]/\hbar - S[\phi, \Lambda]} \right) - \sum_{k=1}^{+\infty} \hbar^k \kappa_k.$$

Следует обратить внимание, что похожую формулировку деформации имеют так называемые «long-range» модели [45], в которых оператор квадратичной формы имеет вид $(-\partial_{x_\mu} \partial_{x^\mu})^{\xi(\Lambda)}$, где $0 < \xi(\Lambda) < 1$. Однако, с учетом нашего явного вида деформации (41), «long-range» модели являются существенно другими. При этом обе регуляризации можно объединить в общий класс, в котором деформируется квадратичная форма.

Далее после перенормировочной подстановки (20) получается перенормированное действие (21). Его явный вид показан в формуле (22), в которой необходимо конкретизировать контрчлены из квадратичной формы (24). Они имеют вид

$$X_k[B, \phi] = z_{2,k} S_\Lambda[\phi] + m^2 z_k S_m[\phi] + \frac{\lambda z_{4,k}}{2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x B^2(x) \phi^2(x), \quad (52)$$

где

$$S_\Lambda[\phi] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \phi(x) A_0^\Lambda(x) \phi(x).$$

В заключение раздела заметим, что в предложенных условиях удобно выбрать²⁴ функции в асимптотическом разложении (43) следующим образом

$$R_{10}^\Lambda = R_{11}^\Lambda, \quad R_{20}^\Lambda = R_{21}^\Lambda = R_{22}^\Lambda. \quad (53)$$

При этом различия в обозначениях будут сохраняться до финальных ответов, чтобы ими можно было воспользоваться при обобщении регуляризации. К примеру, при деформации массового слагаемого. Также сохранение обозначения помогает более наглядно проследить внутреннюю структуру расходимостей и провести дополнительные промежуточные проверки результатов.

5 Первые две поправки

5.1 Одна петля

Рассмотрим вычисление однопетлевого вклада в эффективное действие (22), содержащего сингулярное слагаемое по параметру Λ . Используя явный вид регуляризации (35), можно выписать следующее соотношение

$$\frac{1}{2} \ln \det(G^\Lambda / G_0^\Lambda) \stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{\lambda G_0^\Lambda(0)}{4} \int_{\mathbb{R}^4} d^4y B^2(y) + \frac{\lambda^2}{16} \left(\int_{B_{1/\sigma}} d^4y \left(G_0^\Lambda(x) \right)^2 \right) \int_{\mathbb{R}^4} d^4y B^4(y), \quad (54)$$

где σ – вспомогательный фиксированный параметр²⁵. Также был использован тот факт, что в интеграле вида

$$\int_{\mathbb{R}^4 \times 2} d^4x_1 d^4x_2 G_0^\Lambda(x_2 - x_1) B^2(x_1) G_0^\Lambda(x_1 - x_2) B^2(x_2) \quad (55)$$

²⁴Без ограничения общности, так как выбор происходит за счет переопределения функции PS_1^Λ , которая не дает сингулярных слагаемых в эффективном действии.

²⁵Здесь предполагается, что данный параметр совпадает с введенным в секции 4.3. Иной выбор лишь сдвинет сингулярную часть на константу и, следовательно, не повлияет на ответ, так как постоянная добавка может быть зафиксирована произвольной.

сингулярный вклад может дать только часть интеграла, отвечающая области интегрирования²⁶ $B_{1/\sigma}(x_2) \times \mathbb{R}^4$. Следовательно, делая сдвиг $x_1 \rightarrow x_1 + x_2$ и раскладывая $B^2(x_1 + x_2)$ в точке x_2 в ряд Тейлора, получим второе слагаемое в (54).

Воспользуемся разложением (40), тогда

$$\frac{1}{2} \ln \det(G^\Lambda / G_0^\Lambda) \stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{\lambda(R_0^\Lambda(0) - R_{10}^\Lambda(0)m^2)}{4} S_m[B] + \frac{\lambda^2 A(\sigma)}{16} S_4[B],$$

где

$$A(\sigma) = \int_{B_{1/\sigma}} d^4 y \left(R_0^\Lambda(x) \right)^2 = \frac{L + \alpha_2(\mathbf{f})}{8\pi^2}, \quad (56)$$

см. формулу (214). Таким образом, подставляя последнее равенство в соотношение (26), получаем

$$\begin{aligned} z_{2,1} &= \tilde{z}_{2,1}, \\ z_1 &= -\frac{\lambda R_0^\Lambda(0)}{2m^2} + \frac{\lambda R_{10}^\Lambda(0)}{2} + \tilde{z}_1, \end{aligned} \quad (57)$$

$$z_{4,1} = \frac{3\lambda}{2} A(\sigma) + \tilde{z}_{4,1}, \quad (58)$$

где $\{\tilde{z}_{2,1}, \tilde{z}_1, \tilde{z}_{4,1}\}$ – произвольные константы ($\mathcal{O}(1)$ по параметру Λ). Заметим, что в конкретном случае, см. формулу (53), можно выполнить переобозначение

$$\{\tilde{z}_{2,1}, \tilde{z}_1, \tilde{z}_{4,1}\} \rightarrow \{\bar{z}_{2,1}, \bar{z}_1, \bar{z}_{4,1}\}, \quad \hat{\lambda} = \frac{\lambda}{16\pi^2},$$

и получить ответ в более явном виде

$$\begin{aligned} z_{2,1} &= \bar{z}_{2,1}, \\ z_1 &= -\frac{\Lambda^2 \lambda (1 + \mathbf{f}(0))}{8\pi^2 m^2} + L\hat{\lambda} + \bar{z}_1, \\ z_{4,1} &= 3L\hat{\lambda} + \bar{z}_{4,1}. \end{aligned} \quad (59)$$

Ясно, что с использованием (216) верны соотношения

$$\tilde{z}_{2,1} = \bar{z}_{2,1}, \quad \tilde{z}_1 = -\hat{\lambda} \alpha_2(\mathbf{f}) + \bar{z}_1, \quad \tilde{z}_{4,1} = -3\hat{\lambda} \alpha_2(\mathbf{f}) + \bar{z}_{4,1}.$$

5.2 Две петли

Перейдем к подсчету двухпетлевого вклада, который включает две диаграммы $\{d_1, d_2\}$ и одну контрдиаграмму cd_1 . Учитывая тот факт, что в координатном представлении расходимости имеют локальный²⁷ характер, будем пользоваться разложением (43).

Начнем с диаграммы d_1 . Воспользуемся логикой подсчета интеграла (55), то есть переходом к области интегрирования $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow B_{1/\sigma}(x_2) \times \mathbb{R}^4$. В этом случае, используя определения (23), получаем

$$d_1 \stackrel{\text{s.p.}}{=} -S_2[B] \frac{I_1(\sigma)}{8} + S_m[B] \left(I_4(\sigma) - 3m^2 I_2(\sigma) \right) - \quad (60)$$

$$-S_4[B] \frac{3\lambda I_3(\sigma)}{2} + J_2[B] 3A(\sigma), \quad (61)$$

где вспомогательные интегралы были выписаны согласно обозначениям (56) и (192)–(195).

²⁶ Или $\mathbb{R}^4 \times B_{1/\sigma}(x_1)$. Из-за симметричности выбор не играет особой роли.

²⁷ То есть появляются из-за «плохого» поведения функции Грина (34) при близких аргументах ($x \sim y$).

Оставшиеся две диаграммы d_2 и cd_1 включают функции Грина только при совпадающих аргументах $x = y$, поэтому можно подставить разложение (43) и получить следующие ответы²⁸

$$d_2 - d_2|_{B=0} \stackrel{\text{s.p.}}{=} S_m[B] \left(-\lambda R_0^\Lambda(0) R_{11}^\Lambda(0) + \lambda m^2 R_{10}^\Lambda(0) R_{11}^\Lambda(0) + \lambda m^2 R_0^\Lambda(0) R_{21}^\Lambda(0) \right) + \quad (62)$$

$$+ S_4[B] \left(\frac{\lambda^2}{4} R_{11}^\Lambda(0) R_{11}^\Lambda(0) + \frac{\lambda^2}{4} R_0^\Lambda(0) R_{22}^\Lambda(0) \right) + \quad (63)$$

$$+ J_1[B] \left(2R_0^\Lambda(0) - 2m^2 R_{10}^\Lambda(0) \right) + \quad (64)$$

$$+ J_2[B] \left(-\lambda R_{11}^\Lambda(0) \right) + J_4[B], \quad (65)$$

$$cd_1 - cd_1|_{B=0} \stackrel{\text{s.p.}}{=} S_m[B] \left(\frac{\lambda(z_{4,1} - \tilde{z}_{2,1})}{2} R_0^\Lambda(0) - \frac{m^2 \lambda(z_{4,1} - \tilde{z}_{2,1})}{2} R_{10}^\Lambda(0) - \right. \quad (66)$$

$$\left. - \frac{m^2 \lambda(z_1 - \tilde{z}_{2,1})}{2} R_{11}^\Lambda(0) + \frac{m^4 \lambda z_1}{2} R_{21}^\Lambda(0) \right) + \quad (67)$$

$$+ S_4[B] \left(-\frac{\lambda^2(z_{4,1} - \tilde{z}_{2,1})}{4} R_{11}^\Lambda(0) + \frac{m^2 \lambda^2 z_1}{8} R_{22}^\Lambda(0) \right) + \quad (68)$$

$$+ J_1[B] m^2 z_1 + J_2[B] \frac{\lambda z_{4,1}}{2}. \quad (69)$$

Обратим внимание, что при подсчете последней диаграммы использовалось равенство

$$\left(A_0^\Lambda(x) + m^2 + \frac{\lambda}{2} B^2(x) \right) G^\Lambda(x, y) = \delta(x - y). \quad (70)$$

Далее рассмотрим линейную комбинацию последних трех диаграмм из правой части (27)

$$\frac{\lambda^2 d_1}{12} - \frac{\lambda d_2}{8} - \frac{cd_1}{2} + \kappa_2 = \frac{\lambda^2 d_1}{12} - \frac{\lambda(d_2 - d_2|_{B=0})}{8} - \frac{cd_1 - cd_1|_{B=0}}{2}.$$

Согласно общей теории, получившийся объект должен содержать сингулярные вклады только в слагаемых с S_2 , S_m и S_4 . Нелокальные слагаемые, содержащие PS_1^Λ , должны сократиться. Убедимся в справедливости последнего условия и выпишем уравнения на сингулярные части при $J_1[B]$ и $J_2[B]$. Они имеют вид

$$-\frac{\lambda}{4} R_0^\Lambda(0) + \frac{m^2 \lambda}{4} R_{10}^\Lambda(0) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{m^2 z_1}{2},$$

$$\frac{\lambda^2}{4} \int_{B_1/\sigma} d^4 x \left(R_0^\Lambda(x) \right)^2 + \frac{\lambda^2}{8} R_{11}^\Lambda(0) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{\lambda z_{4,1}}{4}.$$

Учитывая явный вид для коэффициентов из первой петли (57)–(58), оба соотношения удовлетворяются автоматически. Далее, используя равенства

$$\frac{\lambda^2}{4m^2} R_0^\Lambda(0) R_{11}^\Lambda(0) - \frac{\lambda^2}{4} R_{10}^\Lambda(0) R_{11}^\Lambda(0) + \frac{\lambda z_1}{2} R_{11}^\Lambda(0) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{\lambda \tilde{z}_1}{2} R_{11}^\Lambda(0),$$

$$-\frac{\lambda^2}{4} R_0^\Lambda(0) R_{21}^\Lambda(0) - \frac{m^2 \lambda z_1}{2} R_{21}^\Lambda(0) \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0,$$

$$-\frac{3\lambda^2}{4} R_0^\Lambda(0) R_{22}^\Lambda(0) - \frac{3m^2 \lambda z_1}{2} R_{22}^\Lambda(0) \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0,$$

²⁸В последней строке специально выписано слагаемое $J_4[B]$, несмотря на тот факт, что оно не сингулярно. Это пригодится в секции 6.5, чтобы не выписывать разложение дважды.

ответ для следующего порядка констант перенормировки выписывается так

$$z_{2,2} = -\frac{\lambda^2}{48}I_1(\sigma) + \tilde{z}_{2,2},$$

$$z_2 = \frac{\lambda^2}{6m^2}I_4(\sigma) - \frac{\lambda^2}{2}I_2(\sigma) - \frac{\lambda(z_{4,1} - \tilde{z}_{2,1})}{2m^2}R_0^\Lambda(0) + \frac{\lambda(z_{4,1} - \tilde{z}_{2,1})}{2}R_{10}^\Lambda(0) + \frac{\lambda(\tilde{z}_1 - \tilde{z}_{2,1})}{2}R_{11}^\Lambda(0) + \tilde{z}_2,$$

$$z_{4,2} = -3\lambda^2I_3(\sigma) - \frac{3\lambda^2}{4}R_{11}^\Lambda(0)R_{11}^\Lambda(0) + 3\lambda(z_{4,1} - \tilde{z}_{2,1})R_{11}^\Lambda(0) + \tilde{z}_{4,2},$$

где $\{\tilde{z}_{2,2}, \tilde{z}_2, \tilde{z}_{4,2}\}$ – произвольные константы, имеющие асимптотику $\mathcal{O}(1)$ по параметру Λ . Далее, делая сдвиг постоянных, получаем

$$z_{2,2} = -\frac{L\hat{\lambda}^2}{6} + \bar{z}_{2,2},$$

$$z_2 = \frac{\Lambda^2\hat{\lambda}}{6m^2}\left(-36L\hat{\lambda}(1 + \mathbf{f}(0)) + 16\pi^2\lambda\alpha_3(\mathbf{f}) - 12(1 + \mathbf{f}(0))(\bar{z}_{4,1} - \bar{z}_{2,1})\right) +$$

$$+ 2L^2\hat{\lambda}^2 + L\left(-\hat{\lambda}^2 + \hat{\lambda}(\bar{z}_1 + \bar{z}_{4,1} - 2\bar{z}_{2,1})\right) + \bar{z}_2, \quad (71)$$

$$z_{4,2} = 9L^2\hat{\lambda}^2 + L\left(-6\hat{\lambda}^2 + 6\hat{\lambda}(\bar{z}_{4,1} - \bar{z}_{2,1})\right) + \bar{z}_{4,2}.$$

6 Три петли

6.1 Дополнительные обозначения

Перед подсчетом диаграмм удобно определить несколько вспомогательных функций, которые позволят вести компактную запись. Пусть $i_1, i_2, i_3, i_4 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, и $\{g_j(\cdot, \cdot)\}_{j=1}^4$ – набор симметричных функций таких, что интегралы ниже корректны. Тогда определим следующие величины (многомерные интегралы)

$$\Gamma_{i_1}^{i_2}(g_1) = \int_{\mathbb{R}^{4 \times 2}} d^4x d^4y B^{i_1}(x)g_1(x, y)B^{i_2}(y),$$

$$\Gamma_{i_3}^{i_1 i_2}(g_3, g_2, g_1) = \int_{\mathbb{R}^{4 \times 3}} d^4x d^4y d^4u B^{i_1}(x)g_1(x, y)B^{i_2}(y)g_2(y, u)B^{i_3}(u)g_3(u, x),$$

$$\Gamma_{i_3 i_4}^{i_1 i_2}(g_4, g_3, g_2, g_1) = \int_{\mathbb{R}^{4 \times 4}} d^4x d^4y d^4u d^4z B^{i_1}(x)g_1(x, y)B^{i_2}(y)g_2(y, u)B^{i_3}(u)g_3(u, z)B^{i_4}(z)g_4(z, x).$$

Легко проверить путем переобозначения переменных с учетом симметрии, что справедливы следующие соотношения

$$\Gamma_{i_3}^{i_1 i_2}(g_3, g_2, g_1) = \Gamma_{i_3}^{i_2 i_1}(g_2, g_3, g_1),$$

$$\Gamma_{i_3 i_4}^{i_1 i_2}(g_4, g_3, g_2, g_1) = \Gamma_{i_4 i_3}^{i_2 i_1}(g_2, g_3, g_4, g_1) = \Gamma_{i_2 i_1}^{i_4 i_3}(g_4, g_1, g_2, g_3).$$

Далее пусть $g(\cdot)$ – функция, такая что интеграл ниже существует. Определим преобразование $g(\cdot) \rightarrow \hat{g}(\cdot)$ следующим образом

$$\hat{g}(y) = \int_{B_{1/\sigma}} d^4x \left(R_0^\Lambda(x)\right)^2 g(x + y) - A(\sigma)g(y). \quad (72)$$

Можно заметить, что интеграл в правой части расходится при $\Lambda \rightarrow +\infty$. Это связано с тем, что плотность подынтегрального выражения при снятии регуляризации пропорциональна $|x|^{-4}$ и, таким образом, неинтегрируема в четырехмерном пространстве. В свою очередь, регуляризованный интеграл содержит сингулярность логарифмического типа $\ln(\Lambda/\sigma)$, которая и вычитается добавкой с $A(\sigma)$. Таким образом, функция $\hat{g}(\cdot)$, которая в действительности содержит зависимость от

параметра Λ , имеет конечный предел при снятии регуляризации $\Lambda \rightarrow +\infty$. В этом легко убедиться, применяя с обеих сторон оператор $\Lambda \partial_\Lambda$ и переходя к пределу

$$\Lambda \frac{d\hat{g}(y)}{d\Lambda} = \frac{1}{4\pi^4} \int_{B_1} d^4x (1 + \mathbf{f}(|x|^2)) (1 + \mathbf{f}(|x|^2) + |x|^2 \mathbf{f}'(|x|^2)) g(x/\Lambda + y) - \frac{g(y)}{8\pi^2} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow +\infty} 0,$$

где были использованы соотношения (41) и (56). В секции 9.3 показано, что в качестве $g(x)$ можно рассмотреть и функции $R_0^\Lambda(x)$, $R_{10}^\Lambda(x)$ и $R_{11}^\Lambda(x)$.

6.2 Диаграмма d_3

Данная секция посвящена анализу расходящейся части для диаграммы d_3 , см. рис. 6. С учетом диаграммной техники на рис. 2 и введенных обозначений из предыдущего раздела, диаграмма может быть выписана в виде

$$d_3 = I_{11}^{11}(G^\Lambda G^\Lambda, G^\Lambda, G^\Lambda G^\Lambda, G^\Lambda).$$

Разложим регуляризованную функцию Грина $G^\Lambda(x, y)$ на in- и out-части²⁹, используя разложение единицы при помощи характеристической функции множества $\chi(\cdot)$. В этом случае

$$G^\Lambda(x, y) = s(x, y) + b(x, y),$$

где

$$s(x, y) = G^\Lambda(x, y) \chi(|x - y| \leq 1/\sigma), \quad b(x, y) = G^\Lambda(x, y) \chi(|x - y| > 1/\sigma).$$

Здесь σ – фиксированный положительный размерный параметр³⁰ ($[\sigma^{-1}] = [x^\mu]$), достаточно большой, чтобы было справедливо асимптотическое разложение (43) около диагонали для $G^\Lambda(x, y)$ внутри области $|x - y| \leq 1/\sigma$. Следовательно, после подстановки описанного разложения, диаграмма представляется в виде суммы поддиаграмм

$$I_{11}^{11}(G^\Lambda G^\Lambda, G^\Lambda, G^\Lambda G^\Lambda, G^\Lambda) = \left(\prod_{i=1}^4 \sum_{g_i=b,s} \right) I_{11}^{11}(g_1^2, g_2, g_3^2, g_4), \quad (73)$$

где было использовано свойство $s(x, y)b(x, y) = 0$.

Проанализируем диаграммы по отдельности. Сразу обозначим несколько тривиальных случаев, которые не содержат сингулярного вклада:

$$I_{11}^{11}(b^2, b, b^2, b) \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0, \quad (74)$$

$$I_{11}^{11}(b^2, s, b^2, b) \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0, \quad I_{11}^{11}(b^2, b, b^2, s) \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0, \quad (75)$$

$$I_{11}^{11}(b^2, s, b^2, s) \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0. \quad (76)$$

Эти равенства следуют из тех фактов, что $b(x, y) = 0$ в регионе $|x - y| \leq 1/\sigma$, и функция $s(x, y)$ после снятия регуляризации содержит интегрируемую в 4-х мерном пространстве особенность³¹. Разумеется, в этом случае регуляризованные функции после интегрирования не дают сингулярностей по параметру Λ .

Рассмотрим менее тривиальный случай, когда присутствует квадрат функции s . Таких вкладов два

$$I_{11}^{11}(s^2, b, b^2, b) = I_{11}^{11}(b^2, b, s^2, b),$$

и они равны между собой, поэтому можно изучить только первый. Он имеет вид

$$I_{11}^{11}(s^2, b, b^2, b) = \int_{\mathbb{R}^{4 \times 4}} d^4x d^4y d^4u d^4z \left(B(y) s^2(y, x) B(x) b(x, u) B(u) b^2(u, z) B(z) b(z, y) \right). \quad (77)$$

²⁹ Согласно предложению и терминологии из работы [46].

³⁰ Здесь вновь предполагается, что параметр σ совпадает с введенным ранее. Фактически на данном этапе от этого параметра ничего не зависит, так как он просто определяет деление \mathbb{R}^4 на две части.

³¹ После снятия регуляризации главный член асимптотики при $x \sim y$ равен $(4\pi^2|x - y|^2)^{-1}$. В четырехмерном пространстве такая функция интегрируема.

Заметим, что функция

$$\rho_1(x, y) = \int_{\mathbb{R}^{4 \times 2}} d^4 u d^4 z \left(B(x) b(x, u) B(u) b^2(u, z) B(z) b(z, y) B(y) \right) \quad (78)$$

существует и имеет конечный предел на диагонали $\rho_1(y, y)$, так как ни одна из подынтегральных составляющих не имеет особенностей. Следовательно, вычитая и добавляя последнюю функцию, интеграл (77) переписывается в виде

$$I_{11}^{11}(s^2, b, b^2, b) = \int_{\mathbb{R}^{4 \times 2}} d^4 x d^4 y s^2(y, x) (\rho_1(x, y) - \rho_1(y, y)) + \int_{\mathbb{R}^{4 \times 2}} d^4 x d^4 y s^2(y, x) \rho_1(y, y). \quad (79)$$

Ясно, что первое слагаемое не содержит расходимостей после снятия регуляризации, так как разность нейтрализует³² особенность $|x - y|^{-4}$. Во втором же интеграле нужно заметить, что $s^2(x, y)$ можно заменить на $s_0^2(x - y)$, где

$$s_0(x) = R_0^\Lambda(x) \chi(|x| \leq 1/\sigma), \quad (80)$$

так как разность $s^2(x, y) - s_0^2(x - y)$ после снятия регуляризации является интегрируемой функцией в четырехмерном пространстве. Далее, делая сдвиг $x \rightarrow x + y$, получаем факторизацию

$$I_{11}^{11}(s^2, b, b^2, b) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \left(\int_{\mathbb{R}^4} d^4 x s_0^2(x) \right) \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y \rho_1(y, y) \quad (81)$$

$$\stackrel{\text{s.p.}}{=} \left(\int_{\mathbb{R}^4} d^4 x s_0^2(x) \right) \int_{\mathbb{R}^{4 \times 3}} d^4 y d^4 u d^4 z \left(B^2(y) b(y, u) B(u) b^2(u, z) B(z) b(z, y) \right), \quad (82)$$

которая в компактных обозначениях выписывается в виде

$$I_{11}^{11}(s^2, b, b^2, b) \stackrel{\text{s.p.}}{=} A(\sigma) I_2^{11}(b, b, b^2). \quad (83)$$

Рассмотрим следующий набор из четырех поддиаграмм из разложения (73)

$$I_{11}^{11}(s^2, b, b^2, s) = I_{11}^{11}(s^2, s, b^2, b) = I_{11}^{11}(b^2, s, s^2, b) = I_{11}^{11}(b^2, b, s^2, s),$$

которые также равны между собой. Разумеется, достаточно изучить лишь первую из них

$$I_{11}^{11}(s^2, b, b^2, s) = \int_{\mathbb{R}^{4 \times 4}} d^4 x d^4 y d^4 u d^4 z \left(B(y) s^2(y, x) B(x) b(x, u) B(u) b^2(u, z) B(z) s(z, y) \right).$$

На первый взгляд может показаться, что основную расходимость даст подынтеграл вида

$$\int_{\mathbb{R}^4} d^4 y s(z, y) B(y) s^2(y, x),$$

который, вообще говоря, расходится квадратично при $x \sim y$, а не логарифмически. Однако, необходимо учесть и тот факт, что $s(z, y)$ входит также и в интеграл по переменной z . Это приводит к тому, что функция

$$\rho_2(x, y) = \int_{\mathbb{R}^{4 \times 2}} d^4 u d^4 z \left(B(x) b(x, u) B(u) b^2(u, z) B(z) s(z, y) B(y) \right)$$

имеет конечный предел на диагонали $y = x$ до и после снятия регуляризации. Следовательно, можно воспользоваться добавлением и вычитанием, как это было сделано в формуле (79), заменив лишь функцию $\rho_1(x, y)$ на $\rho_2(x, y)$. Далее, вновь заменяя $s^2(x, y)$ на $s_0^2(x - y)$ и делая сдвиг $x \rightarrow x + y$, получаем факторизацию и ответ в виде

$$I_{11}^{11}(s^2, b, b^2, s) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \left(\int_{\mathbb{R}^4} d^4 x s_0^2(x) \right) \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y \rho_2(y, y) = A(\sigma) I_2^{11}(s, b, b^2). \quad (84)$$

³²С данного момента и далее слово «нейтрализует» будет использоваться для того, чтобы указать, что плотность стала интегрируемой в четырехмерном пространстве до и после снятия регуляризации.

Приведенным выше методом могут быть проанализированы еще два вклада из (73)

$$I_{11}^{11}(s^2, s, b^2, s) = I_{11}^{11}(b^2, s, s^2, s).$$

В этом случае вместо функции $\rho_1(x, y)$ из (78) необходимо выбрать функцию

$$\rho_3(x, y) = \int_{\mathbb{R}^{4 \times 2}} d^4 u d^4 z \left(B(x) s(x, u) B(u) b^2(u, z) B(z) s(z, y) B(y) \right).$$

Тогда, повторяя шаги (79)–(82), получаем следующий ответ

$$I_{11}^{11}(s^2, s, b^2, s) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \left(\int_{\mathbb{R}^4} d^4 x s_0^2(x) \right) \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y \rho_3(y, y) = A(\sigma) I_2^{11}(s, s, b^2). \quad (85)$$

Оставшиеся слагаемые из разложения (73) представимы в виде

$$I_{11}^{11}(s^2, G^\Lambda, s^2, G^\Lambda). \quad (86)$$

В этом случае удобно сделать дополнительное переразложение. Действительно, представляя $s^2 = (s^2 - s_0^2) + s_0^2$ и пользуясь линейностью функционала (86) по аргументам, можно переписать его в форме

$$I_{11}^{11}(s^2, G^\Lambda, s^2, G^\Lambda) = I_{11}^{11}(s^2 - s_0^2, G^\Lambda, s^2 - s_0^2, G^\Lambda) + 2I_{11}^{11}(s_0^2, G^\Lambda, s^2 - s_0^2, G^\Lambda) + I_{11}^{11}(s_0^2, G^\Lambda, s_0^2, G^\Lambda). \quad (87)$$

Заметим, что первые два вклада в правой части содержат интеграл вида

$$\rho_4(u, y) = \int_{\mathbb{R}^4} d^4 z \left(s^2(u, z) - s_0^2(u - z) \right) B(z) G^\Lambda(z, y),$$

который существует при $u \neq y$ и после снятия регуляризации. Действительно, главный член асимптотики $s^2(u, z) - s_0^2(u - z)$ при $u \sim z$ и $\Lambda \rightarrow +\infty$ пропорционален $\ln(|u - z|)/|u - z|^2$, в то время как $G(z, y)$ при $z \sim y$ начинается с $(4\pi^2|z - y|^2)^{-1}$. Следовательно, главный член асимптотики для $\rho_4(u, y)$ при $u \sim y$ в худшем случае может вести себя как $\ln^2(|u - y|)$, что является интегрируемой функцией. Далее первые два слагаемых из (87) переписываются в виде

$$I_{11}^{11}(s^2 - s_0^2, G^\Lambda, s^2 - s_0^2, G^\Lambda) = \int_{\mathbb{R}^{4 \times 2}} d^4 y d^4 u B(y) \rho_4(y, u) B(u) \rho_4(u, y),$$

$$I_{11}^{11}(s_0^2, G^\Lambda, s^2 - s_0^2, G^\Lambda) = \int_{\mathbb{R}^{4 \times 3}} d^4 y d^4 x d^4 u B(y) s_0^2(y - x) B(x) G^\Lambda(x, u) B(u) \rho_4(u, y).$$

Ясно, что первый функционал с учетом замечания о поведении асимптотики не содержит сингулярных по Λ слагаемых. Второй же функционал может быть изучен с использованием процедуры (79)–(82), если вместо $\rho_1(x, y)$ выбрать

$$\rho_5(x, y) \int_{\mathbb{R}^4} d^4 u B(x) G^\Lambda(x, u) B(u) \rho_4(u, y) B(y).$$

Тогда ответы выглядят следующим образом

$$I_{11}^{11}(s^2 - s_0^2, G^\Lambda, s^2 - s_0^2, G^\Lambda) \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0, \quad (88)$$

$$I_{11}^{11}(s_0^2, G^\Lambda, s^2 - s_0^2, G^\Lambda) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \left(\int_{\mathbb{R}^4} d^4 x s_0^2(x) \right) \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y \rho_5(y, y) = A(\sigma) I_2^{11}(G^\Lambda, G^\Lambda, s^2 - s_0^2). \quad (89)$$

Перейдем к третьему слагаемому из (87). Для этого используем еще одно дополнительное вспомогательное разбиение для регуляризованной функции Грина (43), которое можно переписать в эквивалентной симметризованной форме

$$G^\Lambda(x, y) = R_0^\Lambda(x - y) - R_{10}^\Lambda(x - y) m^2 - R_{11}^\Lambda(x - y) \tilde{a}_1(x, y) + PS^\Lambda(x, y), \quad (90)$$

где

$$\tilde{a}_1(x, y) = \frac{\lambda}{4} (B^2(x) + B^2(y)). \quad (91)$$

Тогда исследуемая диаграмма разбивается на сумму девяти поддиаграмм. Изучим их по отдельности. Сперва рассмотрим

$$I_{11}^{11}(s_0^2, PS^\Lambda, s_0^2, PS^\Lambda) = \int_{\mathbb{R}^{4 \times 4}} d^4x d^4y d^4u d^4z \left(B(y) s_0^2(y-x) B(x) PS^\Lambda(x, u) B(u) s_0^2(u-z) B(z) PS^\Lambda(z, y) \right).$$

Заметим, что функция $PS^\Lambda(x, y)$ по определению имеет конечный предел на диагонали ($y = x$) до и после снятия регуляризации. Следуя общей методике вычислений, добавим и вычтем $B(y) PS^\Lambda(y, u)$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{4 \times 4}} d^4x d^4y d^4u d^4z B(y) s_0^2(y-x) \left(B(x) PS^\Lambda(x, u) - B(y) PS^\Lambda(y, u) \right) B(u) s_0^2(u-z) B(z) PS^\Lambda(z, y) + \\ & + \int_{\mathbb{R}^{4 \times 4}} d^4x d^4y d^4u d^4z \left(B^2(y) s_0^2(y-x) PS^\Lambda(y, u) B(u) s_0^2(u-z) B(z) PS^\Lambda(z, y) \right). \end{aligned}$$

Ясно, что во втором слагаемом можно дополнительно сделать сдвиг $x \rightarrow x+y$ и получить факторизацию. В первом же слагаемом еще раз сделаем добавление и вычитание на $B(u) PS^\Lambda(u, y)$. Такой выбор связан с тем, что особенность в $s_0^2(y-x)$ была нейтрализована предыдущим вычитанием, тогда как второе вычитание сфокусировано на функции $s_0^2(u-z)$. Тогда после дополнительной факторизации (со сдвигом $z \rightarrow z+u$) в одном из слагаемых получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{4 \times 4}} d^4x d^4y d^4u d^4z B(y) s_0^2(y-x) \left(B(x) PS^\Lambda(x, u) - B(y) PS^\Lambda(y, u) \right) \times \\ & \times B(u) s_0^2(u-z) \left(B(z) PS^\Lambda(z, y) - B(u) PS^\Lambda(u, y) \right) + \\ & + A(\sigma) \int_{\mathbb{R}^{4 \times 3}} d^4x d^4y d^4u B(y) s_0^2(y-x) \left(B(x) PS^\Lambda(x, u) - B(y) PS^\Lambda(y, u) \right) B^2(u) PS^\Lambda(u, y) + \\ & + A(\sigma) I_2^{11}(PS^\Lambda, PS^\Lambda, s_0^2). \end{aligned}$$

Очевидно, что в первом слагаемом обе сингулярные плотности нейтрализованы. Поэтому интересующий нас вклад дадут второе и третье слагаемые, которые могут быть выписаны в более лаконичном виде

$$I_{11}^{11}(s_0^2, PS^\Lambda, s_0^2, PS^\Lambda) \stackrel{\text{s.p.}}{=} 2A(\sigma) I_2^{11}(PS^\Lambda, PS^\Lambda, s_0^2) - A^2(\sigma) I_2^2((PS^\Lambda)^2). \quad (92)$$

Заметим, что описанную выше процедуру можно применить и в случае, когда одна из функций PS^Λ заменена на одно из трех первых слагаемых из правой части (90). Для определенности предположим, что $PS^\Lambda(z, y)$ была заменена на $R_0^\Lambda(z-y)$. В этом случае можно вновь использовать первое вычитание, так как $PS^\Lambda(x, u)$ осталась той же. И это вычитание нейтрализует особенность в $s_0^2(y-x)$. Второе же вычитание, уже с функцией $B(u) R_0^\Lambda(u-y)$ вместо $B(u) PS^\Lambda(u, y)$, возможно сделать по той причине, что интеграл

$$\rho_6(z, u) = \int_{\mathbb{R}^{4 \times 2}} d^4x d^4y B(z) R_0^\Lambda(z-y) B(y) s_0^2(y-x) \left(B(x) PS^\Lambda(x, u) - B(y) PS^\Lambda(y, u) \right) B(u)$$

имеет конечный предел на диагонали $z = u$ до и после снятия регуляризации. По сути, во второй раз добавляется и вычитается $\rho_6(u, u)$. Следовательно, с учетом последних замечаний справедливы следующие соотношения

$$I_{11}^{11}(s_0^2, PS^\Lambda, s_0^2, R_{10}^\Lambda m^2) \stackrel{\text{s.p.}}{=} 2A(\sigma) I_2^{11}(PS^\Lambda, R_{10}^\Lambda m^2, s_0^2) - A^2(\sigma) I_2^2(PS^\Lambda R_{10}^\Lambda m^2), \quad (93)$$

$$I_{11}^{11}(s_0^2, PS^\Lambda, s_0^2, R_{11}^\Lambda \tilde{a}_1) \stackrel{\text{s.p.}}{=} 2A(\sigma) I_2^{11}(PS^\Lambda, R_{11}^\Lambda \tilde{a}_1, s_0^2) - A^2(\sigma) I_2^2(PS^\Lambda R_{11}^\Lambda \tilde{a}_1), \quad (94)$$

$$I_{11}^{11}(s_0^2, PS^\Lambda, s_0^2, R_0^\Lambda) \stackrel{\text{s.p.}}{=} 2A(\sigma) I_2^{11}(PS^\Lambda, R_0^\Lambda, s_0^2) - A^2(\sigma) I_2^2(PS^\Lambda R_0^\Lambda). \quad (95)$$

Перейдем к изучению последних четырех вкладов из девяти. Их можно выписать в компактном виде, используя дополнительные обозначения. Действительно, введем функции

$$P_0(x) = R_0^\Lambda(x), \quad P_1(x) = R_{10}^\Lambda(x), \quad P_2(x) = R_{11}^\Lambda(x), \quad (96)$$

$$p_0(x, y) = 1, \quad p_1(x, y) = -m^2, \quad p_2(x, y) = -\tilde{a}_1(x, y), \quad (97)$$

где нижний индекс перебирает интересующие нас комбинации. Тогда интеграл приобретает вид

$$I_{11}^{11}(s_0^2, P_i p_i, s_0^2, P_j p_j) = \int_{\mathbb{R}^{4 \times 4}} d^4 x d^4 y d^4 u d^4 z B(y) s_0^2(y, x) B(x) P_i(x - u) p_i(x, u) \times \\ \times B(u) s_0^2(u, z) B(z) P_j(z - y) p_j(z, y). \quad (98)$$

Как и ранее, будем пользоваться методом добавления и вычитания. Однако в данном случае необходимо ввести коррекцию: вычитаться должны лишь гладкие составляющие, то есть плотности p_i , а не сингулярные множители P_i . Тогда интеграл (98) можно представить в виде суммы четырех

$$\int_{\mathbb{R}^{4 \times 4}} d^4 x d^4 y d^4 u d^4 z B(y) s_0^2(y - x) P_i(x - u) \left(B(x) p_i(x, u) - B(y) p_i(y, u) \right) \times \\ \times B(u) s_0^2(u - z) P_j(z - y) \left(B(z) p_j(z, y) - B(u) p_j(u, y) \right) + \\ + \int_{\mathbb{R}^{4 \times 4}} d^4 x d^4 y d^4 u d^4 z B^2(y) s_0^2(y - x) P_i(x - u) p_i(y, u) \times \\ \times B(u) s_0^2(u - z) P_j(z - y) \left(B(z) p_j(z, y) - B(u) p_j(u, y) \right) + \\ + \int_{\mathbb{R}^{4 \times 4}} d^4 x d^4 y d^4 u d^4 z B(y) s_0^2(y - x) P_i(x - u) \left(B(x) p_i(x, u) - B(y) p_i(y, u) \right) \times \\ \times B^2(u) s_0^2(u - z) P_j(z - y) p_j(u, y) + \\ + \int_{\mathbb{R}^{4 \times 4}} d^4 x d^4 y d^4 u d^4 z B^2(y) s_0^2(y - x) P_i(x - u) p_i(y, u) \times \\ \times B^2(u) s_0^2(u - z) P_j(z - y) p_j(u, y). \quad (99)$$

Здесь первое слагаемое в действительности не содержит сингулярностей по Λ . Можно заметить, что интеграл

$$\rho_7^i(y, u) = \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x B(y) s_0^2(y - x) P_i(x - u) \left(B(x) p_i(x, u) - B(y) p_i(y, u) \right) \quad (100)$$

сходится до и после снятия регуляризации. Более того, при $i > 0$ предел $\rho_7^i(u, u)$ существует и конечен. В то время как худший член асимптотики, который может появиться в $\rho_7^i(y, u)$ при $y \sim u$ и $i \in \{0, 1, 2\}$, пропорционален по модулю $|y - u|^{-1}$. Такое рассуждение доказывает, что первый интеграл в (99) не дает расходимостей.

