ПОМИ ПРЕПРИНТ — 7/2023

К юбилею Нины Николаевны Уральцевой

УСРЕДНЕНИЕ НЕЛОКАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ СВЁРТОЧНОГО ТИПА: АППРОКСИМАЦИЯ РЕЗОЛЬВЕНТЫ С КОРРЕКТОРОМ

Е. А. Жижина[1,2], А. Л. Пятницкий[1,2,3], В. А. Слоущ[4], Т. А. Суслина[4]

[1]Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН,
пер. Большой Каретный, д. 19, строение 1,
Москва, 127051, Россия

[2] Арктический университет Норвегии, кампус Нарвик,
Лодве Лангес гате 2,
Нарвик 8517, Норвегия

[3] Российский университет дружбы народов,
ул. Миклухо-Маклая, д. 6,
Москва, 117198, Россия

[4]Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., д. 7/9,
Санкт-Петербург, 199034, Россия

e-mail: elena.jijina@gmail.com
e-mail: apiatnitski@gmail.com
e-mail: v.slouzh@spbu.ru
e-mail: t.suslina@spbu.ru

АННОТАЦИЯ

В $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассматривается самосопряженный ограниченный оператор $\mathbb{A}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, вида

$$(\mathbb{A}_\varepsilon u)(\mathbf{x}) = \varepsilon^{-d-2} \int_{\mathbb{R}^d} a((\mathbf{x}-\mathbf{y})/\varepsilon)\mu(\mathbf{x}/\varepsilon, \mathbf{y}/\varepsilon)\,(u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y}))\; d\mathbf{y}.$$

Предполагается, что $a(\mathbf{x})$ — неотрицательная функция класса $L_1(\mathbb{R}^d)$, такая что $a(-\mathbf{x}) = a(\mathbf{x})$, а $\mu(\mathbf{x},\mathbf{y})$ — функция, $\mathbb{Z}^d$-периодическая по каждой переменной, причем $\mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mu(\mathbf{y},\mathbf{x})$ и $0 < \mu_- \leqslant \mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leqslant \mu_+ < \infty$. Кроме того, предполагается, что конечны моменты $M_k = \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^k a(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$, $k = 1, 2, 3, 4$. Получена аппроксимация резольвенты $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ при малом ε по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$ с оценкой погрешности порядка $O(\varepsilon^2)$.

Ключевые слова: нелокальные операторы свёрточного типа, периодическое усреднение, операторные оценки погрешности, эффективный оператор, корректор.

Исследование Е. А. Жижиной и А. Л. Пятницкого выполнено при частичной поддержке проекта “Pure Mathematics in Norway” и фонда UiT Aurora проект MASCOT. Исследование А. Л. Пятницкого поддержано мегагрантом Министерства науки и высшего образования РФ, проект 075-15-2022-1115.
Исследование В. А. Слоуща и Т. А. Суслиной выполнено при поддержке РНФ, проект 22-11-00092.

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
РАН

Введение

Работа относится к теории усреднения периодических операторов. Это обширная область теоретической и прикладной науки; мы укажем здесь лишь несколько основных монографий: [1, 2, 8].

Мы получаем операторные оценки в задаче усреднения периодического нелокального оператора свёрточного типа. Статья является продолжением исследования, начатого в [14]; по поводу мотивации см. введение к этой статье. Метод является модификацией теоретико-операторного подхода.

0.1. **Операторные оценки в теории усреднения. Теоретико-операторный подход.** В работах Бирмана и Суслиной [3, 4, 5] был предложен и развит теоретико-операторный подход к задачам усреднения периодических дифференциальных операторов в $\mathbb{R}^d$ (вариант спектрального метода). С помощью этого подхода были найдены так называемые *операторные оценки погрешности* для широкого класса задач гомогенизации. Поясним характер результатов на примере усреднения эллиптического оператора $A_\varepsilon = -\operatorname{div} g(\mathbf{x}/\varepsilon)\nabla$, $\varepsilon > 0$, в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Здесь матрица коэффициентов $g(\mathbf{x})$ предполагается ограниченной, положительно определенной и $\mathbb{Z}^d$-периодической. В [3] было показано, что при $\varepsilon \to 0$ резольвента $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ сходится по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$ к резольвенте оператора A^0 и выполнена оценка

