ПРЕПРИНТ ПОМИ 9/2023

ТРЁХРЁБЕРНЫЕ МИНИМАЛЬНЫЕ ИДЕАЛЬНЫЕ ТРИАНГУЛЯЦИИ 3-МНОГООБРАЗИЙ С КРАЕМ

А. И. Рябков[1], Е. А. Фоминых[1,2]

[1]Санкт-Петербургский государственный университет,
Факультет математики и компьютерных наук,
Университетская наб., д. 7–9
199034, Санкт-Петербург, Россия

[2]Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук,
наб. р. Фонтанки, д. 27, 191023, Санкт-Петербург, Россия

ryabkoff_anton@yandex.ru, efominykh@gmail.com

АННОТАЦИЯ

Известно, что идеальная триангуляция компактного 3-многообразия с непустым краем минимальна тогда и только тогда, когда она содержит наименьшее число ребер среди всех идеальных триангуляций этого многообразия. Поэтому любая идеальная триангуляция ровно с одним ребром минимальна. Ранее А. Ю. Веснин, В. Г. Тураев и Е. А. Фоминых доказали, что любая идеальная триангуляция ровно с двумя ребрами является минимальной, если к ней не применимо преобразование Пахнера типа 3–2. В настоящей работе мы устанавливаем достаточные условия минимальности идеальных триангуляций с тремя ребрами.

Ключевые слова: трехмерное многообразие, минимальная идеальная триангуляция, инварианты Тураева-Виро.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда No. 22-21-00747

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St. Petersburg Department
of Steklov Institute of Mathematics

---

1 Введение

В этой работе мы ограничимся рассмотрением связных компактных 3-многообразий M с непустым краем и их идеальных триангуляций. Идеальная триангуляция многообразия M называется *минимальной*, если она содержит наименьшее число тетраэдров среди всех идеальных триангуляций многообразия M. Известно довольно мало примеров бесконечных серий минимальных идеальных триангуляций. Минимальность триангуляции в смысле числа истинных вершин равносильна её минимальности в смысле числа рёбер. Поэтому установление минимальности триангуляций при последовательном увеличении числа 2-компонент (1, 2, 3 и т.д,) является правильно поставленной задачей. Идеальные триангуляции с одним ребром автоматически минимальны. В работе [1] доказано, что любая идеальная триангуляция с $n \geqslant 2$ тетраэдрами и с одним ребром задает гиперболическое многообразие с вполне геодезическим краем, а также построены бесконечные серии таких триангуляций. Полный ответ на вопрос о минимальности идеальных триангуляций с двумя ребрами дан в [2]. А именно, в этой работе доказано, что любая идеальная триангуляция с двумя ребрами, не допускающая уменьшающего преобразования Пахнера типа 3-2, является минимальной. Бесконечные серии таких триангуляций гиперболических многообразий с вполне геодезическим краем построены в [3, 4].

Как оказалось, простые подполиэдры двумерных полиэдров, двойственных идеальным триангуляциям, играют существенную роль при доказательстве минимальности триангуляций. В случае триангуляций ровно с тремя ребрами число таких собственных подполиэдров не превышает трёх (лемма 1). Минимальность триангуляций рассматриваемого класса, двойственные полиэдры которых не содержат собственных простых подполиэдров, доказана в [5].

Пусть тройка (ξ_1, ξ_2, ξ_3) есть $(4, 7, 9)$. Следующая теорема, описывающая достаточные условия минимальности идеальных триангуляций ровно с тремя ребрами, есть основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{T}_3$ – идеальная триангуляция компактного связного 3-многообразия M с непустым краем, состоящая из N тетраэдров и имеющая ровно 3 ребра. Предположим, что специальный полиэдр P_3, двойственный триангуляции $\mathcal{T}_3$, содержит ровно k собственных простых подполиэдров, $1 \leq k \leq 3$. Если $N > \xi_k$ и число истинных вершин в каждом собственном простом подполиэдре полиэдра P_3 строго меньше $N - \xi_k$, то $\mathcal{T}_3$ – минимальная триангуляция многообразия M.*

Эта теорема перекрывает результаты работ [6, 7], в которых построены две бесконечные серии идеальных триангуляций гиперболических 3-многообразий с вполне геодезическим краем и доказана их минимальность. Первая серия состоит из так называемых обобщенных многообразий Паолюцци-Циммермана, получаемых склейками граней усеченных бипирамид. Вторую серию образуют 3-многообразия, задаваемые 4-регулярными графами с тремя эйлеровыми циклами.

Ключевую роль в доказательстве теоремы 1 играет так называемый ε-инвариант 3-многообразий [8], представляющий собой гомологически тривиальную часть инварианта Тураева – Виро [9] пятого порядка, и так называемая теорема Цекендорфа: любое натуральное число может быть однозначно представлено в виде суммы одного или нескольких различных чисел Фибоначчи с индексами не меньше 2 таким образом, что сумма не включает никакие два последовательных числа Фибоначчи.

2 Предварительные сведения

2.1 Идеальные триангуляции

Пусть $\mathcal{T}$ – клеточный комплекс, полученный попарными отождествлениями всех двумерных граней конечного набора 3-симплексов с помощью симплициальных отображений. Заметим, что комплекс $\mathcal{T}$ на самом деле может не быть 3-многообразием, потому что линки его вершин могут быть произвольными замкнутыми поверхностями, а линки середин ребер – проективными плоскостями.

Пусть M – компактное 3-многообразие с непустым краем. Если разность $\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}^{(0)}$, где $\mathcal{T}^{(0)}$ – нульмерный остов комплекса $\mathcal{T}$, гомеоморфна внутренности многообразия M, то комплекс $\mathcal{T}$ будем называть *идеальной триангуляцией* многообразия M.

2.2 Специальные спайны

Напомним определения простых и специальных полиэдров следуя [10]. Компактный полиэдр P называется *простым*, если линк каждой его точки $x \in P$ гомеоморфен одному из следующих одномерных полиэдров: (a) окружности (в этом случае точка x называется *неособой*); (b) объединению окружности и диаметра (в этом случае точка x называется *тройной точкой*); (c) объединению окружности и трех радиусов (в этом случае точка x называется *истинной вершиной*). Типичные окрестности точек простого полиэдра показаны на рис. 1. Точки типов (b) и (c) будем называть *особыми*. Множество особых точек простого полиэдра P называется его *особым графом* и обозначается SP. В общем случае множество SP не является графом на множестве истинных вершин полиэдра P, так как SP может содержать замкнутые тройные линии без истинных вершин. Если же замкнутых тройных линий нет, то SP является 4-регулярным графом (каждая вершина инцидентна ровно четырем ребрам), возможно, имеющим петли и кратные ребра.

