ПРЕПРИНТ ПОМИ 10/2023

ВЫЧИСЛЕНИЕ ε-ИНВАРИАНТА 3–МНОГООБРАЗИЙ, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ В ВИДЕ СКЛЕЙКИ ПРОСТЫХ ПОЛИЭДРОВ С КРАЕМ

В. В. Таркаев[1,2], Е. А. Фоминых[3,4]

[1]Челябинский государственный университет, ул. Братьев Кашириных, д. 129, 454001, Челябинск, Россия

[2]Институт математики и механики УрО РАН, ул. Софьи Ковалевской, д. 16, 620108, Екатеринбург, Россия

[3]Санкт-Петербургский государственный университет, Факультет математики и компьютерных наук, Университетская наб., д. 7–9 199034, Санкт-Петербург, Россия

[4]Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук, наб. р. Фонтанки, д. 27, 191023, Санкт-Петербург, Россия

trk@csu.ru, efominykh@gmail.com

АННОТАЦИЯ

Работа посвящена технике вычисления ε-инварианта 3–многообразий, представляемых в виде склеек фиксированного 3-многообразия с торическим краем и нетривиально расслоенного полного тора. Предлагаемая техника базируется на представлении специального спайна рассматриваемого многообразия в виде склейки простых полиэдров с краем.

Ключевые слова: 3-многообразие, линзовое пространство, эпсилон инвариант, инварианты Тураева-Виро, простой полиэдр с краем.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда No. 22-21-00747

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St. Petersburg Department
of Steklov Institute of Mathematics

Введение

Предлагаемая работа посвящена технике вычисления ε-инварианта 3–многообразий, этот инвариант был предложен Матвеевым, Овчинниковым, Соколовым [?]. Известно, что он является частным случаем инвариантов Тураева–Виро, а именно, ε-инвариант совпадает с гомологически тривиальной частью инварианта Тураева-Виро порядка 5. Однако, в отличие от инвариантов Тураева-Виро [?], определяемых при помощи раскрасок специального спайна рассматриваемого многообразия, ε-инвариант допускает чисто геометрическое описание в терминах простых подполиэдров простого спайна (теория простых и специальных полиэдров в полном объеме изложена в [1], определения понятий, используемых в данной работе, приведены ниже в параграфе 1).

Стандартный непосредственно вытекающий из определения способ вычисления значения ε-инварианта заключается в суммировании, так называемых, ε-весов всех простых подполиэдров некоторого простого спайна рассматриваемого многообразия. Такой подход может оказаться неслишком удобным, если изучается не конкретное многообразие, а зависящая от какого-то набора параметров множество многообразий, например, множество зейфертовых многообразий с произвольными параметрами особых слоев, но фиксированной базой, или перестройки трехмерной сферы вдоль фиксированного узла. Причина в том, что простых подполиэдров обычно очень много и их набор может очень сильно изменяться при изменении параметров, что затрудняет обнаружение каких-либо закономерностей. При изучении параметрических серий часто удобнее собирать многообразия из блоков, так, чтобы от параметров зависел лишь способ соединения блоков и/или лишь наиболее просто устроенные блоки. Например, для перестроек вдоль узла в качестве блоков естественно брать дополнительное пространство узла и полный тор, от параметров перестройки тогда зависит лишь способ приклейки полного тора к дополнительному пространству.

Ниже мы описываем технику реализации этой идеи применительно к вычислению ε-инварианта многообразий, представляемых в виде склейки полных торов и фиксированного многообразия с торическим краем. В основе предлагаемой техники лежит понятие простого полиэдра с краем и обобщение конструкции ε-инварианта для простых полиэдров с краем. Следует отметить, что подобные подходы уже использовались и до нас. Прежде всего здесь надо упомянуть об инвариантах Тураева-Виро полиэдров с крашенным краем [?]. В работах Овчинникова [?] и [?] разработанная в [?] техника использовалась в частном случае ε-инварианта. Новым в описываемой ниже технике является идея выражать значения интересующих нас полиэдров с краем через легко вычисляемые значения ε-инварианта линзовых пространств, что не только существенно облегчает вычисления, но и дает удобный инструмент для изучения множества значений ε-инварианта для многообразий, различающихся способом приклейки полных торов к торическим компонентам связности края фиксированного многообразия.

Опишем кратко структуру предлагаемой работы. В параграфе 1 приводятся определения используемых понятий. В параграфе 2 изучается полиэдр $U(p,q)$, представляющий нетривиально расслоенное полноторие. Здесь формулируется и доказывается основной результат статьи: теорема 1, содержанием которой является явное выражение ε-инвариантов полиэдра $U(p,q)$ через ε-инварианты линзовых пространств. В параграфе 3 предлагаемая техника применяется для доказательства теоремы о множестве значений ε-инварианта линзовых пространств. Этот результат принадлежит Матвееву, Овчинникову и Соколову, В [**?**] и в [1] приводится лишь его формулировка, доказательство, идея которого восходит к топологической квантовой теории поля, докладывалось авторами на семинарах, но опубликовано до сих пор не было. В параграфе 4 изучается зависимость значений ε-инвариантов полиэдра $U(p,q)$ от параметров p и q.

1 Предварительные сведения

1.1 Простые полиэдры и спайны

Определение. Компактный полиэдр P называется *простым полиэдром с краем*, если линк каждой его точки гомеоморфен одному из следующих одномерных полиэдров:

(a) окружности (такая точка называется *неособой*);

(b) окружности с диаметром (такая точка называется *тройной*);

(c) окружности с тремя радиусами (такая точка называется *истинной вершиной*);

(d) отрезку (такая точка называется *неособой точкой края*);

(e) букету трех отрезков с общим концом (такая точка называется *тройной точкой края*).

Множество точек полиэдра P, не имеющих окрестностей типа (a), (b), (c), называется *краем* полиэдра P и обозначается через ∂P.

Простой полиэдр с краем естественным образом стратифицирован. В этой стратификации каждый страт размерности 2 (2-*компонента*) — это связная компонента множества неособых точек. Страты размерности 1 – это открытые или замкнутые тройные линии и компоненты связности множества неособых точек края. Страты размерности 0 — это истинные вершины и тройные точки края.

Замечание. Отметим, что край (если он не пуст) простого полиэдра может иметь компонентами связности окружности, состоящие из неособых точек края, и регулярные графы степени 3. Вершинами этих графов являются тройные точки края, а ребрами — компоненты связности множества неособых точек края.

Определение. Пусть M — компактное 3-многообразие и $P \subset M$ — компактный двумерный полиэдр. Тогда P называется *спайном* многообразия M, если многообразие $M \setminus P$ гомеоморфно $\partial M \times [0, 1)$.
Если P при этом является простым полиэдром с пустым краем, то P называется *простым спайном* многообразия M.

Приведенное определение неприменимо к многообразиям, край которых пуст. Чтобы рассматривать спайны таких многообразий, надо предварительно удалить из них открытый шар.