$$\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.1}$$

Здесь $A^0 = -\operatorname{div} g_{\mathrm{hom}}\nabla$ — так называемый *эффективный оператор* с постоянной положительной *эффективной матрицей* g_{hom}. Неравенства такого типа получили название операторных оценок погрешности в теории усреднения. В [4] получена более точная аппроксимация резольвенты $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$ при учете корректора с оценкой погрешности порядка $O(\varepsilon^2)$, а в [5] найдена аппроксимация резольвенты $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d)$ в пространство Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$ (также при учете корректора) с оценкой погрешности порядка $O(\varepsilon)$.

Теоретико-операторный подход основан на масштабном преобразовании, теории Флоке–Блоха и аналитической теории возмущений. Поясним метод на примере вывода оценки (0.1). За счет масштабного преобразования оценка (0.1) равносильна неравенству

$$\|(A + \varepsilon^2 I)^{-1} - (A^0 + \varepsilon^2 I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon^{-1}, \tag{0.2}$$

где $A = -\operatorname{div} g(\mathbf{x})\nabla = \mathbf{D}^* g(\mathbf{x})\mathbf{D}$, $\mathbf{D} = -i\nabla$. Далее, с помощью унитарного преобразования Гельфанда оператор A раскладывается в прямой интеграл по операторам $A(\boldsymbol{\xi})$, действующим в $L_2(\Omega)$ и зависящим от параметра $\boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}$ (квазиимпульса). Здесь $\Omega = [0,1)^d$ — ячейка решетки $\mathbb{Z}^d$, а $\widetilde{\Omega} = [-\pi,\pi)^d$ — ячейка двойственной решетки. Оператор $A(\boldsymbol{\xi})$ задается выражением $A = (\mathbf{D} + \boldsymbol{\xi})^* g(\mathbf{x})(\mathbf{D} + \boldsymbol{\xi})$ при периодических граничных условиях. Оценка (0.2) эквивалентна аналогичной оценке для операторов, зависящих от квазиимпульса:

$$\|(A(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 I)^{-1} - (A^0(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 I)^{-1}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C\varepsilon^{-1}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}.$$

Основная часть исследования состоит в изучении операторного семейства $A(\boldsymbol{\xi})$, которое представляет собой аналитическое семейство с компактной резольвентой. Поэтому можно применить методы аналитической теории возмущений. Выясняется, что резольвенту $(A(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 I)^{-1}$ можно приблизить в терминах спектральных характеристик оператора на краю спектра. В частности, эффективная матрица выражается через матрицу Гессе для первого собственного значения $\lambda_1(\boldsymbol{\xi})$ оператора $A(\boldsymbol{\xi})$ в точке $\boldsymbol{\xi} = 0$. Поэтому эффект усреднения представляет собой *спектральный пороговый эффект* на краю спектра эллиптического оператора.

Другой подход к получению операторных оценок погрешности в задачах гомогенизации (так называемый “метод сдвига”) был предложен в работах Жикова и Пастуховой (см. [7, 9], а также обзор [10] и цитированную там литературу).

В последние годы операторные оценки погрешности в различных задачах гомогенизации для дифференциальных операторов привлекают внимание все большего числа исследователей; получено много содержательных результатов. Достаточно подробный обзор современного состояния этой области можно найти в [14, пункт 0.2] и в [16, введение].

Подчеркнем, однако, что до появления работы авторов [14] *операторные оценки для нелокальных операторов не изучались*.