Во втором, третьем и четвертом интегралах нужно воспользоваться свойством (72) для регуляризованных функций. К примеру, во втором интеграле воспользуемся следующей цепочкой соотношений

$$\int_{\mathbb{R}^4} d^4 x s_0^2(y - x) P_i(x - u) = \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x s_0^2(x) P_i(x + (y - u)) = \\ = \int_{B_{1/\sigma}} d^4 x \left(R_0^\Lambda(x) \right)^2 P_i(x + (y - u)) = \Lambda(\sigma) P_i(y - u) + \hat{P}_i(y - u). \quad (101)$$

Дополнительно заметим, что вклады, содержащие функции ρ_7^i и \hat{P}_i , будут конечны после снятия регуляризации, поскольку их плотности интегрируемы в четырехмерном пространстве. Действительно, в худшем случае, когда $i = j = 0$, модуль главного члена асимптотики пропорционален

$|\cdot|^{-3} \ln(|\cdot|)$. Таким образом, с учетом отмеченных выше замечаний, промежуточный результат переписывается в виде

$$\begin{aligned} 2A(\sigma) \int_{\mathbb{R}^{4 \times 2}} d^4 y d^4 u B^2(y) P_i(y-u) p_i(y, u) \rho_7^j(u, y) + \\ + A^2(\sigma) \int_{\mathbb{R}^{4 \times 2}} d^4 y d^4 u B^2(y) P_i(y-u) p_i(y, u) B^2(u) P_j(u-y) p_j(u, y) + \\ + 2A(\sigma) \int_{\mathbb{R}^{4 \times 2}} d^4 y d^4 u B^2(y) P_i(y-u) p_i(y, u) B^2(u) \hat{P}_j(u-y) p_j(u, y) + \\ + \int_{\mathbb{R}^{4 \times 2}} d^4 y d^4 u B^2(y) \hat{P}_i(y-u) p_i(y, u) B^2(u) \hat{P}_j(u-y) p_j(u, y). \end{aligned} \quad (102)$$

Далее подставим в первое слагаемое функцию $\rho_7^j(u, y)$ из (100) с использованием соотношения (101)

$$\rho_7^j(u, y) = \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x B(u) s_0^2(u-x) P_i(x-y) B(x) p_j(x, y) - \left(A(\sigma) P_j(u-y) + \hat{P}_j(u-y) \right) B^2(u) p_j(u, y).$$

Тогда сумма (102) переписывается в виде трех слагаемых

$$\begin{aligned} 2A(\sigma) \int_{\mathbb{R}^{4 \times 3}} d^4 x d^4 y d^4 u B^2(y) P_i(y-u) p_i(y, u) B(u) s_0^2(u-x) B(x) P_i(x-y) p_j(x, y) + \\ - A^2(\sigma) \int_{\mathbb{R}^{4 \times 2}} d^4 y d^4 u B^2(y) P_i(y-u) p_i(y, u) B^2(u) P_j(u-y) p_j(u, y) + \\ + \int_{\mathbb{R}^{4 \times 2}} d^4 y d^4 u B^2(y) \hat{P}_i(y-u) p_i(y, u) B^2(u) \hat{P}_j(u-y) p_j(u, y). \end{aligned}$$

Учитывая тот факт, что последнее слагаемое дает сингулярность по параметру Λ только в случае, когда $i = j = 0$, то ответ для (98) представляется так

$$I_{11}^{11}(s_0^2, P_i p_i, s_0^2, P_j p_j) \stackrel{\text{s.p.}}{=} 2A(\sigma) I_2^{11}(P_i p_i, P_j p_j, s_0^2) - A^2(\sigma) I_2^2(P_i p_i P_j p_j) + \delta_{i0} \delta_{j0} I_2^2(\hat{P}_0^2). \quad (103)$$

Окончательно, складывая формулы (74)–(76), (83), (84), (85), (88), (89), (92), (93)–(95) и (103), получаем следующее утверждение.



Рис. 7: Дополнительная вершина для функционала (105).

$$\text{Cylinder} \stackrel{\text{s.p.}}{=} 2A(\sigma) \text{Cone} - A^2(\sigma) \text{Circle} + I_5(\sigma) S_4[B]$$

Рис. 8: Диаграммное представление для равенства (104).

Лемма 2. С учетом всего вышеизложенного, справедливо следующее соотношение

$$I_{11}^{11}((G^\Lambda)^2, G^\Lambda, (G^\Lambda)^2, G^\Lambda) \stackrel{\text{s.p.}}{=} 2A(\sigma) I_2^{11}(G^\Lambda, G^\Lambda, (G^\Lambda)^2) - A^2(\sigma) I_2^2((G^\Lambda)^2) + I_5(\sigma) S_4[B], \quad (104)$$

где интеграл $I_5(\sigma)$ определяется равенством (196).

Заметим, что последнее соотношение допускает весьма элегантное диаграммное представление, изображенное на рис. 8. Для этого необходимо ввести дополнительную вершину, см. рис. 7, для функционала

$$\int_{\mathbb{R}^4} d^4x B^2(x)\phi(x) \quad (105)$$

в дополнение к вершинам на рис. 2 и 3. Такое диаграммное равенство является наглядным примером справедливости \mathcal{R} -операции. Действительно, вычитая из диаграммы в левой части дважды возникающую поддиаграмму с «петлей» и прибавляя поддиаграмму с «квадратом петли», получаем часть классического действия с сингулярным коэффициентом.

6.3 Диаграмма d_4

Перейдем к изучению диаграммы d_4 , представленной на рис. 6. Она содержит шесть функций Грина G^Λ , однако они расположены таким образом, что, в отличие от d_3 , диаграмма d_4 содержит лишь логарифмическую сингулярность первого порядка. Перейдем к явному виду

$$d_4 = \int_{\mathbb{R}^4 \times 4} d^4x d^4y d^4u d^4z B(x)B(y)B(u)B(z) \times \quad (106)$$

$$\times G^\Lambda(x, y)G^\Lambda(x, u)G^\Lambda(x, z)G^\Lambda(y, u)G^\Lambda(y, z)G^\Lambda(u, z).$$

При анализе данной диаграммы главным образом используется метод, предложенный в предыдущей секции, с разбиением функции Грина на in- и out-части. Поэтому обратим внимание лишь на ключевую особенность. А именно на тот факт, что следующий интеграл

$$\Upsilon(R_0; z) = \int_{\mathbb{R}^4 \times 2} d^4x d^4y R_0(x-y)R_0(x)R_0(x-z)R_0(y)R_0(y-z) = \frac{3\zeta(3)}{27\pi^4}R_0(z), \quad (107)$$

построенный при помощи функций (39) без регуляризации, сходится и явно считается, см. [47, 48]. Следовательно, в диаграмме (106) можно рассматривать лишь вклад, построенный из главной части асимптотики функции Грина. Также из соотношения (107) вытекает, что сингулярность будет пропорциональна логарифму в первой степени.

Определим вспомогательную функцию

$$R_0^{\Lambda, \sigma}(x) = R_0^\Lambda(x)\chi(|x| \leq 1/\sigma), \quad (108)$$

тогда, с учетом последних замечаний, сингулярная часть выписывается в виде

$$d_4 \stackrel{\text{s.p.}}{=} \int_{\mathbb{R}^4 \times 4} d^4x d^4y d^4u d^4z B(x)B(y)B(u)B(z) \times$$

$$\times R_0^{\Lambda, \sigma}(x-y)R_0^{\Lambda, \sigma}(x-u)R_0^{\Lambda, \sigma}(x-z)R_0^{\Lambda, \sigma}(y-u)R_0^{\Lambda, \sigma}(y-z)R_0^{\Lambda, \sigma}(u-z).$$

Здесь удобно перейти к факторизации. Для этого выберем³³ точку u и переразложим около нее фоновые поля. Это возможно, так как расстояние между всеми аргументами ограничено характеристическими функциями. Таким образом, сохраняя лишь главный порядок и производя серию замен

$$x \rightarrow x+u, \quad y \rightarrow y+u, \quad z \rightarrow z+u,$$

можно убедиться в справедливости равенства

$$d_4 \stackrel{\text{s.p.}}{=} S_4[B]\alpha(\Lambda, \sigma), \quad (109)$$

где

$$\alpha(\Lambda, \sigma) = \int_{\mathbb{R}^4 \times 3} d^4x d^4y d^4z R_0^{\Lambda, \sigma}(x-y)R_0^{\Lambda, \sigma}(x)R_0^{\Lambda, \sigma}(x-z)R_0^{\Lambda, \sigma}(y)R_0^{\Lambda, \sigma}(y-z)R_0^{\Lambda, \sigma}(z),$$

³³Из-за симметрии выбор конкретной точки не является ограничением.

которая, с учетом определения (107), переписывается в виде

$$\alpha(\Lambda, \sigma) = \int_{B_{1/\sigma}} d^4 z R_0^\Lambda(z) \Upsilon(R_0^{\Lambda, \sigma}; z). \quad (110)$$

Далее основная идея заключается в том, чтобы выполнить два перехода

$$\Upsilon(R_0^{\Lambda, \sigma}; z) \rightarrow \Upsilon(R_0^\Lambda; z) \rightarrow \Upsilon(R_0; z) \quad (111)$$

в подынтегральном выражении (110). Такие преобразования не повлияют на сингулярную часть исследуемого интеграла. Разберем эти переходы подробнее.

В первом случае происходит расширение носителя функции (108) путем перехода в точку $\sigma = 0$. Учитывая формулу (107), можно утверждать, что обе функции $\Upsilon(R_0^{\Lambda, \sigma}; z)$ и $\Upsilon(R_0^\Lambda; z)$ определяются сходящимися интегралами и при снятии регуляризации $\Lambda \rightarrow +\infty$ могут иметь особенность только в точке $z = 0$. Более того, невязочное слагаемое

$$\Upsilon(R_0^{\Lambda, \sigma}; z) - \Upsilon(R_0^\Lambda; z)$$

является ограниченной функцией до и после снятия регуляризации. Это происходит за счет комбинации носителей. Для примера рассмотрим один из вкладов

$$\int_{\mathbb{R}^{4 \times 2}} d^4 x d^4 y \left[\left(R_0^{\Lambda, \sigma}(x - y) - R_0^\Lambda(x - y) \right) R_0^{\Lambda, \sigma}(x) R_0^{\Lambda, \sigma}(x - z) R_0^{\Lambda, \sigma}(y) R_0^{\Lambda, \sigma}(y - z) \right] \Big|_{\Lambda \rightarrow +\infty}.$$

Ясно, что при стремлении $|z| \rightarrow 0$ можно было бы ожидать расходимости из-за появления в подынтегральном выражении неинтегрируемой плотности. Действительно, комбинация $R_0(y)R_0(y - z)$ стремится к поведению $|y|^{-4}$, что является неинтегрируемой функцией. Однако, за счет комбинации носителей $\chi(|x - y| > 1/\sigma)\chi(|x| \leq 1/\sigma)$ происходит урезание области интегрирования и, таким образом, особенность нейтрализуется.

Во втором переходе (111) происходит добавка функций, носители которых умещаются в $B_{1/\Lambda}$. Это, с учетом сходимости интеграла (107), приводит к тому, что невязочное слагаемое как функция z/Λ переписывается в виде

$$\begin{aligned} \Upsilon(R_0^\Lambda; z/\Lambda) - \Upsilon(R_0; z/\Lambda) &= \Lambda^2 \left(\Upsilon(R_0^1; z) - \Upsilon(R_0; z) \right) \\ &= \Lambda^2 |z|^{-2} \left(\Upsilon(R_0^{|z|}; z/|z|) - \Upsilon(R_0; z/|z|) \right). \end{aligned}$$

Более того, можно проверить, что при больших значениях $|z|$ последняя комбинация ведет себя как $\Lambda^2 |z|^{-2-\delta}$, где $\delta > 0$. Это происходит за счет того, что величина $\Upsilon(R_0; z/|z|) = q$ в действительности не зависит от переменной z , а функция $\Upsilon(R_0^{|z|}; z/|z|)$ стремится к числу q при $|z| \rightarrow +\infty$ достаточно быстро за счет стремления характеристической функции $\chi(|\cdot| \leq 1/|z|)$ к единичной. При этом около нуля поведение, как и ранее, не хуже $\Lambda^2 |z|^{-2}$. Последние рассуждения означают, что интеграл от невязки конечен при $\Lambda \rightarrow +\infty$

$$\left| \int_{B_{1/\sigma}} d^4 z R_0^\Lambda(z) \left(\Upsilon(R_0^\Lambda; z) - \Upsilon(R_0; z) \right) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^4} d^4 z \left| R_0^1(z) \left(\Upsilon(R_0^1; z) - \Upsilon(R_0; z) \right) \right| < \infty.$$

Таким образом, двойной переход (111) изменяет интеграл (110) лишь на конечную величину. Следовательно, справедлива следующая цепочка равенств

$$\alpha(\Lambda, \sigma) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \int_{B_{1/\sigma}} d^4 z R_0^\Lambda(z) \Upsilon(R_0; z) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{3\zeta(3)L}{16(4\pi^2)^3}. \quad (112)$$

Окончательно, используя соотношения (109) и (112), можно сформулировать утверждение.

Лемма 3. *С учетом всего вышеизложенного, справедливо равенство*

$$d_4 \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{3\zeta(3)L}{16(4\pi^2)^3} S_4[B].$$

6.4 Диаграмма d_5

Перейдем к анализу третьей трехпетлевой диаграммы d_5 , см. рис. 6. Исследование данной диаграммы во многом повторяет шаги изучения d_3 , поэтому некоторые вычисления будут опускаться, либо заменяться на краткие комментарии. Сперва выпишем необходимые вспомогательные разложения:

$$G^\Lambda(x, y) = R_0^\Lambda(x - y) + PS_3^\Lambda(x, y),$$

где $R_0^\Lambda(x)$ определено в (41), и

$$PS_3^\Lambda(x, y) = -R_{10}^\Lambda(x - y)m^2 - R_{11}^\Lambda(x - y)\frac{\lambda(B^2(x) + B^2(y))}{4} + PS^\Lambda(x, y), \quad (113)$$

а также

$$\left(G^\Lambda(x, y)\right)^2 = b_1(x, y) + 2s_0(x - y)PS_3^\Lambda(x, y) + s_0^2(x - y),$$

где функция $b_1(x, y)$ определяется последним равенством.

Тогда диаграмма d_5 представляется в виде суммы поддиаграмм

$$I_0^{11}((G^\Lambda)^2, (G^\Lambda)^2, G^\Lambda) = \sum_{g_1, g_2 \in \{b_1, 2s_0PS_3^\Lambda, s_0^2\}} \sum_{g_3 = PS_3^\Lambda, R_0^\Lambda} I_0^{11}(g_1, g_2, g_3).$$

Согласно общей идее, рассмотрим все вклады по отдельности. Сперва выделим слагаемые, которые очевидным образом (с учетом соображений из раздела 6.2) не содержат сингулярностей по регуляризирующему параметру Λ . Они таковы:

$$I_0^{11}(b_1, b_1, PS_3^\Lambda) \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0, \quad 2I_0^{11}(2s_0PS_3^\Lambda, b_1, PS_3^\Lambda) \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0, \quad I_0^{11}(b_1, b_1, R_0^\Lambda) \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0,$$

$$I_0^{11}(2s_0PS_3^\Lambda, 2s_0PS_3^\Lambda, PS_3^\Lambda) \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0, \quad 2I_0^{11}(2s_0PS_3^\Lambda, b_1, R_0^\Lambda) \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0, \quad I_0^{11}(2s_0PS_3^\Lambda, 2s_0PS_3^\Lambda, R_0^\Lambda) \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0.$$

Прокомментируем для примера последний самый нетривиальный вклад

$$\int_{\mathbb{R}^{4 \times 3}} d^4x d^4y d^4z 2s_0(z - x)PS_3^\Lambda(z, x)2s_0(x - y)PS_3^\Lambda(x, y)B(y)R_0^\Lambda(y - z)B(z).$$

Все его составные части содержат функции s_0 . Однако, они интегрируемы после снятия регуляризации. Действительно, рассмотрим функцию

$$\rho_8(x, z) = \int_{\mathbb{R}^4} d^4y 2s_0(x - y)PS_3^\Lambda(x, y)B(y)R_0^\Lambda(y - z)B(z).$$

После снятия регуляризации около диагонали $x \sim z$ главный член асимптотики ведет себя как $\ln^2(|x - z|)$ или слабее. Следовательно, при интегрировании с оставшейся частью получится конечный результат, так как функция $\ln^3(|x|)/|x|^2$ интегрируема около нуля в четырехмерном пространстве.

Далее рассмотрим следующие три вклада

$$2I_0^{11}(s_0^2, b_1, PS_3^\Lambda) + 2I_0^{11}(s_0^2, b_1, R_0^\Lambda) + 2I_0^{11}(s_0^2, 2s_0PS_3^\Lambda, PS_3^\Lambda),$$

на которые можно распространить основной метод из секции 6.2. Действительно, заметим, что функции

$$\rho_9(x, z) = \int_{\mathbb{R}^4} d^4y b_1(x, y)B(y)PS_3^\Lambda(y, z)B(z),$$

$$\rho_{10}(x, z) = \int_{\mathbb{R}^4} d^4y b_1(x, y)B(y)R_0^\Lambda(y - z)B(z),$$

$$\rho_{11}(x, z) = \int_{\mathbb{R}^4} d^4y 2s_0(x - y)PS_3^\Lambda(x, y)B(y)PS_3^\Lambda(y, z)B(z),$$

имеют конечный предел при $x = z$ до и после снятия регуляризации. Следовательно, можно воспользоваться вычитанием и добавлением $\rho_i(z, z)$ в каждом из интегралов, где $i = 9, 10, 11$. Часть с разностью не будет содержать сингулярности по Λ , так как $\rho_i(x, z) - \rho_i(z, z)$ нейтрализует особенность в $s_0^2(x - z)$. В итоге, оставшаяся часть после сдвига $x \rightarrow z + x$ факторизуется, и получаются равенства

$$\begin{aligned} I_0^{11}(s_0^2, b_1, PS_3^\Lambda) &\stackrel{\text{s.p.}}{=} A(\sigma) I_1^1(b_1 PS_3^\Lambda), \\ I_0^{11}(s_0^2, b_1, R_0^\Lambda) &\stackrel{\text{s.p.}}{=} A(\sigma) I_1^1(b_1 R_0^\Lambda), \\ I_0^{11}(s_0^2, 2s_0 PS_3^\Lambda, PS_3^\Lambda) &\stackrel{\text{s.p.}}{=} A(\sigma) I_1^1(2s_0 PS_3^\Lambda PS_3^\Lambda). \end{aligned}$$

Оставшиеся вклады имеют следующий вид

$$I_0^{11}(s_0^2, s_0^2, PS_3^\Lambda) + 2I_0^{11}(2s_0 PS_3^\Lambda, s_0^2, R_0^\Lambda) + I_0^{11}(s_0^2, s_0^2, R_0^\Lambda). \quad (114)$$

Начнем с первого слагаемого и воспользуемся дополнительным разложением для функции PS_3^Λ (113) в эквивалентном симметризованном виде, см. (90)–(91) и (96)–(97),

$$PS_3^\Lambda(x, y) = P_1(x - y)p_1(x, y) + P_2(x - y)p_2(x, y) + PS^\Lambda(x, y).$$

Тогда первый вклад из (114) представляется суммой трех слагаемых

$$I_0^{11}(s_0^2, s_0^2, PS_3^\Lambda) = I_0^{11}(s_0^2, s_0^2, PS^\Lambda) + I_0^{11}(s_0^2, s_0^2, P_1 p_1) + I_0^{11}(s_0^2, s_0^2, P_2 p_2). \quad (115)$$

Рассмотрим первое. В этом случае вычтем и добавим $B(y)PS^\Lambda(y, x)B(x)$, тогда получаются два интеграла

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{4 \times 3}} d^4 x d^4 y d^4 z s_0^2(z - x) s_0^2(x - y) &\left(B(y)PS^\Lambda(y, z)B(z) - B(y)PS^\Lambda(y, x)B(x) \right) + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^{4 \times 3}} d^4 x d^4 y d^4 z s_0^2(z - x) s_0^2(x - y) B(y)PS^\Lambda(y, x)B(x). \end{aligned} \quad (116)$$

Ясно, что во втором слагаемом после сдвига $z \rightarrow z + x$ получится факторизация. В первом же разность в скобках нейтрализует особенность в $s_0^2(z - x)$. Следовательно, функция

$$\rho_{12}(y, x) = \int_{\mathbb{R}^4} d^4 z s_0^2(z - x) \left(B(y)PS^\Lambda(y, z)B(z) - B(y)PS^\Lambda(y, x)B(x) \right) \quad (117)$$

имеет конечный предел при $x \rightarrow y$, и появляется возможность вычесть и добавить $\rho_{12}(y, y)$. Таким образом, с учетом дополнительной факторизации, после сдвига сумма интегралов (116) записывается в виде

$$\int_{\mathbb{R}^{4 \times 2}} d^4 x d^4 y s_0^2(x - y) \left(\rho_{12}(y, x) - \rho_{12}(y, y) \right) + A(\sigma) \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y \rho_{12}(y, y) + A(\sigma) I_1^1(s_0^2 PS^\Lambda).$$

Понятно, что первое слагаемое не дает сингулярностей, потому что разность нейтрализует особенность, оставшуюся в $s_0^2(x - y)$. Следовательно, представляя (117) в виде суммы двух слагаемых, получаем

$$\begin{aligned} I_0^{11}(s_0^2, s_0^2, PS^\Lambda) &\stackrel{\text{s.p.}}{=} 2A(\sigma) I_1^1(s_0^2 PS^\Lambda) - A^2(\sigma) \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y B^2(y) PS^\Lambda(y, y) \\ &\stackrel{\text{s.p.}}{=} 2A(\sigma) I_1^1(s_0^2 PS^\Lambda) - A^2(\sigma) J_2[B]. \end{aligned}$$

Перейдем ко второму слагаемому из (115). Оно имеет следующий вид

$$\int_{\mathbb{R}^{4 \times 3}} d^4 x d^4 y d^4 z s_0^2(z - x) s_0^2(x - y) B(y) P_1(y - z) p_1(y, z) B(z).$$

Отметим основные этапы подсчета. Сперва вычитаем и прибавляем слагаемое $B(y)p_1(y, x)B(x)$ (без множителя P_1). Заметим, что функция

$$\rho_{13}(y, x) = \int_{\mathbb{R}^4} d^4 z P_1(y - z) s_0^2(z - x) \left(B(y)p_1(y, z)B(z) - B(y)p_1(y, x)B(x) \right)$$

имеет конечный предел при $x \rightarrow y$ до и после снятия регуляризации, поскольку функция $\ln(|x|)/|x|^3$ интегрируема в четырехмерном пространстве. Следовательно, вычитая и добавляя функцию $\rho_{13}(y, y)$ и отбрасывая сходящуюся часть, получаем

$$A(\sigma) \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y \rho_{13}(y, y) + \int_{\mathbb{R}^4 \times 2} d^4 x d^4 y s_0^2(x - y) B(y)p_1(y, x)B(x) \left(\int_{\mathbb{R}^4} d^4 z P_1(y - z) s_0^2(z - x) \right).$$

Далее, применяя соотношение (72), приходим к следующему равенству

$$2A(\sigma)I_1^1(s_0^2 P_1 p_1) - A(\sigma) \left(\int_{\mathbb{R}^4} d^4 x s_0^2(x) P_1(x) \right) \left(\int_{\mathbb{R}^4} d^4 y B^2(y) p_1(y, y) \right) + I_1^1(s_0^2 \hat{P}_1 p_1), \quad (118)$$

которое переписывается в виде

$$2A(\sigma)I_1^1(s_0^2 P_1 p_1) + m^2 A(\sigma)I_2(\sigma)S_m[B] - m^2 I_9(\sigma)S_m[B].$$

Ответ для третьего слагаемого из (115) получается путем замены индексов $1 \rightarrow 2$ в $\{P_1, p_1, \hat{P}_1\}$ в ответе (118) и явно выписывается так

$$2A(\sigma)I_1^1(s_0^2 P_1 p_1) + \frac{\lambda}{2} A(\sigma)I_3(\sigma)S_4[B] - \frac{\lambda}{2} I_{10}(\sigma)S_4[B].$$

Перейдем ко второму вкладу из (114). Из его явного представления

$$I_0^{11}(2s_0 P S_3^\Lambda, s_0^2, R_0^\Lambda) = \int_{\mathbb{R}^4 \times 3} d^4 x d^4 y d^4 z 2s_0(z - x) P S_3^\Lambda(z, x) s_0^2(x - y) B(y) R_0^\Lambda(y - z) B(z)$$

можно понять, что в качестве первого вычитания удобно использовать $B(y) = B(y) \pm B(x)$, тогда вклад перепишется в виде

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^4 \times 3} d^4 x d^4 y d^4 z 2s_0(z - x) P S_3^\Lambda(z, x) s_0^2(x - y) \left(B(y) - B(x) \right) R_0^\Lambda(y - z) B(z) + \\ + \int_{\mathbb{R}^4 \times 3} d^4 x d^4 y d^4 z 2s_0(z - x) P S_3^\Lambda(z, x) s_0^2(x - y) B(x) R_0^\Lambda(y - z) B(z). \end{aligned} \quad (119)$$

Можно заметить, что первое слагаемое не содержит сингулярных слагаемых. Действительно подынтеграл вида

$$\int_{\mathbb{R}^4} d^4 y s_0^2(x - y) \left(B(y) - B(x) \right) R_0^\Lambda(y - z) B(z)$$

после снятия регуляризации содержит в главном члене асимптотики функцию $|x - z|^{-1}$ или слабее. Следовательно, оставшийся интеграл сойдется, так как функция $\ln(|x|)/|x|^3$ интегрируема в четырехмерном пространстве. Тогда, после вспомогательных факторизаций во втором слагаемом (119) и использования соотношения (72), ответ выписывается так

$$\begin{aligned} I_0^{11}(2s_0 P S_3^\Lambda, s_0^2, R_0^\Lambda) &\stackrel{\text{s.p.}}{=} A(\sigma)I_1^1(2s_0^2 P S_3^\Lambda) + I_1^1(2s_0 P S_3^\Lambda \hat{R}_0^\Lambda) \\ &\stackrel{\text{s.p.}}{=} A(\sigma)I_1^1(2s_0^2 P S_3^\Lambda) + 2I_8(\sigma)J_2[B] - 2m^2 I_{11}(\sigma)S_m[B] - \lambda I_{12}(\sigma)S_4[B]. \end{aligned}$$

Перейдем к последнему слагаемому из (114)

$$I_0^{11}(s_0^2, s_0^2, R_0^\Lambda) = \int_{\mathbb{R}^4 \times 3} d^4 x d^4 y d^4 z s_0^2(z - x) s_0^2(x - y) B(y) R_0^\Lambda(y - z) B(z). \quad (120)$$

На первый взгляд данный вклад считается очень легко. Действительно, можно напрямую подставить результат для интеграла

$$\int_{\mathbb{R}^4} d^4x s_0^2(z-x)s_0^2(x-y)$$

и выписать ответ. Однако, нахождение асимптотики для последнего интеграла является трудоемкой задачей. Поэтому проще воспользоваться прибавлением и вычитанием. Для этого представим $B(z)$ в виде

$$B(z) = B(x) + (z-x)^\mu \partial_{x^\mu} B(x) + \frac{1}{2}(z-x)^{\mu\nu} \partial_{x^\mu} \partial_{x^\nu} B(x) + B_3(x, z). \quad (121)$$

Ясно, что с использованием равенства (72), ответ для первого слагаемого выписывается мгновенно и имеет вид

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{4 \times 3}} d^4x d^4y d^4z s_0^2(z-x)s_0^2(x-y)B(y)R_0^\Lambda(y-z)B(x) &= A(\sigma)I_1^1(s_0^3) + I_1^1(s_0^2\hat{R}_0^\Lambda) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \\ &\stackrel{\text{s.p.}}{=} A(\sigma)I_1^1(s_0^3) + I_7(\sigma)S_m[B] - \frac{S_2[B]}{8} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x s_0^2(x)\hat{R}_0^\Lambda(x)|x|^2. \end{aligned} \quad (122)$$

Далее, во втором слагаемом переразложим функцию $\partial_{x^\mu} B(x)$ в точке y

$$\partial_{x^\mu} B(x) = \partial_{y^\mu} B(y) + (x-y)^\nu \partial_{y^\mu} \partial_{y^\nu} B(y) + \dots,$$

где многоточием помечены слагаемые, нейтрализующие сингулярность. Тогда после сдвигов переменных $x \rightarrow x+y$ и $z \rightarrow z+y$ получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{4 \times 3}} d^4x d^4y d^4z s_0^2(z-x)s_0^2(x-y)B(y)R_0^\Lambda(y-z)(z-x)^\mu \partial_{x^\mu} B(x) &\stackrel{\text{s.p.}}{=} \\ &\stackrel{\text{s.p.}}{=} \left(\int_{\mathbb{R}^4} d^4y B(y) \partial_{y^\mu} B(y) \right) \left(\int_{\mathbb{R}^{4 \times 2}} d^4x d^4z s_0^2(z-x)s_0^2(x)R_0^\Lambda(z)(z-x)^\mu \right) + \\ &+ \left(\int_{\mathbb{R}^4} d^4y B(y) \partial_{y^\mu} \partial_{y^\nu} B(y) \right) \left(\int_{\mathbb{R}^{4 \times 2}} d^4x d^4z s_0^2(z-x)s_0^2(x)R_0^\Lambda(z)(z-x)^\mu x^\nu \right). \end{aligned}$$

Заметим, что первое слагаемое не дает сингулярного вклада, так как интеграл в скобках равен нулю. Действительно, делая замену вида $x \rightarrow -x$ и $z \rightarrow -z$, получаем тот же интеграл со знаком минус. Второе же слагаемое можно переписать в виде

$$-\frac{S_2[B]}{4} \int_{\mathbb{R}^{4 \times 2}} d^4x d^4z s_0^2(x)x^\mu R_0^\Lambda(z+x)s_0^2(z)z_\mu, \quad (123)$$

где за счет сферической симметрии была использована замена $x^\nu z^\mu \rightarrow x^\sigma z_\sigma \delta^{\mu\nu}/4$.

Далее, третье слагаемое из разложения (121) нужно переразложить в точке y . При этом важно сохранить только нулевой порядок, так как следующие поправки очевидным образом нейтрализуют расходимости полностью. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{4 \times 3}} d^4x d^4y d^4z s_0^2(z-x)s_0^2(x-y)B(y)R_0^\Lambda(y-z)(z-x)^{\mu\nu} \partial_{y^\mu} \partial_{y^\nu} B(y) &\stackrel{\text{s.p.}}{=} \\ &\stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{S_2[B]}{8} \int_{\mathbb{R}^{4 \times 2}} d^4x d^4z s_0^2(x)R_0^\Lambda(x-z)s_0^2(z)|z|^2. \end{aligned} \quad (124)$$

Возвращаясь к последнему четвертому слагаемому в (121), нужно заметить, что функция

$$\rho_{14}(y, x) = \int_{\mathbb{R}^4} d^4z B(y)R_0^\Lambda(y-z)B_3(x, z)s_0^2(z-x)$$

имеет конечный предел при $x \rightarrow y$ до и после снятия регуляризации. Следуя общей логике, вычитая и добавляя функцию $\rho_{14}(y, y)$ и производя факторизацию при помощи сдвига, получаем ответ в виде

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{4 \times 3}} d^4 x d^4 y d^4 z s_0^2(z-x) s_0^2(x-y) B(y) R_0^\Lambda(y-z) B_3(x, z) &\stackrel{\text{s.p.}}{=} \\ &\stackrel{\text{s.p.}}{=} A(\sigma) \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y \rho_{14}(y, y) = A(\sigma) \int_{\mathbb{R}^{4 \times 2}} d^4 y d^4 z B(y) s_0^3(y-z) B_3(y, z). \end{aligned} \quad (125)$$

Заметим, что можно подставить определение $B_3(x, z)$ из (121) в последний интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^{4 \times 2}} d^4 y d^4 z B(y) s_0^3(y-z) B_3(y, z) = I_1^1(s_0^3) - S_m[B] \left(\int_{\mathbb{R}^4} d^4 x s_0^3(x) \right) + \frac{S_2[B]}{8} \left(\int_{\mathbb{R}^4} d^4 x s_0^3(x) |x|^2 \right) \quad (126)$$

и получить сингулярность в стандартных терминах. Окончательно, суммируя результаты (122), (123), (124), (125) и (126), для третьего вклада (120) получаем следующий ответ

$$\begin{aligned} I_0^{11}(s_0^2, s_0^2, s_0) &\stackrel{\text{s.p.}}{=} 2A(\sigma) I_1^1(s_0^3) + S_m[B] \left(\int_{\mathbb{R}^4} d^4 x \left(s_0^2(x) \hat{R}_0^\Lambda(x) - A(\sigma) s_0^3(x) \right) \right) + \\ &+ S_2[B] \left(-\frac{1}{8} \int_{\mathbb{R}^{4 \times 2}} d^4 x d^4 z s_0^2(x) R_0^\Lambda(x-z) |x-z|^2 s_0^2(z) + \frac{A(\sigma)}{4} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 z s_0^3(z) |z|^2 \right). \end{aligned}$$

В итоге, собирая вместе все вклады, изученные в данной секции, можно сформулировать следующее утверждение.