Каждый простой полиэдр имеет естественную *стратификацию*. Страты размерности 2 (*2-компоненты*) – это связные компоненты множества неособых точек. Страты размерности 1 – это связные компоненты множества точек типа (b). Страты размерности 0 – это истинные вершины. Естественно потребовать, чтобы каждый страт являлся клеткой. Простой полиэдр P на-

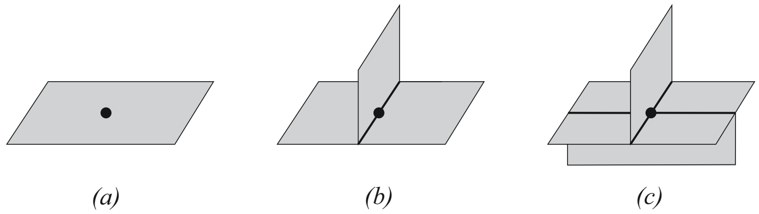

Рис. 1. Разрешенные типы окрестностей в простом полиэдре.

зывается *специальным*, если выполнены следующие условия:
(1) Каждый одномерный страт полиэдра P является открытой 1-клеткой.
(2) Каждая 2-компонента полиэдра P является открытой 2-клеткой.
Очевидно, что если простой полиэдр P связен и содержит хотя бы одну истинную вершину, то выполнение условия (2) влечет выполнение условия (1).

Пусть M – связное компактное 3-многообразие с непустым краем. Компактный полиэдр $P \subset M$ называется *спайном* многообразия M, если разность $M \setminus P$ гомеоморфна $\partial M \times (0, 1]$. Спайн многообразия называется *специальным*, если он является специальным полиэдром. Несложно видеть, что специальный спайн связного 3-многообразия связен.

2.3 Двойственность между идеальными триангуляциями и специальными спайнами

Каждая идеальная триангуляция $\mathcal{T}$ связного компактного 3-многообразия M с непустым краем естественным образом определяет двойственный специальный спайн. А именно, пусть триангуляция $\mathcal{T}$ получается склеиванием тетраэдров $T_1, \ldots, T_N$. В каждом тетраэдре T_i рассмотрим объединение L_i линков всех четырех вершин тетраэдра T_i в его первом барицентрическом подразбиении (см. рис. 2). Склейка тетраэдров $T_1, \ldots, T_N$ индуцирует склейку полиэдров $L_1, \ldots, L_N$, в результате которой мы получаем специальный полиэдр $P = \cup_{i=1}^{N} L_i$, являющийся спайном многообразия M. Хорошо известно [10], что сопоставление $\mathcal{T} \to P$ индуцирует биекцию между идеальными триангуляциями многообразия M (рассматриваемыми с точностью до комбинаторной эквивалентности) и специальными спайнами того же многообразия (рассматриваемыми с точностью до гомеоморфизмов). Более того, сопоставление $\mathcal{T} \to P$ индуцирует взаимно однозначные соответствия между ребрами, гранями и тетраэдами триангуляции $\mathcal{T}$ и 2-компонентами, ребрами и истинными вершинами двойственного специального спайна P. Причем эти соответствия сохраняют отношения инцидентности.

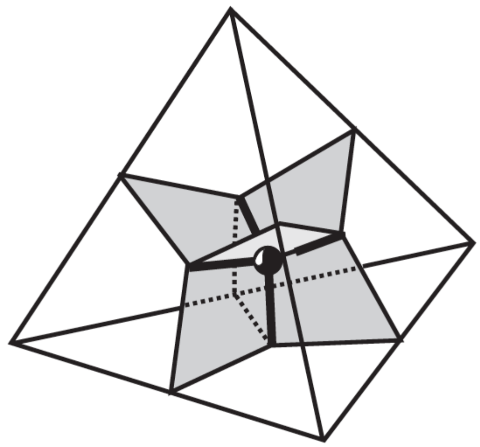

Рис. 2. Двойственность идеальных триангуляций и специальных спайнов.

2.4 Простые подполиэдры и ε-инвариант

Для доказательства теорем 1 и 2 мы используем ε-инвариант [8] 3-многообразий, представляющий собой гомологически тривиальную часть инварианта Тураева – Виро пятого порядка [9]. Напомним его определение следуя [10]. Пусть P – специальный спайн связного компактного 3-многообразия M с непустым краем. Обозначим через $\mathcal{F}(P)$ множество всех его простых подполиэдров, включая P и пустое множество. Зафиксируем $\varepsilon = (1+\sqrt{5})/2$ – одно из решений уравнения $\varepsilon^2 = \varepsilon+1$. Сопоставим каждому простому полиэдру $Q \in \mathcal{F}(P)$ его ε-вес

$$w_\varepsilon(Q) = (-1)^{\mathtt{V}(Q)}\varepsilon^{\chi(Q)-\mathtt{V}(Q)},$$

где $\mathtt{V}(Q)$ – число истинных вершин в Q, $\chi(Q)$ – его эйлерова характеристика. Для специального спайна P положим

$$t(P) = \sum_{Q\in\mathcal{F}(R)} w_\varepsilon(Q).$$

Как показано в [10], если P_1 и P_2 – два специальных спайна одного и того же многообразия M, то $t(P_1) = t(P_2)$. Поэтому ε-инвариант $t(M)$ многообразия M задается формулой $t(M) = t(P)$.

Исследование минимальности идеальных триангуляций точно с тремя ребрами удобно разбить на случаи в зависимости от числа собственных простых подполиэдров двойственных специальных спайнов. Напомним, что простой подполиэдр Q специального спайна P называется собственным, если $Q \neq \emptyset$ и $Q \neq P$.

Обозначим через $\mathtt{d}(P)$ число 2-компонент специального полиэдра P.

Лемма 1. *Число собственных простых подполиэдров связного специального полиэдра P не превосходит $2^{\mathtt{d}(P)-1} - 1$.*

Доказательство. В силу компактности произвольного простого полиэдра $Q \in \mathcal{F}(P)$, если он содержит хотя бы одну точку какой-либо 2-компоненты α, то $\alpha \subset Q$. Таким образом, для описания простого подполиэдра в P достаточно указать, какие 2-компоненты полиэдра P он содержит, поскольку его тройные точки и истинные вершины по этой информации определяются однозначно.

Напомним, что имеет место характеристическое отображение $f : D^2 \to P$, которое гомеоморфно отображает внутренность диска D^2 на α, а ограничение которого на $S^1 = \partial D^2$ является локальным вложением. Кривая $f|_{\partial D^2} : \partial D^2 \to P$ (и ее образ $f|_{\partial D^2}(\partial D^2)$) называется *граничной кривой* 2-компоненты α и обозначается $\partial\alpha$.

Несложно заметить, что если собственное подмножество $\mathcal{S}$ 2-компонент полиэдра P задаёт простой подполиэдр, то в полиэдре P найдется ребро, по которому граничные кривые всех 2-компонент набора $\mathcal{S}$ проходят ровно два раза. Это означает, что можество $F \setminus \mathcal{S}$ не задаёт простой подполиэдр, из чего вытекает утверждение леммы. □

3 Усиленная версия теоремы 1 на языке полиэдров

Вместо того, чтобы доказывать теорему 1, мы докажем более сильный результат из которого данная теорема будет следовать.