0.2. **Постановка задачи. Основной результат.** В $L_2(\mathbb{R}^d)$ изучается нелокальный оператор $\mathbb{A}_\varepsilon$, заданный соотношением

$$\mathbb{A}_\varepsilon u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon^{d+2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} a\Big(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\varepsilon}\Big)\mu\Big(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \frac{\mathbf{y}}{\varepsilon}\Big)\big(u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})\big)\, d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d). \qquad (0.3)$$

Здесь ε — малый положительный параметр. Предполагается, что $a(\mathbf{x})$ — четная неотрицательная функция класса $L_1(\mathbb{R}^d)$, $\|a\|_{L_1} > 0$; $\mu(\mathbf{x},\mathbf{y})$ — ограниченная и положительно определенная функция, $\mathbb{Z}^d$-периодическая по каждой переменной, причем $\mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mu(\mathbf{y},\mathbf{x})$. При этих условиях оператор $\mathbb{A}_\varepsilon$ ограничен, самосопряжен и неотрицателен. Кроме того, предполагаются конечными несколько первых моментов $M_k(a) = \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^k a(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$.

Оператор вида (0.3) возникает в моделях математической биологии и популяционной динамики и активно изучается в последнее время. Усреднению таких операторов была посвящена работа [12], в которой в предположении, что $M_2(a) < \infty$, было показано, что при $\varepsilon \to 0$ резольвента $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ сильно сходится к резольвенте $(\mathbb{A}^0 + I)^{-1}$ эффективного оператора. Эффективный оператор представляет собой эллиптический дифференциальный оператор второго порядка с постоянными коэффициентами $\mathbb{A}^0 = -\operatorname{div} g^0 \nabla$. Тем самым, в данной задаче наблюдается интересный эффект: при усреднении ограниченного нелокального оператора $\mathbb{A}_\varepsilon$ возникает неограниченный локальный оператор $\mathbb{A}^0$.

Для операторов с несимметричным ядром аналогичные задачи изучались в [13], где для соответствующих параболических уравнений результат об усреднении справедлив в движущихся координатах. Задача в периодически перфорированной области исследовалась вариационными методами в [6].

В работе авторов [14] при условии $M_3(a) < \infty$ была установлена сходимость резольвенты $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ к резольвенте $(\mathbb{A}^0 + I)^{-1}$ эффективного оператора по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$ и была получена точная по порядку оценка погрешности:

$$\|(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(a,\mu)\varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Опишем эффективный оператор. Как обычно в теории усреднения, для описания эффективной матрицы g^0 нужно рассмотреть вспомогательные задачи на ячейке. Как и в пункте 0.1, пусть $\Omega := [0,1)^d$ — ячейка решетки $\mathbb{Z}^d$. Пусть вектор-функция $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (v_1(\mathbf{x}), \dots, v_d(\mathbf{x}))^t$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, является $\mathbb{Z}^d$-периодическим решением задачи

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^d} a(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mu(\mathbf{x},\mathbf{y})(\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{y}))\, d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^d} a(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mu(\mathbf{x},\mathbf{y})(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, d\mathbf{y}, \\ \int_\Omega \mathbf{v}(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} = 0. \end{cases} \qquad (0.4)$$

Отметим, что задача (0.4) имеет единственное $\mathbb{Z}^d$-периодическое решение. Мы показываем, что это решение ограничено (см. §5). Пусть g^0 — $(d \times d)$-матрица с элементами $\frac{1}{2} g_{kl}$, $k,l = 1,\dots,d$, определенными соотношениями

$$g_{kl} = \int_\Omega d\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \Big((x_k - y_k)(x_l - y_l) - v_l(\mathbf{x})(x_k - y_k) - v_k(\mathbf{x})(x_l - y_l) \Big) a(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mu(\mathbf{x},\mathbf{y}), \quad k,l = 1,\dots,d.$$

Матрица g^0 оказывается положительно определенной. Эффективный оператор $\mathbb{A}^0 = -\operatorname{div} g^0 \nabla$ определен на пространстве Соболева $H^2(\mathbb{R}^d)$.

Наша цель — получить более точную аппроксимацию резольвенты $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ при малом ε. Мы накладываем условие $M_4(a) < \infty$. *Основной результат* работы (теорема 4.2) — оценка

$$\|(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon K_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(a,\mu)\varepsilon^2, \quad \varepsilon > 0.$$

Корректор K_ε задан равенством

$$K_\varepsilon = -\sum_{j=1}^{d} [v_j^\varepsilon]\partial_j(\mathbb{A}^0 + I)^{-1} + \sum_{j=1}^{d} (\mathbb{A}^0 + I)^{-1}\partial_j[v_j^\varepsilon],$$

где $[v_j^\varepsilon]$ — оператор умножения на функцию $v_j(\mathbf{x}/\varepsilon)$.