Лемма 4. *С учетом всего вышеизложенного, справедливо следующее равенство*

$$\begin{aligned} I_0^{11}((G^\Lambda)^2, (G^\Lambda)^2, G^\Lambda) &\stackrel{\text{s.p.}}{=} 2A(\sigma) I_1^1((G^\Lambda)^3) + J_2[B] \left(-A^2(\sigma) + 4I_8(\sigma) \right) + \\ &+ S_2[B] \left(-\frac{1}{8} I_6(\sigma) + \frac{1}{4} A(\sigma) I_1(\sigma) \right) + \\ &+ S_m[B] \left(I_7(\sigma) - A(\sigma) I_4(\sigma) + m^2 A(\sigma) I_2(\sigma) - m^2 I_9(\sigma) - 4m^2 I_{11}(\sigma) \right) + \\ &+ S_4[B] \left(\frac{\lambda}{2} A(\sigma) I_3(\sigma) - \frac{\lambda}{2} I_{10}(\sigma) - 2\lambda I_{12}(\sigma) \right), \end{aligned}$$

где определения для интегралов $I_i(\sigma)$ представлены в секции 9.2.

6.5 Соотношения для диаграмм

В данной секции изучим соотношения для линейных комбинаций диаграмм, возникающих в правой части равенства (28). При этом для начала будет посчитана комбинация при условии $\tilde{z}_{2,1} = 0$, а затем отдельно невязка. Начнем с диаграммы d_8 и контрдиаграмм cd_3 и cd_4 . Они появляются со следующими числовыми коэффициентами

$$Cb_1 = \frac{\lambda^2 d_8}{16} + \frac{\lambda c d_3}{4} + \frac{c d_4}{4}. \quad (127)$$

Можно заметить, что такая линейная комбинация представляется в виде одного слагаемого

$$\left(Cb_1 - Cb_1 \Big|_{B=0} \right) \Big|_{\tilde{z}_{2,1}=0} = \frac{1}{16} \int_{\mathbb{R}^{4 \times 2}} d^4 x d^4 y \left[V_1(x) (G^\Lambda(x, y))^2 V_1(y) - \tilde{\kappa}_1(x, y) \right],$$

где, с использованием (10) и (52), имеем

$$V_1(x) = \lambda G^\Lambda(x, x) + 2m^2 z_1 + \lambda z_{4,1} B^2(x).$$

Также функция $\tilde{\kappa}_1(x, y)$ вычитает сингулярную плотность, не зависящую от фонового поля B . Явный вид такой плотности не важен. Далее, подставляя асимптотическое разложение (43) и результаты (57) и (58) для коэффициентов констант перенормировки, получаем

$$V_1(x) = \lambda^2 B^2(x) A(\sigma) + 2m^2 \tilde{z}_1 + \lambda \tilde{z}_{4,1} B^2(x) + \lambda P S^\Lambda(x, x).$$

Заметим, что степенная сингулярность $R_0^\Lambda(0)$ сократилась. При этом использовалось соотношение $A(\sigma) = R_{11}^\Lambda(0)$, которое справедливо по построению. Остались лишь логарифмические и конечные части.

Перейдем теперь к следующей линейной комбинации, содержащей диаграммы d_3 и d_6 и контр-диаграмму cd_2 . Согласно (28), она имеет вид

$$Cb_2 = \frac{\lambda^4 d_3}{16} - \frac{\lambda^3 d_6}{8} - \frac{\lambda^2 cd_2}{4}. \quad (128)$$

Вновь пользуясь определениями для элементов диаграммной техники из секции 3, разложением функции Грина (43) и леммой³⁴ 2, расходящуюся часть для комбинации (128) можно представить в виде

$$\left(Cb_2 - Cb_2 \Big|_{B=0} \right) \Big|_{\tilde{z}_{2,1}=0} = \frac{\lambda^2}{16} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x \rho_{15}(x) V_2(x) - \frac{\lambda^4}{16} A^2(\sigma) I_2^2((G^\Lambda)^2) + \frac{\lambda^4}{16} I_5(\sigma) S_4[B],$$

где

$$\rho_{15}(x) = \int_{\mathbb{R}^4 \times 2} d^4 z d^4 y G^\Lambda(x, z) B(z) \left(G^\Lambda(z, y) \right)^2 B(y) G^\Lambda(y, x),$$

$$\begin{aligned} V_2(x) &= 2\lambda^2 A(\sigma) B^2(x) - 2V_1(x) \\ &= -4m^2 \tilde{z}_1 - 2\lambda \tilde{z}_{4,1} B^2(x) - 2\lambda P S^\Lambda(x, x). \end{aligned} \quad (129)$$

Заметим, что функция $V_2(x)$ не содержит сингулярностей. Она является $\mathcal{O}(1)$ по параметру Λ . Для такой функции можно воспользоваться разложением

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x \rho_{15}(x) V_2(x) \stackrel{\text{s.p.}}{=} A(\sigma) \int_{\mathbb{R}^4 \times 2} d^4 x d^4 y B^2(x) \left(G^\Lambda(x, y) \right)^2 V_2(y) + \\ + \left(\int_{\mathbb{R}^4} d^4 y B^2(y) V_2(y) \right) \left(\int_{B_{1/\sigma}} d^4 x R_0^\Lambda(x) \hat{R}_0^\Lambda(x) \right), \end{aligned} \quad (130)$$

где были использованы соображения из секции 6.2. Также, учитывая тот факт, что исследуемые линейные комбинации не содержат степенных сингулярностей, можно опустить слагаемые со степенным убыванием в $P S^\Lambda(x, x)$ и заменить его на $P S_1^\Lambda(x, x)$. Следовательно, используя соотношение (129), можно выписать сингулярную часть, зависящую от фонового поля, для суммы линейных комбинаций (127) и (128) при условии $\tilde{z}_{2,1} = 0$ в виде

$$\frac{A(\sigma)}{16} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y \left(V_3^2(y) - 4m^4 \tilde{z}_1^2 \right) - \frac{\lambda^2}{8} \left(\int_{\mathbb{R}^4} d^4 y B^2(y) V_3(y) \right) I_8(\sigma) + \frac{\lambda^4}{16} I_5(\sigma) S_4[B],$$

где

$$V_3(x) = 2m^2 \tilde{z}_1 + \lambda \tilde{z}_{4,1} B^2(x) + \lambda P S_1^\Lambda(x, x).$$

Расписывая последнее соотношение, можно сформулировать утверждение.

³⁴Здесь следует обратить внимание, что результат леммы 2 может быть подставлен и с другим $\sigma_1 \neq \sigma$. Однако, в секции 6.2 было упомянуто, что сингулярная часть не зависит от выбора параметра. Поэтому из соображений удобства было взято $\sigma_1 = \sigma$.

Лемма 5. *С учетом всего вышеизложенного, верно следующее равенство*

$$\left(\frac{\lambda^4 d_3}{16} - \frac{\lambda^3 d_6}{8} + \frac{\lambda^2 d_8}{16} - \frac{\lambda^2 c d_2}{4} + \frac{\lambda c d_3}{4} + \frac{c d_4}{4} - \tilde{\kappa} \right) \Big|_{\tilde{z}_{2,1}=0} \stackrel{\text{s.p.}}{=} \quad (131)$$

$$\stackrel{\text{s.p.}}{=} S_m[B] \left(\frac{m^2 \lambda \tilde{z}_1 \tilde{z}_{4,1}}{4} A(\sigma) - \frac{m^2 \lambda^2 \tilde{z}_1}{4} I_8(\sigma) \right) +$$

$$+ S_4[B] \left(\frac{\lambda^2 \tilde{z}_{4,1}^2}{16} A(\sigma) + \frac{\lambda^4}{16} I_5(\sigma) - \frac{\lambda^3 \tilde{z}_{4,1}}{8} I_8(\sigma) \right) +$$

$$+ J_1[B] \left(\frac{m^2 \lambda \tilde{z}_1}{4} A(\sigma) \right) +$$

$$+ J_2[B] \left(\frac{\lambda^2 \tilde{z}_{4,1}}{8} A(\sigma) - \frac{\lambda^3}{8} I_8(\sigma) \right) +$$

$$+ J_4[B] \left(\frac{\lambda^2}{16} A(\sigma) \right),$$

где $\tilde{\kappa}$ вычитает сингулярную плотность, не зависящую от фонового поля.

Следующая линейная комбинация содержит диаграммы d_1 и d_5 и, согласно формуле (28), выписывается следующим образом

$$\frac{\lambda^2 z_{4,1} d_1}{6} - \frac{\lambda^3 d_5}{8}. \quad (132)$$

Тогда, применяя лемму 4 к диаграмме d_5 с учетом соотношения (58) в форме

$$\frac{\lambda^2 z_{4,1}}{6} - \frac{\lambda^3 A(\sigma)}{4} = \frac{\lambda^2 \tilde{z}_{4,1}}{6},$$

получаем явное выражение для сингулярной части

$$\frac{\lambda^2 z_{4,1} d_1}{6} - \frac{\lambda^3 d_5}{8} \stackrel{\text{s.p.}}{=} S_2[B] \left(-\frac{\lambda^2 \tilde{z}_{4,1}}{48} I_1(\sigma) - \frac{\lambda^3}{32} A(\sigma) I_1(\sigma) + \frac{\lambda^3}{64} I_6(\sigma) \right) + \quad (133)$$

$$+ S_m[B] \left(\frac{\lambda^2 \tilde{z}_{4,1}}{6} I_4(\sigma) + \frac{\lambda^3}{8} A(\sigma) I_4(\sigma) - \frac{\lambda^2 \tilde{z}_{4,1} m^2}{2} I_2(\sigma) - \frac{m^2 \lambda^3}{8} A(\sigma) I_2(\sigma) - \right. \quad (134)$$

$$\left. - \frac{\lambda^3}{8} I_7(\sigma) + \frac{m^2 \lambda^3}{8} I_9(\sigma) + \frac{m^2 \lambda^3}{2} I_{11}(\sigma) \right) +$$

$$+ S_4[B] \left(-\frac{\lambda^3 \tilde{z}_{4,1}}{4} I_3(\sigma) - \frac{\lambda^4}{16} A(\sigma) I_3(\sigma) + \frac{\lambda^4}{16} I_{10}(\sigma) + \frac{\lambda^4}{4} I_{12}(\sigma) \right) + \quad (135)$$

$$+ J_2[B] \left(\frac{\lambda^2 \tilde{z}_{4,1}}{2} A(\sigma) + \frac{\lambda^3}{8} A^2(\sigma) - \frac{\lambda^3}{2} I_8(\sigma) \right). \quad (136)$$

Далее представим результаты для диаграммы d_7 и двух контрдиаграмм $z_{4,1} d_2$ и $c d_5$. Поскольку такие вклады содержат не более двух операторов интегрирования по \mathbb{R}^4 , можно воспользоваться методом подсчета для двухпетлевого вклада, то есть обычным ограничением области интегрирования и сдвигом переменной. Результат для d_7 имеет следующий вид

$$\frac{\lambda^2 (d_7 - \tilde{\kappa}_7)}{48} \stackrel{\text{s.p.}}{=} S_m[B] \left(-\frac{\lambda^3}{24} I_{14}(\sigma) + \frac{m^2 \lambda^3}{8} I_{16}(\sigma) + \frac{m^2 \lambda^3}{24} I_{19}(\sigma) \right) + \quad (137)$$

$$+ S_4[B] \left(\frac{3\lambda^4}{96} I_{17}(\sigma) + \frac{\lambda^4}{96} I_{20}(\sigma) \right) + \quad (138)$$

$$+ J_1[B] \left(\frac{\lambda^2}{12} I_4(\sigma) - \frac{m^2 \lambda^2}{4} I_2(\sigma) \right) + \quad (139)$$

$$+ J_2[B] \left(-\frac{\lambda^3}{8} I_3(\sigma) \right) + J_3[B] \left(\frac{\lambda^2}{96} I_1(\sigma) \right) + J_4[B] \left(\frac{\lambda^2}{8} A(\sigma) \right), \quad (140)$$

где $\tilde{\kappa}_7$ вычитает сингулярность, не зависящую от фонового поля.

Продолжая, ответ для контрдиаграммы $-\lambda z_{4,1}d_2/8$ мгновенно выписывается при помощи результата для двухпетлевого вклада (62)–(65). Затем, сингулярная часть контрдиаграммы $-cd_5/2$ имеет вид

$$-\frac{(cd_5 - \tilde{\kappa}_5)}{2} \stackrel{\text{s.p.}}{=} A_1(\sigma)S_m[B] + A_2(\sigma)S_4[B] + \quad (141)$$

$$+ J_1[B] \left(-\frac{m^2 z_2}{2} \right) + J_2[B] \left(-\frac{\lambda z_{4,2}}{4} \right) + J_3[B] \left(\frac{z_{2,2}}{2} \right), \quad (142)$$

где $\tilde{\kappa}_5$ вычитает сингулярность, не зависящую от фонового поля, и

$$\begin{aligned} A_1(\sigma) = & \frac{\lambda z_{2,2}}{4} A_0^\Lambda(x) R_{11}^\Lambda(x) \Big|_{x=0} - \frac{m^2 \lambda z_{2,2}}{4} A_0^\Lambda(x) R_{21}^\Lambda(x) \Big|_{x=0} + \\ & + \frac{m^2 \lambda z_2}{4} R_{11}^\Lambda(0) - \frac{m^4 \lambda z_2}{4} R_{21}^\Lambda(0) - \frac{\lambda z_{4,2}}{4} R_0^\Lambda(0) + \frac{m^2 \lambda z_{4,2}}{4} R_{10}^\Lambda(0) - \frac{m^4 \lambda z_{4,2}}{8} R_{20}^\Lambda(0), \end{aligned} \quad (143)$$

$$A_2(\sigma) = -\frac{\lambda^2 z_{2,2}}{16} A_0^\Lambda(x) R_{22}^\Lambda(x) \Big|_{x=0} - \frac{m^2 \lambda^2 z_2}{16} R_{22}^\Lambda(0) + \frac{\lambda^2 z_{4,2}}{8} R_{11}^\Lambda(0) - \frac{m^2 \lambda^2 z_{4,2}}{8} R_{21}^\Lambda(0). \quad (144)$$

Заметим, в (142) для получения $J_3[B]$ использовалась замена деформированного оператора $A_0^\Lambda(\cdot)$ на предельный $A_0(\cdot)$, что возможно при действии на составляющую PS_1^Λ , а именно

$$L \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left((A_0^\Lambda(y) - A_0(y)) PS_1^\Lambda(y, x) - \kappa_s(x) \right) \Big|_{y=x} \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0, \quad (145)$$

где $\kappa_s(x)$ – сингулярная плотность, не зависящая от фонового поля. Доказательство³⁵ такого равенства находится в секции 9.4.

Аналогичным образом, используя формулу (70), вычислим невязку в комбинацию из леммы 5, зависящую от $\tilde{z}_{2,1}$. Ответ для нее можно сформулировать так

$$Cb_1 + Cb_2 - (Cb_1 + Cb_2) \Big|_{\tilde{z}_{2,1}=0} + \kappa_{Cb} \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{\lambda^2 \tilde{z}_{2,1}}{32} I_1(\sigma) S_2[B] + A_3(\sigma) S_m[B] + A_4(\sigma) S_4[B] + \quad (146)$$

$$+ J_1[B] \left(\frac{\lambda \tilde{z}_{2,1}}{4} \left(R_0^\Lambda(0) - m^2 R_{10}^\Lambda(0) - m^2 R_{11}^\Lambda(0) \right) \right) + \quad (147)$$

$$+ J_2[B] \left(-\frac{3\lambda^2 \tilde{z}_{2,1}}{4} A(\sigma) \right), \quad (148)$$

где

$$\begin{aligned} A_3(\sigma) = & -\frac{\lambda^2 \tilde{z}_{2,1}}{4} (I_4(\sigma) - 3m^2 I_2(\sigma) - m^2 I_8(\sigma)) + \frac{\tilde{z}_{2,1}^2}{4} \left(m^2 \lambda A(\sigma) - \lambda R_0^\Lambda(0) + m^2 \lambda R_{10}^\Lambda(0) + m^2 \lambda R_{11}^\Lambda(0) \right) + \\ & + \tilde{z}_{2,1} \left(-\frac{m^2 \lambda}{2} A(\sigma) z_1 + \frac{m^2 \lambda^2}{8} R_0^\Lambda(0) R_{21}^\Lambda(0) + \frac{\lambda \tilde{z}_{4,1}}{4} \left(R_0^\Lambda(0) - m^2 R_{10}^\Lambda(0) - m^2 R_{11}^\Lambda(0) \right) \right), \end{aligned} \quad (149)$$

$$A_4(\sigma) = \frac{\lambda^3 \tilde{z}_{2,1}}{8} (3I_3(\sigma) + I_8(\sigma)) + \frac{3\tilde{z}_{2,1}^2 \lambda^2}{16} A(\sigma) + \tilde{z}_{2,1} \left(\frac{\lambda^3}{32} R_0^\Lambda(0) R_{22}^\Lambda(0) - \frac{\lambda^3}{8} A^2(\sigma) - \frac{\lambda^2}{4} A(\sigma) \tilde{z}_{4,1} \right). \quad (150)$$

Таким образом, для всех отдельных диаграмм из (28) и их некоторых линейных комбинаций были выписаны сингулярные части в общих терминах. То есть в обозначениях для асимптотического разложения (43)–(47) для функции Грина. Дальнейшая задача разбивается на две части. Во-первых, нужно показать, что все нелокальные вклады благополучно сокращаются. Это продемонстрирует,

³⁵Обратим внимание, что равенство доказывается для исследуемой регуляризации, см. секцию 4.4. При расширении типа регуляризации, к примеру, при дополнительной деформации массового параметра, подобное равенство необходимо исследовать отдельно. Более того, в этом случае могут появиться дополнительные контрдиаграммы.

что общие соображения теории перенормировок верны для нашей регуляризации. Во-вторых, нужно выписать явный ответ для трехпетлевых коэффициентов $\{z_{2,3}, z_3, z_{4,3}\}$ констант перенормировки.

Начнем с первого пункта. Для этого необходимо выписать коэффициенты при функционалах $J_i[B]$, где $i = 1, 2, 3, 4$, и убедиться, что они не содержат сингулярных составляющих. В порядке возрастания индекса соотношения выглядят следующим образом

$$\begin{aligned} J_1[B] : & \frac{m^2 \lambda \tilde{z}_1}{4} A(\sigma) + \frac{\lambda \tilde{z}_{2,1}}{4} \left(R_0^\Lambda(0) - m^2 R_{10}^\Lambda(0) - m^2 R_{11}^\Lambda(0) \right) + \frac{\lambda^2}{12} I_4(\sigma) - \\ & - \frac{m^2 \lambda^2}{4} I_2(\sigma) - \frac{m^2 z_2}{2} - \frac{\lambda z_{4,1}}{8} \left(2R_0^\Lambda(0) - 2m^2 R_{10}^\Lambda(0) \right) = -\frac{m^2 \tilde{z}_2}{2} \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0, \\ J_2[B] : & \frac{5\lambda^2 \tilde{z}_{4,1}}{8} A(\sigma) - \frac{3\lambda^2 \tilde{z}_{2,1}}{4} A(\sigma) - \frac{5\lambda^3}{8} I_8(\sigma) + \frac{\lambda^3}{8} A^2(\sigma) - \frac{\lambda^3}{8} I_3(\sigma) - \frac{\lambda z_{4,2}}{4} + \frac{\lambda z_{4,1}}{8} \lambda R_{11}^\Lambda(0) = -\frac{\lambda \tilde{z}_{4,2}}{4} \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0, \\ J_3[B] : & \frac{\lambda^2}{96} I_1(\sigma) + \frac{z_{2,2}}{2} = \frac{\tilde{z}_{2,2}}{2} \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0, \\ J_4[B] : & \frac{3\lambda^2}{16} A(\sigma) - \frac{\lambda z_{4,1}}{8} = -\frac{\lambda \tilde{z}_{4,1}}{8} \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0, \end{aligned}$$

где были использованы равенства

$$R_{11}^\Lambda(0) = A(\sigma) \quad \text{и} \quad I_8(\sigma) = I_3(\sigma) - A^2(\sigma).$$

Таким образом, прямыми вычислениями было проверено, что нелокальные слагаемые не содержат сингулярных коэффициентов. Выражения для коэффициентов перенормировки следуют из суммирования вкладов из лемм 3 и 5 и формул (133)–(144) и (146)–(150). После некоторых арифметических вычислений можно сформулировать следующее утверждение.

Лемма 6. *С учетом всего вышеизложенного, сингулярная составляющая правой части равенства (28), то есть трехпетлевого вклада с контрчленами, равна линейной комбинации функционалов $S_2[B]$, $S_m[B]$ и $S_4[B]$. Нелокальные функционалы $\{J_i[B]\}_{i=1}^4$ из (49)–(50), которые в отдельных диаграммах появляются с сингулярными коэффициентами, входят с конечными по параметру Λ множителями. Трехпетлевые коэффициенты $\{z_{2,3}, z_3, z_{4,3}\}$ для констант перенормировки в общих терминах выписываются следующим образом*

$$\begin{aligned} z_{2,3} = & -\frac{\lambda^2 \tilde{z}_{4,1}}{24} I_1(\sigma) - \frac{\lambda^3}{16} A(\sigma) I_1(\sigma) + \frac{\lambda^3}{32} I_6(\sigma) + \frac{\lambda^2 \tilde{z}_{2,1}}{16} I_1(\sigma) + \tilde{z}_{2,3}, \\ z_3 = & \frac{\lambda \tilde{z}_1 \tilde{z}_{4,1}}{2} A(\sigma) - \frac{\lambda^2 \tilde{z}_1}{2} I_8(\sigma) + \frac{\lambda^2 \tilde{z}_{4,1}}{3m^2} I_4(\sigma) + \frac{\lambda^3}{4m^2} A(\sigma) I_4(\sigma) - \\ & - \lambda^2 \tilde{z}_{4,1} I_2(\sigma) - \frac{\lambda^3}{4} A(\sigma) I_2(\sigma) - \frac{\lambda^3}{4m^2} I_7(\sigma) + \frac{\lambda^3}{4} I_9(\sigma) + \lambda^3 I_{11}(\sigma) - \frac{\lambda^3}{12m^2} I_{14}(\sigma) + \\ & + \frac{\lambda^3}{4} I_{16}(\sigma) + \frac{\lambda^3}{12} I_{19}(\sigma) - \frac{\lambda z_{4,1}}{4} \left(-\frac{\lambda}{m^2} R_0^\Lambda(0) R_{11}^\Lambda(0) + \right. \\ & \left. + \lambda R_{10}^\Lambda(0) R_{11}^\Lambda(0) + \lambda R_0^\Lambda(0) R_{21}^\Lambda(0) \right) + \frac{2}{m^2} \left(A_1(\sigma) + A_3(\sigma) \right) + \tilde{z}_3, \\ z_{4,3} = & \frac{3\lambda \tilde{z}_{4,1}^2}{2} A(\sigma) + \frac{3\lambda^3}{2} I_5(\sigma) - 3\lambda^2 \tilde{z}_{4,1} I_8(\sigma) - 6\lambda^2 \tilde{z}_{4,1} I_3(\sigma) - \\ & - \frac{3\lambda^3}{2} A(\sigma) I_3(\sigma) + \frac{3\lambda^3}{2} I_{10}(\sigma) + 6\lambda^3 I_{12}(\sigma) + \frac{3\lambda^3}{4} I_{17}(\sigma) + \frac{\lambda^3}{4} I_{20}(\sigma) + \\ & + \frac{3\zeta(3)L\lambda^3}{16(4\pi^2)^3} - \frac{3\lambda^2 z_{4,1}}{4} \left(A^2(\sigma) + R_0^\Lambda(0) R_{22}^\Lambda(0) \right) + \frac{24}{\lambda} \left(A_2(\sigma) + A_4(\sigma) \right) + \tilde{z}_{4,3}. \end{aligned}$$

Окончательно, переходя от произвольных констант $\{\tilde{z}_{2,3}, \tilde{z}_3, \tilde{z}_{4,3}\}$ к $\{\bar{z}_{2,3}, \bar{z}_3, \bar{z}_{4,3}\}$ и используя явный вид асимптотических разложений из секции 9.3, получим ответ в виде

$$\begin{aligned} z_{2,3} &= L^2 a_2 + L a_1 + \bar{z}_{2,3}, \\ z_3 &= L^2 (L^2 b_6 + L b_5 + b_4) + L^3 b_3 + L^2 b_2 + L b_1 + \bar{z}_3, \\ z_{4,3} &= L^3 c_3 + L^2 c_2 + L c_1 + \bar{z}_{4,3}, \end{aligned}$$

где

$$a_1 = \frac{\lambda^3 (\alpha_2(\mathbf{f}) - \alpha_6(\mathbf{f}))}{64(4\pi^2)^3} - \frac{\lambda^2 \bar{z}_{4,1}}{48(4\pi^2)^2} + \frac{\lambda^2 \bar{z}_{2,1}}{32(4\pi^2)^2}, \quad (151)$$

$$a_2 = -\frac{\lambda^3}{128(4\pi^2)^3}, \quad (152)$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{\lambda^3}{4(4\pi^2)^3} \left(\frac{47}{192} + \frac{\alpha_2(\mathbf{f})}{48} - \frac{(4\pi^2)^2 \alpha_3(\mathbf{f})}{12} + \frac{(4\pi^2)^2 \alpha_{11}(\mathbf{f})}{3} \right) + \\ &\quad - \frac{\lambda^2 (\bar{z}_1 - 4\bar{z}_{2,1} + 2\bar{z}_{4,1})}{16(4\pi^2)^2} + \frac{\lambda (\bar{z}_1 \bar{z}_{4,1} + \bar{z}_2 - 2\bar{z}_{2,2} + \bar{z}_{4,2} - 2(\bar{z}_1 + \bar{z}_{4,1})\bar{z}_{2,1} + 3\bar{z}_{2,1}^2)}{4(4\pi^2)}, \end{aligned} \quad (153)$$

$$b_2 = -\frac{41\lambda^3}{384(4\pi^2)^3} + \frac{\lambda^2 (\bar{z}_1 - 4\bar{z}_{2,1} + 2\bar{z}_{4,1})}{8(4\pi^2)^2}, \quad (154)$$

$$b_3 = \frac{7\lambda^3}{96(4\pi^2)^3}, \quad (155)$$

$$\begin{aligned} b_4 &= -\frac{\lambda^3}{12m^2} \left(\frac{3 + \alpha_1(\mathbf{f}) + 6\alpha_2(\mathbf{f})}{8(4\pi^2)^3} - \frac{\alpha_2(\mathbf{f})\alpha_3(\mathbf{f})}{2(4\pi^2)} + 3\alpha_7(\mathbf{f}) + 3\alpha_8(\mathbf{f}) + \alpha_9(\mathbf{f}) + \alpha_{10}(\mathbf{f}) \right) + \\ &\quad + \frac{\lambda^2 \alpha_3(\mathbf{f}) \bar{z}_{4,1}}{3m^2} - \frac{\lambda^2 \alpha_3(\mathbf{f}) \bar{z}_{2,1}}{2m^2} + \frac{\lambda(1 + \mathbf{f}(0))(\bar{z}_{2,1} \bar{z}_{4,1} - \bar{z}_{2,1}^2 - \lambda \bar{z}_{2,1} \alpha_2(\mathbf{f}) / (8\pi^2) + \bar{z}_{2,2} - \bar{z}_{4,2})}{2(4\pi^2)m^2}, \end{aligned} \quad (156)$$

$$b_5 = -\frac{\lambda^2 (1 + \mathbf{f}(0))}{16(4\pi^2)^2 m^2} \left(-\frac{35\lambda}{12(4\pi^2)} + 12\bar{z}_{4,1} - 18\bar{z}_{2,1} \right) + \frac{\lambda^3 \alpha_3(\mathbf{f})}{4(4\pi^2)m^2}, \quad (157)$$

$$b_6 = -\frac{9\lambda^3 (1 + \mathbf{f}(0))}{32(4\pi^2)^3 m^2}, \quad (158)$$

$$c_1 = -\frac{3\lambda^3}{2(4\pi^2)^3} \left(-\frac{77}{384} + \frac{3\alpha_1(\mathbf{f})}{8} - \frac{19\alpha_2(\mathbf{f})}{96} - \frac{3\alpha_2^2(\mathbf{f})}{16} \right) + \frac{3\lambda^3 \zeta(3)}{16(4\pi^2)^3} -$$

$$\begin{aligned} &\quad - \frac{3\lambda^3}{2(4\pi^2)} \left(\frac{\alpha_3(\mathbf{f})}{24} + \frac{3\alpha_4(\mathbf{f})}{2} + \frac{3\alpha_5(\mathbf{f})}{2} - \frac{\alpha_{11}(\mathbf{f})}{6} \right) - \\ &\quad - \frac{9\lambda^2 \bar{z}_{4,1}}{8(4\pi^2)^2} + \frac{3\lambda^2 \bar{z}_{2,1}}{2(4\pi^2)^2} - \frac{3\lambda}{2(4\pi^2)} \left(-\frac{3\bar{z}_{2,1}^2}{2} - \frac{\bar{z}_{4,1}^2}{2} + 2\bar{z}_{2,1} \bar{z}_{4,1} + \bar{z}_{2,2} - \bar{z}_{4,2} \right), \end{aligned}$$

$$c_2 = -\frac{89\lambda^3}{128(4\pi^2)^3} + \frac{27\lambda^2 \bar{z}_{4,1}}{16(4\pi^2)^2} - \frac{9\lambda^2 \bar{z}_{2,1}}{4(4\pi^2)^2}, \quad (160)$$

$$c_3 = \frac{27\lambda^3}{64(4\pi^2)^3}. \quad (161)$$

7 Общая постановка задачи

7.1 О переходе от базовой к общей модели

Рассмотрим обобщение для модели с действием (2) путем перехода от вещественного поля $\phi(\cdot)$ к набору вещественных полей $\{\phi_i(\cdot)\}_{i=1}^n$, где $n \in \mathbb{N}$. Более того, взаимодействие четвертой степени

можно дополнить кубической зависимостью. Тогда классическое действие представимо в виде

$$\int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left[t^i \phi_i(x) + \frac{1}{2} \phi_i(x) A^{ij}(x) \phi_j(x) + \frac{g^{ijk}}{3!} \phi_i(x) \phi_j(x) \phi_k(x) + \frac{\lambda^{ijkn}}{4!} \phi_i(x) \phi_j(x) \phi_k(x) \phi_n(x) \right], \quad (162)$$

где

$$A^{ij}(x) = \delta^{ij} A_0(x) + M^{ij}, \quad A_0(x) = -\partial_{x_\mu} \partial_{x^\mu},$$

и коэффициенты t^i , M^{ij} , g^{ijk} и λ^{ijkn} являются вещественными и полностью симметричными по индексам. Заметим, что при выборе

$$n = 1, \quad t^1 = 0, \quad M^{11} = m^2, \quad g^{111} = 0, \quad \lambda^{1111} = \lambda, \quad (163)$$

действие (162) переходит в ранее изученное (2). К такому действию можно применить метод фонового поля в рамках представления функциональным интегралом. Для этого, согласно общей логике, необходимо сделать сдвиг

$$\phi_i(x) \rightarrow B_i(x) + \sqrt{\hbar} \phi_i(x).$$

Тогда квантовое действие сводится к пертурбативному разложению, в котором в качестве вершин вместо (8)–(10) необходимо взять следующие объекты

$$\Gamma_1 \rightarrow \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \phi_i(x) \left(t^i + A^{ij}(x) B_j(x) + \frac{g^{ikj}}{2} B_k(x) B_j(x) + \frac{\lambda^{iknj}}{3!} B_k(x) B_n(x) B_j(x) \right), \quad (164)$$

$$\Gamma_2 \rightarrow \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \phi_i(x) \left(A^{ij}(x) + g^{ikj} B_k(x) + \frac{\lambda^{iknj}}{2} B_k(x) B_n(x) \right) \phi_j(x),$$

$$\Gamma_3 \rightarrow \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(g^{ijk} + \lambda^{ijkn} B_n(x) \right) \phi_i(x) \phi_j(x) \phi_k(x),$$

$$\Gamma_4 \rightarrow \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \lambda^{ijkn} \phi_i(x) \phi_j(x) \phi_k(x) \phi_n(x).$$

Такой набор элементов для диаграммной техники нужно дополнить функцией Грина, которая в данном случае имеет два индекса и является решением уравнения

$$\left(\delta^{im} A_0(x) + V^{mj}(x) \right) G_{mj}(x, y) = \delta^{ij} \delta(x - y),$$

где потенциалом является матрица

$$V^{ij}(x) = M^{ij} + g^{ikj} B_k(x) + \frac{\lambda^{iknj}}{2} B_k(x) B_n(x). \quad (165)$$

При таком переходе общий вид диаграмм Фейнмана не изменится. Следующим этапом является введение регуляризации. Ее можно ввести, руководствуясь общей логикой из раздела 4.4, путем прибавления к классическому действию регуляризующей добавки. В данном случае она имеет вид³⁶

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \phi_i(x) \left(A_0^\Lambda(x) - A_0(x) \right) \phi_i(x). \quad (166)$$

Как это было показано, в этом случае функция Грина приобретет деформацию $G_{ij}(x, y) \rightarrow G_{ij}^\Lambda(x, y)$ и будет иметь около диагонали, при $x \sim y$, следующее асимптотическое разложение³⁷

$$\begin{aligned} G_{ij}^\Lambda(x, y) = & R_0^\Lambda(x - y) \delta^{ij} - \frac{1}{2} R_{11}^\Lambda(x - y) (V^{ij}(x) + V^{ij}(y)) + \\ & + \frac{1}{4} R_{22}^\Lambda(x - y) (V^{ik}(x) V^{kj}(x) + V^{ik}(y) V^{kj}(y)) + PS_{1,ij}^\Lambda(x, y), \end{aligned}$$

³⁶Обратим внимание, что в более общем случае для каждого поля ϕ_i можно вводить отдельную деформацию оператора, то есть $A_0 \delta^{ij} \rightarrow A_{0,i}^\Lambda \delta^{ij}$.

³⁷Здесь сразу используются функции R_{11}^Λ и R_{22}^Λ вместо R_{10}^Λ , R_{20}^Λ и R_{21}^Λ с явным учетом регуляризации.

где последние функции определены и описаны в разделе 4.3.

Перейдем к заключительному шагу – перенормировке. Заметим, что в данном случае ее можно осуществить путем следующих замен в классическом деформированном действии

$$t^i \rightarrow t_r^i = t^i + \sum_{m=1}^{+\infty} \hbar^m t_{r,m}^i, \quad M^{ij} \rightarrow M_r^{ij} = M^{ij} + \sum_{m=1}^{+\infty} \hbar^m M_{r,m}^{ij}, \quad (167)$$

$$g^{ijk} \rightarrow g_r^{ijk} = g^{ijk} + \sum_{m=1}^{+\infty} \hbar^m g_{r,m}^{ijk}, \quad \lambda^{ijkn} \rightarrow \lambda_r^{ijkn} = \lambda^{ijkn} + \sum_{m=1}^{+\infty} \hbar^m \lambda_{r,m}^{ijkn}, \quad (168)$$

$$A_0^\Lambda \delta^{ij}, A_0 \delta^{ij} \rightarrow A_0^\Lambda \delta_r^{ij}, A_0 \delta_r^{ij}, \quad \text{где } \delta_r^{ij} = \delta^{ij} + \sum_{m=1}^{+\infty} \hbar^m \delta_{r,m}^{ij}. \quad (169)$$

В данном случае, помимо трех констант перенормировки, добавляются еще две. Это связано с появлением в классическом действии (162) слагаемых с первой и третьей степенями полей.