Два специальных полиэдра назовем *ε-эквивалентными*, если у них совпадают Эйлеровы характеристики и значения ε-инварианта. В частности, любые специальные спайны одного и того же многообразия ε-эквивалентны.

Теорема 2 (Усиленная версия теоремы 1)**.** *Пусть P_3 – связный специальный полиэдр, имеющий ровно N истинных вершин, k собственных простых подполиэдров, $1 \leq k \leq 3$, и три 2-компоненты. Предположим, что $N > \xi_k$ и полиэдр P_3 ε-эквивалентен специальному полиэдру P с меньшим числом 2-компонент. Тогда в полиэдре P_3 найдется собственный простой подполиэдр с не меньше, чем $N - \xi_k$ истинными вершинами.*

Лемма 2. *Утверждение теоремы 1 следует из теоремы 2.*

Доказательство. Пусть триангуляция $\mathcal{T}_3$, полиэдр P_3 и числа N, k как в условии теоремы 1. Рассуждая от противного предположим, что триангуляция $\mathcal{T}_3$ не минимальна. Тогда существует триангуляция $\mathcal{T}$ многообразия M с меньшим числом тетраедров. Обозначим через P специальный полиэдр, двойственный триангуляции $\mathcal{T}$. Тогда $\mathtt{V}(P) < \mathtt{V}(P_3) = N$ и, так как подполиэдры задают одно и то же многообразие, то полиэдр P_3 ε-эквивалентен полиэдру P. Так как особый граф специального полиэдра является 4-регулярным, то число ребер в полиэдрах P_3 и P в два раза больше числа их истинных вершин. Значит $\mathtt{d}(P)-\mathtt{V}(P)=\chi(P)=\chi(P_3)=3-N$, то есть $\mathtt{d}(P)<\mathtt{d}(P_3)$. В силу теоремы 2 полиэдр P_3 имеет собственный простой подполиэдр с не менее, чем $N-\xi_k$ истинными вершинами, что противоречит условию теоремы 1. □

3.1 Об идеях доказательства усиленной версии

Пусть полиэдры P_3, P и числа N, k как в формулировке теоремы 2. Тогда, согласно определению ε-эквивалентности, справедливо равенство

$$t(P_3)=t(P). \tag{1}$$

Выпишем возможный вид обеих частей этого равенства. Следующая лемма описывает вид правой части равенства (1).

Лемма 3. *Пусть полиэдры P_3, P и число N как в формулировке теоремы 2. Тогда возможны три случая.*

1. $\mathtt{V}(P)=N-2$, *полиэдр P имеет ровно одну 2-компоненту и* $t(P)=(-1)^{N-2}\cdot\varepsilon^{5-2N}+1$;
2. $\mathtt{V}(P)=N-1$, *полиэдр P имеет ровно две 2-компоненты, не имеет собственных простых подполиэдров, и* $t(P)=(-1)^{N-1}\cdot\varepsilon^{4-2N}+1$;
3. $\mathtt{V}(P)=N-1$, *полиэдр P имеет ровно две 2-компоненты и содержит ровно один собственный простой подполиэдр (обозначим его через Q), и* $t(P)=(-1)^{N-1}\cdot\varepsilon^{4-2N}+(-1)^{\mathtt{V}(Q)}\varepsilon^{\chi(Q)-\mathtt{V}(Q)}+1$.

Доказательство. Так как особый граф специального полиэдра является 4-регулярным, то число ребер в полиэдрах P_3 и P в два раза больше числа их истинных вершин. Поэтому $\chi(P_3)=3-N$ и $\chi(P)=\mathtt{d}(P)-\mathtt{V}(P)$. Так как ε-эквивалентность полиэдров P_3 и P влечет равенство $\chi(P)=\chi(P_3)$, то $\mathtt{V}(P)=N-2$ при $\mathtt{d}(P)=1$ и $\mathtt{V}(P)=N-1$ при $\mathtt{d}(P)=2$. Число собственных простых подполиэдров в P известно из леммы 1, что позволяет выписать формулу для $t(P)$. □

Чтобы описать вид правой части равенства (1) для начала обозначим простые подполиэдры полиэдра P_3 через $R_1,\dots,R_k$. Из доказательства предыдущей леммы знаем, что $\chi(P_3)=3-N$, тогда левая часть равенства (1) принимает следующий вид:

$$t(P_3)=(-1)^N\varepsilon^{3-2N}+\sum_{i=1}^{k}(-1)^{V(R_i)}\varepsilon^{\chi(R_i)-V(R_i)}+1. \tag{2}$$

Нетрудно теперь заметить, что по модулю переноса слагаемых формула (1) имеет вид

$$\varepsilon^{a_1}+\dots+\varepsilon^{a_n}=\varepsilon^{b_1}+\dots+\varepsilon^{b_m}, \tag{3}$$

где $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{Z}, n, m \in \mathbb{N}$. В следующем разделе мы покажем, что при малых n и m между показателями степеней a_i и b_j существуют определенные соотношения.

4 Соотношения на показатетели степеней в равенстве (3)

Лемма 4. *Пусть $\varepsilon^a = \varepsilon^{b_1} + \dots + \varepsilon^{b_m}$, где $m \geq 2$ и $a, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{Z}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *$a > b_i$ для любого $1 \leq i \leq m$;*
2. *если $m = 2$, то числа b_1, b_2 равны $a - 1$ и $a - 2$.*
3. *$\max_{1 \leq j \leq m}(a - b_j)$ равняется 4 при $m = 3$; 6 при $m = 4$.*

Лемма 5. *Пусть $\varepsilon^{a_1} + \varepsilon^{a_2} = \varepsilon^{b_1} + \varepsilon^{b_2}$, где $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$, причем $a_1 \leq a_2, b_1 \leq b_2, a_1 \leq b_1$. Тогда справедливо одно из двух следующих утверждений:*

1. *$a_1 = b_1, a_2 = b_2$;*
2. *$a_2 = a_1 + 3, b_1 = b_2 = a_1 + 2$.*

Лемма 6. *Пусть $\varepsilon^{a_1} + \varepsilon^{a_2} = \varepsilon^{b_1} + \varepsilon^{b_2} + \varepsilon^{b_3}$, где $a_i, b_j \in \mathbb{Z}$, причем $a_i \neq b_j$ для всех $i \in \{1, 2\}, j \in \{1, 2, 3\}$. Тогда $\max_{x,y \in \{a_1,a_2,b_1,b_2,b_3\}}(x - y) = 5$.*

Напомним, что *числами Фибоначчи* называется последовательность $\{F(i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ рекурентно заданная соотношениями $F(1) = F(2) = 1$ и $F(j) = F(j-1) + F(j-2), j \in \mathbb{Z}$.