0.3. **Метод.** Как и в работе [14], для исследования задачи об аппроксимации резольвенты оператора (0.3) мы модифицируем теоретико-операторный подход, развитый в работах Бирмана и Суслиной, о котором шла речь в пункте 0.1.

Первые два шага — масштабное преобразование и разложение оператора $\mathbb{A}$ в прямой интеграл по операторам $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})$ с помощью унитарного преобразования Гельфанда — остаются прежними. Здесь $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\varepsilon_0}$, $\varepsilon_0 = 1$. Дело сводится к изучению асимптотики резольвенты $(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 I)^{-1}$ при малом $\varepsilon > 0$. Однако, к семейству операторов $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})$, действующих в пространстве $L_2(\Omega)$ и зависящих от параметра $\boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}$, методы аналитической теории возмущений уже неприменимы. В отличие от случая дифференциальных операторов это операторное семейство не является аналитическим. Взамен мы используем конечную гладкость семейства $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})$, которая обеспечена предположением о конечности нескольких первых моментов коэффициента $a(\mathbf{x})$.

Согласно теоретико-операторному подходу для получения аппроксимации резольвенты $(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 I)^{-1}$ при малом ε достаточно найти асимптотику оператор-функции $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})F(\boldsymbol{\xi})$, $\boldsymbol{\xi} \to 0$; здесь $F(\boldsymbol{\xi})$ — спектральный проектор оператора $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})$, отвечающий некоторой окрестности нуля. Традиционно асимптотика оператора $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})F(\boldsymbol{\xi})$ при $\boldsymbol{\xi} \to 0$ вычислялась через асимптотику первого собственного значения $\lambda_1(\boldsymbol{\xi})$ оператора $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})$. Мы последовательно применяем альтернативный способ вычисления асимптотики оператора $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})F(\boldsymbol{\xi})$ при $\boldsymbol{\xi} \to 0$ — метод интегрирования резольвенты $(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) - \zeta I)^{-1}$ по подходящему контуру в комплексной плоскости. В [14, пункт 4.2] этот подход был намечен как "третий способ".

Как и в случае дифференциальных операторов, выясняется, что главную роль в данной задаче играют спектральные характеристики оператора $\mathbb{A}$ вблизи нижнего края спектра (так называемые пороговые характеристики). Тем самым, эффект усреднения для нелокального оператора $\mathbb{A}_\varepsilon$ также является пороговым эффектом на краю спектра.

0.4. **План статьи.** Статья состоит из введения и пяти параграфов. В §1 вводится оператор $\mathbb{A}$, обсуждаются разложение этого оператора в прямой интеграл по семейству операторов $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})$ и оценки снизу для квадратичной формы оператора $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})$. В §2 исследованы пороговые характеристики операторного семейства $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})$ вблизи нижнего края спектра. В §3 найдена аппроксимация резольвенты $(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 I)^{-1}$ при малом ε, откуда с помощью разложения оператора $\mathbb{A}$ в прямой интеграл получена аппроксимация резольвенты $(\mathbb{A} + \varepsilon^2 I)^{-1}$. В §4 из результатов §3 с помощью масштабного преобразования выводится основной результат работы — аппроксимация резольвенты $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$. В Приложение (§5) вынесен вспомогательный материал: доказательство ограниченности решения задачи (0.4).

0.5. **Обозначения.** Норма в нормированном пространстве X обозначается через $\|\cdot\|_X$ (либо без индекса, если это не ведет к недоразумениям); если пространства X, Y нормированы, то стандартная норма линейного ограниченного оператора $T : X \to Y$ обозначается через $\|T\|_{X\to Y}$ либо $\|T\|$ (без индекса). Линейная оболочка системы векторов $F \subset X$ обозначается через $\mathcal{L}\{F\}$. Пространство ограниченных линейных операторов в нормированном пространстве X обозначается через $\mathcal{B}(X)$.