Таким образом, для получения трех коэффициентов констант перенормировки не нужно проводить все вычисления заново. Нужно лишь подправить вычисления, заменив при подсчете (в ключевых соотношениях) константы связи и фоновые поля на новые коэффициенты. Это можно сделать согласно следующему набору правил:

- при использовании разложения функции Грина заменить имеющийся потенциал на матричный аналог из (165)

$$m^2 + B^2(x)/2 \rightarrow V^{ij}(x);$$

- заменить коэффициент в вершине с четырьмя внешними линиями следующим образом

$$\lambda \rightarrow \lambda^{ijkn};$$

- заменить коэффициент в вершине с тремя внешними линиями следующим образом

$$\lambda B(x) \rightarrow g^{ijk} + \lambda^{ijkn} B_n(x);$$

- «соединить» свободные индексы согласно виду диаграммы.

Важно отметить, что существенно новые вершины при таком обобщении не появляются. Слагаемые с первой степенью (164) в квантовом действии не участвуют, поскольку они нарушают сильную связность. При этом они все же являются частью квантового уравнения движения. Тем не менее, на каждом шаге перенормировки будут появляться члены, пропорциональные первой степени фонового поля, и, таким образом, константа t^i будет перенормироваться согласно общей схеме (167).

7.2 Значения коэффициентов

Покажем пример перехода от случая $n = 1$ к произвольному $n > 1$ на примере первой петли. Для остальных случаев сформулируем лишь окончательные ответы, поскольку подсчеты простые и монотонные. Введем для начала несколько вспомогательных функционалов

$$S_{2,ij}[B] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x (\partial_{x_\mu} B_i(x)) (\partial_{x^\mu} B_j(x)), \quad S_{i_1 \dots i_k}[B] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x B_{i_1}(x) \cdot \dots \cdot B_{i_k}(x). \quad (170)$$

Далее выпишем аналог для формулы (54) с учетом последних замечаний

$$\begin{aligned} & - \frac{R_0^\Lambda(0)}{2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(g^{iik} B_k(x) + \frac{\lambda^{iikj}}{2} B_k(x) B_j(x) \right) + \frac{A(\sigma)}{4} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(2M^{ij} g^{ijk} B_k(x) + \right. \\ & + g^{ijk_1} g^{ijk_2} B_{k_1}(x) B_{k_2}(x) + M^{ij} \lambda^{ijk_1 k_2} B_{k_1}(x) B_{k_2}(x) + g^{k_1 ij} \lambda^{k_2 k_3 ij} B_{k_1}(x) B_{k_2}(x) B_{k_3}(x) + \\ & \left. + \frac{1}{4} \lambda^{k_1 k_2 ij} \lambda^{k_3 k_4 ij} B_{k_1}(x) B_{k_2}(x) B_{k_3}(x) B_{k_4}(x) \right). \end{aligned}$$

Учитывая определения из (170) и вспомогательные обозначения из секции 9.6, последнее разложение можно представить следующим образом

$$\begin{aligned} S_i[B] & \left(-\frac{R_0^\Lambda(0)}{2} \mathbf{T}_{1,1,1}^i + \frac{A(\sigma)}{2} \mathbf{T}_{1,1,2}^i \right) + \\ & + S_{i_1 i_2}[B] \left(-\frac{R_0^\Lambda(0)}{4} \mathbf{T}_{1,2,1}^{i_1 i_2} + \frac{A(\sigma)}{4} \mathbf{T}_{1,2,2}^{i_1 i_2} + \frac{A(\sigma)}{4} \mathbf{T}_{1,2,3}^{i_1 i_2} \right) + \\ & + S_{i_1 i_2 i_3}[B] \frac{A(\sigma)}{4} \mathbf{T}_{1,3,1}^{i_1 i_2 i_3} + S_{i_1 i_2 i_3 i_4}[B] \frac{A(\sigma)}{16} \mathbf{T}_{1,4,1}^{i_1 i_2 i_3 i_4}. \end{aligned}$$

Тогда, используя символ \mathbf{S} для обозначения симметризации по индексам с делением на соответствующий факториал³⁸, перенормировка в первой петле выглядит следующим образом

$$t_{r,1}^i = -\frac{1}{2} R_0^\Lambda(0) \mathbf{T}_{1,1,1}^i + \frac{1}{2} A(\sigma) \mathbf{T}_{1,1,2}^i + \tilde{t}_{r,1}^i, \quad (171)$$

$$\delta_{r,1}^{i_1 i_2} = \tilde{\delta}_{r,1}^{i_1 i_2}, \quad (172)$$

$$M_{r,1}^{i_1 i_2} = -\frac{1}{2} R_0^\Lambda(0) \mathbf{T}_{1,2,1}^{i_1 i_2} + \frac{1}{2} A(\sigma) \mathbf{T}_{1,2,2}^{i_1 i_2} + \frac{1}{2} A(\sigma) \mathbf{T}_{1,2,3}^{i_1 i_2} + \tilde{M}_{r,1}^{i_1 i_2}, \quad (173)$$

$$g_{r,1}^{i_1 i_2 i_3} = \frac{3}{2} A(\sigma) \mathbf{S} \mathbf{T}_{1,3,1}^{i_1 i_2 i_3} + \tilde{g}_{r,1}^{i_1 i_2 i_3}, \quad (174)$$

$$\lambda_{r,1}^{i_1 i_2 i_3 i_4} = \frac{3}{2} A(\sigma) \mathbf{S} \mathbf{T}_{1,4,1}^{i_1 i_2 i_3 i_4} + \tilde{\lambda}_{r,1}^{i_1 i_2 i_3 i_4}, \quad (175)$$

где $\tilde{t}_{r,1}^i$, $\tilde{\delta}_{r,1}^{i_1 i_2}$, $\tilde{M}_{r,1}^{i_1 i_2}$, $\tilde{g}_{r,1}^{i_1 i_2 i_3}$ и $\tilde{\lambda}_{r,1}^{i_1 i_2 i_3 i_4}$ – полностью симметричные постоянные коэффициенты, имеющие асимптотику $\mathcal{O}(1)$ по параметру регуляризации Λ .

Аналогичным образом можно получить коэффициенты для второй петли. Для этого удобно выписать локальные сингулярные части для отдельных диаграмм d_1 , d_2 и cd_1 . Явные равенства представлены в секции 9.7. Ответы для коэффициентов констант перенормировки, с учетом обозначений из секции 9.6, выписываются следующим образом

$$t_{r,2}^i = \frac{1}{6} \mathbf{I}_4(\sigma) \mathbf{T}_{2,1,1}^i - \frac{1}{2} \mathbf{I}_2(\sigma) \mathbf{T}_{2,1,2}^i - \frac{1}{4} \mathbf{I}_3(\sigma) \mathbf{T}_{2,1,3}^i + \frac{1}{4} R_0^\Lambda(0) A(\sigma) \mathbf{T}_{2,1,4}^i - \frac{1}{4} A^2(\sigma) \mathbf{T}_{2,1,5}^i + \quad (176)$$

$$+ \frac{1}{2} A(\sigma) \mathbf{T}_{2,1,6}^i - \frac{1}{2} R_0^\Lambda(0) \mathbf{T}_{2,1,7}^i + \frac{1}{2} A(\sigma) \mathbf{T}_{2,1,8}^i - A(\sigma) \mathbf{T}_{2,1,9}^i + \frac{1}{2} R_0^\Lambda(0) \mathbf{T}_{2,1,10}^i + \tilde{t}_{r,2}^i, \quad (177)$$

$$\delta_{r,2}^{i_1 i_2} = -\frac{1}{48} \mathbf{I}_1(\sigma) \mathbf{T}_{2,2,1}^{i_1 i_2} + \tilde{\delta}_{r,2}^{i_1 i_2}, \quad (178)$$

$$M_{r,2}^{i_1 i_2} = \frac{1}{6} \mathbf{I}_4(\sigma) \mathbf{T}_{2,2,1}^{i_1 i_2} - \frac{1}{2} \mathbf{I}_2(\sigma) \mathbf{T}_{2,2,2}^{i_1 i_2} - \frac{1}{4} \mathbf{I}_3(\sigma) \mathbf{T}_{2,2,3}^{i_1 i_2} - \mathbf{I}_3(\sigma) \mathbf{S} \mathbf{T}_{2,2,4}^{i_1 i_2} + \frac{1}{4} R_0^\Lambda(0) A(\sigma) \mathbf{T}_{2,2,5}^{i_1 i_2} - \quad (179)$$

$$- \frac{1}{4} A^2(\sigma) \mathbf{T}_{2,2,6}^{i_1 i_2} - \frac{1}{4} A^2(\sigma) \mathbf{T}_{2,2,7}^{i_1 i_2} + \frac{1}{2} A(\sigma) \mathbf{T}_{2,2,8}^{i_1 i_2} + A(\sigma) \mathbf{S} \mathbf{T}_{2,2,9}^{i_1 i_2} - \frac{1}{2} R_0^\Lambda(0) \mathbf{T}_{2,2,10}^{i_1 i_2} + \quad (180)$$

$$+ \frac{1}{2} A(\sigma) \mathbf{T}_{2,2,11}^{i_1 i_2} - A(\sigma) \mathbf{T}_{2,2,12}^{i_1 i_2} - A(\sigma) \mathbf{T}_{2,2,13}^{i_1 i_2} + \frac{1}{2} R_0^\Lambda(0) \mathbf{T}_{2,2,14}^{i_1 i_2} + \tilde{M}_{r,2}^{i_1 i_2}, \quad (181)$$

$$g_{r,2}^{i_1 i_2 i_3} = -\frac{3}{2} \mathbf{I}_3(\sigma) \mathbf{S} \mathbf{T}_{2,3,1}^{i_1 i_2 i_3} - \frac{3}{2} \mathbf{I}_3(\sigma) \mathbf{S} \mathbf{T}_{2,3,2}^{i_1 i_2 i_3} - \frac{3}{4} A^2(\sigma) \mathbf{S} \mathbf{T}_{2,3,3}^{i_1 i_2 i_3} + \quad (182)$$

$$+ \frac{3}{2} A(\sigma) \mathbf{S} \mathbf{T}_{2,3,4}^{i_1 i_2 i_3} + \frac{3}{2} A(\sigma) \mathbf{S} \mathbf{T}_{2,3,5}^{i_1 i_2 i_3} - 3A(\sigma) \mathbf{S} \mathbf{T}_{2,3,6}^{i_1 i_2 i_3} + \tilde{g}_{r,2}^{i_1 i_2 i_3}, \quad (183)$$

$$\lambda_{r,2}^{i_1 i_2 i_3 i_4} = -3 \mathbf{I}_3(\sigma) \mathbf{S} \mathbf{T}_{2,4,1}^{i_1 i_2 i_3 i_4} - \frac{3}{4} A^2(\sigma) \mathbf{S} \mathbf{T}_{2,4,2}^{i_1 i_2 i_3 i_4} + 3A(\sigma) \mathbf{S} \mathbf{T}_{2,4,3}^{i_1 i_2 i_3 i_4} - 3A(\sigma) \mathbf{S} \mathbf{T}_{2,4,4}^{i_1 i_2 i_3 i_4} + \tilde{\lambda}_{r,2}^{i_1 i_2 i_3 i_4}, \quad (184)$$

³⁸К примеру, для коэффициента с двумя индексами \mathbf{T}^{ij} получаем $\mathbf{S} \mathbf{T}^{ij} = (\mathbf{T}^{ij} + \mathbf{T}^{ji})/2!$.

где вновь были введены произвольные постоянные коэффициенты. Обратим внимание, что в секции 9.7 не выписаны нелокальные части. Не трудно показать, что они сокращаются в окончательной сумме.

Продолжая вычисления, можно показать, что коэффициенты для третьей петли имеют следующий вид

$$t_{r,3}^i = \sum_{k=1}^6 \bar{\mathbf{T}}_{3,1,k}^i + \tilde{t}_{r,3}^i, \quad (185)$$

$$\delta_{r,3}^{i_1 i_2} = -\frac{1}{48} \mathbf{I}_1(\sigma) \left(\mathbf{T}_{3,2,9}^{i_1 i_2} + \mathbf{T}_{3,2,9}^{i_2 i_1} \right) + \frac{1}{32} \mathbf{I}_6(\sigma) \mathbf{T}_{3,2,14}^{i_1 i_2} - \frac{1}{16} \mathbf{A}(\sigma) \mathbf{I}_1(\sigma) \mathbf{T}_{3,2,14}^{i_1 i_2} + \frac{1}{16} \mathbf{I}_1(\sigma) \mathbf{T}_{3,2,42}^{i_1 i_2} + \tilde{\delta}_{r,3}^{i_1 i_2}, \quad (186)$$

$$M_{r,3}^{i_1 i_2} = 2 \sum_{k=1}^6 \mathbf{S} \bar{\mathbf{T}}_{3,1,k}^{i_1 i_2} + \tilde{M}_{r,3}^{i_1 i_2}, \quad (187)$$

$$g_{r,3}^{i_1 i_2 i_3} = 6 \sum_{k=1}^6 \mathbf{S} \bar{\mathbf{T}}_{3,1,k}^{i_1 i_2 i_3} + \tilde{g}_{r,3}^{i_1 i_2 i_3}, \quad (188)$$

$$\lambda_{r,3}^{i_1 i_2 i_3 i_4} = 24 \sum_{k=1}^6 \mathbf{S} \bar{\mathbf{T}}_{3,1,k}^{i_1 i_2 i_3 i_4} + \tilde{\lambda}_{r,3}^{i_1 i_2 i_3 i_4}, \quad (189)$$

где были использованы определения и соотношения из разделов 9.6 и 9.7. Таким образом, были найдены трехпетлевые коэффициенты для констант перенормировки в обобщенной модели. В частном случае (163) они переходят в ранее изученные в теореме 1.

8 Заключение

Данная секция в большей степени посвящена комментариям, накопившимся по ходу вычислений. Однако, здесь будет уместно еще раз перечислить основные результаты, изложенные в разделе 2:

- реализована регуляризация с обрезанием в координатном представлении, сохраняющая связь квантового уравнения движения и квантового действия;
- вычислены первые три коэффициента для констант перенормировки для скалярной модели с четверным взаимодействием как в стандартной формулировке, так и в обобщенной;
- показана согласованность коэффициентов с ранее известными;
- изучено асимптотическое разложение для функции Грина около диагонали;
- вычислены асимптотические разложения для регуляризованных интегралов;
- проверены правила перенормировочной \mathcal{R} -операции на примере трехпетлевых диаграмм;
- подсчитаны первые три коэффициента для β -функции (согласуются с общей теорией).

8.1 Некоторые замечания

О квантовом уравнении движения. В разделе 3 кратко изложен вывод формулы для квантового действия W , которое было представлено в виде суммы сильно связанных диаграмм. При этом, как это было отмечено, квантовое действие в действительности является функционалом $W[B]$, зависящим от фонового поля B , которое в свою очередь является решением квантового уравнения движения $Q[B](x) = 0$ с набором граничных условий. Сам же функционал $Q[B](x)$ определяется суммой всех сильно связанных диаграмм с одним внешним свободным концом.

Определение фонового поля при помощи квантового уравнения движения в изложенной формулировке является принципиальным, поскольку такое поле позволяет занулить все не сильно связанные диаграммы при выводе представления (15) для квантового действия. При этом существует

соотношение (30), которое говорит, что квантовое уравнение движения получается варьированием квантового действия по фоновому полю.

Предложенная и успешно реализованная регуляризация, см. раздел 4, позволяет сохранить связь квантового уравнения движения и квантового действия после деформации, см. (31), и после перенормировки, см. (37). Такой подход гарантирует, что после перенормировки квантового действия автоматически перенормируется и квантовое уравнение движения. С такой точки зрения найденные коэффициенты констант перенормировки являются универсальными.

О сингулярных составляющих в $PS_1^\Lambda(x, y)$. Важно заметить, что функция $PS_1^\Lambda(x, y)$, зависящая от фонового поля B и представленная в секции 9.4, содержит не только гладкие нелокальные части и логарифмические вклады с «достаточной» гладкостью, но и функции, которые при подсчете расхождений ведут к сингулярностям, однако обращаются в нуль из-за наличия полной производной.

К таким вкладам можно отнести слагаемые, в которых находятся $\partial_{x^\nu} B(x)$ и $\partial_{x^\nu} \partial_{x^\mu} B(x)$. По ходу всех вычислений такие составляющие функции Грина не обсуждались и находились в определении $PS_1^\Lambda(x, y)$. Сейчас же подчеркнем, что они не дают вклад. Этот факт был проверен отдельно явными вычислениями.

Об инвариантности коэффициентов констант перенормировки. В работе [49] при изучении двухпетлевого вклада в эффективное действие теории Янга–Миллса было замечено, что коэффициенты перенормировки инвариантны относительно сдвига функции Грина на локальные гладкие нулевые моды специального вида. Заметим, что в данной работе выполняется такое же свойство. Это можно проверить либо прямыми вычислениями, либо сослаться на сдвиг функции $PS_1^\Lambda(x, y)$, которая входит без сингулярных коэффициентов в перенормированное эффективное действие.

О смене базиса для сингулярных составляющих. Также важно обратить внимание на тот факт, что выбор функций (45)–(47) не является единственным. Их можно заменить другими функциями, имеющие такое же сингулярное поведение. Другими словами, можно поменять «достаточно гладкую» часть, отправив невязку в $PS_1^\Lambda(x, y)$. Принимая во внимание то, что функция $PS_1^\Lambda(x, y)$ из расчетов выпадает, на финальный ответ для коэффициентов перенормировки подобная замена не повлияет. Для примера, другим интересным выбором может стать

$$\begin{aligned} R_0^\Lambda(x - y) &\rightarrow R_0^{\Lambda, \sigma}(x - y), \\ R_{11}^\Lambda(x - y) &\rightarrow \int_{\mathbb{R}^4} d^4 z R_0^{\Lambda, \sigma}(x - z) R_0^{\Lambda, \sigma}(z - y), \\ R_{22}^\Lambda(x - y) &\rightarrow 2 \int_{\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4} d^4 z d^4 u R_0^{\Lambda, \sigma}(x - z) R_0^{\Lambda, \sigma}(z - u) R_0^{\Lambda, \sigma}(u - y) - \\ &\quad - 2 \int_{B_{1/\sigma} \times B_{1/\sigma}} d^4 z d^4 u R_0(z) R_0^{+\infty, \sigma}(z - u) R_0(u), \end{aligned}$$

где функция $R_0^{\Lambda, \sigma}(\cdot)$ определена в (108). Такие функции приводят к более симметричному виду сингулярных расходящихся диаграмм, хотя и менее приятным с точки зрения проведения вычислений по сравнению с использованными в данной работе.

О более простом подсчете. Следует заметить, что в секции 6.2 можно напрямую применить выражение (72) и получить разложение для сингулярной части. Однако, несмотря на тот факт, что результат получится правильным, такая процедура не является доказательством. Действительно, в этом случае не ясно, почему нет других сингулярностей, и почему подобный механизм должен работать. Именно по этой причине было предложено аккуратное доказательство применимости разложения (72). Похожая ситуация была проделана и в секции 6.4, где появляются расхождении более высокого порядка.

О матричных коэффициентах. В обобщенной постановке задачи (162) коэффициенты имеют несколько индексов. Это приводит к тому, что в ответе появляются наборы громоздких выражений

с различными комбинациями, см. раздел 9.6. Обратим внимание, что при вычислениях удобнее работать не с аналитическим представлением, а с диаграммным. Действительно, если сопоставить коэффициенту $\lambda^{i_1 i_2 i_3 i_4}$ вершину с четырьмя линиями, коэффициенту $g^{i_1 i_2 i_3}$ вершину с тремя линиями и т.д., то в итоге все комбинации из секции 9.6 примут наглядный вид. В работе выписан аналитический ответ, поскольку он сопоставим по объему с диаграммным. Похожая идея с переходом к «диаграммам Фейнмана» используется в теории групп, см. [50].

О деформации классического действия. Как было упомянуто, регуляризация вводится путем искажения классического действия. В случае четверного взаимодействия деформация производится при помощи прибавления регуляризующей добавки $S[\phi, \Lambda]$, см. формулы (51) и (166), которая зависит от поля $\phi(\cdot)$. При этом предполагалось, что поле $\phi(\cdot)$ принадлежит функциональному пространству после применения метода фонового поля.

Обратим внимание, что в действительности можно добавлять регуляризующее слагаемое и до применения метода фонового поля, то есть добавлять $S[B + \sqrt{\hbar}\phi, \Lambda]/\hbar$ вместо $S[\phi, \Lambda]$. На процедуру перенормировки и коэффициенты констант перенормировки это не повлияет. Изменения (замена A_0 на A_0^Λ) произойдут лишь в классическом действии $S[B]$ и вершине с одной внешней линией $\Gamma_1[B, \phi]$.

О дополнительной проверке коэффициентов. Разумеется, отдельное внимание стоит уделить дополнительной проверке вычисленных коэффициентов. Подчеркнем, что расходимости вида $\Lambda^2 L^k$ и L^{k+1} для $k \geq 1$ могут быть найдены без трудоемкого подсчета основных диаграмм.

Для проверки этого применим оператор $-\sigma\partial_\sigma$ к обеим сторонам равенств (26)–(28). Тогда с обеих сторон под дифференцирование попадут только части, зависящие от коэффициентов перенормировки. К примеру, в формуле (28) обратятся в нуль слагаемые с диаграммами d_3 – d_8 , поскольку они не зависят от вспомогательного параметра σ . Он генерируется в них в процессе нахождения сингулярной части при разбиении интегралов и функции Грина на части. Таким образом, для вычисления упомянутых расходимостей достаточно исследовать лишь контрдиаграммы, что является существенно более простой задачей.

Отметим, что подобная проверка была успешно пройдена.

8.2 Благодарности

Работа финансово поддержана Министерством науки и высшего образования РФ, грант 075-15-2022-289, и фондом развития теоретической физики и математики «БАЗИС», грант «Молодая Математика России».

Автор выражает благодарность Н.В.Харук за аккуратное прочтение текста, многочисленные комментарии, критику и предложения. Дополнительно А.В.Иванов выражает особую благодарность Н.В.Харук и К.А.Иванову за создание благоприятной и стимулирующей обстановки для написания работы. Также автор признателен М.А.Русских за обсуждения разделов 5.2 и 6.4 в рамках его обучения в магистратуре.

Заявление о доступности данных. Обмен данными неприменим к данной статье, поскольку в ходе текущего исследования не были сгенерированы или проанализированы никакие наборы данных.

Заявление о конфликте интересов. Автор утверждает, что конфликта интересов нет.

9 Приложение

9.1 О коэффициентах теплового ядра

В данной секции показана связь разложения для функции Грина из раздела 4.3 с представлением около диагонали, где используются коэффициенты для асимптотического разложения теплового ядра [51–53] при малых значениях собственного времени. Для определенности введем в рассмотрение

оператор Лапласа в четырехмерном евклидовом пространстве вида

$$\mathcal{A}(x) = -\partial_{x_\mu} \partial_{x^\mu} v(x),$$

где $v(x)$ – гладкий вещественный скалярный потенциал. Тогда, повторяя общую структуру разложения функции Грина $\mathcal{G}(x, y)$ около диагонали $x \sim y$ из работ [54, 55], получаем

$$\mathcal{G}(x, y) = \sum_{k=0}^{+\infty} R_k(x - y) a_k(x, y) + \text{гладкая нелокальная часть.} \quad (190)$$

В последней формуле функции $R_k(\cdot)$ включают в себя сингулярные составляющие, в том числе и логарифмическое поведение. Коэффициенты $a_k(x, y)$ называются коэффициентами Сили–деВитта [56, 57]. Также в названии часто отмечают фамилии Адамар, Минакшисударам [58] и Гилки [59]. Эти коэффициенты являются гладкими функциями и при близких аргументах $x \sim y$ раскладываются в ряд Тейлора в терминах потенциала и его производных. Последняя часть из разложения (190) имеет также гладкое поведение и является функционалом, зависящим от потенциала.

Известно, что замкнутой формулы для коэффициентов Сили–деВитта вне диагонали нет, однако их можно находить около диагонали в виде ряда по степеням вектора $x^\mu - y^\mu$. Существует целый ряд методов [60–64]. Первые же порядки таковы

$$a_0(x, y) = 1, \quad a_1(x, y) = v(y) + o(1), \quad a_2(x, y) = \frac{1}{6} \partial_{y_\mu} \partial_{y^\mu} v(y) + \frac{1}{2} v^2(y) + o(1), \quad (191)$$

где малость поправки рассматривается относительно разности векторов x и y .

Покажем, что разложение (190) согласуется с используемым в (43) при снятии регуляризации. Действительно, заметим, что в скалярной модели потенциал равен

$$v(x) = m^2 + \frac{\lambda}{2} B^2(x).$$

Далее выберем $R_0(\cdot)$ как в (39), а также, используя (45) и (47), возьмем

$$R_1(\cdot) = R_{11}^\Lambda(\cdot) \Big|_{\Lambda \rightarrow +\infty}, \quad R_2(\cdot) = R_{22}^\Lambda(\cdot) \Big|_{\Lambda \rightarrow +\infty}.$$

После этого определим функцию в терминах разложения (190) так

$$\begin{aligned} PS_1^{+\infty}(x, y) = & R_1(x - y) \left(a_1(x, y) - (v(x) + v(y))/2 \right) + \\ & + R_2(x - y) \left(a_2(x, y) - (v^2(x) + v^2(y))/4 \right) + \\ & + \sum_{k=3}^{+\infty} R_k(x - y) a_k(x, y) + \text{гладкая нелокальная часть.} \end{aligned}$$

Тогда ряд (191) переписывается следующим образом

$$\mathcal{G}(x, y) = R_0(x - y) + R_1(x - y) \frac{(v(x) + v(y))}{2} + R_2(x - y) \frac{(v^2(x) + v^2(y))}{4} + PS_1^{+\infty}(x, y),$$

что полностью согласуется с разложением (43) и явным видом PS_1 -части из раздела 9.4.

9.2 Вспомогательные интегралы

В данной секции приведен список вспомогательных интегралов, возникающих при вычислениях. Они строятся по регуляризованным функциям и зависят от размерного параметра Λ . Такие интегралы представляют собой сингулярные функции, зависящие от регуляризующего параметра, и стремятся к бесконечности (расходятся) при $\Lambda \rightarrow +\infty$.

С учетом определения (72), набор интегралов можно выписать в следующем виде

$$I_1(\sigma) = \int_{B_{1/\sigma}} d^4x \left(R_0^\Lambda(x) \right)^3 |x|^2, \quad (192)$$

$$I_2(\sigma) = \int_{B_{1/\sigma}} d^4x \left(R_0^\Lambda(x) \right)^2 R_{10}^\Lambda(x), \quad (193)$$

$$I_3(\sigma) = \int_{B_{1/\sigma}} d^4x \left(R_0^\Lambda(x) \right)^2 R_{11}^\Lambda(x), \quad (194)$$

$$I_4(\sigma) = \int_{B_{1/\sigma}} d^4x \left(R_0^\Lambda(x) \right)^3, \quad (195)$$

$$I_5(\sigma) = \int_{B_{1/\sigma}} d^4x \left(\hat{R}_0^\Lambda(x) \right)^2, \quad (196)$$

$$I_6(\sigma) = \int_{B_{1/\sigma} \times B_{1/\sigma}} d^4x d^4z \left(R_0^\Lambda(x) \right)^2 R_0^\Lambda(x-z) |x-z|^2 \left(R_0^\Lambda(x) \right)^2, \quad (197)$$

$$I_7(\sigma) = \int_{B_{1/\sigma}} d^4x \left(R_0^\Lambda(x) \right)^2 \hat{R}_0^\Lambda(x), \quad (198)$$

$$I_8(\sigma) = \int_{B_{1/\sigma}} d^4x R_0^\Lambda(x) \hat{R}_0^\Lambda(x), \quad (199)$$

$$I_9(\sigma) = \int_{B_{1/\sigma}} d^4x \left(R_0^\Lambda(x) \right)^2 \hat{R}_{10}^\Lambda(x), \quad (200)$$

$$I_{10}(\sigma) = \int_{B_{1/\sigma}} d^4x \left(R_0^\Lambda(x) \right)^2 \hat{R}_{11}^\Lambda(x), \quad (201)$$

$$I_{11}(\sigma) = \int_{B_{1/\sigma}} d^4x R_0^\Lambda(x) \hat{R}_0^\Lambda(x) R_{10}^\Lambda(x), \quad (202)$$

$$I_{12}(\sigma) = \int_{B_{1/\sigma}} d^4x R_0^\Lambda(x) \hat{R}_0^\Lambda(x) R_{11}^\Lambda(x), \quad (203)$$

$$I_{13}(\sigma) = \int_{B_{1/\sigma}} d^4x \left(R_0^\Lambda(x) \right)^3 R_{10}^\Lambda(x), \quad (204)$$

$$I_{14}(\sigma) = \int_{B_{1/\sigma}} d^4x \left(R_0^\Lambda(x) \right)^3 R_{11}^\Lambda(x), \quad (205)$$

$$I_{15}(\sigma) = \int_{B_{1/\sigma}} d^4x \left(R_0^\Lambda(x) \right)^2 R_{10}^\Lambda(x) R_{10}^\Lambda(x), \quad (206)$$

$$I_{16}(\sigma) = \int_{B_{1/\sigma}} d^4x \left(R_0^\Lambda(x) \right)^2 R_{10}^\Lambda(x) R_{11}^\Lambda(x), \quad (207)$$

$$I_{17}(\sigma) = \int_{B_{1/\sigma}} d^4x \left(R_0^\Lambda(x) \right)^2 R_{11}^\Lambda(x) R_{11}^\Lambda(x), \quad (208)$$

$$I_{18}(\sigma) = \int_{B_{1/\sigma}} d^4x \left(R_0^\Lambda(x) \right)^3 R_{20}^\Lambda(x), \quad (209)$$

$$I_{19}(\sigma) = \int_{B_{1/\sigma}} d^4x \left(R_0^\Lambda(x) \right)^3 R_{21}^\Lambda(x), \quad (210)$$

$$I_{20}(\sigma) = \int_{B_{1/\sigma}} d^4x \left(R_0^\Lambda(x) \right)^3 R_{22}^\Lambda(x). \quad (211)$$

9.3 Асимптотики интегралов

Вспомогательные обозначения. Выпишем для начала ключевое соотношение, полученное в работе [32], которое связывает обычную функцию R_0 из (39) с деформированным аналогом. Для $s > 0$ она имеет вид

$$\frac{1}{2\pi^2} \int_{S^3} d^3\hat{y} R_0(s\hat{y} + x) = \frac{1}{4\pi^2} \begin{cases} s^{-2}, & \text{для } |x| \leq s \\ |x|^{-2}, & \text{для } |x| > s \end{cases} = R_0^{1/s}(x) - \frac{\mathbf{f}(|x|^2/s^2)}{4\pi^2 s^2},$$

где интегрирование производилось со стандартной мерой по единичной трехмерной сфере S^3 с центром в нуле. При $s = 1/\Lambda$ получается уже известная функция (41). Далее определим набор дополнительных функций

$$f_2^\Lambda(x) = \frac{\Lambda^2}{4\pi^2} \left(1 + \mathbf{f}(|x|^2 \Lambda^2)\right) \chi(|x| \leq 1/\Lambda),$$

$$f_1^\Lambda(x) = f_2^\Lambda(x) - \frac{\chi(|x| \leq 1/\Lambda)}{4\pi^2 |x|^2}, \quad (212)$$

$$h_i(\Lambda y) = \frac{1}{4\pi^2 \Lambda^2 |y|^2} \int_{B_{\Lambda|y|}} d^4x \left(f_2^1(x)\right)^i + \frac{1}{4\pi^2} \int_{B_1 \setminus B_{\Lambda|y|}} d^4x \left(f_2^1(x)\right)^i \frac{1}{|x|^2}, \quad (213)$$

где $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а также три числа

$$\alpha_1(\mathbf{f}) = -\frac{1}{4} + \int_{B_1} d^4x f_2^1(x) = \int_{B_1} d^4x f_1^1(x),$$

$$\alpha_2(\mathbf{f}) = 2(4\pi^2) \int_{B_1} d^4x \left(f_2^1(x)\right)^2, \quad (214)$$

$$\alpha_3(\mathbf{f}) = \frac{1}{4(4\pi^2)^2} + \int_{B_1} d^4x \left(f_2^1(x)\right)^3 = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(R_0^1(x)\right)^3,$$

которые являются функционалами, зависящими от функции \mathbf{f} . Можно заметить, что на сфере $|y| = 1/\Lambda$ между последними функциями справедливы следующие соотношения

$$\alpha_1(\mathbf{f}) = -\frac{1}{4} + 4\pi^2 h_1(\Lambda y) \Big|_{|y|=1/\Lambda}, \quad (215)$$

$$\alpha_2(\mathbf{f}) = 2(4\pi^2)^2 h_2(\Lambda y) \Big|_{|y|=1/\Lambda}, \quad (216)$$

$$\alpha_3(\mathbf{f}) = \frac{1}{4(4\pi^2)^2} + 4\pi^2 h_3(\Lambda y) \Big|_{|y|=1/\Lambda}. \quad (217)$$

Далее введем в рассмотрение интеграл для произведения функции R_0 и ее деформированного аналога следующим образом

$$t_i^\Lambda(y) = \int_{B_{1/\sigma}} d^4x \left(R_0^\Lambda(x)\right)^i R_0(x+y), \quad (218)$$

$$p_i^\Lambda(y) = \int_{B_{1/\sigma}} d^4x \left(R_0^\Lambda(x)\right)^i f_1^\Lambda(x+y), \quad (219)$$

где $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ясно, что с учетом определений (41) и (212) мгновенно следует соотношение

$$\int_{B_{1/\sigma}} d^4x \left(R_0^\Lambda(x)\right)^i R_0^\Lambda(x+y) = t_i^\Lambda(y) + p_i^\Lambda(y),$$

которое преобразует составной блок для большинства базовых интегралов. Отметим, что в трех-петлевых вычислениях важны лишь случаи с $i = 1, 2, 3$. Используя вышеупомянутые равенства, можно убедиться в справедливости следующих соотношений

$$t_1^\Lambda(y) = \begin{cases} h_1(\Lambda y) + \frac{L}{2(4\pi^2)}, & \text{для } |y| \leq 1/\Lambda; \\ \frac{1}{4(4\pi^2)} - \frac{\ln(|y|\sigma)}{2(4\pi^2)} + \frac{\alpha_1(\mathbf{f})}{4\pi^2\Lambda^2|y|^2}, & \text{для } 1/\Lambda < |y| \leq 1/\sigma; \\ \frac{1}{16\pi^2|y|^2\sigma^2} + \frac{\alpha_1(\mathbf{f})}{4\pi^2|y|^2\Lambda^2}, & \text{для } 1/\sigma < |y|, \end{cases} \quad (220)$$

$$t_2^\Lambda(y) = \begin{cases} \Lambda^2 h_2(\Lambda y) - \frac{\sigma^2 - \Lambda^2}{4(4\pi^2)^2}, & \text{для } |y| \leq 1/\Lambda; \\ -\frac{1}{4(4\pi^2)^2} \left(\sigma^2 - \frac{1}{|y|^2} \right) + \frac{\ln(|y|\sigma)}{2(4\pi^2)^2|y|^2} + A(\sigma)R_0(y), & \text{для } 1/\Lambda < |y| \leq 1/\sigma; \\ A(\sigma)R_0(y), & \text{для } 1/\sigma < |y|, \end{cases} \quad (221)$$

$$t_3^\Lambda(y) = \begin{cases} \Lambda^4 h_3(\Lambda y) - \frac{\sigma^4 - \Lambda^4}{8(4\pi^2)^3}, & \text{для } |y| \leq 1/\Lambda; \\ -\frac{\sigma^4}{8(4\pi^2)^3} - \frac{1}{8(4\pi^2)^3|y|^4} + \frac{\Lambda^2\alpha_3(\mathbf{f})}{4\pi^2|y|^2}, & \text{для } 1/\Lambda < |y| \leq 1/\sigma; \\ -\frac{\sigma^2}{4(4\pi^2)^3|y|^2} + \frac{\Lambda^2\alpha_3(\mathbf{f})}{4\pi^2|y|^2}, & \text{для } 1/\sigma < |y|. \end{cases} \quad (222)$$