Замечание. Отмеченное выше обстоятельство приводит к следующему. Пусть компактное 3-многообразие M и полиэдр $P \subset M$ таковы, что $M \setminus P$ гомеоморфно $S \times [0, 1)$, где S — это дизъюнктное объединение $n \geq 2$ двумерных сфер. Тогда говорят, что P является спайном M, из которого удалены $n - 1$ открытый шар, то есть в этом контексте открытые шары, удаляемые из замкнутого многообразия, считаются, начиная со второго. Подчеркнем, что сказанное не относится к многообразиям, край которых вместе со сферическими содержит и несферические компоненты связности.

Примеры простых спайнов.

- Спайном утолщенного тора $T^2 \times [0, 1]$ является двумерный тор, например, $T^2 \times \{\frac{1}{2}\}$.
- Спайном трех-мерного шара D^3 является двумерная сфера S^2. Здесь играет роль обстоятельство, отмеченное выше в Замечании 1.1. Многообразие M, такое что $M \setminus S^2$ гомеоморфно $\partial M \times [0, 1)$, — это не D^3, а D^3 с удаленным открытым шаром, т.е. S^3 с двумя удаленными открытыми шарами.
- Спайном полного тора с удаленным открытым шаром является двумерный тор, к которому приклеен диск вдоль нетривиальной простой замкнутой кривой.

1.2 ε-инвариант

Пусть P — простой полиэдр с краем (возможно, пустым). Обозначим через $F(P)$ множество всех простых полиэдров Q с краем (возможно, пустым), для которых $Q \subset P$ и $\partial Q \subset \partial P$. Подчеркнем, что $F(P)$ содержит пустой полиэдр и сам полиэдр P.

Ясно, что, если $\partial P = \emptyset$, то $F(P)$ состоит только из полиэдров с пустым краем. Если $\partial P \neq \emptyset$, то $F(P)$ обязательно содержит как полиэдры с непустым краем (например, P), так и полиэдры, край которых пуст (например, пустой полиэдр).

Весом простого полиэдра Q с краем (возможно, пустым) называется

$$w(Q) = (-1)^{v(Q)} \ \varepsilon^{\chi(Q) - \frac{1}{2}\chi(\partial Q) - v(Q)}, \tag{1}$$

где $v(Q)$ обозначает число истинных вершин полиэдра Q, а ε — это любой из корней уравнения $x^2 = x + 1$.

Определение. ε-инвариантом простого полиэдра P с краем (возможно, пустым) называется

$$t(P) = \sum_{Q\in F(P)} w(Q). \tag{2}$$

Для случая полиэдров P с пустым краем величина $t(P)$ подробно рассмотрена в [1]. В частности там доказывается, что $t(P)$ инвариантна относительно преобразования T — преобразования Матвеева-Пиерголлини — и обратного к нему, что дает право говорить о ней как об инварианте класса эквивалентности компактных простых полиэдров (с пустым краем) относительно преобразований T, T^{-1} и, следовательно, инварианте компактного 3-многообразия, спайнами которого являются полиэдры из этого класса эквивалентности. При этом *ε-инвариант 3-многообразия M* определяется как $t(P)$, где P — простой полиэдр с пустым краем, являющийся спайном многообразия M.

Инвариантность величины $t(P)$ относительно преобразований $T^{\pm 1}$ в случае $\partial P \neq \emptyset$ тоже имеет место, но мы в настоящей работе пользоваться ею не будем. Упоминаем мы здесь об этом факте исключительно с тем, чтобы объяснить использование названия «ε-инвариант» и в случае простых полиэдров с непустым краем.

Приведем без доказательства используемые в дальнейшем свойства ε-инварианта.

Лемма 1. (a) *$t(D^3) = \varepsilon + 2$, где D^3 — трехмерный шар.*

(b) *$t(ST) = 1$, где ST — полный тор $ST = D^2 \times S^1$.*

(c) *Пусть M_1 и M_2 — компактные 3-многообразия, тогда*

$$t(M_1 \# M_2) = t(M_1)t(M_2),$$

где $M_1 \# M_2$ обозначает связную сумму многообразий M_1, M_2. В частности, для любого компактного 3-многообразия M

$$t(M \# D^3) = t(M)(\varepsilon + 2).$$

Пункты (a) и (b) Леммы 1 доказываются при помощи предъявления конкретных простых спайнов соответствующих многообразий. Пункт (c) следует из наличия аналогичного свойства у инвариантов Тураева-Виро и того, что ε-инвариант является гомологически тривиальной частью инварианта Тураева-Виро порядка 5 (см. [1]).

1.3 ε-инвариант простого полиэдра с крашенным краем

Пусть G — регулярный граф степени 3. *Раскраской* графа G называется отображение множества его ребер в множество цветов: $\mathbb{E}(G) \to \{\text{белый, черный}\}$, удовлетворяющее следующему требованию: среди вершин графа G не найдется такой, которой инцидентно ровно одно (с учетом кратности) черное ребро. Множество всех раскрасок графа G будет обозначаться через $\mathrm{col}(G)$. Если $c \in \mathrm{col}(G)$, то через $\mathrm{black}(c)$ обозначим подграф графа G, образуемый всеми (если таковые имеются) ребрами, которые в раскраске c являются черными, или $\mathrm{black}(c) = \emptyset$, если черных ребер в раскраске c нет.

Ясно, что раскраски и их черные подграфы находятся во взаимно однозначном соответствии. Благодаря этому иногда можно упрощать запись за счет использования совпадающих обозначений для раскраски и отвечающего ей черного подграфа.

В настоящей работе в качестве G будут чаще всего рассматриваться θ-графы. Напомним, что *θ-графом* (или *θ-кривой*) называется граф, состоящий из двух вершин, соединенных тремя ребрами.

Из приведенного определения раскраски следует, что существует ровно 5 попарно различных раскрасок θ-кривой:
c_1: все три ребра белые, $\mathrm{black}(c_1) = \emptyset$;
$c_j, j = 2, 3, 4$: одно ребро белое, два другие черные, $\mathrm{black}(c_j)$ — окружность;
c_5: все три ребра черные, $\mathrm{black}(c_5)$ — это вся θ-кривая.

Смысл сформулированного выше условия на черные подграфы раскрасок края простого полиэдра состоит в том, что (ср. Замечание 1.1) если простые полиэдры с краем P и Q таковы, что $Q \subset P, \partial Q \subset \partial P$ и ∂P является 3-регулярным графом, то обязательно найдется раскраска $c \in \mathrm{col}(\partial P)$, для которой $\mathrm{black}(c) = \partial Q$.

Рассмотрим простой полиэдр P с непустым краем $\partial P = \theta$, где θ является θ-кривой, и зафиксируем раскраску $c \in \mathrm{col}(\partial P)$.