Пусть $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Если $A : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$ — линейный оператор, то через $\operatorname{Dom} A$ обозначается его область определения, а через $\operatorname{Ker} A$ — его ядро. Если $\mathfrak{N}$ — подпространство в $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{N}^\perp$ — его ортогональное дополнение. Если P — ортопроектор пространства $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}$, то $P^\perp$ — ортопроектор на $\mathfrak{N}^\perp$. Для самосопряженного оператора $\mathbb{A}$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ через $\sigma(\mathbb{A})$ и $\sigma_{\mathrm{e}}(\mathbb{A})$ обозначаются спектр и существенный спектр оператора $\mathbb{A}$; если δ — борелевское множество на оси $\mathbb{R}$, то $E_{\mathbb{A}}(\delta)$ означает спектральный проектор оператора $\mathbb{A}$, отвечающий множеству δ.

Если $\mathcal{O}$ — область в $\mathbb{R}^d$, то через $L_p(\mathcal{O})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, обозначаются стандартные L_p-классы. Стандартное скалярное произведение в пространстве $L_2(\mathcal{O})$ обозначается через $(\cdot,\cdot)_{L_2(\mathcal{O})}$ либо без индекса. Если $f \in L_\infty(\mathcal{O})$, то символ $[f]$ означает оператор умножения на функцию $f(\mathbf{x})$ в пространстве $L_2(\mathcal{O})$. Стандартные классы Соболева порядка $s > 0$ в области $\mathcal{O}$ обозначаются через $H^s(\mathcal{O})$.

Стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$ и $\mathbb{C}^d$ обозначается через $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Далее, используем обозначения $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_d)^t \in \mathbb{R}^d$, $iD_j = \partial_j = \partial/\partial x_j$, $j = 1,\dots,d$; $\mathbf{D} = -i\nabla = (D_1,\dots,D_d)^t$. Через $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ обозначим класс Шварца в $\mathbb{R}^d$. Характеристическая функция множества $E \subset \mathbb{R}^d$ обозначается через $\mathbf{1}_E$.

§ 1. Нелокальный оператор свёрточного типа: разложение в прямой интеграл и оценки

1.1. **Оператор $\mathbb{A}(a,\mu)$.** Пусть $a \in L_1(\mathbb{R}^d)$, $\mu \in L_\infty(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)$. В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ определим *нелокальный оператор свёрточного типа* $\mathbb{A} = \mathbb{A}(a,\mu)$ соотношением

$$\mathbb{A}(a,\mu)u(\mathbf{x}) := \int\limits_{\mathbb{R}^d} a(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mu(\mathbf{x},\mathbf{y})(u(\mathbf{x})-u(\mathbf{y}))\,d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Оператор $\mathbb{A}$ можно записать в виде $\mathbb{A} = p(\mathbf{x};a,\mu) - \mathbb{B}(a,\mu)$, где

$$p(\mathbf{x};a,\mu) := \int\limits_{\mathbb{R}^d} a(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mu(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,$$

$$\mathbb{B}(a,\mu)u(\mathbf{x}) := \int\limits_{\mathbb{R}^d} a(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mu(\mathbf{x},\mathbf{y})u(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Согласно лемме Шура (см., например, [14, лемма 4.1]) оператор $\mathbb{B}(a,\mu) : L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)$ ограничен, и справедлива оценка $\|\mathbb{B}(a,\mu)\| \leqslant \|\mu\|_{L_\infty}\|a\|_{L_1}$. Кроме того, потенциал $p(\mathbf{x};a,\mu)$ удовлетворяет оценке $\|p(\cdot;a,\mu)\|_{L_\infty} \leqslant \|\mu\|_{L_\infty}\|a\|_{L_1}$. Следовательно, оператор $\mathbb{A}(a,\mu) : L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)$ ограничен. Введем обозначения $\mathbb{A}_0(a) := \mathbb{A}(a,\mu_0)$, где $\mu_0 \equiv 1$; $p_0(\mathbf{x};a) := p(\mathbf{x};a,\mu_0)$; $\mathbb{B}_0(a) := \mathbb{B}(a,\mu_0)$. Очевидно, оператор $\mathbb{B}_0(a)$ — это оператор свертки с функцией a, а потенциал $p_0(\mathbf{x};a) = \int_{\mathbb{R}^d} a(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}$ — постоянный.