Заметим, что все функции непрерывны и зависят от модуля переменной, в данном случае от $|y|$. Последнее свойство является следствием усреднения по сфере S^3 . Более того, упомянутые функции выдерживают применение оператора Лапласа. Действительно, используя соотношение

$$-\partial_{y_\mu} \partial_{y^\mu} R_0(y+x) = \delta(y+x),$$

получаем

$$-\partial_{y_\mu} \partial_{y^\mu} t_i^\Lambda(y) = \left(R_0^\Lambda(y) \right)^i \chi(|y| \leq 1/\sigma).$$

В завершение вводного параграфа со вспомогательными обозначениями определим дополнительный ряд чисел

$$\alpha_4(\mathbf{f}) = \int_{B_1} d^4y h_2(y) f_2^1(y), \quad (223)$$

$$\alpha_5(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^{4 \times 2}} d^4x d^4y \left(R_0^1(x) \right)^2 f_1^1(x+y) R_0^1(y), \quad (224)$$

$$\alpha_6(\mathbf{f}) = 2(4\pi^2)^2 \int_{B_1} d^4y \left(f_2^1(y) \right)^3 |y|^2, \quad (225)$$

$$\alpha_7(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^{4 \times 2}} d^4x d^4y \left(R_0^1(x) \right)^2 f_1^1(x+y) \left(R_0^1(y) \right)^2, \quad (226)$$

$$\alpha_8(\mathbf{f}) = \int_{B_1} d^4y h_2(y) \left(f_2^1(y) \right)^2, \quad (227)$$

$$\alpha_9(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^{4 \times 2}} d^4y d^4x \left(R_0^1(y) \right)^3 f_1^1(y+x) R_0^1(x), \quad (228)$$

$$\alpha_{10}(\mathbf{f}) = \int_{B_1} d^4y h_1(y) \left(f_2^1(y) \right)^3, \quad (229)$$

$$\alpha_{11}(\mathbf{f}) = \int_{B_1} d^4y h_3(y), \quad (230)$$

$$\alpha_{12}(\mathbf{f}) = \int_{B_1} d^4x f_2^1(x) h_1(x), \quad (231)$$

$$\alpha_{13}(\mathbf{f}) = \int_{B_1 \times B_1} d^4x d^4y f_1^1(x) R_0^1(x+y) f_1^1(y) + \int_{B_1} d^4x f_1^1(x) h_1(x). \quad (232)$$

Подсчет интеграла $I_1(\sigma)$. Воспользуемся определением (41) и тем фактом, что площадь единичной сферы в четырехмерном пространстве равна $2\pi^2$. Тогда можно выписать

$$I_1(\sigma) = \frac{\alpha_6(\mathbf{f})}{2(4\pi^2)^2} + \frac{2\pi^2}{(4\pi^2)^3} \int_{1/\Lambda}^{1/\sigma} \frac{dr}{r} = \frac{L + \alpha_6(\mathbf{f})}{2(4\pi^2)^2} \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{L}{2(4\pi^2)^2}.$$

Подсчет интегралов $I_2(\sigma)$ и $I_3(\sigma)$. Начнем со второго интеграла, так как первый является обобщением. Воспользуемся определением (45) и вспомогательными функциями (218) и (219), тогда интеграл представим в виде

$$I_3(\sigma) = \int_{B_{1/\sigma}} d^4y t_2^\Lambda(y) R_0^\Lambda(y) + \int_{B_{1/\sigma}} d^4y p_2^\Lambda(y) R_0^\Lambda(y). \quad (233)$$

В данном случае первый интеграл может быть явно вычислен с использованием формул (41) и (221). При этом удобно разбить область интегрирования на $B_{1/\Lambda}$ и $B_{1/\sigma} \setminus B_{1/\Lambda}$. В первом случае вклад имеет вид

$$\int_{B_1} d^4y h_2(y) f_2^1(y) + \frac{4\alpha_1(\mathbf{f}) + 1}{16(4\pi^2)^2} + \mathcal{O}(1/\Lambda^2),$$

где в поправку вошло слагаемое с σ^2 из первой строки (221). Далее, от второй области интегрирования получается следующий вклад

$$\begin{aligned} 2\pi^2 \int_{1/\Lambda}^{1/\sigma} ds \frac{s}{4\pi^2} \left(-\frac{(\sigma^2 - s^{-2})}{4(4\pi^2)^2} + \frac{\ln(s\sigma)}{2(4\pi^2)^2 s^2} + \frac{\Lambda(\sigma)}{4\pi^2 s^2} \right) = \\ = -\frac{L^2}{8(4\pi^2)^2} + \frac{L + 16\pi^2 L \Lambda(\sigma) - 1/2}{8(4\pi^2)^2} + \mathcal{O}(1/\Lambda^2) \\ = \frac{2L^2 + 2L + 4L\alpha_2(\mathbf{f}) - 1}{16(4\pi^2)^2} + \mathcal{O}(1/\Lambda^2). \end{aligned}$$

Переходя ко второму слагаемому из формулы (233), необходимо заметить, что $p_2^\Lambda(y)$ содержит в определении (219) функцию с компактным носителем. Действительно, $\text{supp}(f_1^\Lambda(\cdot)) \subset B_{1/\Lambda}$, поэтому интеграл

$$\int_{B_{1/\sigma}} d^4x \int_{B_{1/\sigma}} d^4y \left(R_0^\Lambda(x) \right)^2 f_1^\Lambda(x+y) R_0^\Lambda(y)$$

сходится при снятии регуляризации, и после замен $x \rightarrow x/\Lambda$ и $y \rightarrow y/\Lambda$ равен

$$\alpha_5(\mathbf{f}) - \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \int_{B_1} d^4y \left(R_0^1(x) \right)^2 R_0^1(x+y) f_1^1(y) \left(1 - \chi(|x| \leq \Lambda/\sigma) \chi(|x+y| \leq \Lambda/\sigma) \right). \quad (234)$$

Далее, с учетом соотношений $|y| \leq 1$ и

$$\left| 1 - \chi(|x| \leq \Lambda/\sigma) \chi(|x+y| \leq \Lambda/\sigma) \right| \leq \left| 1 - \chi(|x| \leq \Lambda/\sigma - 1) \right|,$$

второе слагаемое из (234) по модулю можно оценить интегралом³⁹

$$\int_{\Lambda/\sigma-1}^{+\infty} d^4x \int_{B_1} d^4y \left(R_0^1(x) \right)^2 R_0^1(x+y) |f_1^1(y)| \leq \frac{1}{2(4\pi^2)^2} \left(\int_{B_1} d^4y |f_1^1(y)| \right) \int_{\Lambda/\sigma-1}^{+\infty} \frac{ds}{s(s-1)^2},$$

где было использовано соотношение $|x+y|^{-1} \leq (|x|-1)^{-1}$ с учетом области интегрирования. Окончательно, используя неравенство $\ln(1+s) \leq s$ для $s > -1$ и цепочку соотношений

$$\int_{\Lambda/\sigma-1}^{+\infty} \frac{ds}{s(s-1)^2} = \frac{1}{\Lambda/\sigma-2} + \ln \left(1 - \frac{1}{\Lambda/\sigma-1} \right) \leq \frac{1}{\Lambda/\sigma-2} - \frac{1}{\Lambda/\sigma-1} = \frac{1}{(\Lambda/\sigma-2)(\Lambda/\sigma-1)},$$

³⁹Здесь подразумевается, что параметр Λ столь велик, что $\Lambda > 3\sigma$. Именно по этой причине можно написать $R_0^1(\cdot)$ вместо $|R_0^1(\cdot)|$.

делаем вывод, что второе слагаемое из (234) попадает в поправку $\mathcal{O}(1/\Lambda^2)$.

Таким образом, с точностью до постоянного слагаемого ответ для интеграла $I_3(\sigma)$ выписывается в виде

$$I_3(\sigma) = \frac{L^2 + L + 2L\alpha_2(\mathbf{f}) + 2\alpha_1(\mathbf{f})}{8(4\pi^2)^2} + \alpha_4(\mathbf{f}) + \alpha_5(\mathbf{f}) + \mathcal{O}(1/\Lambda^2)$$

или, с учетом равенства для сингулярных частей,

$$I_3(\sigma) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{L^2 + L + 2L\alpha_2(\mathbf{f})}{8(4\pi^2)^2}. \quad (235)$$

В предположениях секции 4.4 верно следующее равенство

$$I_2(\sigma) = I_3(\sigma).$$

Подсчет интеграла $I_4(\sigma)$. Рассмотрим явный вид интеграла (195). Воспользовавшись дополнительно масштабированием переменной интегрирования $x \rightarrow x/\Lambda$, получим

$$I_4(\sigma) = \Lambda^2 \int_{B_{\Lambda/\sigma}} d^4x \left(R_0^1(x) \right)^3 = \Lambda^2 \alpha_3(\mathbf{f}) - \frac{\sigma^2}{4(4\pi^2)^2} \stackrel{\text{s.p.}}{=} \Lambda^2 \alpha_3(\mathbf{f}), \quad (236)$$

где были использованы представление (41) и ограниченность параметра σ .

Подсчет интеграла $I_5(\sigma)$. При анализе интеграл (196) удобно преобразовать с учетом функций (218) и (219). Действительно, верно соотношение

$$\hat{R}_0^\Lambda(x) = p_2^\Lambda(x) + (t_2^\Lambda(x) - A(\sigma)R_0^\Lambda(x)).$$

Тогда основной интеграл переписывается в виде четырех слагаемых

$$\begin{aligned} I_5(\sigma) = & \int_{B_{1/\sigma}} d^4x \left(p_2^\Lambda(x) \right)^2 + 2 \int_{B_{1/\sigma}} d^4x p_2^\Lambda(x) t_2^\Lambda(x) - \\ & - 2A(\sigma) \int_{B_{1/\sigma}} d^4x p_2^\Lambda(x) R_0^\Lambda(x) + \int_{B_{1/\sigma}} d^4x \left(t_2^\Lambda(x) - A(\sigma)R_0^\Lambda(x) \right)^2. \end{aligned} \quad (237)$$

Данное разбиение удобно, поскольку оно позволяет разделить нетривиальную задачу на простые части. Действительно, после подстановки $p_2^\Lambda(x)$ в первое слагаемое и масштабирования переменных получаем интеграл

$$\int_{B_{\Lambda/\sigma}} d^4x \int_{B_{\Lambda/\sigma}} d^4y \int_{B_{\Lambda/\sigma}} d^4z \left(R_0^1(x) \right)^2 f_1^1(x+y) f_1^1(y+z) \left(R_0^1(z) \right)^2,$$

который конечен после снятия регуляризации, поскольку $\text{supp}(f_1^1(\cdot)) \subset B_1$. Чтобы явно увидеть сходимость, выпишем предельный интеграл от модуля, который очевидным образом мажорирует последую функцию

$$\int_{B_1} d^4x \int_{B_2} d^4y \int_{\mathbb{R}^4} d^4z \left| f_1^1(x) f_1^1(x+y) \right| \left(R_0^1(y+z) \right)^2 \left(R_0^1(z) \right)^2.$$

Здесь были использованы перестановка множителей после предельного перехода $B_{\Lambda/\sigma} \rightarrow \mathbb{R}^4$ и сокращение области интегрирования с учетом носителя функции $f_1^1(\cdot)$. Таким образом, получаем

$$\int_{B_{1/\sigma}} d^4x \left(p_2^\Lambda(x) \right)^2 \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0.$$

Перейдем ко второму слагаемому из (237). В действительности, оно напоминает второе слагаемое из (233), поэтому основная процедура оценки будет той же. Ключевое отличие состоит в том, что

после масштабирования $x \rightarrow x/\Lambda$ в области $1 \leq |x| < \Lambda/\sigma$ помимо функции $|x|^{-2}$ появляются также $\ln(|x|)|x|^{-2}$ и σ^2/Λ^2 , для которых оценки пишутся аналогичным⁴⁰ образом. Следовательно, можно утверждать, что

$$2 \int_{B_{1/\sigma}} d^4x p_2^\Lambda(x) t_2^\Lambda(x) = 2 \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \int_{B_1} d^4y \left(R_0^1(x) \right)^2 \tilde{t}_2(x+y) f_1^1(y) + o(1/\Lambda) \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0,$$

где

$$\tilde{t}_2(x) = \begin{cases} h_2(x) + \frac{1}{4(4\pi^2)^2}, & \text{для } |x| \leq 1; \\ \frac{1+2\alpha_2(\mathbf{f})}{4(4\pi^2)^2|x|^2} + \frac{\ln(|x|)}{2(4\pi^2)^2|x|^2}, & \text{для } |x| > 1. \end{cases}$$

Далее, переходя к третьему слагаемому из (237), сразу заметим, что интеграл равен второму слагаемому из (233), который уже обсуждался. Поэтому сразу выпишем цепочку соотношений

$$-2A(\sigma) \int_{B_{1/\sigma}} d^4x p_2^\Lambda(x) R_0^\Lambda(x) = -2A(\sigma) \alpha_5(\mathbf{f}) + \mathcal{O}(L/\Lambda^2) \stackrel{\text{s.p.}}{=} -2A(\sigma) \alpha_5(\mathbf{f}) \stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{L\alpha_5(\mathbf{f})}{4\pi^2}.$$

Последний вклад из (237) после разбиения области интегрирования и масштабирования переписывается в виде

$$\int_{B_1} d^4x \left(h_2(y) - \frac{\sigma^2/\Lambda^2 - 1}{4(4\pi^2)^2} - A(\sigma) f_2^1(y) \right)^2 + \frac{1}{2(4\pi^2)^3} \int_{1/\Lambda}^{1/\sigma} ds s^3 \left(-\frac{\sigma^2}{4} + \frac{1}{4s^2} + \frac{\ln(s\sigma)}{2s^2} \right)^2.$$

Ясно, что слагаемые с σ^2 могут быть удалены, так как они войдут в поправку $\mathcal{O}(L/\Lambda^2)$. Остальные вклады (после отбрасывания поправки $\mathcal{O}(1)$) имеют вид

$$\begin{aligned} & \frac{A^2(\sigma) \alpha_2(\mathbf{f})}{2(4\pi^2)} - 2A(\sigma) \alpha_4(\mathbf{f}) - \frac{A(\sigma)(1+4\alpha_1(\mathbf{f}))}{8(4\pi^2)^2} + \frac{1}{2(4\pi^2)^3} \left(\frac{L^3}{12} - \frac{L^2}{8} + \frac{L}{16} \right) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \\ & \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{L^3}{24(4\pi^2)^3} - \frac{L^2(1-2\alpha_2(\mathbf{f}))}{16(4\pi^2)^3} + \frac{L}{4\pi^2} \left(\frac{-1-8\alpha_1(\mathbf{f})+8\alpha_2^2(\mathbf{f})}{32(4\pi^2)^2} - \alpha_4(\mathbf{f}) \right). \end{aligned}$$

В итоге, собирая все слагаемые вместе, приходим к следующему результату

$$I_5(\sigma) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{L^3}{24(4\pi^2)^3} - \frac{L^2(1-2\alpha_2(\mathbf{f}))}{16(4\pi^2)^3} + \frac{L}{4\pi^2} \left(\frac{-1-8\alpha_1(\mathbf{f})+8\alpha_2^2(\mathbf{f})}{32(4\pi^2)^2} - \alpha_4(\mathbf{f}) - \alpha_5(\mathbf{f}) \right).$$

Подсчет интеграла $I_6(\sigma)$. При подсчете данного интеграла заметим, что функцию $R_0^\Lambda(x)|x|^2$ можно переписать следующим образом

$$R_0^\Lambda(x)|x|^2 = \frac{1}{4\pi^2} + r_0^\Lambda(x), \quad r_0^\Lambda(x) = \left(R_0^\Lambda(x)|x|^2 - \frac{1}{4\pi^2} \right) \chi(|x| \leq 1/\Lambda).$$

Тогда интеграл представим в виде

$$I_6(\sigma) = \frac{A^2(\sigma)}{4\pi^2} + \int_{B_{1/\sigma}} d^4x \int_{B_{1/\sigma}} d^4y \left(R_0^\Lambda(x) \right)^2 r_0^\Lambda(x+y) \left(R_0^\Lambda(y) \right)^2.$$

Последнее слагаемое имеет конечный предел при снятии регуляризации и при всех Λ мажорируется числом

$$\int_{\mathbb{R}^4} d^4x \int_{B_1} d^4y \left(R_0^1(x) \right)^2 \left(R_0^1(x+y) \right)^2 \left| r_0^1(y) \right|.$$

⁴⁰В случае σ^2/Λ^2 вклад стремится к нулю при $\Lambda \rightarrow +\infty$, так как степенное убывание Λ^{-2} сильнее логарифмической расходимости L , которая следует из интегрирования $\left(R_0^1(x) \right)^2$.

Таким образом, окончательный ответ имеет вид

$$I_6(\sigma) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{A^2(\sigma)}{4\pi^2} \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{L^2}{4(4\pi^2)^3} + \frac{L\alpha_2(\mathbf{f})}{2(4\pi^2)^3}.$$

Подсчет интеграла $I_7(\sigma)$. Первым делом воспользуемся разбиением (218) и (219), тогда интеграл представим в виде двух частей

$$I_7(\sigma) = \int_{B_{1/\sigma}} d^4y \left(R_0^\Lambda(y) \right)^2 p_2^\Lambda(y) + \int_{B_{1/\sigma}} d^4y \left(R_0^\Lambda(y) \right)^2 \left(t_2^\Lambda(y) - A(\sigma) R_0^\Lambda(y) \right). \quad (238)$$

Начнем с первого слагаемого. После стандартного масштабирования переменных интегрирования получаем

$$\Lambda^2 \int_{B_{\Lambda/\sigma}} d^4x \int_{B_{\Lambda/\sigma}} d^4y \left(R_0^1(x) \right)^2 f_1^1(x+y) \left(R_0^1(y) \right)^2.$$

Заметим, что интеграл (без Λ^2) является сходящимся при $\Lambda \rightarrow +\infty$ и равен $\alpha_7(\mathbf{f})$. Более того, поправка к предельному значению убывает быстрее $1/\Lambda^2$. Действительно, способом, использованным при подсчете $I_3(\sigma)$, можно убедиться, что невязка оценивается следующим образом

$$\begin{aligned} \left| \int_{B_{\Lambda/\sigma}} d^4x \int_{B_{\Lambda/\sigma}} d^4y \left(R_0^1(x) \right)^2 f_1^1(x+y) \left(R_0^1(y) \right)^2 - \alpha_7(\mathbf{f}) \right| &\leq \\ &\leq \frac{1}{2(4\pi^2)^3} \left(\int_{B_1} d^4x \left| f_1^1(x) \right| \right) \int_{\Lambda/\sigma-1}^{+\infty} \frac{ds}{s(s-1)^4}, \end{aligned}$$

что является поправкой порядка $\mathcal{O}(1/\Lambda^4)$. Следовательно, справедливо соотношение

$$\int_{B_{1/\sigma}} d^4y \left(R_0^\Lambda(y) \right)^2 p_2^\Lambda(y) = \Lambda^2 \alpha_7(\mathbf{f}) + \mathcal{O}(1/\Lambda^2).$$

Перейдем ко второму слагаемому из (238). Подставляя в него явный вид (221) и разбивая область интегрирования на две части, получаем

$$\Lambda^2 \int_{B_1} d^4y \left(f_2^1(y) \right)^2 \left(h_2(y) - \frac{\sigma^2/\Lambda^2 - 1}{4(4\pi^2)^2} - A(\sigma) f_2^1(y) \right) + \frac{1}{2(4\pi^2)^3} \int_{1/\Lambda}^{1/\sigma} \frac{ds}{s} \left(-\frac{\sigma^2}{4} + \frac{1}{4s^2} + \frac{\ln(s\sigma)}{2s^2} \right),$$

сингулярная часть которого равна

$$\Lambda^2 \alpha_8(\mathbf{f}) + \frac{\Lambda^2 \alpha_2(\mathbf{f})}{8(4\pi^2)^3} - \Lambda^2 A(\sigma) \left(\alpha_3(\mathbf{f}) - \frac{1}{4(4\pi^2)^2} \right) - \frac{\sigma^2 L}{8(4\pi^2)^3} + \frac{\Lambda^2}{16(4\pi^2)^3} + \frac{\Lambda^2 - 2L\Lambda^2}{16(4\pi^2)^3}.$$

Следовательно, окончательное выражение имеет следующий вид

$$I_7(\sigma) \stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{L\Lambda^2 \alpha_3(\mathbf{f})}{2(4\pi^2)} + \Lambda^2 \left(\frac{1 + 2\alpha_2(\mathbf{f})}{8(4\pi^2)^3} - \frac{\alpha_2(\mathbf{f})\alpha_3(\mathbf{f})}{2(4\pi^2)} + \alpha_7(\mathbf{f}) + \alpha_8(\mathbf{f}) \right) - \frac{\sigma^2 L}{8(4\pi^2)^3}.$$

Подсчет интеграла $I_8(\sigma)$. В данном случае удобно свести подсчет интеграла к уже изученному. Действительно, можно заметить, что справедливо следующее соотношение

$$I_8(\sigma) = I_3(\sigma) - A(\sigma) \int_{B_{1/\sigma}} d^4y \left(R_0^\Lambda(y) \right)^2 = I_3(\sigma) - A^2(\sigma).$$

Следовательно, используя формулу (235), получаем

$$I_8(\sigma) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{-L^2 + L - 2L\alpha_2(\mathbf{f})}{8(4\pi^2)^2}.$$

Подсчет интегралов $I_9(\sigma)$ и $I_{10}(\sigma)$. Начнем со второго интеграла, поскольку первый является обобщением. Распишем явный вид с использованием формулы (201) и представления (45)

$$I_{10}(\sigma) = \int_{B_{1/\sigma} \times B_{1/\sigma}} d^4x d^4y \left(R_0^\Lambda(x) \right)^2 R_{11}^\Lambda(x-y) \left(R_0^\Lambda(y) \right)^2 - A(\sigma) I_3(\sigma).$$

Далее перепишем представление для функции $R_{11}^\Lambda(x-y)$ следующим образом

$$\begin{aligned} \int_{B_{1/\sigma}} d^4z R_0^\Lambda(x-y+z) R_0^\Lambda(z) &= \int_{\mathbb{R}^4} d^4z R_0^\Lambda(x+z) R_0^\Lambda(y+z) \chi(|y+z| \leq 1/\sigma) \\ &= \int_{B_{1/\sigma}} d^4z R_0^\Lambda(x+z) R_0^\Lambda(y+z) + \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^4 \setminus B_{1/\sigma}} d^4z R_0^\Lambda(x+z) R_0^\Lambda(y+z) \chi(|y+z| \leq 1/\sigma) - \\ &\quad - \int_{B_{1/\sigma}} d^4z R_0^\Lambda(x+z) R_0^\Lambda(y+z) \chi(|y+z| > 1/\sigma). \end{aligned}$$

Заметим, что вклад с первым слагаемым можно свести к интегралу $I_5(\sigma)$, тогда

$$\begin{aligned} I_{10}(\sigma) &= I_5(\sigma) + A(\sigma) I_3(\sigma) - A^3(\sigma) + \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^4 \setminus B_{1/\sigma}} d^4z \left(t_2^\Lambda(z) + p_2^\Lambda(z) \right) r_{<}^\Lambda(z) - \int_{B_{1/\sigma}} d^4z \left(t_2^\Lambda(z) + p_2^\Lambda(z) \right) r_{>}^\Lambda(z), \end{aligned} \quad (239)$$

где

$$\begin{aligned} r_{<}^\Lambda(z) &= \int_{B_{1/\sigma}} d^4y R_0^\Lambda(z+y) \chi(|z+y| \leq 1/\sigma) \left(R_0^\Lambda(y) \right)^2, \\ r_{>}^\Lambda(z) &= \int_{B_{1/\sigma}} d^4y R_0^\Lambda(z+y) \chi(|z+y| > 1/\sigma) \left(R_0^\Lambda(y) \right)^2. \end{aligned}$$

Рассмотрим более подробно последние два интеграла из (239). Учитывая явный вид функции $t_2^\Lambda(z)$ в области $\mathbb{R}^4 \setminus B_{1/\sigma}$, ее можно заменить на $A(\sigma) R_0^\Lambda(z)$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^4 \setminus B_{1/\sigma}} d^4z t_2^\Lambda(z) r_{<}^\Lambda(z) &= A(\sigma) \int_{\mathbb{R}^4 \setminus B_{1/\sigma}} d^4z R_0^\Lambda(z) r_{<}^\Lambda(z) \\ &\stackrel{\text{s.p.}}{=} A(\sigma) \int_{\mathbb{R}^4 \setminus B_{1/\sigma}} d^4z \int_{B_{1/\sigma}} d^4y R_0(z) R_0(z+y) \chi(|z+y| \leq 1/\sigma) \left(R_0(y) \right)^2, \end{aligned} \quad (240)$$

где был использован тот факт, что предельный интеграл существует⁴¹, а поправка при домножении на L не дает вклада в сингулярную часть. Продолжая, заметим, что $\text{supp}(p_2^\Lambda(\cdot)) \subset B_{1/\sigma+1/\Lambda}$, поэтому

$$\int_{B_{1/\sigma+1/\Lambda} \setminus B_{1/\sigma}} d^4z p_2^\Lambda(z) r_{<}^\Lambda(z) \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0.$$

Проводя похожие рассуждения, можно сформулировать следующие утверждения о последнем интеграле в (239). Они имеют вид

$$\begin{aligned} \int_{B_{1/\sigma}} d^4z t_2^\Lambda(z) r_{<}^\Lambda(z) &\stackrel{\text{s.p.}}{=} A(\sigma) \int_{B_{1/\sigma}} d^4z R_0^\Lambda(z) r_{>}^\Lambda(z) \\ &\stackrel{\text{s.p.}}{=} A(\sigma) \int_{B_{1/\sigma}} d^4z \int_{B_{1/\sigma}} d^4y R_0(z) R_0(z+y) \chi(|z+y| > 1/\sigma) \left(R_0(y) \right)^2, \end{aligned} \quad (241)$$

⁴¹Здесь нужно обратить внимание на тот факт, что при стремлении y к нулю область интегрирования сокращается, поэтому особенность в $R_0^2(y)$ нейтрализуется, и интеграл сходится.

$$\int_{B_{1/\sigma}} d^4 z p_2^\Lambda(z) r_{>}^\Lambda(z) \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0.$$

Осталось заметить, что сингулярные части в (240) и (241) равны между собой. Действительно, первый интеграл переходит во второй после перестановки $R_0(z+y)\chi(|z+y| > 1/\sigma)$ и $R_0(z+y)\chi(|z+y| \leq 1/\sigma)$ и сдвига переменной. Следовательно, сингулярные части в последних двух слагаемых (239) сократят друг друга, и окончательный ответ представится в виде

$$\begin{aligned} I_{10}(\sigma) &\stackrel{\text{s.p.}}{=} I_5(\sigma) + A(\sigma)I_3(\sigma) - A^3(\sigma) \\ &\stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{L^3}{48(4\pi^2)^3} - \frac{L^2\alpha_2(\mathbf{f})}{16(4\pi^2)^3} + \\ &\quad + \frac{L}{4\pi^2} \left(\frac{-1 - 4\alpha_1(\mathbf{f}) + 2\alpha_2(\mathbf{f})}{32(4\pi^2)^2} - \frac{\alpha_4(\mathbf{f}) + \alpha_5(\mathbf{f})}{2} \right). \end{aligned}$$

Отметим, что в предположениях секции 4.4 верно следующее равенство

$$I_9(\sigma) = I_{10}(\sigma).$$

Подсчет интегралов $I_{11}(\sigma)$ и $I_{12}(\sigma)$. Придерживаясь общей логики, начнем с последнего случая. Воспользуемся представлениями (218) и (219), тогда интеграл переписывается в виде

$$I_{12}(\sigma) = \int_{B_{1/\sigma}} d^4 y R_0^\Lambda(y) \left(p_2^\Lambda(y) + t_2^\Lambda(y) - A(\sigma)R_0^\Lambda(y) \right) \left(p_1^\Lambda(y) + t_1^\Lambda(y) \right).$$

Большинство слагаемых из разложения анализируются упомянутыми выше методами. Поэтому, опуская излишние подробности, представим ряд соотношений для сингулярных слагаемых

$$\begin{aligned} \int_{B_{1/\sigma}} d^4 y R_0^\Lambda(y) p_2^\Lambda(y) p_1^\Lambda(y) &\stackrel{\text{s.p.}}{=} 0, \\ \int_{B_{1/\sigma}} d^4 y R_0^\Lambda(y) p_2^\Lambda(y) t_1^\Lambda(y) &\stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{L}{8\pi^2} \int_{B_{1/\sigma}} d^4 y R_0^\Lambda(y) p_2^\Lambda(y) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{L\alpha_5(\mathbf{f})}{8\pi^2}, \\ \int_{B_{1/\sigma}} d^4 y R_0^\Lambda(y) t_2^\Lambda(y) p_1^\Lambda(y) &\stackrel{\text{s.p.}}{=} 0, \\ \int_{B_{1/\sigma}} d^4 y R_0^\Lambda(y) \left(-A(\sigma)R_0^\Lambda(y) \right) p_1^\Lambda(y) &\stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{L}{8\pi^2} \int_{B_{1/\sigma}} d^4 y \left(R_0^\Lambda(y) \right)^2 p_1^\Lambda(y) \stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{L\alpha_5(\mathbf{f})}{8\pi^2}. \end{aligned}$$

Осталось одно слагаемое, которое удобно вычислить с использованием явного вида функций (220) и (221) и с разбиением области интегрирования на две части. После замены переменной в области $|y| \leq 1/\Lambda$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{B_1} d^4 y f_2^1(y) \left(h_2(y) - \frac{\sigma^2/\Lambda^2 - 1}{4(4\pi^2)^2} - A(\sigma)f_2^1(y) \right) \left(h_1(y) + \frac{L}{2(4\pi^2)} \right) &\stackrel{\text{s.p.}}{=} \\ &\stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{A(\sigma)L\alpha_2(\mathbf{f})}{4(4\pi^2)^2} + \frac{L(1 + 4\alpha_1(\mathbf{f}))}{32(4\pi^2)^3}, \end{aligned}$$

где было использовано соотношение

$$\int_{B_1} d^4 y f_2^1(y) h_2(y) = \int_{B_1} d^4 y \left(f_2^1(y) \right)^2 h_1(y). \quad (242)$$

Далее, в области $1/\Lambda < |y| \leq 1/\sigma$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{4(4\pi^2)^3} \int_{1/\Lambda}^{1/\sigma} ds s \left(-\frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{2s^2} + \frac{\ln(s\sigma)}{s^2} \right) \left(\frac{1}{4} - \frac{\ln(s\sigma)}{2} + \frac{\alpha_1(\mathbf{f})}{\Lambda^2 s^2} \right) &\stackrel{\text{s.p.}}{=} \\ &\stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{L^3}{24(4\pi^2)^3} + \frac{L(1 - 4\alpha_1(\mathbf{f}))}{32(4\pi^2)^3}. \end{aligned}$$

Следовательно, суммируя все слагаемые, получаем окончательный ответ в виде

$$I_{12}(\sigma) \stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{L^3}{24(4\pi^2)^3} - \frac{L^2\alpha_2(\mathbf{f})}{8(4\pi^2)^3} + \frac{L(1 - 2\alpha_2^2(\mathbf{f}))}{16(4\pi^2)^3}.$$

Также, в предположениях секции 4.4 верно следующее равенство

$$I_{11}(\sigma) = I_{12}(\sigma).$$

Подсчет интегралов $I_{13}(\sigma)$ и $I_{14}(\sigma)$. Рассмотрим явный вид последнего интеграла и воспользуемся представлениями (218) и (219) для $i = 1$. Тогда получим

$$I_{14}(\sigma) = \int_{B_{1/\sigma}} d^4y \left(R_0^\Lambda(y) \right)^3 \left(p_1^\Lambda(y) + t_1^\Lambda(y) \right). \quad (243)$$

Начнем с первого слагаемого, в котором сделаем масштабирование переменных,

$$\int_{B_{1/\sigma}} d^4y \left(R_0^\Lambda(y) \right)^3 p_1^\Lambda(y) = \Lambda^2 \int_{B_{\Lambda/\sigma} \times B_{\Lambda/\sigma}} d^4y d^4x \left(R_0^1(y) \right)^3 f_1^1(y+x) R_0^1(x).$$

Далее заменим область интегрирования $B_{\Lambda/\sigma} \times B_{\Lambda/\sigma}$ на $\mathbb{R}^{4 \times 2}$. Действительно, это можно сделать, так как верно неравенство

$$\left| \int_{B_{\Lambda/\sigma} \times B_{\Lambda/\sigma}} d^4y d^4x \left(R_0^1(y) \right)^3 f_1^1(y+x) R_0^1(x) - \alpha_9(\mathbf{f}) \right| \leq \frac{1}{2(4\pi^2)^3} \left(\int_{B_1} d^4y |f_1^1(y)| \right) \int_{\Lambda/\sigma-1}^{+\infty} \frac{ds}{s^3(s-1)^2},$$

поэтому поправка попадает в $\mathcal{O}(1/\Lambda^4)$. Следовательно, получаем

$$\int_{B_{1/\sigma}} d^4y \left(R_0^\Lambda(y) \right)^3 p_1^\Lambda(y) = \Lambda^2 \alpha_9(\mathbf{f}) + \mathcal{O}(1/\Lambda^2) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \Lambda^2 \alpha_9(\mathbf{f}).$$

Второе слагаемое из (243) анализируется с использованием прямой подстановки (220) и разбиения области интегрирования на два региона. В диапазоне $|y| \leq 1/\Lambda$ после масштабирования имеем

$$\Lambda^2 L \left(\frac{\alpha_3(\mathbf{f})}{2(4\pi^2)} - \frac{1}{8(4\pi^2)^3} \right) + \Lambda^2 \alpha_{10}(\mathbf{f}).$$

Далее, в области $1/\Lambda < |y| \leq 1/\sigma$ получаем

$$\frac{1}{2(4\pi^2)^3} \int_{1/\Lambda}^{1/\sigma} \frac{ds}{s^3} \left(\frac{1}{4} - \frac{\ln(s\sigma)}{2} + \frac{\alpha_1(\mathbf{f})}{\Lambda^2 s^2} \right) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{\Lambda^2}{2(4\pi^2)^3} \left(\frac{L}{4} + \frac{\alpha_1(\mathbf{f})}{4} \right).$$

Окончательно, суммируя все вклады, выписываем асимптотику в виде

$$I_{14}(\sigma) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{\Lambda^2 L \alpha_3(\mathbf{f})}{2(4\pi^2)} + \Lambda^2 \left(\frac{\alpha_1(\mathbf{f})}{8(4\pi^2)^3} + \alpha_9(\mathbf{f}) + \alpha_{10}(\mathbf{f}) \right).$$

Также, в предположениях секции 4.4 верно следующее равенство

$$I_{13}(\sigma) = I_{14}(\sigma).$$

Подсчет интегралов $I_{15}(\sigma)$, $I_{16}(\sigma)$ и $I_{17}(\sigma)$. Руководствуясь общей логикой, подставим в последний интеграл функции (218) и (219), тогда вклад переписывается в виде

$$I_{17}(\sigma) = \int_{B_{1/\sigma}} d^4y \left(R_0^\Lambda(y) \right)^2 \left(p_1^\Lambda(y) p_1^\Lambda(y) + 2p_1^\Lambda(y) t_1^\Lambda(y) + t_1^\Lambda(y) t_1^\Lambda(y) \right). \quad (244)$$

Повторяя базовые шаги обработки похожих интегралов, которые были изучены выше, сразу выпишем результаты для первых двух вкладов

$$\int_{B_{1/\sigma}} d^4 y \left(R_0^\Lambda(y) \right)^2 \left(p_1^\Lambda(y) \right)^2 \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0,$$

$$2 \int_{B_{1/\sigma}} d^4 y \left(R_0^\Lambda(y) \right)^2 p_1^\Lambda(y) t_1^\Lambda(y) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{L}{4\pi^2} \int_{B_{1/\sigma}} d^4 y \left(R_0^\Lambda(y) \right)^2 p_1^\Lambda(y) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{L\alpha_5(\mathbf{f})}{4\pi^2}.$$