Для доказательства приведенных выше лемм вместо того, чтобы работать с равенствами вида (3) нам будет удобно перейти к равенствам вида

$$F(x_1) + \ldots + F(x_n) = F(y_1) + \ldots + F(y_m). \tag{4}$$

Следующая лемма описывает этот переход.

Лемма 7. *Пусть $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{Z}$ довлетворяет равенству (3), тогда для любого $s \in \mathbb{Z}$ справедливо равенство*

$$F(a_1 + s) + \dots + F(a_n + s) = F(b_1 + s) + \dots + F(b_m + s). \tag{5}$$

Доказательство. Нетрудно доказать по индукции, что степени ε выражаются как линейная комбинация ε и 1 с коэффицентами в числах Фибоначчи:

$$\varepsilon^r = F(r) \cdot \varepsilon + F(r-1), r \in \mathbb{Z} \tag{6}$$

Используя формулу (6) заменим каждое слагаемое в равенстве (3) и перегрупперуем слагаемые:

$$\big(F(a_1)+\ldots+F(a_n)\big)\cdot\varepsilon+\big(F(a_1-1)+\ldots+F(a_n-1)\big)=$$
$$=\big(F(b_1)+\ldots+F(b_m)\big)\cdot\varepsilon+\big(F(b_1-1)+\ldots+F(b_m-1)\big)$$

Так как ε – иррациональное число, то слагаемые с ε и без должны быть равны по отдельности. Получаем систему:

$$\begin{cases} F(a_1)+\ldots+F(a_n)=F(b_1)+\ldots+F(b_m) \\ F(a_1-1)+\ldots+F(a_n-1)=F(b_1-1)+\ldots+F(b_m-1) \end{cases}$$

Таким образом равенство (5) справедливо при $s\in\{0,1\}$. Справедливость этого равенства для произвольного $s\in\mathbb{Z}$ легко доказыватся по индукции. □

В соответствии с леммой 7 мы можем добиться сколь угодно больших индексов в равенстве (4), что позволяет применить так называемую теорему Цекендорфа: любое натуральное число r может быть однозначно представлено в виде суммы одного или нескольких различных чисел Фибоначчи с индексами не меньше 2 таким образом, что сумма не включает никакие два последовательных числа Фибоначчи. Такое представление называтеся *представлением Цекендорфа числа* r. Число слагаемых в представлении Цекендорфа называется его *длиной* и обозначается $\ell(r)$. Далее мы докажем несколько свойств длины представления Цекендорфа, которые понадобятся при доказательстве лемм 4, 5 и 6.

Лемма 8. *Пусть $F(x_1), F(x_2)$ – числа Фибоначчи, где $x_1, x_2\in\mathbb{N}$, $3<x_1\le x_2$, и $C=F(x_1)+F(x_2)$. Тогда верны следующие утверждения:*

1. *$\ell\big(C\big)=1$ тогда и только тогда, когда $x_2=x_1+1$;*
2. *$\ell\big(C\big)=2$ тогда и только тогда, когда либо $x_2-x_1\ge 2$, либо $x_2=x_1$;*
3. *$\ell(C)\le 2$.*

Доказательство. Если $F(x_1)+F(x_2)$ является представлением Цекендорфа, то $\ell(C)=2$ и $x_2-x_1\ge 2$. Иначе по теореме Цекендорфа либо индексы x_1 и x_2 совпадают (в этом случае $2\cdot F(x_1)=F(x_1-2)+F(x_1+1)$ и $\ell(C)=2$), либо являются последовательными (в этом случае $C=F(x_1+2)$ и $\ell(C)=1$). □

Лемма 9. *Пусть $F(x_1), F(x_2), F(x_3)$ – числа Фибоначчи, где $x_1, x_2, x_3\in\mathbb{N}$, $4<x_1\le x_2\le x_3$, и $C=F(x_1)+F(x_2)+F(x_3)$. Тогда верны следующие утверждения:*

1. *$\ell\big(C\big)=1$ тогда и только тогда, когда пара (x_2,x_3) принадлежит множеству $\{(x_1+1,x_1+1),(x_1+1,x_1+3)\}$.*

2. *$\ell\big(C\big) = 2$ тогда и только тогда, когда либо пара (x_2, x_3) принадлежит множеству $\{(x_1, x_1), (x_1, x_1{+}2), (x_1{+}3, x_1{+}3)\}$, либо $x_3 = x_2{+}1$, либо $x_3 \geq x_1 + 4$ и $x_2 = x_1 + 1$.*

Доказательство. Поскольку нас интересуют только случай $\ell(C) \leq 2$, можем считать, что выражение $F(x_1) + F(x_2) + F(x_3)$ не является представлением Цекендорфа числа C. Тогда имеются две возможности.

Если среди индексов x_1, x_2, x_3 есть два последовательных (обозначим их α и $\alpha + 1$, третий индекс обозначим β), то $C = F(\alpha + 2) + F(\beta)$. В силу леммы 8, $\ell\big(C\big) = 1$ тогда и только тогда, когда $\beta = \alpha + 1$ или $\beta = \alpha + 3$. Это равносильно тому, что пара (x_2, x_3) принадлежит множеству $\{(x_1{+}1, x_1{+}1), (x_1{+}1, x_1{+}3)\}$. В остальных случаях, когда либо $\beta < \alpha{+}1$, либо $\beta = \alpha + 2$, либо $\beta > \alpha + 3$, выполняется равенство $\ell\big(C\big) = 2$. Это равносильно тому, что либо $x_2 = x_1 + 1$ и $x_3 = x_1 + 2$, либо $x_3 = x_2 + 1$, либо $x_3 \geq x_1 + 4$ и $x_2 = x_1 + 1$.

Если же среди индексов x_1, x_2, x_3 нет последовательных, то найдутся как минимум два совпадающих индекса. Обозначим два совпадающих индекса через α, третий индекс обозначим через β, при этом, в силу предположения, $\beta \neq \alpha \pm 1$. Тогда имеем $C = F(\alpha - 2) + F(\alpha + 1) + F(\beta)$. Поскольку это выражение также не является представлением Цекендорфа числа C, то $\beta \in \{a-3, a-2, a, a+2\}$. Заметим, что случай $\beta = \alpha - 2$ нас не интересует, так как тогда $\ell\big(C\big) = 3$. В остальных случаях $\ell\big(C\big) = 2$, то есть пара (x_2, x_3) принадлежит множеству $\{(x_1, x_1), (x_1, x_1 + 2), (x_1 + 3, x_1 + 3)\}$. □

Лемма 10. *Пусть $F(x_1), F(x_2), F(x_3), F(x_4)$ – числа Фибоначчи, где $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}, 4 < x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$, и $C = F(x_1){+}F(x_2){+}F(x_3){+}F(x_4)$. Тогда $\ell(C) = 1$ тогда и только тогда, когда тройка чисел (x_2, x_3, x_4) принадлежит множеству $\{(x_1 + 1, x_1 + 1, x_1 + 2), (x_1 + 1, x_1 + 1, x_1 + 4), (x_1 + 1, x_1 + 3, x_1 + 3), (x_1 + 1, x_1 + 3, x_1 + 5)\}$.*

Доказательство. Поскольку нас интересуют только случай $\ell(C) = 1$, можем считать, что выражение $F(x_1) + F(x_2) + F(x_3) + F(x_4)$ не является представлением Цекендорфа числа C. Тогда имеются две возможности.