Обозначим
$$t(c, P) = \sum_{\substack{Q \in F(P),\\ \partial Q = \mathrm{black}(c)}} w(Q). \tag{3}$$

Подчеркнем, что $\partial Q = \mathrm{black}(c)$ означает здесь не изоморфность соответствующих графов, а совпадение соответствующих подмножеств множества ∂P. Иначе говоря, имеется в виду, что в случае $\mathrm{black}(c) = \emptyset$ в сумме участвуют только полиэдры Q с пустым краем; если же $\mathrm{black}(c) \neq \emptyset$, то в сумме участвуют только подполиэдры, выходящие на ∂P по его черному подграфу.

Перепишем определение ε-инварианта (2) с использованием понятия веса полиэдра с крашенным краем:

$$t(P) = \sum_{c \in \mathrm{col}(\partial P)} t(c, P). \tag{4}$$

Чтобы установить совпадение правых частей равенств (2) и (4) достаточно заметить, что, если $\partial P \neq \emptyset$, то в обоих случаях суммируются веса полиэдров из одного и того же множества $F(P)$, только в (4) $F(P)$ разбито на 5 подмножеств так, чтобы полиэдры в каждом из этих подмножеств имели край, совпадающий с черным графом одной из пяти существующих раскрасок ∂P.

Распространим теперь понятие ε-инварианта простого полиэдра с крашенным краем на полиэдры с краем окружность. Раскрасок в этом случае всего две: вся окружность покрашена белым или вся окружность покрашена черным. Все остальное, включая определение ε-инварианта полиэдра с крашеным краем (3) и равенство (4), в каких бы то ни было изменениях не нуждается.

1.4 ε-инвариант склейки полиэдров

Рассмотрим связные простые полиэдры P_1, P_2 с краем: $\partial P_j = \theta_j, j = 1, 2$, где θ_j — θ-кривые. Пусть $\gamma : \theta_1 \to \theta_2$ — гомеоморфизм. Обозначим через $P_1 \overset{\gamma}{\cup} P_2$ связный полиэдр, получаемый в результате отождествления ∂P_1 с ∂P_2 по гомеоморфизму γ.

Лемма 2. *Пусть полиэдры P_1, P_2 и гомеоморфизм γ такие, как описано выше. Тогда*

$$t(P_1 \overset{\gamma}{\cup} P_2) = \sum_{c \in \mathrm{col}(\theta_1)} t(c, P_1) t(\gamma(c), P_2). \tag{5}$$

Доказательство. Обозначим $P = P_1 \overset{\gamma}{\cup} P_2$. Край полиэдра P пуст, значит, (см.раздел 1.2) в сумме, стоящей в правой части равенства (2), участвуют только простые подполиэдры полиэдра P, имеющие пустой край. Пусть $Q \subset P$ — один из таких полиэдров. Обозначим $Q_j = Q \cap P_j, j = 1, 2$, и убедимся в том, что

$$Q_j \in F(P_j), \quad j = 1, 2. \tag{6}$$

Действительно, если $G = Q_1 \cap \partial P_1 = \emptyset$, то и $Q_2 \cap \partial P_2 = \emptyset$. Откуда в силу предположения о том, что Q — простой полиэдр с пустым краем имеем полиэдр $Q_j, j = 1, 2$, либо пуст, либо является простым полиэдром с пустым краем, следовательно, (6) в этом случае выполняется. Предположим теперь, что $G \neq \emptyset$. Тогда $\partial Q_1 \subset \partial P_1$, так как в противном случае непустым оказался бы ∂Q. Значит, $Q_1 \in F(P_1)$. Аналогично получаем и $Q_2 \in F(P_2)$, значит, (6) имеет место и в случае $G \neq \emptyset$.

Непосредственно из равенств

$$\begin{aligned} \chi(Q_1 \cup Q_2) &= \chi(Q_1) + \chi(Q_2) - \chi(\partial Q_1), \\ V(Q_1 \cup Q_2) &= V(Q_1) + V(Q_2) \end{aligned}$$

и из определения веса полиэдра с краем (1) следует, что

$$w(Q) = w(Q_1 \cup Q_2) = w(Q_1) w(Q_2).$$

откуда, используя (4), получаем (5). □

В конце предыдущего раздела мы отметили, что понятие ε-инварианта с крашенным краем может быть распространено и на полиэдры с краем окружность. Нижеследующая лемма является аналогом Леммы 2 для этого случая.

Лемма 3. *Пусть простые полиэдры Q_1, Q_2 с краем таковы, что $\partial Q_j = s_j$, где $s_j, j = 1, 2,$ — окружность; и пусть $\sigma : s_1 \to s_2$ — гомеоморфизм. Тогда*

$$t(Q_1 \overset{\sigma}{\cup} Q_2) = t(\emptyset, Q_1) t(\emptyset, Q_2) + t(s_1, Q_1) t(s_2, Q_2).$$

Доказательство. Лемма 3 доказывается при помощи тех же аргументов, что и Лемма 2 и еще того, что у окружности имеются только две раскраски пустая, когда она покрашена белым, и черная. □

2 Полиэдр $U(p, q)$

Зафиксируем пару (p, q) взаимно-простых (необязательно положительных) целых чисел.

2.1 Построение полиэдра $U(p,q)$

Рассмотрим двумерный тор T с фиксированной вложенной θ-кривой $\theta_0 \subset T$ такой, что $T \setminus \theta_0$ гомеоморфно открытому диску. Обозначим через h_1, h_2, h_3 попарно неизотопные окружности, содержащиеся в θ_0. Ориентируем их таким образом, чтобы h_3 имела тип $(1,1)$ в базисе (h_1, h_2).

Пусть $c(p,q) \subset T$ — ориентированная простая замкнутая кривая, находящаяся с θ_0 в общем положении и имеющая тип (p,q) в базисе (h_1, h_2).

Опишем теперь простой полиэдр $U(p,q)$ с краем; Собирается он из трех частей.

- Первая часть — это тор T с θ-кривой θ_0 и кривой $c(p,q)$ такими, как описано выше.
- Вторая часть — утолщенная θ-кривая $\hat{\theta} = \theta_0 \times [0,1]$, приклеенная своим нижним основанием к T так, что $\theta_0 \times \{0\}$ отождествляется с $\theta_0 \subset T$.
- Третья часть — это диск $D(p,q)$, край которого отождествлен с $c(p,q) \subset T$. Предполагается, что $\mathrm{Int}\, D(p,q)$ имеет пустое пересечение с результатом склейки тора и утолщенной θ-кривой, т.е., неформально говоря, диск и утолщенная θ-кривая приклеиваются к тору с разных сторон.

Получаемый в результате полиэдр обозначим $U(p,q)$. Это простой полиэдр с краем $\partial U(p,q) = \theta = \theta_0 \times \{1\}$, т.е. краем $U(p,q)$ является θ-кривая, на которую можно смотреть как на сдвиг зафиксированной изначально θ-кривой $\theta_0 \subset T$.

Чтобы не усложнять обозначений, ориентированные окружности, содержащиеся в θ_1, будем обозначать так же, как окружности $h_1, h_2, h_3 \subset \theta_0$, имея в виду, что совпадающие обозначения используются для изотопных окружностей.