Отметим, что в последнем случае был использован тот факт, что комбинация $t_1^\Lambda(y) - L/(8\pi^2)$ в регионе $|y| \leq 1/\sigma$ выражается через функции, зависящие от $|y|\Lambda$. Продолжая, третье слагаемое в (244) анализируется разбиением области интегрирования. Так, при $|y| \leq 1/\Lambda$ имеем

$$\frac{L^2}{4(4\pi^2)^2} \int_{B_1} d^4 y \left(f_2^1(y) \right)^2 + \frac{L}{4\pi^2} \int_{B_1} d^4 y \left(f_2^1(y) \right)^2 h_1(y) = \frac{L^2 \alpha_2(\mathbf{f})}{8(4\pi^2)^3} + \frac{L \alpha_4(\mathbf{f})}{4\pi^2},$$

где было использовано соотношение (242). Далее, в регионе $1/\Lambda < |y| \leq 1/\sigma$ получаем

$$\frac{1}{2(4\pi^2)^3} \int_{1/\Lambda}^{1/\sigma} \frac{ds}{s} \left(\frac{1}{4} - \frac{\ln(s\sigma)}{2} + \frac{\alpha_1(\mathbf{f})}{\Lambda^2 s^2} \right)^2 \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{L^3}{24(4\pi^2)^3} + \frac{L^2}{16(4\pi^2)^3} + \frac{L(1 + 8\alpha_1(\mathbf{f}))}{32(4\pi^2)^3}.$$

Окончательно после суммирования ответ представляется в виде

$$I_{17}(\sigma) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{L^3}{24(4\pi^2)^3} + \frac{L^2(1 + 2\alpha_2(\mathbf{f}))}{16(4\pi^2)^3} + \frac{L}{4\pi^2} \left(\frac{1 + 8\alpha_1(\mathbf{f})}{32(4\pi^2)^2} + \alpha_4(\mathbf{f}) + \alpha_5(\mathbf{f}) \right).$$

Также, в предположениях секции 4.4 верно следующее равенство

$$I_{15}(\sigma) = I_{16}(\sigma) = I_{17}(\sigma).$$

Подсчет интегралов $I_{18}(\sigma)$, $I_{19}(\sigma)$ и $I_{20}(\sigma)$. Начнем с последнего интеграла (211). Воспользуемся определением (47) и представлениями (218) и (219), тогда вклад переписывается в виде

$$I_{20}(\sigma) = 2 \int_{B_{1/\sigma}} d^4 y \left(p_3^\Lambda(y) p_1^\Lambda(y) + p_3^\Lambda(y) t_1^\Lambda(y) + t_3^\Lambda(y) p_1^\Lambda(y) + t_3^\Lambda(y) t_1^\Lambda(y) \right) - 2\tilde{c}_2 I_4(\sigma). \quad (245)$$

Первые два слагаемых анализируются с учетом общей идеи, изложенной выше, следующим образом

$$2 \int_{B_{1/\sigma}} d^4 y p_3^\Lambda(y) p_1^\Lambda(y) \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0,$$

$$2 \int_{B_{1/\sigma}} d^4 y p_3^\Lambda(y) t_1^\Lambda(y) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{L}{4\pi^2} \int_{B_{\Lambda/\sigma} \times B_{\Lambda/\sigma}} d^4 x d^4 y \left(R_0^1(x) \right)^3 f_1^1(x+y) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{L\alpha_1(\mathbf{f})\alpha_3(\mathbf{f})}{4\pi^2},$$

где при последнем переходе был использован тот факт, что разность оценивается сверху неравенством

$$\left| \int_{B_{\Lambda/\sigma} \times B_{\Lambda/\sigma}} d^4 x d^4 y \left(R_0^1(x) \right)^3 f_1^1(x+y) - \alpha_1(\mathbf{f})\alpha_3(\mathbf{f}) \right| \leq \frac{1}{2(4\pi^2)^2} \left(\int_{B_1} d^4 y \left| f_1^1(y) \right| \right) \int_{\Lambda/\sigma-1}^{+\infty} \frac{ds}{s^3}$$

и, с учетом общего множителя, попадает в поправку $\mathcal{O}(L/\Lambda^2)$. Рассмотрим теперь третье слагаемое из (245)

$$2 \int_{B_{1/\sigma}} d^4 y t_3^\Lambda(y) p_1^\Lambda(y).$$

Здесь сразу следует обратить внимание, что область $|y| \leq 1/\Lambda$ сингулярного вклада не даст, так как в этом случае получается две функции с компактными носителями. Далее, в регионе $1/\Lambda < |y| \leq 1/\sigma$ функция $t_3^\Lambda(y)$ состоит из трех частей

$$-\frac{\sigma^4}{8(4\pi^2)^3} - \frac{1}{8(4\pi^2)^3 |y|^4} + \frac{\Lambda^2 \alpha_3(\mathbf{f})}{4\pi^2 |y|^2}.$$

Ясно, что первые два слагаемых сингулярного вклада не дадут. Действительно, после масштабирования переменных они имеют вид

$$\begin{aligned} & -\frac{\sigma^4}{4(4\pi^2)^3\Lambda^4} \int_{(B_{\Lambda/\sigma} \setminus B_1) \times B_{\Lambda/\sigma}} d^4y d^4x f_1^1(y+x) R_0^1(x) = \mathcal{O}(1/\Lambda^2), \\ & -\frac{1}{4(4\pi^2)^3} \int_{(B_{\Lambda/\sigma} \setminus B_1) \times B_{\Lambda/\sigma}} d^4y d^4x \frac{1}{|y|^4} f_1^1(y+x) R_0^1(x) = \mathcal{O}(1), \end{aligned}$$

где была опущена явная оценка, поскольку она аналогична упомянутым выше. Третье же слагаемое имеет другой вид, и для него справедлива следующая цепочка соотношений

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_3(\mathbf{f})}{2\pi^2} \int_{(B_{\Lambda/\sigma} \setminus B_1) \times B_{\Lambda/\sigma}} d^4y d^4x \frac{1}{|y|^2} f_1^1(y+x) R_0^1(x) &= \\ &= \frac{\alpha_3(\mathbf{f})}{2\pi^2} \int_{(B_{\Lambda/\sigma} \setminus B_1) \times B_1} d^4y d^4x \frac{R_0^1(y+x)}{|y|^2} \chi(|y+x| \leq \Lambda/\sigma) f_1^1(x) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \\ &\stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{\alpha_3(\mathbf{f})}{2\pi^2} \int_{(B_{\Lambda/\sigma} \setminus B_1) \times B_1} d^4y d^4x \frac{R_0^1(y)}{|y|^2} f_1^1(x) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{L\alpha_1(\mathbf{f})\alpha_3(\mathbf{f})}{4\pi^2}, \end{aligned}$$

где на втором шаге была отброшена поправка вида $\mathcal{O}(1)$. Действительно, можно проверить, что интегралы с

$$\left(R_0^1(y+x) \chi(|y+x| \leq \Lambda/\sigma) - R_0^1(y+x) \right) \text{ и } \left(R_0^1(y+x) - R_0^1(y) \right)$$

имеют конечные пределы при снятии регуляризации $\Lambda \rightarrow +\infty$. Следовательно, получаем

$$2 \int_{B_{1/\sigma}} d^4y t_3^\Lambda(y) p_1^\Lambda(y) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{L\alpha_1(\mathbf{f})\alpha_3(\mathbf{f})}{4\pi^2}.$$

Переходя к четвертому слагаемому из (245), воспользуемся явным видом функций (220) и (222) и разобьем область интегрирования на две части. При $|y| \leq 1/\Lambda$ имеем

$$2 \int_{B_1} d^4y \left(h_3(y) - \frac{\sigma^4/\Lambda^4 - 1}{8(4\pi^2)^3} \right) \left(h_1(y) + \frac{L}{2(4\pi^2)} \right) \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{L}{64(4\pi^2)^3} + \frac{L\alpha_{11}(\mathbf{f})}{4\pi^2}.$$

В области $1/\Lambda < |y| \leq 1/\sigma$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi^2} \int_{1/\Lambda}^{1/\sigma} ds s^3 \left(-\frac{\sigma^4}{8(4\pi^2)^2} - \frac{1}{8(4\pi^2)^2 s^4} + \frac{\Lambda^2 \alpha_3(\mathbf{f})}{s^2} \right) \left(\frac{1}{4} - \frac{\ln(s\sigma)}{2} + \frac{\alpha_1(\mathbf{f})}{\Lambda^2 s^2} \right) &\stackrel{\text{s.p.}}{=} \\ &\stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{L^2}{32(4\pi^2)^3} - \frac{L}{32(4\pi^2)^3} - \frac{L\alpha_3(\mathbf{f})}{4(4\pi^2)} + \frac{L\alpha_1(\mathbf{f})\alpha_3(\mathbf{f})}{4\pi^2} + \frac{\Lambda^2 \alpha_3(\mathbf{f})}{4(4\pi^2)\sigma^2}. \end{aligned}$$

В пятом слагаемом (245) можно воспользоваться асимптотикой (236) и следующей цепочкой соотношений для нахождения \tilde{c}_2 из (48)

$$\tilde{c}_2 = \int_{B_{1/\sigma}} d^4y R_0(y) t_1^{+\infty}(y) = \frac{1}{8(4\pi^2)} \int_0^{1/\sigma} ds s (1 - 2 \ln(s\sigma)) = \frac{1}{8(4\pi^2)\sigma^2}. \quad (246)$$

Тогда оно переписывается в виде

$$-2\tilde{c}_2 I_4(\sigma) \stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{\Lambda^2 \alpha_3(\mathbf{f})}{4(4\pi^2)\sigma^2}.$$

Суммируя все изученные части, приходим к ответу

$$I_{20}(\sigma) \stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{L^2}{32(4\pi^2)^3} + \frac{L}{4\pi^2} \left(-\frac{1}{64(4\pi^2)^2} - \frac{\alpha_3(\mathbf{f})}{4} + 3\alpha_1(\mathbf{f})\alpha_3(\mathbf{f}) + \alpha_{11}(\mathbf{f}) \right).$$

В дополнение, в предположениях секции 4.4 верно следующее равенство

$$I_{18}(\sigma) = I_{19}(\sigma) = I_{20}(\sigma).$$

Подсчет $R_{22}^\Lambda(0)$. В данном случае необходимо изучить асимптотику интеграла, включая слагаемые, пропорциональные $1/\Lambda^2$. Воспользуемся функциями (218) и (219), тогда

$$R_{22}^\Lambda(0) = 2 \int_{B_{1/\sigma}} d^4x \left(R_0^\Lambda(x) t_1^\Lambda(x) + R_0^\Lambda(x) p_1^\Lambda(x) \right) - \frac{1}{16\pi^2\sigma^2}. \quad (247)$$

Первое слагаемое считается явно подстановкой выражения (220) и разбиением области интегрирования на две части

$$\frac{L\alpha_1(\mathbf{f})}{2\pi^2\Lambda^2} + \frac{2\alpha_{12}(\mathbf{f})}{\Lambda^2} + \frac{\sigma^{-2} - \Lambda^{-2}}{16\pi^2},$$

где $\alpha_{12}(\mathbf{f})$ определено в (231). Второе слагаемое в (247) с учетом формулы (108) явно выписывается так

$$\begin{aligned} 2 \int_{B_{1/\sigma}} d^4x R_0^\Lambda(x) p_1^\Lambda(x) = & -2 \int_{B_{1/\Lambda} \times B_{1/\sigma}} d^4x d^4y f_1^\Lambda(x) \left(R_0^\Lambda(x+y) - R_0^{\Lambda,\sigma}(x+y) \right) R_0^\Lambda(y) + \\ & + 2 \int_{B_{1/\Lambda}} d^4x f_1^\Lambda(x) \left(t_1^\Lambda(x) + p_1^\Lambda(x) \right). \end{aligned}$$

В последней сумме первое слагаемое по модулю оценивается сверху выражением

$$\frac{\sigma^2}{2\pi^2\Lambda^2} \left(\int_{B_1} d^4x |f_1^1(x)| \right) \int_{1/\sigma-1/\Lambda}^{1/\sigma} ds s,$$

поэтому оно попадает в поправку $\mathcal{O}(1/\Lambda^3)$ и может быть опущено. Затем, второе слагаемое с учетом определения (232) равно

$$\frac{L\alpha_1(\mathbf{f})}{4\pi^2\Lambda^2} + \frac{2\alpha_{13}(\mathbf{f})}{\Lambda^2}.$$

Окончательно, суммируя все слагаемые, получаем соотношение

$$R_{22}^\Lambda(0) = \frac{3L\alpha_1(\mathbf{f})}{4\pi^2\Lambda^2} + \frac{2\alpha_{12}(\mathbf{f}) + 2\alpha_{13}(\mathbf{f})}{\Lambda^2} - \frac{1}{16\pi^2\Lambda^2} + \mathcal{O}(1/\Lambda^3). \quad (248)$$

9.4 Вспомогательное доказательство

В данной части приложения рассмотрим доказательство специального свойства (145) для нелокальной составляющей $PS_1^\Lambda(x, y)$ функции Грина $G^\Lambda(x, y)$. Сперва, пользуясь разложениями (36) и (43), выпишем ее явную формулу в виде суммы нескольких слагаемых

$$PS_1^\Lambda(x, y) = \sum_{k=0}^3 g_k(x, y),$$

где

$$g_0(x, y) = G_0^\Lambda(x - y) - R_0^\Lambda(x - y) + R_{10}^\Lambda(x - y)m^2 - \frac{1}{2}R_{20}^\Lambda(x - y)m^4,$$

$$\begin{aligned} g_1(x, y) = & -\frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x_1 G_0^\Lambda(x - x_1) B^2(x_1) G_0^\Lambda(x_1 - y) + \\ & + \frac{\lambda}{4} R_{11}^\Lambda(x - y) (B^2(x) + B^2(y)) - \frac{m^2\lambda}{4} R_{21}^\Lambda(x - y) (B^2(x) + B^2(y)), \end{aligned}$$

$$g_2(x, y) = \frac{\lambda^2}{4} \int_{\mathbb{R}^4 \times 2} d^4 x_1 d^4 x_2 G_0^\Lambda(x - x_1) B^2(x_1) G_0^\Lambda(x_1 - x_2) B^2(x_2) G_0^\Lambda(x_2 - y) - \\ - \frac{\lambda^2}{16} R_{22}^\Lambda(x - y) (B^4(x) + B^4(y)),$$

а также часть, зависящая от более высоких степеней фонового поля

$$g_3(x, y) = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{(-\lambda)^k}{2^k} \int_{\mathbb{R}^4 \times k} d^4 x_1 \dots d^4 x_k G_0^\Lambda(x - x_1) B^2(x_1) G_0^\Lambda(x_1 - x_2) B^2(x_2) \times \dots \\ \dots \times G_0^\Lambda(x_{k-1} - x_k) B^2(x_k) G_0^\Lambda(x_k - y).$$

Такое разбиение удобно тем, что оно показывает не только явную зависимость от степени фонового поля, но и возрастающую гладкость. Отдельно отметим, что в дальнейшем используются условия (53) для введенной регуляризации. Заметим, что $g_0(x, y)$ не зависит от фонового поля и вычитается в формуле (145) плотностью $\kappa_s(\cdot)$, поэтому его изучать не требуется. Далее, прибавляя и вычитая m^2 и расписывая разность операторов в виде

$$A_0^\Lambda(x) - A_0(x) = A^\Lambda(x) - A(x),$$

можно убедиться в справедливости равенства

$$(A^\Lambda(x) - A(x))g_3(x, y) \xrightarrow{\Lambda \rightarrow +\infty} 0$$

для всех значений аргументов, в том числе и для $y = x$. Такой переход получается за счет достаточной гладкости функции и свойств (42). Перейдем к оставшимся функциям $g_2(x, y)$ и $g_1(x, y)$, применив вначале оператор $A^\Lambda(x)$, а затем оператор $A(x)$. В первом случае получим

$$\int_{\mathbb{R}^4} d^4 x \left(A^\Lambda(x) g_2(x, y) \right) \Big|_{y=x} = \frac{\lambda^2}{4} I_2^2((G_0^\Lambda)^2) - \frac{\lambda^2}{4} R_{11}^\Lambda(0) S_4[B] + \mathcal{O}(L/\Lambda^2), \quad (249)$$

$$\int_{\mathbb{R}^4} d^4 x \left(A^\Lambda(x) g_1(x, y) \right) \Big|_{y=x} = S_m[B] \left(-\frac{\lambda}{2} G_0^\Lambda(0) + \frac{\lambda}{2} R_0^\Lambda(0) - \frac{m^2 \lambda}{2} R_{11}^\Lambda(0) \right) + \mathcal{O}(L/\Lambda^2) \\ = -\frac{\lambda}{2} S_m[B] P S_0^\Lambda(0) + \mathcal{O}(L/\Lambda^2), \quad (250)$$

где слагаемые с $R_{21}^\Lambda(0)$ и $R_{22}^\Lambda(0)$ вошли в поправку.

Теперь применим предельный оператор $A(x)$ к тем же функциям. Вначале заметим, что вспомогательные интегралы

$$\rho_{16}(z, y) = \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x_2 \left(B^2(z) G_0^\Lambda(z - x_2) B^2(x_2) G_0^\Lambda(x_2 - y) - B^2(z) R_0^{\Lambda, \sigma}(z - x_2) B^2(x_2) R_0^{\Lambda, \sigma}(x_2 - y) \right), \\ \rho_{17}(z, y) = \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x_2 \left(B^2(z) R_0^{\Lambda, \sigma}(z - x_2) B^2(x_2) R_0^{\Lambda, \sigma}(x_2 - y) - R_0^\Lambda(z - x_2) R_0^{\Lambda, \sigma}(x_2 - y) B^4(y) \right), \\ \rho_{18}(z, y) = \int_{\mathbb{R}^4 \times 2} d^4 x_1 d^4 x_2 \left(G_0^\Lambda(z - x_1) R_0^\Lambda(x_1 - x_2) R_0^{\Lambda, \sigma}(x_2 - y) B^4(y) \right) - \\ - \frac{1}{4} R_{22}^\Lambda(x - y) (B^4(x) + B^4(y)),$$

где было использовано определение (108), являются сходящимися до и после снятия регуляризации и имеют конечный предел на диагонали $z = y$. Для таких функций справедливы следующие соотношения

$$\left(A(x) \int_{\mathbb{R}^4} d^4 z G_0^\Lambda(x - z) \rho_j(z, y) \right) \Big|_{y=x} = \rho_j(x, x) + o(1), \quad j = 16, 17,$$

$$A(x)\rho_{18}(x, y)\Big|_{y=x} = o(1).$$

Таким образом, складывая все слагаемые, убеждаемся в справедливости равенства

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(A(x)g_2(x, y) \right) \Big|_{y=x} &= \frac{\lambda^2}{4} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(\rho_{16}(x, x) + \rho_{17}(x, x) \right) + o(1) \\ &= \frac{\lambda^2}{4} I_2^2((G_0^\Lambda)^2) - \frac{\lambda^2}{4} R_{11}^\Lambda(0)S_4[B] + o(1), \end{aligned}$$

которое в главной части совпадает с (249). Переходя к функции $g_1(x, y)$, удобно воспользоваться определениями (45) и (47) и переписать его в виде

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(A(x)g_1(x, y) \right) \Big|_{y=x} &= -\frac{\lambda S_m[B]}{2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(G_0^\Lambda(x)A(x)G_0^\Lambda(x) - \right. \\ &\quad \left. - R_0^{\Lambda, \sigma}(x)A(x)R_0^\Lambda(x) + 2m^2 R_{11}^\Lambda(x)A_0(x)R_0^\Lambda(x) \right) + \mathcal{O}(L/\Lambda^2), \end{aligned}$$

где в поправку вошло слагаемое с $R_{22}^\Lambda(0)$ без производных. Обратим внимание, что в последнем слагаемом интегрирование должно происходить по шару $B_{1/\sigma}$. Замена $B_{1/\sigma} \rightarrow \mathbb{R}^4$ возможна по той причине, что

$$\text{supp}(A_0(\cdot)R_0^\Lambda(\cdot)) \subset B_{1/\Lambda}$$

по построению, см. (41). Далее, применяя сходимость $A(x)G_0^\Lambda(x-y) \rightarrow \delta(x-y)$ в смысле обобщенных функций, переписываем отдельные слагаемые следующим образом

$$\int_{\mathbb{R}^4} d^4x G_0^\Lambda(x)A(x)G_0^\Lambda(x) = PS_0^\Lambda(0) + \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(R_0^\Lambda(x) - m^2 R_{11}^\Lambda(x) \right) A(x)G_0^\Lambda(x) + o(1), \quad (251)$$

$$\int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(R_0^\Lambda(x) - m^2 R_{11}^\Lambda(x) \right) \left(A(x) - A^\Lambda(x) \right) \left(G_0^\Lambda(x) - R_0^\Lambda(x) + m^2 R_{11}^\Lambda(x) \right) = o(1), \quad (252)$$

$$\int_{\mathbb{R}^4} d^4x R_{11}^\Lambda(x) \left(A(x) - A^\Lambda(x) \right) R_{11}^\Lambda(x) = o(1), \quad (253)$$

$$\int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(R_0^\Lambda(x)A_0(x)R_{11}^\Lambda(x) - R_{11}^\Lambda(x)A_0(x)R_0^\Lambda(x) \right) = 0. \quad (254)$$

Следовательно, с использованием формулы (252) в интеграле (251) можно произвести замену

$$\begin{aligned} A(x)G_0^\Lambda(x) &= \left(A(x) - A^\Lambda(x) \right) G_0^\Lambda(x) + \delta(x) \rightarrow \\ &\rightarrow \left(A(x) - A^\Lambda(x) \right) \left(R_0^\Lambda(x) - m^2 R_{11}^\Lambda(x) \right) + \delta(x) = \\ &= A_0(x) \left(R_0^\Lambda(x) - m^2 R_{11}^\Lambda(x) \right) + m^2 R_0^\Lambda(x) \chi(|x| \leq 1/\sigma), \end{aligned}$$

тогда, с учетом формул (253) и (254), верно равенство

$$\int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(A(x)g_1(x, y) \right) \Big|_{y=x} = -\frac{\lambda}{2} S_m[B] PS_0^\Lambda(0) + o(1).$$

Ясно, что конечная часть совпадает с полученной в (250). Выписывая явно оценки для поправочных слагаемых, можно убедиться, что все слагаемые $o(1)$ выше попадают в $\mathcal{O}(1/L)$, откуда и следует окончательное утверждение (145).

9.5 Частный случай базовых интегралов

В секции 9.3 были получены первые члены асимптотического разложения по регуляризующему параметру Λ для интегралов из секции 9.2. Было показано, что некоторые слагаемые зависят от функции $\mathbf{f}(\cdot)$ из (41). В данном разделе рассматривается частный случай асимптотических разложений для $\mathbf{f} \equiv 0$. Для этого необходимо вычислить числа $\alpha_1(0)$ – $\alpha_{13}(0)$, см. (215)–(217) и (223)–(232).

Начнем с их составляющих и посчитаем функцию (213)

$$h_k(y) \Big|_{\mathbf{f}=0} = \frac{2 - |y|^2}{8(4\pi^2)^k},$$

где $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $|y| \leq 1$. Тогда большая часть чисел выписывается мгновенно

$$\begin{aligned} \alpha_1(0) &= -\frac{1}{8}, \quad \alpha_2(0) = \frac{1}{4}, \quad \alpha_3(0) = \frac{3}{8(4\pi^2)^2}, \quad \alpha_4(0) = \frac{1}{48(4\pi^2)^2}, \\ \alpha_6(0) &= \frac{1}{6}, \quad \alpha_8(0) = \frac{1}{48(4\pi^2)^3}, \quad \alpha_{10}(0) = \frac{1}{48(4\pi^2)^3}, \quad \alpha_{11}(0) = \frac{1}{48(4\pi^2)^2}, \quad \alpha_{12}(0) = \frac{1}{48(4\pi^2)}. \end{aligned}$$

Еще четыре числа необходимо посчитать отдельно. Начнем с $\alpha_{13}(0)$. Такой интеграл удобно находить с использованием предварительного перехода в импульсное представление. Напомним несколько базовых формул, см. [32], которыми будем пользоваться

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi^2} \int_{\mathbb{S}^3} d^3 \hat{z} e^{ix_\mu \hat{z}^\mu} &= \frac{2J_1(|x|)}{|x|}, \\ R_0(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 z \frac{e^{ix_\mu z^\mu}}{|z|^2}, \quad R_0^1(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 z \frac{e^{ix_\mu z^\mu}}{|z|^2} \frac{2J_1(|z|)}{|z|}, \end{aligned}$$

где $J_n(\cdot)$ – функция Бесселя первого рода. Тогда, переходя в импульсное представление в первом интеграле (232) и явно считая второй, получаем соотношение

$$\alpha_{13}(0) = \frac{\Theta_{13}}{4\pi^2},$$

где интеграл

$$\Theta_{13} = \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^4} \left(\frac{2}{s} J_1(s) - 1 \right)^2 J_1(s) - \frac{5}{192} = -0,01122021 \pm 10^{-8}$$

может быть найден численно с заданной точностью. Проводя аналогичные рассуждения, можно получить следующий набор равенств

$$\alpha_5(0) = \frac{\Theta_5}{(4\pi^2)^2}, \quad \alpha_7(0) = \frac{\Theta_7}{(4\pi^2)^3}, \quad \alpha_9(0) = \frac{\Theta_9}{(4\pi^2)^3},$$

где

$$\begin{aligned} \Theta_5 &= \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^3} \left(\frac{2}{s} J_1(s) - 1 \right) J_1(s) (e_1(s) + e_2(s)), \\ \Theta_7 &= \int_0^{+\infty} \frac{ds}{2s} \left(\frac{2}{s} J_1(s) - 1 \right) (e_1(s) + e_2(s))^2, \\ \Theta_9 &= \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^3} \left(\frac{2}{s} J_1(s) - 1 \right) J_1(s) (e_1(s) + e_3(s)), \\ e_1(s) &= \int_0^1 dt t^2 J_1(st) = \frac{J_2(s)}{s}, \\ e_2(s) &= \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} J_1(st) = \frac{s^3 {}_2F_3(1, 1; 2, 2, 3; -s^2/4) - 16s \ln(s/2) - 8s(2\gamma - 1)}{32}, \end{aligned}$$

$$e_3(s) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^4} J_1(st) = \frac{-s^5 {}_2F_3(1, 1; 2, 3, 4; -s^2/4) + 48s^3 \ln(s/2) + s^3(48\gamma - 60) + 192s}{768}.$$

Здесь γ – постоянная Эйлера–Маскерони, и ${}_2F_3$ – гипергеометрическая функция. Искомые числа могут быть подсчитаны численно и имеют вид

$$\Theta_5 = -0,04298947 \pm 10^{-8}, \quad (255)$$

$$\Theta_7 = -0,02667863 \pm 10^{-8}, \quad (256)$$

$$\Theta_9 = -0,02771715 \pm 10^{-8}. \quad (257)$$

Окончательно, в предположении $\mathbf{f} \equiv 0$ асимптотические разложения для интегралов из секции 9.2 можно переписать следующим образом

$$\begin{aligned} I_1(\sigma) &= \frac{1}{(4\pi^2)^2} \left(\frac{L}{2} + \frac{1}{12} \right) + o(1), \\ I_2(\sigma) = I_3(\sigma) &= \frac{1}{(4\pi^2)^2} \left(\frac{L^2}{8} + \frac{3L}{16} + \frac{96\Theta_5 - 1}{96} \right) + o(1), \\ I_4(\sigma) &= \frac{1}{(4\pi^2)^2} \left(\frac{3L\Lambda^2}{8} - \frac{\sigma^2}{4} \right) + o(1), \\ I_5(\sigma) &= \frac{1}{(4\pi^2)^2} \left(\frac{L^3}{24} - \frac{L^2}{32} - \frac{L(192\Theta_5 + 1)}{192} \right) + \mathcal{O}(1), \\ I_6(\sigma) &= \frac{1}{(4\pi^2)^3} \left(\frac{L^2}{4} + \frac{L}{8} \right) + \mathcal{O}(1), \\ I_7(\sigma) &= \frac{1}{(4\pi^2)^3} \left(-\frac{3L\Lambda^2}{16} + \frac{\Lambda^2(31 + 192\Theta_7)}{192} - \frac{L\sigma^2}{8} \right) + \mathcal{O}(1), \\ I_8(\sigma) &= \frac{1}{(4\pi^2)^2} \left(-\frac{L^2}{8} + \frac{L}{16} \right) + \mathcal{O}(1), \\ I_9(\sigma) = I_{10}(\sigma) &= \frac{1}{(4\pi^2)^3} \left(-\frac{L^3}{48} - \frac{L^2}{64} - \frac{L(1 + 48\Theta_5)}{96} \right) + \mathcal{O}(1), \\ I_{11}(\sigma) = I_{12}(\sigma) &= \frac{1}{(4\pi^2)^3} \left(-\frac{L^3}{24} - \frac{L^2}{32} + \frac{7L}{128} \right) + \mathcal{O}(1), \\ I_{13}(\sigma) = I_{14}(\sigma) &= \frac{1}{(4\pi^2)^3} \left(\frac{3L\Lambda^2}{16} + \frac{\Lambda^2(1 + 192\Theta_9)}{192} \right) + \mathcal{O}(1), \\ I_{15}(\sigma) = I_{16}(\sigma) = I_{17}(\sigma) &= \frac{1}{(4\pi^2)^3} \left(\frac{L^3}{24} + \frac{3L^2}{32} + \frac{L(1 + 48\Theta_5)}{48} \right) + \mathcal{O}(1), \\ I_{18}(\sigma) = I_{19}(\sigma) = I_{20}(\sigma) &= \frac{1}{(4\pi^2)^3} \left(-\frac{L^2}{32} - \frac{11L}{48} \right) + \mathcal{O}(1). \end{aligned}$$

Также, последний набор можно дополнить следующим асимптотическим разложением, см. формулу (248),

$$R_{20}^\Lambda(0) = R_{21}^\Lambda(0) = R_{22}^\Lambda(0) = -\frac{3L}{8(4\pi^2)\Lambda^2} + \frac{-5 + 48\Theta_{13}}{24(4\pi^2)\Lambda^2} + \mathcal{O}(1/\Lambda^3).$$

9.6 Комбинации констант связи

Обозначения для первой петли.

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{1,1,1}^i &= g^{ijj}, \quad \mathbf{T}_{1,1,2}^i = g^{ij_1j_2} M^{j_1j_2}, \\ \mathbf{T}_{1,2,1}^{i_1i_2} &= \lambda^{i_1i_2jj}, \quad \mathbf{T}_{1,2,2}^{i_1i_2} = g^{i_1j_1j_2} g^{j_1j_2i_2}, \quad \mathbf{T}_{1,2,3}^{i_1i_2} = \lambda^{i_1i_2j_1j_2} M^{j_1j_2}, \\ \mathbf{T}_{1,3,1}^{i_1i_2i_3} &= \lambda^{i_1i_2j_1j_2} g^{j_1j_2i_3}, \quad \mathbf{T}_{1,4,1}^{i_1i_2i_3i_4} = \lambda^{i_1i_2j_1j_2} \lambda^{j_1j_2i_3i_4}. \end{aligned}$$

Обозначения для второй петли.

Комбинации для B_i :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{2,1,1}^i &= \lambda^{ij_1j_2j_3} g^{j_1j_2j_3}, \quad \mathbf{T}_{2,1,2}^i = \lambda^{ij_1j_2j_3} g^{j_1j_2j_4} M^{j_3j_4}, \quad \mathbf{T}_{2,1,3}^i = g^{ij_1j_2} g^{j_1j_3j_4} g^{j_2j_3j_4}, \\ \mathbf{T}_{2,1,4}^i &= g^{ij_1j_2} \lambda^{j_1j_2j_3j_4}, \quad \mathbf{T}_{2,1,5}^i = g^{ij_1j_2} \lambda^{j_1j_2j_3j_4} M^{j_3j_4}, \\ \mathbf{T}_{2,1,6}^i &= g^{ij_1j_2} M_{r,1}^{j_1j_2}, \quad \mathbf{T}_{2,1,7}^i = g_{r,1}^{ijj}, \quad \mathbf{T}_{2,1,8}^i = g_{r,1}^{ij_1j_2} M^{j_1j_2}, \\ \mathbf{T}_{2,1,9}^i &= g^{ij_1j_2} M^{j_1j_3} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_3j_2}, \quad \mathbf{T}_{2,1,10}^i = g^{ij_1j_2} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_1j_2}. \end{aligned}$$

Комбинации для $B_{i_1}B_{i_2}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{2,2,1}^{i_1i_2} &= \lambda^{i_1j_1j_2j_3} \lambda^{j_1j_2j_3i_2}, \quad \mathbf{T}_{2,2,2}^{i_1i_2} = \lambda^{i_1j_1j_2j_3} \lambda^{j_1j_2j_4i_2} M^{j_3j_4}, \\ \mathbf{T}_{2,2,3}^{i_1i_2} &= \lambda^{i_1i_2j_1j_2} g^{j_1j_3j_4} g^{j_2j_3j_4}, \quad \mathbf{T}_{2,2,4}^{i_1i_2} = g^{i_1j_1j_2} g^{j_1j_3j_4} \lambda^{j_2j_3j_4i_2}, \\ \mathbf{T}_{2,2,5}^{i_1i_2} &= \lambda^{i_1i_2j_1j_2} \lambda^{j_1j_2j_3j_4}, \quad \mathbf{T}_{2,2,6}^{i_1i_2} = g^{i_1j_1j_2} \lambda^{j_1j_2j_3j_4} g^{j_3j_4i_2}, \\ \mathbf{T}_{2,2,7}^{i_1i_2} &= \lambda^{i_1i_2j_1j_2} \lambda^{j_1j_2j_3j_4} M^{j_3j_4}, \quad \mathbf{T}_{2,2,8}^{i_1i_2} = \lambda^{i_1i_2j_1j_2} M_{r,1}^{j_1j_2}, \\ \mathbf{T}_{2,2,9}^{i_1i_2} &= g_{r,1}^{i_1j_1j_2} g^{j_1j_2i_2}, \quad \mathbf{T}_{2,2,10}^{i_1i_2} = \lambda_{r,1}^{i_1i_2jj}, \quad \mathbf{T}_{2,2,11}^{i_1i_2} = \lambda_{r,1}^{i_1i_2j_1j_2} M^{j_1j_2}, \\ \mathbf{T}_{2,2,12}^{i_1i_2} &= \lambda^{i_1i_2j_1j_2} M^{j_1j_3} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_3j_2}, \quad \mathbf{T}_{2,2,13}^{i_1i_2} = g^{i_1j_1j_3} g^{i_2j_3j_2} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_1j_2}, \quad \mathbf{T}_{2,2,14}^{i_1i_2} = \lambda^{i_1i_2j_1j_2} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_1j_2}. \end{aligned}$$

Комбинации для $B_{i_1}B_{i_2}B_{i_3}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{2,3,1}^{i_1i_2i_3} &= g^{i_1j_1j_2} \lambda^{j_1j_3j_4i_2} \lambda^{j_2j_3j_4i_3}, \quad \mathbf{T}_{2,3,2}^{i_1i_2i_3} = \lambda^{i_1i_2j_1j_2} g^{j_1j_3j_4} \lambda^{j_2j_3j_4i_3}, \\ \mathbf{T}_{2,3,3}^{i_1i_2i_3} &= \lambda^{i_1i_2j_1j_2} \lambda^{j_1j_2j_3j_4} g^{j_3j_4i_3}, \\ \mathbf{T}_{2,3,4}^{i_1i_2i_3} &= \lambda^{i_1i_2j_1j_2} g_{r,1}^{j_1j_2i_3}, \quad \mathbf{T}_{2,3,5}^{i_1i_2i_3} = \lambda_{r,1}^{i_1i_2j_1j_2} g^{j_1j_2i_3}, \\ \mathbf{T}_{2,3,6}^{i_1i_2i_3} &= \lambda^{i_1i_2j_1j_2} g^{j_2j_3i_3} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_1j_3}. \end{aligned}$$

Комбинации для $B_{i_1}B_{i_2}B_{i_3}B_{i_4}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{2,4,1}^{i_1i_2i_3i_4} &= \lambda^{i_1i_2j_1j_2} \lambda^{j_1j_3j_4i_3} \lambda^{j_2j_3j_4i_4}, \\ \mathbf{T}_{2,4,2}^{i_1i_2i_3i_4} &= \lambda^{i_1i_2j_1j_2} \lambda^{j_1j_2j_3j_4} \lambda^{j_3j_4i_3i_4}, \quad \mathbf{T}_{2,4,3}^{i_1i_2i_3i_4} = \lambda_{r,1}^{i_1i_2j_1j_2} \lambda^{j_1j_2i_3i_4}, \\ \mathbf{T}_{2,4,4}^{i_1i_2i_3i_4} &= \lambda^{i_1i_2j_1j_2} \lambda^{i_3i_4j_3j_2} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_1j_3}. \end{aligned}$$

Обозначения для третьей петли.