Если среди индексов x_1, x_2, x_3, x_4 есть два последовательных, то есть найдется такое i, $1 \leq i \leq 3$, что $x_{i+1} = x_i + 1$, то заменим слагаемые $F(x_i)$ и $F(x_{i+1})$ в разложении числа C на $F(x_i + 2)$ и переобозначим индексы через $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \beta_3$. Тогда $C = F(\beta_1) + F(\beta_2) + F(\beta_3)$. Поскольку $\ell(C) = 1$, в силу леммы 9 пара (β_2, β_3) принадлежит множеству $\{(\beta_1 + 1, \beta_1 + 1), (\beta_1 + 1, \beta_1 + 3)\}$. Возращаясь к исходной четверке индексов получаем, что тройка индексов (x_2, x_3, x_4) принадлежит множеству $\{(x_1 + 1, x_1 + 1, x_1 + 2), (x_1 + 1, x_1 + 1, x_1 + 4), (x_1 + 1, x_1 + 3, x_1 + 3), (x_1 + 1, x_1 + 3, x_1 + 5)\}$.

Если же среди индексов x_1, x_2, x_3, x_4 нет последовательных, то найдутся как минимум два совпадающих индекса (обозначим их α, оставшиеся два индекса обозначим β и γ). Поскольку $\ell(C) = 1$ имеем

$$C = F(p) = F(\alpha - 2) + F(\alpha + 1) + F(\beta) + F(\gamma), \tag{7}$$

для некоторого $p \geq \alpha + 2$.

Равенство $p = \alpha + 2$ в действительности невозможно, так как тогда формула (7) переписывается ввиде

$$F(\alpha - 1) = F(\beta) + F(\gamma),$$

что в силу леммы 8 противоречит отсутствию последовательных чисел среди индексов x_1, x_2, x_3, x_4.

Рассмотрим разложение $F(p)$ в сумму следующего вида:

$$F(p) = F(p-1) + F(p-3) + \ldots + F(p-2r-1) + F(p-2r-2), \qquad (8)$$

причем параметр разложения r положим равным $\left\lfloor \frac{p-\alpha-3}{2} \right\rfloor$.

Здесь r подобрано так, что либо $p - 2r - 1 = \alpha + 2$, либо $p - 2r - 2 = \alpha + 2$. Заметим, что все слагаемые кроме $\alpha + 2$ в правой части равенства (8) образуют представление Цекендорфа длины $r+1$ некоторого натурального числа, которое обозначим через S. Таким образом, для любого $p \geq \alpha + 3$ имеем

$$F(p) = F(\alpha + 2) + S.$$

Приравнивая правые части равенств (7), (8) получаем

$$F(\beta) + F(\gamma) = F(\alpha - 1) + S.$$

Так как индексы β и γ не являются последовательными, то лемма 8 влечет $\ell\big(F(\beta) + F(\gamma)\big) = 2$. Поскольку минимальное слагаемое в разложении Цекендорфа числа S есть либо $F(\alpha+1)$, либо $F(\alpha+3)$, то $\ell(F(\alpha-1)+S) = r+2$, откуда следует $r = 0$. Так как $\beta \neq \gamma$ по лемме 8, то один из индексов β, γ равен $a-1$. Это приводит к потиворечию, так как среди индексов x_1, x_2, x_3, x_4 найдутся последовательные. $\square$

Замечание. Ограничения на x_1 снизу в леммах 8, 9 и 10 продиктовано исключительно теоремой Цекендорфа, которая выполняется только когда индексы чисел Фибоначчи больше единицы.

Доказательство леммы 4. По лемме 7 для любого $s \in \mathbb{Z}$ верно равенство

$$F(a+s) = F(b_1+s) + F(b_2+s) + \cdots + F(b_m+s). \qquad (9)$$

Выберем число $s \in \mathbb{N}$ так, чтобы $a+s > 4$ и $b_i+s > 3$ для всех $i \in \{1, \ldots, m\}$. В силу такого выбора числа s все числа Фибоначчи из равенства (9) строго положительны, что влечет спраедливость пункта 1 настоящей леммы. Далее, пункт 2 данной леммы следует из пункта 1 леммы 8. Справедливость пункта 3 сразу следует из пункта 1 леммы 9 и леммы 10. $\square$

Доказательство леммы 5. Если какие-то два показателя степеней чисел ε из левой и правой частей равенства соответственно равны между собой, то $a_1 = b_1$ и $a_2 = b_2$.

Предположим, что равных показателей степеней чисел ε в разных частях равенства нет. По лемме 7 для любого $s \in \mathbb{Z}$ верно равенство

$$F(a_1 + s) + F(a_2) = F(b_1 + s) + F(b_2 + s). \tag{10}$$

Выберем число $s \in \mathbb{N}$ так, чтобы индексы $a_1 + s, a_2 + s, b_1 + s, b_2 + s$ были больше 4. Обозначим через C_s число $F(a_1 + s) + F(a_2 + s)$.

Для начала заметим, что обе части равенства (10) представлениями Цекендорфа являться не могут, так как по теореме Цекендорфа индексы были бы равны, что противоречит предположению.

Если обе части равенства (10) не являются представлениями Цекендорфа, то по пунктам 1-2 леммы 8 в обоих частях равенства так же стоят одинаковые слагаемые.

Если же одна из частей равенства (10) является представлением Цекендорфа, а другая не является, то в соответствии с леммой 8 получаем, что $\ell(C_s) = 2$ и наше равенство имеет вид $F(x)+F(x) = F(x-2)+F(x+1)$ для некоторого x, что соответствует решению $a_2 = a_1 + 3, b_1 = b_2 = a_1 + 2$. □

Доказательство леммы 6. По лемме 7 для любого $s \in \mathbb{Z}$ верно равенство

$$F(a_1 + s) + F(a_2 + s) = F(b_1 + s) + F(b_2 + s) + F(b_3 + s). \tag{11}$$

Выберем число $s \in \mathbb{N}$ так, чтобы индексы $a_1 + s, a_2 + s, b_1 + s, b_2 + s, b_3 + s$ были больше 4. Обозначим через C_s число $F(a_1 + s) + F(a_2 + s)$. По пункту 3 леммы 8 имеем, что $\ell(C_s) \leq 2$. Для каждого из значений $\ell(C_s)$ обе части равенства (11) будут выражаться в терминах представления Цекендорфа числа C_s по леммам 8 и 9. Несложным перебором всех возможных сочетаний получим требуемое. □

Замечание. Произвольный выбор числа s в леммах 4, 5 и 6 на самом деле не влияет на полученные результаты, так как они формулируются в терминах относительного расположения показателей степеней ε на числовой прямой, что не зависит от общего сдвига индексов.