2.2 ε-инвариант полиэдра $U(p,q)$

Вычислим теперь значения ε-инварианта полиэдра $U(p,q)$ со всеми возможными вариантами раскраски его края (см. раздел 1.3).

Теорема 1.

$$\begin{aligned}
t\big(\emptyset, U(p,q)\big) &= \varepsilon + 2, && (7)\\
t\big(h_1, U(p,q)\big) &= \varepsilon^{-1}(\varepsilon+2)(l(q,p)-1), && (8)\\
t\big(h_2, U(p,q)\big) &= \varepsilon^{-1}(\varepsilon+2)(l(p,q)-1), && (9)\\
t\big(h_3, U(p,q)\big) &= \varepsilon^{-1}(\varepsilon+2)(l(p-q,q)-1), && (10)\\
t\big(\partial U(p,q), U(p,q)\big) &= \varepsilon^{\frac{1}{2}}(\varepsilon+2)\big(\varepsilon+4-f(p,q)\big), && (11)
\end{aligned}$$

где $l(r,s) = t(L_{r,s})$ обозначает ε-инвариант линзового пространства $L_{r,s}$ и

$$f(p,q) = l(p,q) + l(q,p) + l(p-q,q). \qquad (12)$$

Доказательство.

Доказательство равенства (7).

Согласно определению ε-инварианта простого полиэдра с крашенным краем (см. (3)), $t\big(\emptyset, U(p,q)\big)$ есть сумма весов пустого полиэдра и имеющих пустой край простых подполиэдров полиэдра $U(p,q)$. Последние обязательно не пересекаются с внутренностью утолщенной θ-кривой $\hat{\theta}$ и, следовательно, их имеется ровно 2: T

и $T \cup D(p,q)$. Согласно определению (1), вес первого равен 1, вес второго равен ε. Напомним, что вес пустого полиэдра равен 1. Следовательно,

$$t\big(\emptyset, U(p,q)\big) = w(\emptyset) + w(T) + w\big(T \cup D(p,q)\big) = 1 + 1 + \varepsilon = \varepsilon + 2.$$

Доказательство равенств (8)–(10).

Ребра графа θ_0 обозначим через e_1, e_2, e_3 таким образом, чтобы при каждом $j = 1, 2, 3$, ребро e_j не входило в окружность h_j. По построению, $U(p,q)$ состоит из утолщенной θ-кривой $\hat{\theta}$, приклеенной к тору с вклеенным в него диском. На утолщенную θ-кривую можно смотреть как на объединение трех четырехугольников $\hat{\theta} = X_1 \cup X_2 \cup X_3$, где $X_j = e_j \times [0,1]$. При каждом j окружность h_j образована двумя из ребер θ-графа, третье ребро в нее не входит. Значит, любой простой полиэдр $Q \subset U(p,q)$ с краем, такой что $\partial Q = h_j$, содержит кольцо $h_j \times [0,1]$ и не содержит четырехугольника X_j. Значит, Q является подполиэдром полиэдра

$$U_j(p,q) = cl(U(p,q) \setminus X_j)$$

где $cl(\cdot)$ обозначает замыкание.

Полиэдр $U_j(p,q)$ можно достроить до спайна некоторого линзового пространства с удаленным шаром. Для этого достаточно приклеить диск к $\partial U_j(p,q) = h_j$. Полученный в результате полиэдр (обозначим его $\bar{U}_j(p,q)$) является простым полиэдром с пустым краем. Его структура может быть описана так: это двумерный тор T, к которому приклеены два диска, первый — это диск $D(p,q)$, приклеивается по кривой $c(p,q)$, второй диск приклеивается по окружности h_j. Тор с диском, приклеенным к нему по простой нетривиальной кривой, является спайном полнотория с удаленным открытым шаром; вклеенный диск является для этого полнотория меридианальным. Значит, $\bar{U}_j(p,q)$ является спайном многообразия, полученного в результате отождествления торических компонент края двух пунктированных полноторий, т.е. спайном линзового пространства с двумя удаленными шарами. Но (см. Замечание 1.1) спайн в такой ситуации считается спайном однократно пунктированного многообразия. Таким образом, полиэдр $\bar{U}_j(p,q)$ есть спайн линзового пространства с одним удаленным шаром. Параметры этого линзового пространства определяются взаимным расположением кривых, вдоль которых приклеены меридианальные диски полноторий.

Приведем формулы, при помощи которых в интересующих нас частных случаях можно вычислить параметры линзового пространства по типам кривых, вдоль которых приклеены меридианальные диски двух склеенных полноторий. Во всех интересующих нас случаях один диск приклеивается по кривой типа (p,q), а другой — по одной из кривых: $(1,0), (0,1), (1,1), (1,-1)$, (три первые случая понадобятся нам здесь, а четвертый — ниже при доказательстве Теоремы 2). В результате мы получим линзовое пространство $L_{r,s}$, параметры которого равны

$$(r,s) = \begin{cases} (q,p) & \text{для } (1,0) = h_1, \\ (p,q) & \text{для } (0,1) = h_2, \\ (p-q,q) & \text{для } (1,1) = h_3, \\ (p+q,q) & \text{для } (1,-1). \end{cases} \tag{13}$$

Опуская некоторые детали, можно сказать, что для доказательства приведенных формул надо вычислить координаты одной из кривых в базисе, в котором участвует другая. Затем для получения искомых параметров линзового пространства надо поменять местами найденные координаты.

В рассматриваемых 4 случаях надо вычислить координаты кривой (p, q), соответственно, в следующих базисах:

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

(координаты базисных кривых записаны в этих матрицах по столбцам). Для этого надо умножить $\left(\begin{smallmatrix} p \\ q \end{smallmatrix}\right)$, соответственно, на матрицы, обратные к приведенным, а именно соответственно на

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Искомые пары параметров получаются перестановкой чисел в полученных парах, в предпоследнем случае еще надо воспользоваться тем, что линзовые пространства $L_{r,s}$ и $L_{-r,s}$ гомеоморфны.

Следует отметить, что, кроме линзовых пространств, в виде склейки двух полных торов можно представить еще трехмерную сферу и $S^2 \times S^1$. Но нам удобно не отделять эти исключительные случаи от остальных и использовать для них обозначения, аналогичные используемым для линзовых пространств. А именно, мы иногда будем трехмерную сферу обозначать $L_{1,0}$, а $S^2 \times S^1$ обозначать $L_{0,1}$. Обозначения эти не являются произвольными. Они полностью согласуются с формулами (13), так как трехмерная сфера получается, когда диски приклеиваются один по h_1, другой — по $c(0,1)$; $S^2 \times S^1$ получается, когда диски приклеиваются по h_1 и $c(1,0)$.