Комбинации для B_i :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{3,1,1}^i &= \tilde{g}_{r,1}^{ij_1j_2} \tilde{M}_{r,1}^{j_1j_2}, \quad \mathbf{T}_{3,1,2}^i = \lambda^{ij_1j_2j_3} g^{j_1j_4j_5} g^{j_4j_5j_6} g^{j_6j_2j_3}, \\ \mathbf{T}_{3,1,3}^i &= \tilde{g}_{r,1}^{ij_1j_2} g^{j_1j_3j_4} g^{j_2j_3j_4}, \quad \mathbf{T}_{3,1,4}^i = \lambda^{ij_1j_2j_3} g^{j_1j_2j_4} \tilde{M}_{r,1}^{j_3j_4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{3,1,5}^i &= \lambda^{ij_1 j_2 j_3} g_{r,1}^{j_1 j_2 j_3}, \quad \mathbf{T}_{3,1,6}^i = \lambda_{r,1}^{ij_1 j_2 j_3} g^{j_1 j_2 j_3}, \\
\mathbf{T}_{3,1,7}^i &= \lambda^{ij_1 j_2 j_3} g_{r,1}^{j_4 j_2 j_3} M^{j_1 j_4}, \quad \mathbf{T}_{3,1,8}^i = \lambda_{r,1}^{ij_1 j_2 j_3} g^{j_4 j_2 j_3} M^{j_1 j_4}, \\
\mathbf{T}_{3,1,9}^i &= g^{ij_1 j_2} g^{j_1 j_3 j_4} g_{r,1}^{j_2 j_3 j_4}, \quad \mathbf{T}_{3,1,10}^i = \lambda^{ij_1 j_2 j_3} \lambda^{j_2 j_3 j_4 j_5} g^{j_1 j_4 j_5}, \\
\mathbf{T}_{3,1,11}^i &= \lambda^{ij_1 j_2 j_3} \lambda^{j_2 j_3 j_4 j_5} g^{j_6 j_4 j_5} M^{j_1 j_6}, \quad \mathbf{T}_{3,1,12}^i = g^{ij_1 j_6} g^{j_1 j_2 j_3} \lambda^{j_2 j_3 j_4 j_5} g^{j_6 j_4 j_5}, \\
\mathbf{T}_{3,1,13}^i &= g^{ij_3 j_6} g^{j_1 j_2 j_3} \lambda^{j_2 j_6 j_4 j_5} g^{j_1 j_4 j_5}, \quad \mathbf{T}_{3,1,14}^i = \lambda^{ij_1 j_2 j_3} \lambda^{j_2 j_6 j_4 j_5} g^{j_1 j_4 j_5} M^{j_3 j_6}, \\
\mathbf{T}_{3,1,15}^i &= \lambda^{ij_1 j_2 j_3} \lambda^{j_2 j_3 j_4 j_5} g^{j_1 j_4 j_6} M^{j_5 j_6}, \quad \mathbf{T}_{3,1,16}^i = g^{ij_1 j_2} \lambda^{j_1 j_3 j_4 j_5} \lambda^{j_2 j_3 j_4 j_5}, \\
\mathbf{T}_{3,1,17}^i &= g^{ij_1 j_2} \lambda^{j_1 j_3 j_4 j_5} \lambda^{j_2 j_3 j_4 j_6} M^{j_5 j_6}, \quad \mathbf{T}_{3,1,18}^i = g^{ij_1 j_2} \lambda^{j_1 j_3 j_4 j_5} \lambda^{j_6 j_3 j_4 j_5} M^{j_2 j_6}, \\
\mathbf{T}_{3,1,19}^i &= \lambda^{ij_1 j_2 j_3} g^{j_1 j_4 j_5} g^{j_5 j_6 j_3} g^{j_2 j_4 j_6}, \quad \mathbf{T}_{3,1,20}^i = g^{ij_1 j_2} \lambda_{r,1}^{j_1 j_2 j_3 j_3}, \\
\mathbf{T}_{3,1,21}^i &= g^{ij_1 j_2} \lambda_{r,1}^{j_1 j_2 j_3 j_4} M^{j_3 j_4}, \quad \mathbf{T}_{3,1,22}^i = g^{ij_1 j_2} \lambda_{r,1}^{j_1 j_4 j_3 j_3} M^{j_2 j_4}, \\
\mathbf{T}_{3,1,23}^i &= g^{ij_1 j_2} M_{r,2}^{j_1 j_2}, \quad \mathbf{T}_{3,1,24}^i = g_{r,2}^{ijj}, \quad \mathbf{T}_{3,1,25}^i = g_{r,2}^{ijj} M^{j_1 j_2}, \\
\mathbf{T}_{3,1,26}^i &= g^{ij_1 j_2} \delta_{r,2}^{j_1 j_2}, \quad \mathbf{T}_{3,1,27}^i = g^{ij_1 j_2} M^{j_2 j_3} M_{r,2}^{j_3 j_1}, \quad \mathbf{T}_{3,1,28}^i = g^{ij_1 j_2} \delta_{r,2}^{j_1 j_3} M^{j_2 j_3}, \\
\mathbf{T}_{3,1,29}^i &= \lambda^{ij_1 j_2 j_3} g^{j_2 j_3 j_4} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_1 j_4}, \quad \mathbf{T}_{3,1,30}^i = \lambda^{ij_1 j_2 j_3} g^{j_2 j_3 j_4} (M^{j_1 j_5} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_5 j_4} + M^{j_4 j_5} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_5 j_1}), \\
\mathbf{T}_{3,1,31}^i &= \lambda^{ij_1 j_2 j_3} g^{j_5 j_3 j_4} M^{j_2 j_5} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_1 j_4}, \quad \mathbf{T}_{3,1,32}^i = g^{ij_1 j_2} g^{j_2 j_3 j_4} g^{j_1 j_3 j_5} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_5 j_4}, \\
\mathbf{T}_{3,1,33}^i &= g^{ij_1 j_2} g^{j_2 j_3 j_4} g^{j_5 j_3 j_4} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_5 j_1}, \quad \mathbf{T}_{3,1,34}^i = g^{ij_1 j_2} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_1 j_3} M^{j_3 j_4} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_4 j_2}, \\
\mathbf{T}_{3,1,35}^i &= g^{ij_1 j_2} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_1 j_3} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_3 j_2}, \quad \mathbf{T}_{3,1,36}^i = g^{ij_1 j_2} M^{j_1 j_3} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_3 j_4} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_4 j_2}, \\
\mathbf{T}_{3,1,37}^i &= g^{ij_1 j_2} M^{j_2 j_3} \lambda^{j_1 j_3 j_4 j_5} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_4 j_5}, \quad \mathbf{T}_{3,1,38}^i = \tilde{g}_{r,1}^{ij_1 j_2} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_1 j_2}, \\
\mathbf{T}_{3,1,39}^i &= \tilde{g}_{r,1}^{ij_1 j_2} M^{j_2 j_3} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_1 j_3}, \quad \mathbf{T}_{3,1,40}^i = g^{ij_1 j_2} \tilde{M}_{r,1}^{j_2 j_3} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_1 j_3}.
\end{aligned}$$

Комбинации для $B_{i_1} B_{i_2}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{3,2,1}^{i_1 i_2} &= \tilde{\lambda}_{r,1}^{i_1 i_2 j_1 j_2} \tilde{M}_{r,1}^{j_1 j_2}, \quad \mathbf{T}_{3,2,2}^{i_1 i_2} = \tilde{g}_{r,1}^{i_1 j_1 j_2} \tilde{g}_{r,1}^{j_1 j_2 i_2}, \\
\mathbf{T}_{3,2,3}^{i_1 i_2} &= \lambda^{i_1 j_1 j_2 j_3} g^{j_1 j_4 j_5} g^{j_4 j_5 j_6} \lambda^{i_2 j_2 j_3 j_6}, \quad \mathbf{T}_{3,2,4}^{i_1 i_2} = \lambda^{i_1 j_1 j_2 j_3} \lambda^{i_2 j_1 j_4 j_5} g^{j_4 j_5 j_6} g^{j_2 j_3 j_6}, \\
\mathbf{T}_{3,2,5}^{i_1 i_2} &= \lambda^{i_1 j_1 j_2 j_3} g^{j_1 j_4 j_5} \lambda^{i_2 j_4 j_5 j_6} g^{j_2 j_3 j_6}, \quad \mathbf{T}_{3,2,6}^{i_1 i_2} = \lambda^{i_1 j_1 j_2 j_3} \lambda^{i_2 j_1 j_2 j_4} \tilde{M}_{r,1}^{j_3 j_4}, \\
\mathbf{T}_{3,2,7}^{i_1 i_2} &= \lambda^{i_1 j_1 j_2 j_3} g^{j_1 j_2 j_4} \tilde{g}_{r,1}^{i_2 j_3 j_4}, \quad \mathbf{T}_{3,2,8}^{i_1 i_2} = g^{j_1 j_2 j_3} g^{j_1 j_2 j_4} \tilde{\lambda}_{r,1}^{i_1 i_2 j_3 j_4}, \\
\mathbf{T}_{3,2,9}^{i_1 i_2} &= \lambda^{i_1 j_1 j_2 j_3} \lambda_{r,1}^{i_2 j_1 j_2 j_3}, \quad \mathbf{T}_{3,2,10}^{i_1 i_2} = \lambda^{i_1 j_1 j_2 j_3} \lambda_{r,1}^{i_2 j_1 j_2 j_4} M^{j_3 j_4}, \quad \mathbf{T}_{3,2,11}^{i_1 i_2} = \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} g^{j_1 j_3 j_4} g_{r,1}^{j_2 j_3 j_4}, \\
\mathbf{T}_{3,2,12}^{i_1 i_2} &= g^{i_1 j_1 j_2} g_{r,1}^{j_1 j_3 j_4} \lambda^{i_2 j_2 j_3 j_4}, \quad \mathbf{T}_{3,2,13}^{i_1 i_2} = g^{i_1 j_1 j_2} g^{j_1 j_3 j_4} \lambda_{r,1}^{i_2 j_2 j_3 j_4}, \\
\mathbf{T}_{3,2,14}^{i_1 i_2} &= \lambda^{i_1 j_1 j_2 j_3} \lambda^{j_2 j_3 j_4 j_5} \lambda^{i_2 j_1 j_4 j_5}, \quad \mathbf{T}_{3,2,15}^{i_1 i_2} = \lambda^{i_1 j_1 j_2 j_3} \lambda^{j_2 j_3 j_4 j_5} \lambda^{i_2 j_6 j_4 j_5} M^{j_1 j_6}, \\
\mathbf{T}_{3,2,16}^{i_1 i_2} &= g^{i_1 j_1 j_6} g^{j_1 j_2 j_3} \lambda^{j_2 j_3 j_4 j_5} \lambda^{i_2 j_6 j_4 j_5}, \quad \mathbf{T}_{3,2,17}^{i_1 i_2} = \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_6} g^{j_1 j_2 j_3} \lambda^{j_2 j_3 j_4 j_5} g^{j_6 j_4 j_5}, \\
\mathbf{T}_{3,2,18}^{i_1 i_2} &= \lambda^{i_1 i_2 j_5 j_6} g^{j_1 j_2 j_3} \lambda^{j_2 j_3 j_4 j_5} g^{j_1 j_4 j_6}, \quad \mathbf{T}_{3,2,19}^{i_1 i_2} = g^{i_1 j_5 j_6} g^{j_1 j_2 j_3} \lambda^{j_2 j_3 j_4 j_5} \lambda^{i_2 j_1 j_4 j_6}, \\
\mathbf{T}_{3,2,20}^{i_1 i_2} &= \lambda^{i_1 j_1 j_2 j_3} \lambda^{j_2 j_3 j_4 j_5} g^{j_1 j_4 j_6} g^{i_2 j_5 j_6}, \quad \mathbf{T}_{3,2,21}^{i_1 i_2} = \lambda^{i_1 j_1 j_2 j_3} \lambda^{j_2 j_3 j_4 j_5} \lambda^{i_2 j_1 j_4 j_6} M^{j_5 j_6}, \\
\mathbf{T}_{3,2,22}^{i_1 i_2} &= \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} \lambda^{j_1 j_3 j_4 j_5} \lambda^{j_2 j_3 j_4 j_5}, \quad \mathbf{T}_{3,2,23}^{i_1 i_2} = \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} \lambda^{j_1 j_3 j_4 j_5} \lambda^{j_2 j_3 j_4 j_6} M^{j_5 j_6}, \\
\mathbf{T}_{3,2,24}^{i_1 i_2} &= g^{i_1 j_1 j_2} \lambda^{j_1 j_3 j_4 j_5} \lambda^{j_2 j_3 j_4 j_6} g^{i_2 j_5 j_6}, \quad \mathbf{T}_{3,2,25}^{i_1 i_2} = \lambda^{i_1 j_1 j_2 j_3} \lambda^{i_2 j_1 j_4 j_5} g^{j_4 j_6 j_2} g^{j_3 j_5 j_6}, \\
\mathbf{T}_{3,2,26}^{i_1 i_2} &= \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} \lambda_{r,1}^{j_1 j_2 j_3 j_3}, \quad \mathbf{T}_{3,2,27}^{i_1 i_2} = \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} \lambda_{r,1}^{j_1 j_2 j_3 j_4} M^{j_3 j_4}, \quad \mathbf{T}_{3,2,28}^{i_1 i_2} = g^{i_1 j_1 j_2} \lambda_{r,1}^{j_1 j_2 j_3 j_4} g^{i_2 j_3 j_4}, \\
\mathbf{T}_{3,2,29}^{i_1 i_2} &= \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} \lambda_{r,1}^{j_1 j_4 j_3 j_3} M^{j_2 j_4}, \quad \mathbf{T}_{3,2,30}^{i_1 i_2} = g^{i_1 j_1 j_4} g^{i_2 j_2 j_4} \lambda_{r,1}^{j_1 j_2 j_3 j_3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{3,2,31}^{i_1 i_2} &= \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} M_{r,2}^{j_1 j_2}, \quad \mathbf{T}_{3,2,32}^{i_1 i_2} = g^{i_1 j_1 j_2} g_{r,2}^{i_2 j_1 j_2}, \quad \mathbf{T}_{3,2,33}^{i_1 i_2} = \lambda_{r,2}^{i_1 i_2 j j}, \\
\mathbf{T}_{3,2,34}^{i_1 i_2} &= \lambda_{r,2}^{i_1 i_2 j_1 j_2} M_{r,2}^{j_1 j_2}, \quad \mathbf{T}_{3,2,35}^{i_1 i_2} = \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} \delta_{r,2}^{j_1 j_2}, \quad \mathbf{T}_{3,2,36}^{i_1 i_2} = \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} M^{j_2 j_3} M_{r,2}^{j_3 j_1}, \\
\mathbf{T}_{3,2,37}^{i_1 i_2} &= g^{i_1 j_1 j_2} g^{i_2 j_2 j_3} M_{r,2}^{j_3 j_1}, \quad \mathbf{T}_{3,2,38}^{i_1 i_2} = \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} M^{j_2 j_3} \delta_{r,2}^{j_3 j_1}, \quad \mathbf{T}_{3,2,39}^{i_1 i_2} = g^{i_1 j_1 j_2} g^{i_2 j_2 j_3} \delta_{r,2}^{j_3 j_1}, \\
\mathbf{T}_{3,2,40}^{i_1 i_2} &= g^{j_1 i_1 j_2} g^{j_2 i_2 j_3} \lambda^{j_3 j_4 j_5 j_6} \lambda^{j_1 j_4 j_5 j_6}, \quad \mathbf{T}_{3,2,41}^{i_1 i_2} = \lambda^{j_1 i_1 i_2 j_2} M^{j_2 j_3} \lambda^{j_3 j_4 j_5 j_6} \lambda^{j_1 j_4 j_5 j_6}, \\
\mathbf{T}_{3,2,42}^{i_1 i_2} &= \lambda^{i_1 j_1 j_2 j_3} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_3 j_4} \lambda^{j_1 j_2 j_4 i_2}, \quad \mathbf{T}_{3,2,43}^{i_1 i_2} = \lambda^{i_1 j_1 j_2 j_3} \lambda^{j_1 j_2 j_4 i_2} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_3 j_5} M^{j_5 j_4}, \\
\mathbf{T}_{3,2,44}^{i_1 i_2} &= \lambda^{i_1 j_1 j_2 j_3} \lambda^{j_1 j_5 j_4 i_2} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_2 j_5} M^{j_3 j_4}, \quad \mathbf{T}_{3,2,45}^{i_1 i_2} = \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_1 j_5} g^{j_5 j_3 j_4} g^{j_2 j_3 j_4}, \\
\mathbf{T}_{3,2,46}^{i_1 i_2} &= \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_3 j_5} g^{j_1 j_3 j_4} g^{j_2 j_5 j_4}, \quad \mathbf{T}_{3,2,47}^{i_1 i_2} = g^{i_1 j_1 j_2} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_1 j_5} g^{j_5 j_3 j_4} \lambda^{j_2 j_3 j_4 i_2}, \\
\mathbf{T}_{3,2,48}^{i_1 i_2} &= g^{i_1 j_1 j_2} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_2 j_5} g^{j_1 j_3 j_4} \lambda^{j_5 j_3 j_4 i_2}, \quad \mathbf{T}_{3,2,49}^{i_1 i_2} = g^{i_1 j_1 j_2} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_3 j_5} g^{j_1 j_3 j_4} \lambda^{j_2 j_5 j_4 i_2}, \\
\mathbf{T}_{3,2,50}^{i_1 i_2} &= g^{i_1 j_1 j_2} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_2 j_3} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_1 j_4} g^{i_2 j_3 j_4}, \quad \mathbf{T}_{3,2,51}^{i_1 i_2} = \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_2 j_4} M^{j_4 j_3} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_1 j_3}, \\
\mathbf{T}_{3,2,52}^{i_1 i_2} &= \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_2 j_3} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_1 j_3}, \quad \mathbf{T}_{3,2,53}^{i_1 i_2} = \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_4 j_3} M^{j_2 j_4} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_1 j_3}, \\
\mathbf{T}_{3,2,54}^{i_1 i_2} &= g^{i_1 j_1 j_2} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_2 j_3} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_3 j_4} g^{i_2 j_1 j_4}, \quad \mathbf{T}_{3,2,55}^{i_1 i_2} = \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} M^{j_2 j_3} \lambda^{j_1 j_3 j_4 j_5} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_4 j_5}, \\
\mathbf{T}_{3,2,56}^{i_1 i_2} &= g^{i_1 j_1 j_2} g^{i_2 j_2 j_3} \lambda^{j_1 j_3 j_4 j_5} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_4 j_5}, \quad \mathbf{T}_{3,2,57}^{i_1 i_2} = \tilde{\lambda}_{r,1}^{i_1 i_2 j_1 j_2} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_1 j_2}, \\
\mathbf{T}_{3,2,58}^{i_1 i_2} &= \lambda_{r,1}^{i_1 i_2 j_1 j_2} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_1 j_3} \tilde{M}_{r,1}^{j_3 j_2}, \quad \mathbf{T}_{3,2,59}^{i_1 i_2} = g_{r,1}^{i_1 j_1 j_2} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_1 j_3} \tilde{g}_{r,1}^{i_2 j_3 j_2}, \quad \mathbf{T}_{3,2,60}^{i_1 i_2} = \tilde{\lambda}_{r,1}^{i_1 i_2 j_1 j_2} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_1 j_3} M^{j_3 j_4}.
\end{aligned}$$

Комбинации для $B_{i_1} B_{i_2} B_{i_3}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{3,3,1}^{i_1 i_2 i_3} &= \tilde{\lambda}_{r,1}^{i_1 i_2 j_1 j_2} \tilde{g}_{r,1}^{i_3 j_1 j_2}, \quad \mathbf{T}_{3,3,2}^{i_1 i_2 i_3} = \lambda^{i_1 j_1 j_2 j_3} g^{j_1 j_4 j_5} \lambda^{j_4 j_5 j_6 i_2} \lambda^{j_6 j_2 j_3 i_3}, \\
\mathbf{T}_{3,3,3}^{i_1 i_2 i_3} &= \lambda^{i_1 j_1 j_2 j_3} \lambda^{i_2 j_2 j_3 j_4} \tilde{g}_{r,1}^{i_3 j_4 j_1}, \quad \mathbf{T}_{3,3,4}^{i_1 i_2 i_3} = g^{j_1 j_2 j_3} \lambda^{i_3 j_2 j_3 j_4} \tilde{\lambda}_{r,1}^{i_1 i_2 j_4 j_1}, \\
\mathbf{T}_{3,3,5}^{i_1 i_2 i_3} &= \lambda^{i_1 j_1 j_2 j_3} \lambda^{j_2 j_3 j_4 i_2} g^{j_1 j_4 i_3}, \quad \mathbf{T}_{3,3,6}^{i_1 i_2 i_3} = \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} g^{j_1 j_3 j_4} \lambda^{j_3 j_4 j_2 i_3}, \\
\mathbf{T}_{3,3,7}^{i_1 i_2 i_3} &= \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} g^{j_1 j_3 j_4} \lambda^{j_3 j_4 j_2 i_3}, \quad \mathbf{T}_{3,3,8}^{i_1 i_2 i_3} = \lambda^{i_1 j_1 j_2 j_3} g^{i_2 j_3 j_4} \lambda^{j_4 j_5 j_6 i_3} \lambda^{j_5 j_6 j_1 j_2}, \\
\mathbf{T}_{3,3,9}^{i_1 i_2 i_3} &= g^{j_1 j_2 j_3} \lambda^{i_1 i_2 j_3 j_4} \lambda^{j_4 j_5 j_6 i_3} \lambda^{j_5 j_6 j_1 j_2}, \quad \mathbf{T}_{3,3,10}^{i_1 i_2 i_3} = g^{j_1 j_2 j_3} \lambda^{j_3 j_4 j_6 i_3} \lambda^{j_4 j_5 i_1 i_2} \lambda^{j_5 j_6 j_1 j_2}, \\
\mathbf{T}_{3,3,11}^{i_1 i_2 i_3} &= \lambda^{i_3 j_1 j_2 j_3} g^{j_3 j_4 j_6} \lambda^{j_4 j_5 i_1 i_2} \lambda^{j_5 j_6 j_1 j_2}, \quad \mathbf{T}_{3,3,12}^{i_1 i_2 i_3} = \lambda^{i_1 j_1 j_2 j_3} \lambda^{j_3 j_4 j_6 i_3} g^{j_4 j_5 i_2} \lambda^{j_5 j_6 j_1 j_2}, \\
\mathbf{T}_{3,3,13}^{i_1 i_2 i_3} &= \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} \lambda^{j_1 j_3 j_4 j_5} g^{j_5 j_6 i_3} \lambda^{j_6 j_4 j_3 j_2}, \quad \mathbf{T}_{3,3,14}^{i_1 i_2 i_3} = \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} \lambda^{j_1 j_3 j_4 j_5} \lambda^{j_5 j_4 j_3 j_6} g^{j_2 j_6 i_3}, \\
\mathbf{T}_{3,3,15}^{i_1 i_2 i_3} &= \lambda^{i_1 j_1 j_2 j_3} \lambda^{i_2 j_2 j_4 j_5} \lambda^{i_3 j_4 j_1 j_6} g^{j_3 j_5 j_6}, \quad \mathbf{T}_{3,3,16}^{i_1 i_2 i_3} = \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} \lambda_{r,1}^{j_1 j_2 j_3 j_4} g^{j_3 j_4 i_3}, \\
\mathbf{T}_{3,3,17}^{i_1 i_2 i_3} &= \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} g^{j_2 j_4 i_3} \lambda_{r,1}^{j_1 j_4 j_3 j_3}, \quad \mathbf{T}_{3,3,18}^{i_1 i_2 i_3} = \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} g_{r,2}^{j_1 j_2 i_3}, \\
\mathbf{T}_{3,3,19}^{i_1 i_2 i_3} &= \lambda_{r,2}^{i_1 i_2 j_1 j_2} g^{j_1 j_2 i_3}, \quad \mathbf{T}_{3,3,20}^{i_1 i_2 i_3} = \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} g^{j_2 j_3 i_3} M_{r,2}^{j_3 j_1}, \quad \mathbf{T}_{3,3,21}^{i_1 i_2 i_3} = \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} g^{j_2 j_3 i_3} \delta_{r,2}^{j_3 j_1}, \\
\mathbf{T}_{3,3,22}^{i_1 i_2 i_3} &= g^{i_1 j_1 j_2} \lambda^{j_5 j_3 j_4 i_2} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_1 j_5} \lambda^{j_2 j_3 j_4 i_3}, \quad \mathbf{T}_{3,3,23}^{i_1 i_2 i_3} = g^{i_1 j_1 j_2} \lambda^{j_1 j_3 j_4 i_2} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_4 j_5} \lambda^{j_2 j_3 j_5 i_3}, \\
\mathbf{T}_{3,3,24}^{i_1 i_2 i_3} &= \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} g^{j_5 j_3 j_4} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_1 j_5} \lambda^{j_2 j_3 j_4 i_3}, \quad \mathbf{T}_{3,3,25}^{i_1 i_2 i_3} = \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} g^{j_1 j_3 j_4} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_2 j_5} \lambda^{j_5 j_3 j_4 i_3}, \\
\mathbf{T}_{3,3,26}^{i_1 i_2 i_3} &= \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} g^{j_1 j_3 j_4} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_4 j_5} \lambda^{j_2 j_3 j_5 i_3}, \quad \mathbf{T}_{3,3,27}^{i_1 i_2 i_3} = \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} g^{i_3 j_3 j_4} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_1 j_3} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_2 j_4}, \\
\mathbf{T}_{3,3,28}^{i_1 i_2 i_3} &= \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} g^{i_3 j_1 j_4} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_2 j_3} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_3 j_4}, \quad \mathbf{T}_{3,3,29}^{i_1 i_2 i_3} = \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} g^{i_3 j_2 j_3} \lambda^{j_1 j_3 j_4 j_5} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_4 j_5}, \\
\mathbf{T}_{3,3,30}^{i_1 i_2 i_3} &= \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} \tilde{g}_{r,1}^{i_3 j_2 j_3} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_3 j_1}, \quad \mathbf{T}_{3,3,31}^{i_1 i_2 i_3} = \tilde{\lambda}_{r,1}^{i_1 i_2 j_1 j_2} g^{i_3 j_2 j_3} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_3 j_1}.
\end{aligned}$$

Комбинации для $B_{i_1} B_{i_2} B_{i_3} B_{i_4}$:

$$\mathbf{T}_{3,4,1}^{i_1 i_2 i_3 i_4} = \tilde{\lambda}_{r,1}^{i_1 i_2 j_1 j_2} \tilde{\lambda}_{r,1}^{i_3 i_4 j_1 j_2}, \quad \mathbf{T}_{3,4,2}^{i_1 i_2 i_3 i_4} = \lambda^{i_1 j_1 j_2 j_3} \lambda^{i_4 j_1 j_4 j_5} \lambda^{j_4 j_5 j_6 i_2} \lambda^{j_6 j_2 j_3 i_3},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{3,4,3}^{i_1 i_2 i_3 i_4} &= \lambda^{i_1 j_1 j_2 j_3} \lambda^{i_2 j_2 j_3 j_4} \tilde{\lambda}_{r,1}^{i_3 i_4 j_4 j_1}, \quad \mathbf{T}_{3,4,4}^{i_1 i_2 i_3 i_4} = \lambda^{i_1 j_1 j_2 j_3} \lambda_{r,1}^{j_2 j_3 j_4 i_2} \lambda^{i_4 j_1 j_4 i_3}, \\
\mathbf{T}_{3,4,5}^{i_1 i_2 i_3 i_4} &= \lambda^{i_1 j_1 j_2 j_3} \lambda^{i_2 i_4 j_3 j_4} \lambda^{j_4 j_5 j_6 i_3} \lambda^{j_5 j_6 j_1 j_2}, \quad \mathbf{T}_{3,4,6}^{i_1 i_2 i_3 i_4} = \lambda^{i_4 j_1 j_2 j_3} \lambda^{j_3 j_4 j_6 i_3} \lambda^{j_4 j_5 i_1 i_2} \lambda^{j_5 j_6 j_1 j_2}, \\
\mathbf{T}_{3,4,7}^{i_1 i_2 i_3 i_4} &= \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} \lambda^{j_1 j_3 j_4 j_5} \lambda^{j_5 j_6 i_3 i_4} \lambda^{j_6 j_4 j_3 j_2}, \quad \mathbf{T}_{3,4,8}^{i_1 i_2 i_3 i_4} = \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} \lambda^{j_1 j_3 j_4 j_5} \lambda^{j_5 j_4 j_3 j_6} \lambda^{j_2 j_6 i_3 i_4}, \\
\mathbf{T}_{3,4,9}^{i_1 i_2 i_3 i_4} &= \lambda^{i_1 j_1 j_2 j_3} \lambda^{i_2 j_2 j_4 j_5} \lambda^{i_3 j_4 j_1 j_6} \lambda^{j_3 j_5 j_6 i_4}, \quad \mathbf{T}_{3,4,10}^{i_1 i_2 i_3 i_4} = \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} \lambda_{r,1}^{j_1 j_2 j_3 j_4} \lambda^{j_3 j_4 i_3 i_4}, \\
\mathbf{T}_{3,4,11}^{i_1 i_2 i_3 i_4} &= \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} \lambda^{j_2 j_4 i_3 i_4} \lambda_{r,1}^{j_1 j_4 j_3 j_3}, \quad \mathbf{T}_{3,4,12}^{i_1 i_2 i_3 i_4} = \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} \lambda_{r,2}^{j_1 j_2 i_3 i_4}, \\
\mathbf{T}_{3,4,13}^{i_1 i_2 i_3 i_4} &= \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} \lambda^{j_2 j_3 i_3 i_4} M_{r,2}^{j_3 j_1}, \quad \mathbf{T}_{3,4,14}^{i_1 i_2 i_3 i_4} = \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} \lambda^{j_2 j_3 i_3 i_4} \delta_{r,2}^{j_3 j_1}, \\
\mathbf{T}_{3,4,15}^{i_1 i_2 i_3 i_4} &= \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_1 j_5} \lambda^{j_5 j_3 j_4 i_3} \lambda^{j_2 j_3 j_4 i_4}, \quad \mathbf{T}_{3,4,16}^{i_1 i_2 i_3 i_4} = \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} \lambda^{j_1 j_3 j_4 i_3} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_4 j_5} \lambda^{j_2 j_3 j_5 i_4}, \\
\mathbf{T}_{3,4,17}^{i_1 i_2 i_3 i_4} &= \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} \lambda^{j_3 j_4 i_3 i_4} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_1 j_3} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_2 j_4}, \quad \mathbf{T}_{3,4,18}^{i_1 i_2 i_3 i_4} = \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} \lambda^{j_1 j_4 i_3 i_4} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_2 j_3} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_3 j_4}, \\
\mathbf{T}_{3,4,19}^{i_1 i_2 i_3 i_4} &= \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} \lambda^{i_3 i_4 j_2 j_3} \lambda^{j_1 j_3 j_4 j_5} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_4 j_5}, \quad \mathbf{T}_{3,4,20}^{i_1 i_2 i_3 i_4} = \lambda^{i_1 i_2 j_1 j_2} \tilde{\lambda}_{r,1}^{j_1 j_3 i_3 i_4} \tilde{\delta}_{r,1}^{j_2 j_3}.
\end{aligned}$$

9.7 Локальные части для диаграмм

Обобщение для $\lambda^2 d_1$ из (60)–(61):

$$\begin{aligned}
&S_i[B] \left(2I_4(\sigma) \mathbf{T}_{2,1,1}^i - 6I_2(\sigma) \mathbf{T}_{2,1,2}^i - 3I_3(\sigma) \mathbf{T}_{2,1,3}^i \right) - \frac{1}{8} S_{2,i_1 i_2}[B] I_8(\sigma) \mathbf{T}_{2,2,1}^{i_1 i_2} + \\
&+ S_{i_1 i_2}[B] \left(I_4(\sigma) \mathbf{T}_{2,2,1}^{i_1 i_2} - 3I_2(\sigma) \mathbf{T}_{2,2,2}^{i_1 i_2} - \frac{3}{2} I_3(\sigma) \mathbf{T}_{2,2,3}^{i_1 i_2} - 6I_3(\sigma) \mathbf{T}_{2,2,4}^{i_1 i_2} \right) + \\
&+ S_{i_1 i_2 i_3}[B] \left(-3I_3(\sigma) \mathbf{T}_{2,3,1}^{i_1 i_2 i_3} - 3I_3(\sigma) \mathbf{T}_{2,3,2}^{i_1 i_2 i_3} \right) - \frac{3}{2} S_{i_1 i_2 i_3 i_4}[B] I_3(\sigma) \mathbf{T}_{2,4,1}^{i_1 i_2 i_3 i_4}.
\end{aligned}$$

Обобщение для λd_2 из (62)–(65):

$$\begin{aligned}
&S_i[B] \left(-2R_0^\Lambda(0) A(\sigma) \mathbf{T}_{2,1,4}^i + 2A^2(\sigma) \mathbf{T}_{2,1,5}^i \right) + \\
&+ S_{i_1 i_2}[B] \left(-R_0^\Lambda(0) A(\sigma) \mathbf{T}_{2,2,5}^{i_1 i_2} + A^2(\sigma) \mathbf{T}_{2,2,6}^{i_1 i_2} + A^2(\sigma) \mathbf{T}_{2,2,7}^{i_1 i_2} \right) + \\
&+ S_{i_1 i_2 i_3}[B] A^2(\sigma) \mathbf{T}_{2,3,3}^{i_1 i_2 i_3} + \frac{1}{4} S_{i_1 i_2 i_3 i_4}[B] A^2(\sigma) \mathbf{T}_{2,4,2}^{i_1 i_2 i_3 i_4} + \\
&+ R_0^\Lambda(0) R_{22}^\Lambda(0) \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x \left(V^{i_1 j}(x) V^{j i_2}(x) - M^{i_1 j} M^{j i_2} \right) \lambda^{i_1 i_2 k k}.
\end{aligned}$$

Обобщение для cd_1 из (66)–(69):

$$\begin{aligned}
&S_i[B] \left(-A(\sigma) \mathbf{T}_{2,1,6}^i + R_0^\Lambda(0) \mathbf{T}_{2,1,7}^i - A(\sigma) \mathbf{T}_{2,1,8}^i \right) + \\
&+ S_{i_1 i_2}[B] \left(-\frac{1}{2} A(\sigma) \mathbf{T}_{2,2,8}^{i_1 i_2} - A(\sigma) \mathbf{T}_{2,2,9}^{i_1 i_2} + \frac{1}{2} R_0^\Lambda(0) \mathbf{T}_{2,2,10}^{i_1 i_2} - \frac{1}{2} A(\sigma) \mathbf{T}_{2,2,11}^{i_1 i_2} \right) + \\
&+ S_{i_1 i_2 i_3}[B] \left(-\frac{1}{2} A(\sigma) \mathbf{T}_{2,3,4}^{i_1 i_2 i_3} - \frac{1}{2} A(\sigma) \mathbf{T}_{2,3,5}^{i_1 i_2 i_3} \right) - \frac{1}{4} S_{i_1 i_2 i_3 i_4}[B] A(\sigma) \mathbf{T}_{2,4,3}^{i_1 i_2 i_3 i_4} - \\
&- \frac{1}{4} R_0^\Lambda(0) R_{22}^\Lambda(0) \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x \left(V^{i_1 j}(x) V^{j i_2}(x) - M^{i_1 j} M^{j i_2} \right) \lambda^{i_1 i_2 k k}.
\end{aligned}$$