Стоит отметить, что хотя доказательство лемм 4, 5 и 6 идет лишь в одну сторону, то есть из равенства выводятся некоторые соотношения, верно и обратное утверждение, то есть найденные соотношения достаточны для выполнения равенства. Обратная проверка не приводится, так как не является необходимой для доказательства дальнейших утверждений.

Итого, мы сформулировали ряд свойств равенств вида 3 для малых n и m. Применим их для доказательства теоремы 2.

5 Доказательство теоремы 2

Для доказательства нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма 11. *Пусть P – связный специальный полиэдр, а Q – его собственный простой подполиэдр. Тогда $\chi(Q) \geq 1 - \mathtt{V}(P)$.*

Доказательство. Напомним, что специальный полиэдр P имеет естественное клеточное разбиение: 2-клетки – это 2-компоненты; 1-клетки – это тройные линии; 0-клетки – это истинные вершины. Клеточное разбиение полиэдра P индуцирует клеточное разбиение его простого подполиэдра Q. Обозначим через c_i множество i-мерных клеток полиэдра Q. Тогда $\chi(Q) = c_0 - c_1 + c_2$. Так как $c_1 \leq 2c_0$, $c_0 \leq \mathtt{V}(P)$ и $c_2 \geq 1$, то $\chi(Q) \geq 1 - \mathtt{V}(P)$. $\square$

Лемма 12. *Пусть W – специальный полиэдр ровно с двумя 2-компонентами и U – его собственный простой подполиэдр. Если $\mathtt{V}(W) > 2$ и $\mathtt{V}(U) \geq \mathtt{V}(W) - 2$, то $\chi(U) = \chi(W) - 1$.*

Доказательство. Для доказательства нам понадобятся два тривиальных следствия из определения простого подполиэдра:

(a) Пусть σ некоторая 2-компонента специального полиэдра, а v – его истинная вершина. Если по одному из ребер, инцидентных вершине v, граничная кривая $\partial\sigma$ проходит ровно три раза, то по каждому ребру, инцидентному вершине v, граничная кривая $\partial\sigma$ проходит хотя бы раз;

(b) Пусть σ некоторая 2-компонента специального полиэдра, а v – его истинная вершина. Если найдется петля, инцидентная вершине v, по которой граничная кривая $\partial\sigma$ проходит ровно три раза, то по каждому ребру, инцидентному вершине v, граничная кривая $\partial\sigma$ проходит хотя бы дважды.

Как уже упоминалось, простой подполиэдр специального полиэдра однозначно задается набором его 2-компонент. Обозначим через α 2-компоненту полиэдра W, принадлежащую подполиэдру U, вторую же 2-компоненту обозначим через β, $\beta \not\subset U$.

Достаточно доказать, что граничная кривая $\partial\alpha$ проходит по каждому ребру особого графа SW. Действительно, в таком случае подполиэдр U как клеточный комплекс получается из полиэдра W удалением ровно одной 2-клетки, а значит $\chi(U) = \chi(W) - 1$, что и требовалось.

Рассуждая от противного, предположим, что найдется некоторое ребро e_0 по которому не проходит граничная кривая $\partial\alpha$. Сначала докажем, что граничная кривая $\partial\beta$ проходит ровно по двум истинным вершинам. Согласно условию леммы в полиэдре W существует хотя бы одна вершина по которой не проходит граничная кривая $\partial\beta$. Тогда в силу связности полиэдра W найдутся такие соединенные ребром вершины v_0 и v_1, что $v_0 \notin \partial\beta$, а $v_1 \in \partial\beta$. Обозначим ребро v_0v_1 через e_1. Заметим, что ребро e_0 не может быть инцидентно вершине v_1, так как это противоречило бы (a), а значит граничная кривая $\partial\beta$ проходит хотя бы по двум истинным вершинам полиэдра W. С другой стороны по условию леммы граничная кривая $\partial\beta$ проходит не более, чем по двум истинным вершинам полиэдра W. Значит граничная кривая $\partial\beta$ проходит ровно по двум истинным вершинам, что и требовалось.

Ребро e_0 при этом является петлей, инцидентной второй вершине, которую обозначим через v_2. Кроме того, в таком случае должно существовать ребро v_1v_2, обозначим его через e_2. Тогда с одной стороны, применяя (a) к ребру e_1, инцидентному вершине v_1, имеем, что граничная кривая $\partial\alpha$ проходит по ребру e_2 хотя бы раз. С другой стороны, применяя (b) к ребру e_0, инцидентному ребру v_2, имеем, что граничная кривая $\partial\beta$ проходит по ребру e_2 хотя бы дважды. Значит граничная кривая $\partial\alpha$ прохоидит по ребру e_2 ровно один раз, что противоречит простоте подполиэдра U. $\square$

В целях упрощения изложения доказательство теоремы 2 разделено в зависимости от значения k.

5.1 Случай $k = 1$

В соответствии с формулой (2) и леммой 3 равенство (1) принимает одну из следующих форм:

i. $(-1)^{\mathtt{V}(R)}\varepsilon^{\chi(R)-\mathtt{V}(R)} = (-1)^N \cdot \varepsilon^{4-2N}$,

ii. $(-1)^{\mathtt{V}(R)}\varepsilon^{\chi(R)-\mathtt{V}(R)} = (-1)^{N-1} \cdot \varepsilon^{5-2N}$,

iii. $(-1)^N \cdot \varepsilon^{5-2N} + (-1)^{\mathtt{V}(R)}\varepsilon^{\chi(R)-\mathtt{V}(R)} = (-1)^{\mathtt{V}(Q)}\varepsilon^{\chi(Q)-\mathtt{V}(Q)}$.

Рассмотрим случай, когда равенство (1) принимает формы i и ii. Выражение $\chi(R) - \mathtt{V}(R)$ в этих случаях принимает значения $4 - 2N$ и $5 - 2N$ соответственно. Утверждение теоремы тогда следует из леммы 11: действительно, неравенство $\chi(R)-\mathtt{V}(R) \leq 5-2N$ влечет в силу леммы 11 утверждение теоремы: $V(R) \geq N - 4 = N - \xi_1$. Таким образом далее можно считать, что

$$\chi(R) - \mathtt{V}(R) > 5 - 2N. \tag{12}$$

Перейдем к рассмотрению случая, когда равенство (1) принимает форму iii. В соответствии с леммой 3 тогда $\mathtt{V}(P) = N - 1$. Равенство iii идентично равенству из условия леммы 4 со значением параметра $m = 2$. В силу утверждений 1 и 2 леммы 4, показатели степеней $5-2N$, $\chi(R)-\mathtt{V}(R)$ и $\chi(Q)-\mathtt{V}(Q)$ есть последовательные числа. Дальнейшее рассуждение разбивается на случаи в зависимости от расположения этих показателей в порядке убывания. С учетом неравенства (12) возможны следующие три случая.