Полиэдр $\bar{U}_j(p,q)$ является спайном пунктированного линзового пространства $L_{r,s}$, значит (см. лемму 1(a,c))

$$t\big(\bar{U}_j(p,q)\big) = t(L_{r,s})(\varepsilon + 2) = L(r,s)(\varepsilon + 2).$$

С другой стороны, как отмечалось выше, полиэдр $\bar{U}_j(p,q)$ является результатом склейки по краю полиэдра $U_j(p,q)$ и диска, т.е. к нему применима Лемма 3, согласно которой

$$t\big(\bar{U}_j(p,q)\big) = t(\emptyset, D^1)t\big(\emptyset, U_j(p,q)\big) + t(\partial D^1, D^1)t\big(h_j, U_j(p,q)\big) = \varepsilon + 2 + \varepsilon t\big(h_j, U_j(p,q)\big),$$

где D^1 обозначает диск. Мы здесь воспользовались тем, что $t(\emptyset, D^1) = 1$, и тем, что $t(\partial D^1, D^1) = w(D^1) = \varepsilon^{\chi(D)} = \varepsilon$.

Приравнивая правые части двух последних равенств, получаем

$$\varepsilon t\big(h_j, U_j(p,q)\big) + \varepsilon + 2 = l(r,s)(\varepsilon + 2).$$

откуда

$$t\big(h_j, U_j(p,q)\big) = \varepsilon^{-1}(\varepsilon + 2)(l(r,s) - 1).$$

Для доказательства равенств (8)–(10), осталось заметить, что $t\big(h_j, U_j(p,q)\big) = t\big(h_j, U(p,q)\big)$ и воспользоваться (13).

Доказательство равенства (11).

Рассмотрим полиэдр $Y(p,q)$, который получается из полиэдра $U(p,q)$ следующим образом. Пусть T' — это еще один двумерный тор, первый тор, обозначенный через T, мы использовали при построении полиэдра $U(p,q)$. К нему мы с одной стороны приклеили диск $D(p,q)$, с другой — утолщенную θ-кривую $\hat{\theta}$. Выберем на T' θ-кривую θ'_1 такую, что $T' \setminus \theta'_1$ гомеоморфно открытому диску, и отождествим θ'_1 с θ-кривой $\theta_1 = \partial U(p,q)$. В результате получим полиэдр с пустым краем, который является простым спайном дважды пунктированного полнотория. Чтобы убедиться в этом достаточно заметить, что его подполиэдр, состоящий из двух торов (T и T') и утолщенной θ-кривой, одно основание которой разрезает до диска один тор, а другое — другой, является спайном пунктированного утолщенного тора $T \times [0,1] \# D^3$. В результате приклейки ручки индекса 2 вдоль любой нетривиальной кривой на любом из оснований пунктированного утолщенного тора мы получим дважды пунктированное полнотория. Подчеркнем, что в отличие от рассмотренного ранее спайна дважды пунктированного линзового пространства на этот раз мы имеем дело с дважды пунктированным многообразием с краем тор. Следовательно (см. Замечание 1.1 и Лемму 1(b,c)),

$$t\big(Y(p,q)\big) = (\varepsilon + 2)^2. \tag{14}$$

Вычислим теперь ту же величину $t\big(Y(p,q)\big)$ по-другому, а именно, при помощи равенства (5). Для этого представим полиэдр $Y(p,q)$ в виде склейки двух следующих полиэдров. Разрежем $Y(p,q)$ по θ-кривой $\theta' = \theta_0 \times \{\frac{1}{2}\}$. Один из получившихся в результате полиэдров (тот, который содержит тор T) гомеоморфен полиэдру $U(p,q)$. Второй получившийся полиэдр (обозначим его X) — это тор T', к которому приклеена верхняя половина $\hat{\theta}$ (та, которая содержит $\theta_1 = \theta_0 \times \{1\}$).

Вычислим, пользуясь определением (1), ε-инварианты полиэдра X со всеми возможными вариантами окраски его края. Для обозначения раскрасок будем опять использовать $\emptyset, h_1, h_2, h_3, \theta$.

$t(\emptyset, X) = 2$, так как в сумме участвуют только пустой подполиэдр и тор T'.

$t(h_j, X) = 1, j = 1,2,3$, так как у полиэдра X имеется ровно один подполиэдр Q, выходящий на край по соответствующей окружности — это тор T', к которому по простой нетривиальной кривой приклеено кольцо. Для него $\chi(Q) = \chi(\partial Q) = v(Q) = 0$.

$t(\theta, X) = \varepsilon^{-\frac{3}{2}}$. Действительно, единственный подполиэдр полиэдра X, выходящий на его край по $\theta = \partial X$ — это сам X. Для него $\chi(X) = 0$, $\chi(\partial X) = -1$. Обе его внутренние вершины — вершины графа θ_1 — являются истинными, следовательно, $v(X) = 2$. Таким образом, $t(\theta, X) = (-1)^{v(X)}\, \varepsilon^{\chi(X) - \frac{1}{2}\chi(\partial X) - v(X)} = \varepsilon^{-\frac{3}{2}}$.

В рассматриваемом случае равенство (5) принимает вид

$$t\big(Y(p,q)\big) = \sum_{c \in \mathrm{col}(\theta')} t(c, X)\, t\big(c, U(p,q)\big).$$

Подставим в него только что вычисленные величины, а также воспользуемся уже доказанными равенствами (7)–(10). В результате получим

$$\begin{aligned} t\big(Y(p,q)\big) &= t(\emptyset, X)t\big(\emptyset, U(p,q)\big) + \sum_{j=1}^{3} t(h_j, X)t\big(h_j, U(p,q)\big) + t(\theta, X)t\big(\theta, U(p,q)\big) = \\ &= 2(\varepsilon+2) + \varepsilon^{-1}(\varepsilon+2)(f(p,q) - 3) + \varepsilon^{-\frac{3}{2}} t\big(\theta, U(p,q)\big). \end{aligned}$$

Следовательно, (см. (14))

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-\frac{3}{2}} t\big(\theta, U(p,q)\big) &= (\varepsilon+2)^2 - 2(\varepsilon+2) - \varepsilon^{-1}(\varepsilon+2)(f(p,q)-3) = \\ &= (\varepsilon+2)(\varepsilon + 3\varepsilon^{-1} - \varepsilon^{-1} f(p,q)). \end{aligned}$$

Откуда

$$t\big(\theta, U(p,q)\big) = \varepsilon^{\frac{1}{2}}(\varepsilon+2)(\varepsilon^2 + 3 - f(p,q)) == \varepsilon^{\frac{1}{2}}(\varepsilon+2)(\varepsilon + 4 - f(p,q)),$$

что и завершает доказательство равенства (11).

Доказательство Теоремы 1 завершено. $\square$

3 ε-инвариант линзовых пространств

Теорема 2 (Матвеев, Овчинников, Соколов [**?**])**.** *На множестве линзовых пространств $t(L_{p,q})$ принимает ровно 4 попарно различных значения, которые задаются формулой*

$$t(L_{p,q}) = \begin{cases} 1 & p = \pm 1 \pmod 5, \\ \varepsilon + 1 & p = \pm 2 \pmod 5, \\ \varepsilon + 2 & p = 0 \pmod 5, q = \pm 1 \pmod 5, \\ 0 & p = 0 \pmod 5, q = \pm 2 \pmod 5. \end{cases} \tag{15}$$

Это утверждение приведено без доказательства в [**?**] и затем воспроизведено в [1]. Его доказательство, основанное на идеологии TQFT, докладывалось авторами на семинарах. Приводимое ниже доказательство является новым.