Обобщение для линейной комбинации (131):

$$S_i[B] \bar{\mathbf{T}}_{3,1,1}^i + S_{i_1 i_2}[B] \bar{\mathbf{T}}_{3,2,1}^{i_1 i_2} + S_{i_1 i_2 i_3}[B] \bar{\mathbf{T}}_{3,3,1}^{i_1 i_2 i_3} + S_{i_1 i_2 i_3 i_4}[B] \bar{\mathbf{T}}_{3,4,1}^{i_1 i_2 i_3 i_4},$$

где

$$\bar{\mathbf{T}}_{3,1,1}^i = \frac{1}{2} A(\sigma) \mathbf{T}_{3,1,1}^i + \frac{1}{4} I_5(\sigma) \mathbf{T}_{3,1,2}^i - \frac{1}{4} I_8(\sigma) \left(\mathbf{T}_{3,1,3}^i + 2\mathbf{T}_{3,1,4}^i \right),$$

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{T}}_{3,2,1}^{i_1 i_2} &= \frac{1}{4}A(\sigma)\left(\mathbf{T}_{3,2,1}^{i_1 i_2} + \mathbf{T}_{3,2,2}^{i_1 i_2}\right) + \frac{1}{8}I_5(\sigma)\left(\mathbf{T}_{3,2,3}^{i_1 i_2} + \mathbf{T}_{3,2,4}^{i_1 i_2} + \mathbf{T}_{3,2,5}^{i_1 i_2}\right) - \frac{1}{8}I_8(\sigma)\left(2\mathbf{T}_{3,2,6}^{i_1 i_2} + 4\mathbf{T}_{3,2,7}^{i_1 i_2} + \mathbf{T}_{3,2,8}^{i_1 i_2}\right), \\ \bar{\mathbf{T}}_{3,3,1}^{i_1 i_2 i_3} &= \frac{1}{4}A(\sigma)\mathbf{T}_{3,3,1}^{i_1 i_2 i_3} + \frac{1}{4}I_5(\sigma)\mathbf{T}_{3,3,2}^{i_1 i_2 i_3} - \frac{1}{4}I_8(\sigma)\left(\mathbf{T}_{3,3,3}^{i_1 i_2 i_3} + \mathbf{T}_{3,3,4}^{i_1 i_2 i_3}\right), \\ \bar{\mathbf{T}}_{3,4,1}^{i_1 i_2 i_3 i_4} &= \frac{1}{16}A(\sigma)\mathbf{T}_{3,4,1}^{i_1 i_2 i_3 i_4} + \frac{1}{16}I_5(\sigma)\mathbf{T}_{3,4,2}^{i_1 i_2 i_3 i_4} - \frac{1}{8}I_8(\sigma)\mathbf{T}_{3,4,3}^{i_1 i_2 i_3 i_4}.\end{aligned}$$

Обобщение для линейной комбинации (132):

$$\begin{aligned}&S_i[B]\bar{\mathbf{T}}_{3,1,2}^i + S_{i_1 i_2}[B]\bar{\mathbf{T}}_{3,2,2}^{i_1 i_2} + S_{i_1 i_2 i_3}[B]\bar{\mathbf{T}}_{3,3,2}^{i_1 i_2 i_3} + S_{i_1 i_2 i_3 i_4}[B]\bar{\mathbf{T}}_{3,4,2}^{i_1 i_2 i_3 i_4} + \\ &+ S_{2,i_1 i_2}[B]\left(-\frac{1}{48}I_1(\sigma)\mathbf{T}_{3,2,9}^{i_1 i_2} + \frac{1}{64}I_6(\sigma)\mathbf{T}_{3,2,14}^{i_1 i_2} - \frac{1}{32}A(\sigma)I_1(\sigma)\mathbf{T}_{3,2,14}^{i_1 i_2}\right),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{T}}_{3,1,2}^i &= \frac{1}{6}I_4(\sigma)\mathbf{T}_{3,1,5}^i + \frac{1}{6}I_4(\sigma)\mathbf{T}_{3,1,6}^i - \frac{1}{2}I_2(\sigma)\mathbf{T}_{3,1,7}^i - \frac{1}{2}I_2(\sigma)\mathbf{T}_{3,1,8}^i - \frac{1}{2}I_3(\sigma)\mathbf{T}_{3,1,9}^i - \\ &- \frac{1}{4}(I_7(\sigma) - A(\sigma)I_4(\sigma))\mathbf{T}_{3,1,10}^i - \frac{A(\sigma)I_3(\sigma) - I_{10}(\sigma)}{8}\left(2\mathbf{T}_{3,1,11}^i + \mathbf{T}_{3,1,12}^i\right) + \\ &+ \frac{1}{2}I_{12}(\sigma)\left(\mathbf{T}_{3,1,13}^i + \mathbf{T}_{3,1,14}^i + \mathbf{T}_{3,1,15}^i\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{T}}_{3,2,2}^{i_1 i_2} &= \frac{1}{6}I_4(\sigma)\mathbf{T}_{3,2,9}^{i_1 i_2} - \frac{1}{2}I_2(\sigma)\mathbf{T}_{3,2,10}^{i_1 i_2} - \frac{1}{4}I_3(\sigma)\mathbf{T}_{3,2,11}^{i_1 i_2} - \frac{1}{2}I_3(\sigma)\mathbf{T}_{3,2,12}^{i_1 i_2} - \frac{1}{2}I_3(\sigma)\mathbf{T}_{3,2,13}^{i_1 i_2} - \\ &- \frac{1}{8}(I_7(\sigma) - A(\sigma)I_4(\sigma))\mathbf{T}_{3,2,14}^{i_1 i_2} - \frac{A(\sigma)I_3(\sigma) - I_{10}(\sigma)}{16}\left(2\mathbf{T}_{3,2,15}^{i_1 i_2} + 4\mathbf{T}_{3,2,16}^{i_1 i_2} + \mathbf{T}_{3,2,17}^{i_1 i_2}\right) + \\ &+ \frac{1}{4}I_{12}(\sigma)\left(\mathbf{T}_{3,2,18}^{i_1 i_2} + 2\mathbf{T}_{3,2,19}^{i_1 i_2} + 2\mathbf{T}_{3,2,20}^{i_1 i_2} + 2\mathbf{T}_{3,2,21}^{i_1 i_2}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{T}}_{3,3,2}^{i_1 i_2 i_3} &= -\frac{1}{2}I_3(\sigma)\mathbf{T}_{3,3,5}^{i_1 i_2 i_3} - \frac{1}{4}I_3(\sigma)\mathbf{T}_{3,3,6}^{i_1 i_2 i_3} - \frac{1}{4}I_3(\sigma)\mathbf{T}_{3,3,7}^{i_1 i_2 i_3} - \\ &- \frac{A(\sigma)I_3(\sigma) - I_{10}(\sigma)}{8}\left(\mathbf{T}_{3,3,8}^{i_1 i_2 i_3} + \mathbf{T}_{3,3,9}^{i_1 i_2 i_3}\right) + \frac{1}{4}I_{12}(\sigma)\left(\mathbf{T}_{3,3,10}^{i_1 i_2 i_3} + \mathbf{T}_{3,3,11}^{i_1 i_2 i_3} + 2\mathbf{T}_{3,3,12}^{i_1 i_2 i_3}\right),\end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{T}}_{3,4,2}^{i_1 i_2 i_3 i_4} = -\frac{1}{4}I_3(\sigma)\mathbf{T}_{3,4,4}^{i_1 i_2 i_3 i_4} - \frac{1}{16}(A(\sigma)I_3(\sigma) - I_{10}(\sigma))\mathbf{T}_{3,4,5}^{i_1 i_2 i_3 i_4} + \frac{1}{4}I_{12}(\sigma)\mathbf{T}_{3,4,6}^{i_1 i_2 i_3 i_4}.$$

Обобщение для суммы (137) и $\lambda^4 d_4/24$ из леммы 3:

$$S_i[B]\bar{\mathbf{T}}_{3,1,3}^i + S_{i_1 i_2}[B]\bar{\mathbf{T}}_{3,2,3}^{i_1 i_2} + S_{i_1 i_2 i_3}[B]\bar{\mathbf{T}}_{3,3,3}^{i_1 i_2 i_3} + S_{i_1 i_2 i_3 i_4}[B]\bar{\mathbf{T}}_{3,4,3}^{i_1 i_2 i_3 i_4},$$

где

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{T}}_{3,1,3}^i &= -\frac{1}{12}I_{14}(\sigma)\mathbf{T}_{3,1,16}^i + \frac{1}{4}I_{17}(\sigma)\mathbf{T}_{3,1,17}^i + \frac{1}{12}I_{20}(\sigma)\mathbf{T}_{3,1,18}^i + \frac{\zeta(3)L}{32(4\pi^2)^3}\mathbf{T}_{3,1,19}^i, \\ \bar{\mathbf{T}}_{3,2,3}^{i_1 i_2} &= -\frac{1}{24}I_{14}(\sigma)\mathbf{T}_{3,2,22}^{i_1 i_2} + \frac{1}{8}I_{17}(\sigma)\left(\mathbf{T}_{3,2,23}^{i_1 i_2} + \mathbf{T}_{3,2,24}^{i_1 i_2}\right) + \frac{1}{24}I_{20}(\sigma)\left(\mathbf{T}_{3,2,40}^{i_1 i_2} + \mathbf{T}_{3,2,41}^{i_1 i_2}\right) + \frac{3\zeta(3)L}{64(4\pi^2)^3}\mathbf{T}_{3,2,25}^{i_1 i_2}, \\ \bar{\mathbf{T}}_{3,3,3}^{i_1 i_2 i_3} &= \frac{1}{8}I_{17}(\sigma)\mathbf{T}_{3,3,13}^{i_1 i_2 i_3} + \frac{1}{24}I_{20}(\sigma)\mathbf{T}_{3,3,14}^{i_1 i_2 i_3} + \frac{\zeta(3)L}{32(4\pi^2)^3}\mathbf{T}_{3,3,15}^{i_1 i_2 i_3}, \\ \bar{\mathbf{T}}_{3,4,3}^{i_1 i_2 i_3 i_4} &= \frac{1}{32}I_{17}(\sigma)\mathbf{T}_{3,4,7}^{i_1 i_2 i_3 i_4} + \frac{1}{96}I_{20}(\sigma)\mathbf{T}_{3,4,8}^{i_1 i_2 i_3 i_4} + \frac{\zeta(3)L}{128(4\pi^2)^3}\mathbf{T}_{3,4,9}^{i_1 i_2 i_3 i_4}.\end{aligned}$$

Обобщение для диаграммы $-\lambda z_{4,1}d_2/8$:

$$S_i[B]\bar{\mathbf{T}}_{3,1,4}^i + S_{i_1 i_2}[B]\bar{\mathbf{T}}_{3,2,4}^{i_1 i_2} + S_{i_1 i_2 i_3}[B]\bar{\mathbf{T}}_{3,3,4}^{i_1 i_2 i_3} + S_{i_1 i_2 i_3 i_4}[B]\bar{\mathbf{T}}_{3,4,4}^{i_1 i_2 i_3 i_4},$$

где

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{T}}_{3,1,4}^i &= \frac{1}{4}R_0^\Lambda(0)A(\sigma)\mathbf{T}_{3,1,20}^i - \frac{1}{4}A^2(\sigma)\mathbf{T}_{3,1,21}^i - \frac{1}{4}R_0^\Lambda(0)R_{22}^\Lambda(0)\mathbf{T}_{3,1,22}^i, \\
\overline{\mathbf{T}}_{3,2,4}^{i_1 i_2} &= \frac{1}{8}R_0^\Lambda(0)A(\sigma)\mathbf{T}_{3,2,26}^{i_1 i_2} - \frac{1}{8}A^2(\sigma)\left(\mathbf{T}_{3,2,27}^{i_1 i_2} + \mathbf{T}_{3,2,28}^{i_1 i_2}\right) - \frac{1}{8}R_0^\Lambda(0)R_{22}^\Lambda(0)\left(\mathbf{T}_{3,2,29}^{i_1 i_2} + \mathbf{T}_{3,2,30}^{i_1 i_2}\right), \\
\overline{\mathbf{T}}_{3,3,4}^{i_1 i_2 i_3} &= -\frac{1}{8}A^2(\sigma)\mathbf{T}_{3,3,16}^{i_1 i_2 i_3} - \frac{1}{8}R_0^\Lambda(0)R_{22}^\Lambda(0)\mathbf{T}_{3,3,17}^{i_1 i_2 i_3}, \\
\overline{\mathbf{T}}_{3,4,4}^{i_1 i_2 i_3 i_4} &= -\frac{1}{32}A^2(\sigma)\mathbf{T}_{3,4,10}^{i_1 i_2 i_3 i_4} - \frac{1}{32}R_0^\Lambda(0)R_{22}^\Lambda(0)\mathbf{T}_{3,4,11}^{i_1 i_2 i_3 i_4}.
\end{aligned}$$

Обобщение для диаграммы из формулы (141):

$$S_i[B]\overline{\mathbf{T}}_{3,1,5}^i + S_{i_1 i_2}[B]\overline{\mathbf{T}}_{3,2,5}^{i_1 i_2} + S_{i_1 i_2 i_3}[B]\overline{\mathbf{T}}_{3,3,5}^{i_1 i_2 i_3} + S_{i_1 i_2 i_3 i_4}[B]\overline{\mathbf{T}}_{3,4,5}^{i_1 i_2 i_3 i_4},$$

где

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{T}}_{3,1,5}^i &= \frac{1}{2}A(\sigma)\mathbf{T}_{3,1,23}^i - \frac{1}{2}R_0^\Lambda(0)\mathbf{T}_{3,1,24}^i + \frac{1}{2}A(\sigma)\mathbf{T}_{3,1,25}^i + \frac{1}{2}R_0^\Lambda(0)\mathbf{T}_{3,1,26}^i - \\
&\quad - \frac{1}{2}R_{22}^\Lambda(0)\mathbf{T}_{3,1,27}^i - A(\sigma)\mathbf{T}_{3,1,28}^i, \\
\overline{\mathbf{T}}_{3,2,5}^{i_1 i_2} &= \frac{1}{4}A(\sigma)\mathbf{T}_{3,2,31}^{i_1 i_2} + \frac{1}{2}A(\sigma)\mathbf{T}_{3,2,32}^{i_1 i_2} - \frac{1}{4}R_0^\Lambda(0)\mathbf{T}_{3,2,33}^{i_1 i_2} + \frac{1}{4}A(\sigma)\mathbf{T}_{3,2,34}^{i_1 i_2} + \frac{1}{4}R_0^\Lambda(0)\mathbf{T}_{3,2,35}^{i_1 i_2} - \\
&\quad - \frac{1}{4}R_{22}^\Lambda(0)\left(\mathbf{T}_{3,2,36}^{i_1 i_2} + \mathbf{T}_{3,2,37}^{i_1 i_2}\right) - \frac{1}{2}A(\sigma)\left(\mathbf{T}_{3,2,38}^{i_1 i_2} + \mathbf{T}_{3,2,39}^{i_1 i_2}\right), \\
\overline{\mathbf{T}}_{3,3,5}^{i_1 i_2 i_3} &= \frac{1}{4}A(\sigma)\mathbf{T}_{3,3,18}^{i_1 i_2 i_3} + \frac{1}{4}A(\sigma)\mathbf{T}_{3,3,19}^{i_1 i_2 i_3} - \frac{1}{4}R_{22}^\Lambda(0)\mathbf{T}_{3,3,20}^{i_1 i_2 i_3} - \frac{1}{2}A(\sigma)\mathbf{T}_{3,3,21}^{i_1 i_2 i_3}, \\
\overline{\mathbf{T}}_{3,4,5}^{i_1 i_2 i_3 i_4} &= \frac{1}{8}A(\sigma)\mathbf{T}_{3,4,12}^{i_1 i_2 i_3 i_4} - \frac{1}{16}R_{22}^\Lambda(0)\mathbf{T}_{3,4,13}^{i_1 i_2 i_3 i_4} - \frac{1}{8}A(\sigma)\mathbf{T}_{3,4,14}^{i_1 i_2 i_3 i_4}.
\end{aligned}$$

Обобщение для диаграммы из формулы (146):

$$\begin{aligned}
&S_i[B]\overline{\mathbf{T}}_{3,1,6}^i + S_{i_1 i_2}[B]\overline{\mathbf{T}}_{3,2,6}^{i_1 i_2} + S_{i_1 i_2 i_3}[B]\overline{\mathbf{T}}_{3,3,6}^{i_1 i_2 i_3} + S_{i_1 i_2 i_3 i_4}[B]\overline{\mathbf{T}}_{3,4,6}^{i_1 i_2 i_3 i_4} + \\
&\quad + S_{2,i_1 i_2}[B]\left(\frac{1}{32}I_1(\sigma)\mathbf{T}_{3,2,42}^{i_1 i_2}\right),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{T}}_{3,1,6}^i &= \left(-\frac{1}{2}I_4(\sigma) + \frac{1}{2}R_0^\Lambda(0)A(\sigma)\right)\mathbf{T}_{3,1,29}^i + \left(\frac{1}{4}I_2(\sigma) + \frac{1}{4}I_8(\sigma) - \frac{1}{4}A^2(\sigma)\right)\mathbf{T}_{3,1,30}^i + \\
&\quad + I_2(\sigma)\mathbf{T}_{3,1,31}^i + \frac{1}{2}I_3(\sigma)\mathbf{T}_{3,1,32}^i + \left(\frac{1}{4}I_3(\sigma) + \frac{1}{4}I_8(\sigma) - \frac{1}{4}A^2(\sigma)\right)\mathbf{T}_{3,1,33}^i + \\
&\quad + \frac{1}{2}A(\sigma)\mathbf{T}_{3,1,34}^i - \frac{1}{2}R_0^\Lambda(0)\mathbf{T}_{3,1,35}^i + A(\sigma)\mathbf{T}_{3,1,36}^i + \frac{1}{4}R_0^\Lambda(0)R_{22}^\Lambda(0)\mathbf{T}_{3,1,37}^i + \\
&\quad + \frac{1}{2}R_0^\Lambda(0)\mathbf{T}_{3,1,38}^i - A(\sigma)\mathbf{T}_{3,1,39}^i - A(\sigma)\mathbf{T}_{3,1,40}^i,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{T}}_{3,2,6}^{i_1 i_2} = & \left(-\frac{1}{4}I_4(\sigma) + \frac{1}{4}R_0^\Lambda(0)A(\sigma) \right) \mathbf{T}_{3,2,42}^{i_1 i_2} + \left(\frac{1}{4}I_2(\sigma) + \frac{1}{4}I_8(\sigma) - \frac{1}{4}A^2(\sigma) \right) \mathbf{T}_{3,2,43}^{i_1 i_2} + \\
& + \frac{1}{2}I_2(\sigma) \mathbf{T}_{3,2,44}^{i_1 i_2} + \left(\frac{1}{8}I_3(\sigma) + \frac{1}{8}I_8(\sigma) - \frac{1}{8}A^2(\sigma) \right) \mathbf{T}_{3,2,45}^{i_1 i_2} + \frac{1}{4}I_3(\sigma) \mathbf{T}_{3,2,46}^{i_1 i_2} + \\
& + \left(\frac{1}{4}I_3(\sigma) + \frac{1}{4}I_8(\sigma) - \frac{1}{4}A^2(\sigma) \right) \mathbf{T}_{3,2,47}^{i_1 i_2} + \left(\frac{1}{4}I_3(\sigma) + \frac{1}{4}I_8(\sigma) - \frac{1}{4}A^2(\sigma) \right) \mathbf{T}_{3,2,48}^{i_1 i_2} + \\
& + I_3(\sigma) \mathbf{T}_{3,2,49}^{i_1 i_2} + \frac{1}{4}A(\sigma) \mathbf{T}_{3,2,50}^{i_1 i_2} + \frac{1}{4}A(\sigma) \mathbf{T}_{3,2,51}^{i_1 i_2} - \frac{1}{4}R_0^\Lambda(0) \mathbf{T}_{3,2,52}^{i_1 i_2} + \frac{1}{2}A(\sigma) \mathbf{T}_{3,2,53}^{i_1 i_2} + \\
& + \frac{1}{2}A(\sigma) \mathbf{T}_{3,2,54}^{i_1 i_2} + \frac{1}{8}R_0^\Lambda(0)R_{22}^\Lambda(0) \mathbf{T}_{3,2,55}^{i_1 i_2} + \frac{1}{8}R_0^\Lambda(0)R_{22}^\Lambda(0) \mathbf{T}_{3,2,56}^{i_1 i_2} + \\
& + \frac{1}{4}R_0^\Lambda(0) \mathbf{T}_{3,2,57}^{i_1 i_2} - \frac{1}{2}A(\sigma) \mathbf{T}_{3,2,58}^{i_1 i_2} - A(\sigma) \mathbf{T}_{3,2,59}^{i_1 i_2} - \frac{1}{2}A(\sigma) \mathbf{T}_{3,2,60}^{i_1 i_2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{T}}_{3,3,6}^{i_1 i_2 i_3} = & \left(\frac{1}{4}I_3(\sigma) + \frac{1}{4}I_8(\sigma) - \frac{1}{4}A^2(\sigma) \right) \mathbf{T}_{3,3,22}^{i_1 i_2 i_3} + \frac{1}{2}I_3(\sigma) \mathbf{T}_{3,3,23}^{i_1 i_2 i_3} + \\
& + \left(\frac{1}{8}I_3(\sigma) + \frac{1}{8}I_8(\sigma) - \frac{1}{8}A^2(\sigma) \right) \mathbf{T}_{3,3,24}^{i_1 i_2 i_3} + \left(\frac{1}{8}I_3(\sigma) + \frac{1}{8}I_8(\sigma) - \frac{1}{8}A^2(\sigma) \right) \mathbf{T}_{3,3,25}^{i_1 i_2 i_3} + \\
& + \frac{1}{2}I_3(\sigma) \mathbf{T}_{3,3,26}^{i_1 i_2 i_3} + \frac{1}{4}A(\sigma) \mathbf{T}_{3,3,27}^{i_1 i_2 i_3} + \frac{1}{2}A(\sigma) \mathbf{T}_{3,3,28}^{i_1 i_2 i_3} + \frac{1}{8}R_0^\Lambda(0)R_{22}^\Lambda(0) \mathbf{T}_{3,3,29}^{i_1 i_2 i_3} - \\
& - \frac{1}{2}A(\sigma) \mathbf{T}_{3,3,30}^{i_1 i_2 i_3} - \frac{1}{2}A(\sigma) \mathbf{T}_{3,3,31}^{i_1 i_2 i_3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{T}}_{3,4,6}^{i_1 i_2 i_3 i_4} = & \left(\frac{1}{8}I_3(\sigma) + \frac{1}{8}I_8(\sigma) - \frac{1}{8}A^2(\sigma) \right) \mathbf{T}_{3,4,15}^{i_1 i_2 i_3 i_4} + \frac{1}{4}I_3(\sigma) \mathbf{T}_{3,4,16}^{i_1 i_2 i_3 i_4} + \frac{1}{16}A(\sigma) \mathbf{T}_{3,4,17}^{i_1 i_2 i_3 i_4} + \\
& + \frac{1}{8}A(\sigma) \mathbf{T}_{3,4,18}^{i_1 i_2 i_3 i_4} + \frac{1}{32}R_0^\Lambda(0)R_{22}^\Lambda(0) \mathbf{T}_{3,4,19}^{i_1 i_2 i_3 i_4} - \frac{1}{4}A(\sigma) \mathbf{T}_{3,4,20}^{i_1 i_2 i_3 i_4}.
\end{aligned}$$

10 Список литературы

- [1] C. Itzykson, J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-hill, New York (1980)
- [2] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley, 1–868 (1995)
- [3] L. D. Faddeev, A. A. Slavnov, *Gauge Fields: An Introduction to Quantum Theory*, Frontiers in Physics **83**, Addison-Wesley, 1–236 (1991)
- [4] J. C. Collins, *Renormalization: An Introduction to Renormalization, the Renormalization Group and the Operator-Product Expansion*, Cambridge University Press (1984)
- [5] O. I. Zavialov, *Renormalized quantum field theory*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, 1–524 (1990)
- [6] D. I. Kazakov, *Radiative Corrections, Divergences, Regularization, Renormalization, Renormalization Group and All That in Examples in Quantum Field Theory*, arXiv:0901.2208 [hep-ph] (2009)
- [7] M. Oleszczuk, *A symmetry-preserving cut-off regularization*, Z. Phys. C, **64**, 533–538 (1994)
- [8] Sen-Ben Liao, *Operator Cutoff Regularization and Renormalization Group in Yang-Mills Theory*, Phys. Rev. D, **56**, 5008–5033 (1997)

- [9] G. Cynolter, E. Lendvai, *Cutoff Regularization Method in Gauge Theories*, [arXiv:1509.07407 [hep-ph]] (2015)
- [10] N. V. Kharuk, *Mixed type regularizations and nonlogarithmic singularities*, Questions of quantum field theory and statistical physics. Part 27, Zap. Nauchn. Sem. POMI, **494**, POMI, St. Petersburg, 2020, 242–249; J. Math. Sci. (N. Y.), **264**, 362–367 (2022) 10.1007/s10958-022-06003-7
- [11] C. G. Bollini, J. J. Giambiagi, *Dimensional Renormalization: The Number of Dimensions as a Regularizing Parameter*, Nuovo Cim. B, **12**, 20–26 (1972)
- [12] G. 't Hooft, *Dimensional regularization and the renormalization group*, Nucl. Phys. B, **61**, 455–468 (1973)
- [13] A. Brizola, O. Battistel, Marcos Sampaio, M. C. Nemes, *Implicit Regularisation Technique: Calculation of the Two-loop ϕ_4^4 -theory β -function*, Mod. Phys. Lett. A, **14**, 1509–1518 (1999)
- [14] A. L. Cherchiglia, M. Sampaio, M. C. Nemes, *Systematic Implementation of Implicit Regularization for Multi-Loop Feynman Diagrams*, Int. J. Mod. Phys. A, **26**, 2591–2635 (2011)
- [15] A. Cherchiglia, D. C. Arias-Perdomo, A. R. Vieira, M. Sampaio, B. Hiller, *Two-loop renormalisation of gauge theories in 4D Implicit Regularisation and connections to dimensional methods*, Eur. Phys. J. C, **81**, 468 (2021)
- [16] W. Pauli, F. Villars, *On the Invariant Regularization in Relativistic Quantum Theory*, Rev. Mod. Phys. **21**(3): 434–444 (1949)
- [17] T. Bakeyev, A. Slavnov, *Higher covariant derivative regularization revisited*, Mod. Phys. Lett. A **11**(19), 1539–1554 (1996)
- [18] I. M. Gel'fand, G. E. Shilov, *Generalized Functions, Volume 1: Properties and Operations*, AMS Chelsea Publishing **377**, 1–423 (1964)
- [19] V. S. Vladimirov, *Methods of the theory of generalized functions*, London, CRC Press, 1–328 (2002)
- [20] I. M. Gel'fand, M. I. Graev, N. Ya. Vilenkin, *Generalized functions. Vol. 5: Integral geometry and representation theory*, Translated from the Russian by Eugene Saletan, Boston, MA: Academic Press, 1–449 (1966)
- [21] S. E. Derkachev, A. V. Ivanov, *Racah coefficients for the group $SL(2, \mathbb{R})$* , Zap. Nauchn. Sem. POMI, **509** (2021), 99–112; J. Math. Sci. (N. Y.), **275**:3 (2023), 289–298 10.1007/s10958-023-06681-x
- [22] A. V. Ivanov, *On the completeness of projectors for tensor product decomposition of continuous series representations groups $SL(2, \mathbb{R})$* , Zap. Nauchn. Sem. POMI, **473**, POMI, St. Petersburg, 2018, 161–173; J. Math. Sci. (N. Y.), **242**:5 (2019), 692–700 10.1007/s10958-019-04507-3
- [23] S. E. Derkachev, A. V. Ivanov, L. A. Shumilov, *Mellin–Barnes transformation for two-loop master-diagrams*, Zap. Nauchn. Sem. POMI, **494**, POMI, St. Petersburg, 2020, 144–167; J. Math. Sci. (N. Y.), **264**:3 (2022), 298–312 10.1007/s10958-022-05998-3
- [24] Y. W. Sokhotskii, *On definite integrals and functions used in series expansions*, published by M. Stasyulevich, St. Petersburg (1873)
- [25] H. Kleinert, V. Schulte-Frohlinde, *Critical properties of ϕ^4 -theories*, World Scientific, Singapore, 1–512 (2001)
- [26] A. N. Vasil'ev, *The field theoretic renormalization group in critical behavior theory and stochastic dynamics*, Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 1–681 (2004)

- [27] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Quantum equation of motion and two-loop cutoff renormalization for ϕ^3 model*, Zap. Nauchn. Sem. POMI, **487**, POMI, St. Petersburg, 2019, 151–166; J. Math. Sci. (N. Y.), **257**:4 (2021), 526–536, arXiv:2203.04562, 10.1007/s10958-021-05500-5
- [28] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Two-Loop Cutoff Renormalization of 4-D Yang–Mills Effective Action*, 2020 J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **48**, 015002, arXiv:2004.05999, 10.1088/1361-6471/abb939
- [29] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Formula for two-loop divergent part of 4-D Yang–Mills effective action*, Eur. Phys. J. C **82**, 997 (2022), arXiv:2203.07131, 10.1140/epjc/s10052-022-10921-w
- [30] P. V. Akacevich, A. V. Ivanov, *On Two-Loop Effective Action of 2D Sigma Model*, Eur. Phys. J. C **83**, 653 (2023), arXiv:2304.02374, 10.1140/epjc/s10052-023-11797-0
- [31] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Three-loop divergences in effective action of 4-dimensional Yang–Mills theory with cutoff regularization: Γ_4^2 -contribution*, Zap. Nauchn. Sem. POMI, **520**, POMI, St. Petersburg, 2023, 162–188
- [32] A. V. Ivanov, *Explicit Cutoff Regularization in Coordinate Representation*, 2022 J. Phys. A: Math. Theor. **55**, 495401, arXiv:2209.01783, 10.1088/1751-8121/aca8dc
- [33] E. Brezin, J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin, *Addendum to Wilson’s theory of critical phenomena and Callan-Symanzik equations in $4 - \varepsilon$ dimensions*, Phys. Rev. D, **9**, 1121–1124 (1974)
- [34] D. I. Kazakov, O. V. Tarasov, A. A. Vladimirov, *Calculation of Critical Exponents by Quantum Field Theory Methods*, Sov. Phys. JETP **50**, 521–526 (1979)
- [35] I. Jack, H. Osborn, *Two-loop background field calculations for arbitrary background fields*, Nucl. Phys. B, **207**, 474–504 (1982)
- [36] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*, Second Edition, CRC Press, 1–573 (2003)
- [37] B. S. DeWitt, *Quantum Theory of Gravity. 2. The Manifestly Covariant Theory*, Phys. Rev. **162**, 1195–1239 (1967)
- [38] B. S. DeWitt, *Quantum Theory of Gravity. 3. Applications of the Covariant Theory*, Phys. Rev. **162**, 1239–1256 (1967)
- [39] G. ’t Hooft, *The background field method in gauge field theories*, (Karpacz, 1975), Proceedings, Acta Universitatis Wratislaviensis, **1**, Wroclaw, 345–369 (1976)
- [40] L. F. Abbott, *Introduction to the background field method*, Acta Phys. Polon. B, **13**:1–2, 33–50 (1982)
- [41] I. Ya. Aref’eva, A. A. Slavnov, L. D. Faddeev, *Generating functional for the S-matrix in gauge-invariant theories*, TMF, **21**:3, 311–321 (1974)
- [42] L. D. Faddeev, *Mass in Quantum Yang–Mills theory (comment on a Clay millenium problem)*, Bull. Braz. Math. Soc. (N. S.), **33**:2, 201–212 (2002) arXiv: 0911.1013
- [43] A. V. Ivanov, M. A. Russkikh, *Quantum field theory on the example of the simplest cubic model*, Zap. Nauchn. Sem. POMI, **509** (2021), 123–152; J. Math. Sci. (N. Y.), **275**:3 (2023), 306–325 arXiv:2107.14488 10.1007/s10958-023-06683-9
- [44] E. Hille, R. S. Phillips, *Functional Analysis and Semi-groups*, Providence: American Mathematical Society, 1-808 (1957)
- [45] D. Benedetti, R. Gurau, S. Haribey, K. Suzuki, *Long-range multi-scalar models at three loops*, 2020 J. Phys. A: Math. Theor. **53**, 445008
- [46] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Ordered Exponential and Its Features in Yang–Mills Effective Action*, 2023 Commun. Theor. Phys. **75**, 085202, arXiv:2301.10514, 10.1088/1572-9494/acde4e

- [47] N. I. Usyukina, *Calculation of many-loop diagrams of perturbation theory*, Theor Math Phys, **54**, 78–81 (1983)
- [48] D. I. Kazakov, *Calculation of Feynman diagrams by the “Uniqueness” method*, Theor Math Phys, **58**, 223–230 (1984)
- [49] N. V. Kharuk, *Zero modes of the Laplace operator in two-loop calculations in the Yang–Mills theory*, Questions of quantum field theory and statistical physics. Part 28, Zap. Nauchn. Sem. POMI, **509** (2021), 216–226; J. Math. Sci. (N. Y.), **275**:3 (2023), 370–377 10.1007/s10958-023-06687-5
- [50] P. Cvitanović, *Group Theory: Birdtracks, Lie’s, and Exceptional Groups*, Princeton University Press, Princeton, 1–280 (2008)
- [51] V. Fock, *Die Eigenzeit in der Klassischen- und in der Quanten- mechanik*, Sow. Phys., **12**, 404–425 (1937)
- [52] D. V. Vassilevich, *Heat kernel expansion: user’s manual*, Phys. Rept. **388**, 279–360 (2003)
- [53] D. Fursaev, D. Vassilevich, *Operators, Geometry and Quanta: Methods of Spectral Geometry in Quantum Field Theory*, Springer, 1–304 (2011)
- [54] M. Lüscher, *Dimensional regularisation in the presence of large background fields*, Annals of Physics **142**, 359–392 (1982)
- [55] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Special functions for heat kernel expansion*, Eur. Phys. J. Plus **137**: 1060 (2022), arXiv:2106.00294 10.1140/epjp/s13360-022-03176-7
- [56] R. T. Seeley, *Complex powers of an elliptic operator*, Singular Integrals, Proc. Sympos. Pure Math. **10**, Amer. Math. Soc., 288–307 (1967)
- [57] B. S. DeWitt, *Dynamical Theory of Groups and Fields*, Gordon and Breach, New York, 1–248 (1965)
- [58] G. W. Gibbons, *Quantum field theory in curved spacetime*, General Relativity, An Einstein Centenary Survey, 639–679 (1979)
- [59] P. B. Gilkey, *The spectral geometry of a Riemannian manifold*, J. Differ. Geom., **10**, 601–618 (1975)
- [60] A. O. Barvinsky, G. A. Vilkovisky, *The Generalized Schwinger–DeWitt Technique in Gauge Theories and Quantum Gravity*, Phys. Rept. **119**, 1–74 (1985)
- [61] I. G. Avramidi, *Heat Kernel and Quantum Gravity*, New York: Springer, Vol. 64, 1–149 (2000)
- [62] A. V. Ivanov, *Diagram technique for the heat kernel of the covariant Laplace operator*, TMF, **198**:1 (2019), 113–132; Theoret. and Math. Phys., **198**:1 (2019), 100–117, 10.1134/S0040577919010070, arXiv:1905.05455
- [63] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Non-recursive formula for trace of heat kernel*, International Conference on Days on Diffraction, DD 2019, 2019, pp. 74–77, 10.1109/DD46733.2019.9016557
- [64] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Heat kernel: Proper-time method, Fock–Schwinger gauge, path integral, and Wilson line*, TMF, **205**:2 (2020), 242–261; Theoret. and Math. Phys., **205**:2 (2020), 1456–1472, arXiv:1906.04019, 10.1134/S0040577920110057