1. Наибольшим является выражение $\chi(R) - \mathtt{V}(R)$, равное $7 - 2N$. Тогда

$$\chi(Q) - \mathtt{V}(Q) = 6 - 2N \quad \text{и} \quad \mathtt{V}(Q) \equiv N - 1 \pmod 2. \tag{13}$$

Применяя лемму 11 для простого подполиэдра Q полиэдра P получаем оценку $\mathtt{V}(Q) \geq N - 4$. С другой стороны, так как подполиэдр Q собственный, то $\mathtt{V}(Q) < \mathtt{V}(P) = N - 1$. Тогда, в силу (13), $\mathtt{V}(Q) = N - 3$ и $\chi(Q) = 3 - N = \chi(P)$, что противоречит лемме 12, поскольку из условия теоремы $\mathtt{V}(P) > 2$.

2. Наибольшим является выражение $\chi(R) - \mathtt{V}(R)$, равное $6 - 2N$. Тогда

$$\chi(Q) - \mathtt{V}(Q) = 4 - 2N \quad \text{и} \quad \mathtt{V}(Q) \equiv N - 1 \pmod 2. \tag{14}$$

Снова применяя лемму 11 получаем неравенство $\mathtt{V}(Q) \geq N-2$, что противоречит (14), поскольку $\mathtt{V}(Q) < N-1$.

3. Наибольшим является выражение $\chi(Q) - \mathtt{V}(Q)$, равное $7-2N$. Тогда

$$\chi(R) - \mathtt{V}(R) = 6 - 2N \quad \text{и} \quad \mathtt{V}(R) \equiv N \pmod 2. \tag{15}$$

Применяя лемму 11 для подполиэдра R полиэдра P_3 получаем оценку $\mathtt{V}(R) \geq N-5$, что с учетом (15) влечет $\mathtt{V}(R) \geq N-4$. Случай $k=1$ доказан.

5.2 Случай $k = 2$

В соответствии с формулой (2) и леммой 3 равенство (1) принимает одну из следующих форм:

i. $(-1)^{\mathtt{V}(R_1)}\varepsilon^{\chi(R_1)-\mathtt{V}(R_1)} + (-1)^{\mathtt{V}(R_2)}\varepsilon^{\chi(R_2)-\mathtt{V}(R_2)} = (-1)^N \cdot \varepsilon^{4-2N}$,

ii. $(-1)^{\mathtt{V}(R_1)}\varepsilon^{\chi(R_1)-\mathtt{V}(R_1)} + (-1)^{\mathtt{V}(R_2)}\varepsilon^{\chi(R_2)-\mathtt{V}(R_2)} = (-1)^{N-1} \cdot \varepsilon^{5-2N}$,

iii. $(-1)^N \cdot \varepsilon^{5-2N} + (-1)^{\mathtt{V}(R_1)}\varepsilon^{\chi(R_1)-\mathtt{V}(R_1)} + (-1)^{\mathtt{V}(R_2)}\varepsilon^{\chi(R_2)-\mathtt{V}(R_2)} = (-1)^{\mathtt{V}(Q)}\varepsilon^{\chi(Q)-\mathtt{V}(Q)}$.

Рассмотрим случай, когда равенство (1) принимает формы i и ii. Несложно заметить, что равенства i и ii идентичны равенству из условия леммы 4 со значением параметра $m=2$. В силу утверждения 2 леммы 4, для каждого $i \in \{1,2\}$ справедливо неравенство $\chi(R_i) - \mathtt{V}(R_i) \leq 7-2N$. Утверждение теоремы тогда следует из леммы 11: действительно, справедливость более слабого неравенства $\chi(R_j) - \mathtt{V}(R_j) \leq 8-2N$ хотя бы для одного $j \in \{1,2\}$ влечет в силу леммы 11 утверждение теоремы: $\mathtt{V}(R_j) \geq N-7 = N-\xi_2$. Таким образом далее можно считать, что

$$\chi(R_i) - \mathtt{V}(R_i) > 8-2N \text{ для каждого } i \in \{1,2\}. \tag{16}$$

Перейдем к рассмотрению случая, когда равенство (1) принимает форму iii. В соответствии с леммой 3 тогда $\mathtt{V}(P) = N-1$. Перенося слагаемые мы можем привести равенство iii к виду (3) с парой параметров (n,m) либо равной $(1,3)$, либо равной $(2,2)$. Рассмотрим эти два случая по отдельности.

В первом случае равенство iii идентично равенству из условия леммы 4 со значением параметра $m=3$. Поскольку один из показателей степеней равенства 3 есть $5-2N$, из утверждения 3 леммы 4 следует, что все показатели степеней равенства 3 не привосходят $9-2N$. Тогда $\chi(R_1) - \mathtt{V}(R_1) = \chi(R_2) - \mathtt{V}(R_2) = 9-2N$ в силу (16), что противоречит утверждению 1 леммы 4.

Во втором случае равенство iii идентично равенству из условия леммы 5. Поскольку один из показателей степеней равенства 3 есть $5-2N$, неравенство (16) противоречит утверждению 2 леммы 5. Следовательно справедливо утверждение 1 леммы 5, что влечет

$$\chi(Q) - \mathtt{V}(Q) = 5-2N \text{ и } \mathtt{V}(Q) \equiv N \pmod 2. \tag{17}$$

Применяя лемму 11 для подполиэдра Q полиэдра P получаем $\mathtt{V}(Q) \geq N-3$. С другой стороны, так как подполиэдр Q собственный, то $\mathtt{V}(Q) < \mathtt{V}(P) = N-1$. Тогда, в силу (17), $\mathtt{V}(Q) = N-2$, и $\chi(Q) = 3-N = \chi(P)$, что противоречит лемме 12, поскольку из условия теоремы $\mathtt{V}(P) > 2$. Случай $k=2$ доказан.

5.3 Случай $k = 3$

В соответствии с формулой (2) и леммой 3 равенство (1) может принимать следующие три формы:

i. $(-1)^{\mathtt{V}(R_1)}\varepsilon^{\chi(R_1)-\mathtt{V}(R_1)} + (-1)^{\mathtt{V}(R_2)}\varepsilon^{\chi(R_2)-\mathtt{V}(R_2)} + (-1)^{\mathtt{V}(R_3)}\varepsilon^{\chi(R_3)-\mathtt{V}(R_3)} = (-1)^N \cdot \varepsilon^{4-2N}$,

ii. $(-1)^{\mathtt{V}(R_1)}\varepsilon^{\chi(R_1)-\mathtt{V}(R_1)} + (-1)^{\mathtt{V}(R_2)}\varepsilon^{\chi(R_2)-\mathtt{V}(R_2)} + (-1)^{\mathtt{V}(R_3)}\varepsilon^{\chi(R_3)-\mathtt{V}(R_3)} = (-1)^{N-1} \cdot \varepsilon^{5-2N}$,

iii. $(-1)^N \cdot \varepsilon^{5-2N} + (-1)^{\mathtt{V}(R_1)}\varepsilon^{\chi(R_1)-\mathtt{V}(R_1)} + (-1)^{\mathtt{V}(R_2)}\varepsilon^{\chi(R_2)-\mathtt{V}(R_2)} + (-1)^{\mathtt{V}(R_3)}\varepsilon^{\chi(R_3)-\mathtt{V}(R_3)} = (-1)^{\mathtt{V}(Q)}\varepsilon^{\chi(Q)-\mathtt{V}(Q)}$.