Доказательство Теоремы 2 проведем в несколько шагов, оформленных в виде отдельных лемм.

Прежде всего приведем без доказательства используемые в дальнейшем свойства линзовых пространств.

Лемма 4 (Два свойства линзовых пространств.)**.** (a) *Линзовые пространства $L_{p,q}, L_{-p,q}, L_{p,-q}$ гомеоморфны друг другу.*

(b) *Линзовые пространства $L_{p,q}$ и $L_{p,q\pm p}$ гомеоморфны.*

В обоих пунктах леммы допускаются гомеоморфизмы, обращающие ориентацию.

Лемма 5.

$$l(1,0) = l(1,1) = 1, \quad l(0,1) = \varepsilon + 2, \quad l(2,1) = \varepsilon + 1.$$

Доказательство. Согласно нашим обозначениям $L_{1,0}$ — это трехмерная сфера. Поскольку $S^3 \# D^3 = D^3$ и (см. Лемму 1(a)) $t(D^3) = \varepsilon + 2$, то с учетом изложенного в Замечании 1.1 правила учета удаленных шаров получаем $l(1,0) = t(S^3) = 1$.

Равенство $l(1,1) = 1$ следует из $l(1,0) = 1$ и Леммы 4(b).

Через $l(0,1)$ мы обозначаем $S^2 \times S^1$. Это многообразие может быть получено в результате склейки двух полных торов, такой, при которой края меридиональных дисков склеиваемых полноторий изотопны на их отождествленном крае. Значит, оно обладает следующим простым спайном P. Пусть T — двумерный тор, на котором выбраны две изотопные, но не пересекающиеся, нетривиальные замкнутые кривые c_1, c_2. Полиэдр P состоит из T и двух дисков D_1, D_2, приклеенных к T вдоль кривых c_1, c_2. Вычислим $t(P)$ по определению (2), просуммировав веса полиэдров, участвующих в $F(P)$:

- $w(\emptyset) = 1$,
- $w(T) = 1$,
- двух двумерных сфер: $w(D_1 \cup A_1 \cup D_2) = w(D_1 \cup A_2 \cup D_2) = \varepsilon^2 = \varepsilon + 1$, где A_1, A_2 — кольца, на которые c_1 и c_2 разрезают тор,
- двух торов с вклеенными в них дисками: $w(T \cup D_1) = w(T \cup D_2) = \varepsilon$,
- веса всего полиэдра $w(P) = \varepsilon^2 = \varepsilon + 1$, так как $\chi(P) = 2$ и истинных вершин в нем нет.

Получим $t(P) = 5\varepsilon + 5$ что, как несложно проверить, равно $(\varepsilon + 2)^2$. Но склеивали мы пунктированные полнотория, следовательно, с учетом Замечания 1.1 получаем $t(P) = l(0,1)(\varepsilon + 2)$.

Линзовое пространство $L_{2,1}$ —это проективная плоскость. Ее простейшим простым спайном является диск, край которого двукратно намотан на окружность. ε-инвариант такого полиэдра равен сумме единицы — веса пустого полиэдра — и веса всего полиэдра. Последний имеет эйлерову характеристику 1 и не имеет истинных вершин, следовательно, его вес равен ε. □

Лемма 6. *Для любой пары (p, q) неотрицательных взаимно-простых целых чисел*

$$l(p + q, q) = 3 - l(p - q, q) + \varepsilon\big(4 - \lambda(p, q) - l(q, p)\big). \qquad (16)$$

Доказательство. Зафиксируем пару (p, q) неотрицательных взаимно-простых целых чисел и рассмотрим простой полиэдр P с пустым краем, который конструируется следующим образом.

- Пусть $\hat{\theta} = \theta \times [0, 1]$ — утолщенная θ-кривая.
- Вложим ее основания $\theta_k = \theta \times \{k\}, k = 0, 1$, в двумерные торы T_k таким образом, чтобы $T_k \setminus \theta_k$ было гомеоморфно открытому диску.
- Обозначим через $h_j, j = 1, 2, 3$, ориентированные окружности, содержащиеся в θ и изотопные им окружности, содержащиеся в $\theta_k, k = 0, 1$. Причем пусть окружности ориентированы и занумерованы так, что на торах T_k окружность h_3 имеет тип $(1, 1)$ в базисе (h_1, h_2).
- Выберем на T_0 простую замкнутую кривую c_0, имеющую тип (p, q) в базисе (h_1, h_2) и находящуюся с θ_0 в общем положении.
- Обозначим через D_0 диск, край которого отождествлен с кривой c_0, такой что его внутренность не пересекается с построенной на предыдущих шагах частью полиэдра.
- Выберем на T_1 простую замкнутую кривую c_1, имеющую тип $(1, -1)$ в базисе (h_1, h_2) и находящуюся с θ_1 в общем положении.
- Обозначим через D_1 диск, край которого отождествлен с кривой c_1, такой что его внутренность не пересекается с построенной на предыдущих шагах частью полиэдра.

Относительно так построенного полиэдра P для нас важны следующие два факта.

Во-первых, P является результатом склейки двух простых полиэдров с краем. А именно, разрежем P по θ-кривой $\theta \times \{\frac{1}{2}\}$. Получим два полиэдра: U_0, содержащий T_0, и U_1, содержащий T_1. Сравнивая описанную процедуру построения полиэдра P с процедурой построения полиэдра U (см. раздел 2.1), легко заметить, что $U_0 = U(p, q)$ и $U_1 = U(1, -1)$. Таким образом,

$$P = U(p, q) \overset{\gamma}{\cup} U(1, -1), \qquad (17)$$

где склеивающий гомеоморфизм $\gamma : \partial U(p, q) \to \partial U(1, -1)$ — это тождество.

Во-вторых, P является простым спайном линзового пространства $L_{p+q,q}$ с двумя удаленными из него открытыми шарами. Действительно, средняя часть полиэдра P (а именно, $T_0 \cup \hat{\theta} \cup T_1$) это спайн утолщенного тора $T_0 \times [0, 1]$ с удаленным открытым шаром. К граничным торам этого утолщенного тора приклеиваются диски: с одной стороны по кривой c_0, с другой — по кривой c_1. Приклейка диска вдоль нетривиальной простой замкнутой кривой означает приклейку пунктированного полного тора, меридианальным диском которого приклеиваемый диск является. Таким образом, многообразие, спайном которого является полиэдр P, — это результат склейки двух полных торов с тремя удаленными открытыми шарами, т.е. (см. Замечание 1.1) линзовое пространство с двумя удаленными шарами. Параметры линзового пространства определяются кривыми, вдоль которых приклеены диски: $c_0 = (p, q)$ и $c_1 = (1, -1)$. Следовательно (см. (13)), P является спайном $L_{p+q,q}$ с двумя удаленными шарами. Значит (см. Лемму 1(a,c))

$$t(P) = l(p+q, q)(\varepsilon + 2)^2. \tag{18}$$

С другой стороны, из (17) и (5)

$$t(P) = \sum_{c \in \mathrm{col}(\theta)} t\big(c, U(1,-1)\big) t\big(c, U(p,q)\big). \tag{19}$$

Значения вторых сомножителей во всех слагаемых суммы в правой части этого равенства даны в Теореме 1. Для определения значения первых сомножителей применим эту же теорему вместе с Леммами 5 и 4 к полиэдру $U(1, -1)$.

$$\begin{aligned}
t\big(\emptyset, U(1,-1)\big) &= \varepsilon + 2,\\
t\big(h_1, U(1,-1)\big) &= \varepsilon^{-1}(\varepsilon+2)(l(-1,1)-1) = \varepsilon^{-1}(\varepsilon+2)(1-1) = 0,\\
t\big(h_2, U(1,-1)\big) &= \varepsilon^{-1}(\varepsilon+2)(l(1,-1)-1) = \varepsilon^{-1}(\varepsilon+2)(1-1) = 0,\\
t\big(h_3, U(1,-1)\big) &= \varepsilon^{-1}(\varepsilon+2)(l(2,1)-1) = \varepsilon^{-1}(\varepsilon+2)(\varepsilon+1-1) = \varepsilon+2,\\
t\big(\theta, U(1,-1)\big) &= \varepsilon^{\frac{1}{2}}(\varepsilon+2)\big(\varepsilon+4-l(1,-1)-l(-1,1)-l(2,1)\big) =\\
&= \varepsilon^{\frac{1}{2}}(\varepsilon+2)\big(\varepsilon+4-1-1-(\varepsilon+1)\big) = \varepsilon^{\frac{1}{2}}(\varepsilon+2).
\end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned}
t(P) &= (\varepsilon+2)^2\big(1+\varepsilon^{-1}(l(p-q,q)-1)+\varepsilon\big(\varepsilon+4-l(p,q)-l(q,p)-l(p-q,q)\big)\big) =\\
&= (\varepsilon+2)^2\big(\varepsilon^2+4\varepsilon-\varepsilon^{-1}+1+\varepsilon^{-1}l(p-q,q)-\varepsilon(l(p,q)+l(q,p)+l(p-q,q))\big) =\\
&= (\varepsilon+2)^2\big(4\varepsilon+3+\varepsilon^{-1}l(p-q,q)-\varepsilon(l(p,q)+l(q,p)+l(p-q,q))\big) =\\
&= (\varepsilon+2)^2\big(3-l(p-q,q)+\varepsilon\big(4-l(p,q)-l(q,p)\big)
\end{aligned}$$

Мы здесь воспользовались тем, что $\varepsilon^2 = \varepsilon + 1$ и $\varepsilon^{-1} = \varepsilon - 1$.

Приравнивая полученное выражение и правую часть (18), после сокращения на $(\varepsilon + 2)^2$, получаем (16). □

Обозначим через v и w следующие преобразования пар целых чисел:

$$v : (x, y) \to (x + y, y), \quad w : (x, y) \to (x, y + x).$$

Как известно, любая пара (p, q) взаимно-простых натуральных чисел может быть получена из пары $(1, 1)$ применением конечного числа этих преобразований. Утверждение Теоремы 2 докажем индукцией по n — числу требующихся преобразований. В качестве основания индукции возьмем $n = 0$, т.е. саму пару $(1, 1)$. Для нее утверждение теоремы верно, так как в силу Леммы 5 $l(1, 1) = 1$ и пара $(1, 1)$ попадает в первый из 4 случаев, перечисляемых в (15).

Шаг индукции оформим в виде леммы.

Лемма 7. *Пусть равенство* (15) *верно для всех пар* (p,q)*, получаемых из пары* $(1,1)$ *в результате применения к ней произвольной последовательности длины* $n \geq 0$*, состоящей из преобразований* v *и* w*. Тогда равенство* (15) *верно и для пар, получаемых в результате применения последовательности длины* $n+1$*, т.е. для пар* $(p+q,q)$ *и* $(p,q+p)$*.*

Доказательство. Пусть пара (p,q) получается из $(1,1)$ в результате n–кратного применения преобразований v и w. Тогда по предположению $l(p,q)$ удовлетворяет равенству (15).

В силу Леммы 4(b) $L(p,q+p) = l(p,q)$. Кроме того, пара $(p,q+p)$ относится к тому же из 4 случаев, перечисляемых в (15), что и пара (p,q). Действительно, при отнесении к двум первым случаям второй параметр значения не имеет, а в двух последних $p = 0 \pmod 5$, следовательно, $q = q+p \pmod 5$. Значит, $l(p,q+p)$ тоже удовлетворяет равенству (15).

Значение $l(p+q,q)$ может быть вычислено при помощи (16). В правой части этого равенства участвуют $l(p,q), l(q,p)$ и $l(p-q,q)$. Убедимся, что все три удовлетворяют (15).

Для пары (p,q) по предположению существует нужная последовательность X длины n, и, следовательно, $l(p,q)$ удовлетворяет (15).

Пара (q,p) получается из пары $(1,1)$ в результате выполнения последовательности Y длины n, которая получается из последовательности X заменой всех v на w и всех w на v. Значит, $l(q,p)$ тоже удовлетворяет (15).

Заметим, что преобразования v и w определены так, что в результате применения любого из них большим в полученной паре оказывается именно то число, которое было изменено: первое для v и второе для w. Следовательно, если $p > q$, то последним преобразованием в последовательности X является v, т.е. после выполнения предпоследнего преобразования в последовательности x была получена как раз пара $(p-q,q)$. Значит,в этом случае она получается из $(1,1)$ в результате выполнения последовательности длины $n-1$, и, следовательно, по предположению, $l(p-q,q)$ удовлетворяет равенству (15).

Предположим теперь, что $q > p$. В силу Леммы 4(b) $l(p-q,q) = l(p-q,q+p-q) = l(p-q,p)$, и в силу Леммы 4(a) $l(p-q,p) = l(q-p,p)$. Повторяя аргументы, использованные в случае $p > q$, заключаем, что пара $q-p,p)$ получается в результате выполнения последовательности y, из которой удалено самое последнее преобразование, следовательно, $l(q-p,p)$ удовлетворяет (15).

Осталось проверить, что пары $(p-q,q)$ и $(q-p,p)$ попадают в один и тот же случай из 4, фигурирующих в (15). Действительно, $p-q = -(q-p) \pmod 5$. Значит, если $p \neq q \pmod 5$, то независимо от второго числа в парах $(p-q,q)$ и $(q-p,p)$ относятся к одному и тому же случаю из двух первых. Если $p = q \pmod 5$, то рассматриваемые пары попадают в один и тот же случай из двух последних.