Рассмотрим случай, когда равенство (1) принимает формы i и ii. Перенося слагаемые мы можем привести их к виду (3) с парой параметров (n,m) либо (I) равной $(1,3)$, либо (II) равной $(2,2)$. В случае (I) равенства 1 и 2 идентичны равенству из условия леммы 4 со значением параметра $m=3$. Тогда в силу утверждения 3 леммы 4 для каждого $i \in \{1,2,3\}$ справедливо неравенство $\chi(R_i)-\mathtt{V}(R_i) \leq 9-2N$. В случае (II) равенства i и ii идентичны равенству из условия леммы 5. Поэтому хотя бы для одного полиэдра R_j, $j \in \{1,2,3\}$, справедливо неравенство $\chi(R_j)-\mathtt{V}(R_j) \leq 7-2N$. Утверждение теоремы тогда следует из леммы 11: действительно, справедливость более слабого неравенства $\chi(R_j)-\mathtt{V}(R_j) \leq 10-2N$ хотя бы для одного $j \in \{1,2,3\}$ влечет в силу леммы 11 утверждение теоремы: $\mathtt{V}(R_j) \geq N-9 = N-\xi_3$. Таким образом далее можно считать, что

$$\chi(R_i) - \mathtt{V}(R_i) > 10 - 2N \text{ для каждого } i \in \{1,2,3\}. \tag{18}$$

Перейдем к рассмотрению случая, когда равенство (1) принимает форму iii. В соответствии с леммой 3 тогда $\mathtt{V}(P) = N-1$. Перенося слагаемые и сокращая равные слагаемые в разных частях равенства мы можем привести равенство iii к виду (3) с парой параметров (n,m) либо (a) равной $(1,4)$, либо (b) равной $(2,3)$, либо (c) равной $(1,2)$. Рассмотрим эти три случая по отдельности.

В случае (a) равенство iii идентично равенству из условия леммы 4 со значением параметра $m=4$. Поскольку один из показателей степеней равенства iii есть $5-2N$, из утверждения 3 леммы 4 следует, что все показатели степеней равенства iii не привосходят $11-2N$. Тогда $\chi(R_1)-\mathtt{V}(R_1) = \chi(R_2)-\mathtt{V}(R_2) = \chi(R_3)-\mathtt{V}(R_3) = 11-2N$ в силу (18), что противоречит утверждению 1 леммы 4.

В случае (b) равенство iii идентично равенству из условия леммы 6, однако заключение данной леммы влечет неравенство $\chi(R_i) - \mathtt{V}(R_i) \le 10 - 2N$ для всех $i \in \{1,2,3\}$, что противоречит предположению (18).

Случай (c) разбивается на два подслучая в зависимости от того, было ли среди сокращенных в равенстве iii слагаемое ε^{5-2N}. Если такого слагаемого не было, то, сократив равные, получим равенство суммы двух слагаемых одному. По принципу Дирихле среди этих слагаемых есть хотя бы одно слагаемое $\varepsilon^{\chi(R_j)-\mathtt{V}(R_j)}$ для некоторого $j \in \{1,2,3\}$ и упомянутое выше слагаемое ε^{5-2N}. Тогда по пункту 2 леммы 4 выполняется оценка $\chi(R_j) - \mathtt{V}(R_j) \le 7 - 2N$, что противоречит предположению (18). Если же среди сокращенных было слагаемое ε^{5-2N}, то в силу нашего предположения

$$\chi(Q) - \mathtt{V}(Q) = 5 - 2N \text{ и } \mathtt{V}(Q) \equiv N \pmod 2. \qquad (19)$$

По лемме 11 для подполиэдра Q полиэдра P тогда $\mathtt{V}(Q) \ge N - 3$. С другой стороны, так как подполиэдр Q – собственный, то $\mathtt{V}(Q) < \mathtt{V}(P) = N - 1$. Тогда, в силу (19), $\mathtt{V}(Q) = N - 2$, и $\chi(Q) = 3 - N = \chi(P)$, что противоречит лемме 12, поскольку из условия теоремы $\mathtt{V}(P) > 2$.

Итого мы рассмотрели все три возможных значения k. Таким образом теорема 2 доказана.

Список литературы

[1] Frigerio R., Martelli B., Petronio C., Complexity and Heegaard genus of an infinite class of compact 3-manifolds, Pacific J. Math. **210**:2 (2003), 283–297.

[2] А. Ю. Веснин, В. Г. Тураев, Е. А. Фоминых, *Сложность виртуальных трехмерных многообразий*, Матем. сб. **207**:11 (2016), 4–24.

[3] L. Paoluzzi, B. Zimmermann, *On a class of hyperbolic 3-manifolds and groups with one defining relation*, Geom. Dedicata **60**:2 (1996), 113–123.

[4] А. Ю. Веснин, В. Г. Тураев, Е. А. Фоминых, *Трехмерные многообразия с бедными спайнами*, Тр. МИАН **288** (2015), 38–48.

[5] Е.А. Фоминых, Е.В. Шумакова, *Бедные идеальные триангуляции ровно с тремя ребрами минимальны*, Сиб. матем. журн., **62**:5 (2021), 1163–1172.

[6] А.Ю. Веснин, Е.А. Фоминых, *О сложности трехмерных гиперболических многообразий с геодезическим краем*, Сиб. матем. журн. **53**:4 (2012), 781–793.

[7] А.В. Малютин, Е.А. Фоминых, Е.В. Шумакова, *3-многообразия, задаваемые 4-регулярными графами с тремя эйлеровыми циклами*, УМН, **76**:6 (2021), 197–198.

[8] С.В. Матвеев, М.А. Овчинников, М.В. Соколов, *Построение и свойства t-инварианта*, Записки научных семинаров Санкт-Петербургского отделения математического института им. В.А. Стеклова РАН, 267, Геометрия и топология 5 (2000), 207–219.

[9] V.G. Turaev, O.Y. Viro, *State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols*, Topology **31**:4 (1992), 865–902.

[10] S. Matveev, *Algorithmic topology and classification of 3-manifolds*, Algorithms and Computation in Mathematics, 9. Springer-Verlag, Berlin, 2003. xii+478 pp.