Итак, $l(p,q), l(q,p), l(p-q,q)$ удовлетворяют (15). Проверим теперь, что в результате их подстановки в правую часть равенства (16) будет получена величина тоже удовлетворяющая (15). Сделать это можно перебором всех возможных пар (p,q). Причем достаточно выполнить конечный перебор, так как параметры в (15) берутся по модулю 5.

Итак вычислим значение правой части (16) для всех пар (p,q) таких, что $0 \leq p < 5$ и $0 \leq q < 5$, за исключением пары $(0,0)$, которая является недопустимой, поскольку числа, делящиеся на 5, не могут быть взаимно-простыми. Первая из приведенных ниже таблиц содержит результаты соответствующих вычислений. Вторая таблица содержит номер варианта в равенстве (15), к которому относится пара $(p+q,q)$. Строки в обеих таблицах отвечают параметру p, а столбцы — параметру q.

Результат подстановки пары (p,q) **в правую часть** (16)

$p\backslash q$	0	1	2	3	4
0		1	$\varepsilon+1$	$\varepsilon+1$	1
1	1	$\varepsilon+1$	$\varepsilon+1$	1	$\varepsilon+2$
2	$\varepsilon+1$	$\varepsilon+1$	1	0	1
3	$\varepsilon+1$	1	0	1	$\varepsilon+1$
4	1	$\varepsilon+2$	1	$\varepsilon+1$	$\varepsilon+1$

Номер варианта в равенстве (15)**, к которому относится пара** $(p+q,q)$

$p\backslash q$	0	1	2	3	4
0		1	2	2	1
1	1	2	2	1	3
2	2	2	1	4	1
3	2	1	4	1	2
4	1	3	1	2	2

Сравнение приведенных таблиц показывает, что $l(p+q,q)$ при всех допустимых параметрах p,q удовлетворяет равенству (15). $\square$

Доказательство Теоремы 2 завершено.

4 Отображение $u(p,q)$

Рассмотрим отображение $u(p,q):\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{R}^5$, определенное для всех пар (p,q), кроме таких, что $p=0 \pmod 5$ и $q=0 \pmod 5$. Положим

$$u(p,q)=\big(u_1(p,q),\dots,u_5(p,q)\big),$$

где

$$\begin{aligned} u_1(p,q) &= t\big(\emptyset,U(p,q)\big),\\ u_j(p,q) &= t\big(h_{j-1},U(p,q)\big), \quad j=2,3,4,\\ u_5(p,q) &= t\big(\theta,U(p,q)\big). \end{aligned}$$

Лемма 8. *Отображение $u(p,q)$ периодическое с периодом 5 по обоим своим аргументам. Причем равенство $u(p,q)=u(p',q')$ выполняется тогда и только тогда, когда*
либо $p=p' \pmod 5$ и $q=q' \pmod 5$,
либо $p+p'=0 \pmod 5$ и $q+q'=0 \pmod 5$.

Доказательство. Край полиэдра $U(p,q)$ не зависит от параметров (p,q). Из Теоремы 2 и Теоремы 1 следует, что для любой раскраски $c\in \mathrm{col}(\partial U(p,q)$

$$t(c,U(p,q))=t(c,U(p',q')) \text{ если } p=p' \pmod 5 \text{ и } q=q' \pmod 5.$$

Таким образом, для нахождения всех возможных значений вектора $U(p,q)$ достаточно вычислить значения правых частей равенств (7)–(11) для пар (p,q), в которых $0 \leq p < 5$ и $0 \leq q < 5$, исключая не входящую в область определения пару $(0,0)$. Результаты этих вычислений приведены в двух нижеследующих таблицах. В первой в лексикографическом порядке перечислены все возможные попарно различные значения вектора $v(p,q)$, который с $U(p,q)$ связан соотношением

$$U(p,q) = (\varepsilon + 2)v(p,q).$$

Строки и столбцы второй таблицы занумерованы, соответственно, значениями p и q. В ее ячейках указано какое значение вектора $v(k,l)$ из первой таблицы отвечает паре (p,q).

	$\emptyset$	h_1	h_2	h_3	θ
$v_{4,1}$	1	0	0	1	$\varepsilon^{\frac{1}{2}}$
$v_{6,1}$	1	0	0	ε	0
$v_{2,1}$	1	0	1	0	$\varepsilon^{\frac{1}{2}}$
$v_{3,1}$	1	0	1	1	$\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$
$v_{0,1}$	1	0	ε	0	0
$v_{4,3}$	1	1	0	0	$\varepsilon^{\frac{1}{2}}$
$v_{9,2}$	1	1	0	1	$-\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$
$v_{7,3}$	1	1	1	0	$\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$
$v_{7,2}$	1	1	1	$-\varepsilon^{-1}$	$\varepsilon^{-\frac{3}{2}}$
$v_{5,2}$	1	1	$-\varepsilon^{-1}$	1	$\varepsilon^{-\frac{3}{2}}$
$v_{7,5}$	1	$-\varepsilon^{-1}$	1	1	$\varepsilon^{-\frac{3}{2}}$
$v_{1,0}$	1	ε	0	0	0

$q \backslash p$	0	1	2	3	4
0		$v_{0,1}$	$v_{5,2}$	$v_{5,2}$	$v_{0,1}$
1	$v_{1,0}$	$v_{6,1}$	$v_{4,3}$	$v_{9,2}$	$v_{4,1}$
2	$v_{7,5}$	$v_{2,1}$	$v_{7,2}$	$v_{7,3}$	$v_{3,1}$
3	$v_{7,5}$	$v_{3,1}$	$v_{7,3}$	$v_{7,2}$	$v_{2,1}$
4	$v_{1,0}$	$v_{4,1}$	$v_{9,2}$	$v_{4,3}$	$v_{6,1}$

Из этих таблиц следует, что приведенное в формулировке леммы условие выполнения равенства $u(p,q) = u(p',q')$ имеет место. $\square$

Следствие 1. *Отображение $u(p,q)$ на своей области определения принимает ровно 12 попарно различных значений.*

Список литературы

[1] S. Matveev, “Algorithmic topology and classification of 3-manifolds”, 2-nd ed. Algorithms and Computation in Mathematics, 9. Springer, Berlin, 2007. xiv+492 pp.

[2] Матвеев, Овчинников, Соколов, “Построение и свойства t-инварианта”, Записки научных семинаров Санкт-Петербургского отделения математического института им. В.А. Стеклова РАН, 267, Геометрия и топология 5 (2000), 207–219.

[3] Овчинников, М.А. “Представление гомеотопий тора простыми полиэдрами с краем” / М.А. Овчинников // Мат. заметки. – 1999. – Т. 66, № 4. – С. 533–539.

[4] Ovchinnikov, M.A. “Values of t-invariant for small Seifert manifolds”, 2008, arXiv: 0806.2073

[5] Turaev, V. G., Viro, O. Ya.: State sum invariants of 3-manifolds and quantum $6j$-symbols. Topology, **31**, no. 4, 865–902 (1992)