Далее предполагаются выполненными более жесткие ограничения на функции a и μ:

$$a \in L_1(\mathbb{R}^d), \quad \operatorname{mes}\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : a(\mathbf{x}) \neq 0\} > 0, \quad a(\mathbf{x}) \geqslant 0, \quad a(-\mathbf{x}) = a(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d; \tag{1.1}$$

$$0 < \mu_- \leqslant \mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leqslant \mu_+ < +\infty, \quad \mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mu(\mathbf{y},\mathbf{x}), \quad \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d; \tag{1.2}$$

$$\mu(\mathbf{x}+\mathbf{m},\mathbf{y}+\mathbf{n}) = \mu(\mathbf{x},\mathbf{y}), \quad \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{m},\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d. \tag{1.3}$$

Введем обозначения для моментов функции $a(\mathbf{x})$:

$$M_k(a) := \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^k a(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

С учетом условия $0 < \int_{\mathbb{R}^d} a(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} < \infty$ из конечности момента $M_k(a)$ автоматически вытекает конечность моментов $M_1(a),\dots,M_{k-1}(a)$. Ниже в различных утверждениях мы будем предполагать конечность момента $M_k(a)$ при различных значениях $k \leqslant 4$. В частности, основной результат (теорема 4.2) справедлив при условии $M_4(a) < \infty$.

Очевидно, при условиях (1.1), (1.2) потенциал $p(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}; a, \mu)$ вещественен, а оператор $\mathbb{B}(a,\mu)$ самосопряжен. Следовательно, оператор $\mathbb{A}(a,\mu)$ самосопряжен. Нетрудно видеть, что потенциал $p(\mathbf{x}; a, \mu)$ удовлетворяет оценкам

$$\mu_- \|a\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} \leqslant p(\mathbf{x}) \leqslant \mu_+ \|a\|_{L_1(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \tag{1.4}$$

1.2. **Оценки квадратичной формы оператора** $\mathbb{A}(a,\mu)$**.** При условиях (1.1), (1.2) квадратичная форма оператора $\mathbb{A}(a,\mu)$ допускает следующее представление (см., например, [11] или [14, п. 1.2])

$$(\mathbb{A}(a,\mu)u, u) = \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x}\, d\mathbf{y}\, a(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) |u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|^2, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d). \tag{1.5}$$

В силу (1.5) оператор $\mathbb{A}(a,\mu)$ неотрицателен и выполнены оценки

$$\mu_- (\mathbb{A}_0(a)u, u) \leqslant (\mathbb{A}(a,\mu)u, u) \leqslant \mu_+ (\mathbb{A}_0(a)u, u), \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d). \tag{1.6}$$

Поскольку $\mathbb{B}_0(a)$ — оператор свертки, преобразование Фурье переводит $\mathbb{B}_0(a)$ в оператор умножения на функцию $\widehat{a}(\boldsymbol{\xi})$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$, где

$$\widehat{a}(\boldsymbol{\xi}) := \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{z}\rangle} a(\mathbf{z})\, d\mathbf{z}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d.$$

Отсюда следует, что оператор $\mathbb{A}_0(a)$ унитарно эквивалентен оператору умножения на функцию $\widehat{a}(\mathbf{0}) - \widehat{a}(\boldsymbol{\xi})$. Следовательно, $\lambda_0 = 0$ является точкой спектра оператора $\mathbb{A}_0(a)$. Поскольку оператор $\mathbb{A}_0(a)$ неотрицателен, то λ_0 — это край спектра. В силу оценок (1.6) точка $\lambda_0 = 0$ является также нижним краем спектра оператора $\mathbb{A}(a,\mu)$.

1.3. **Разложение оператора** $\mathbb{A}(a,\mu)$ **в прямой интеграл.** Нетрудно видеть, что при условиях (1.1)–(1.3) оператор умножения на потенциал $p(\mathbf{x}; a, \mu)$ и оператор $\mathbb{B}(a,\mu)$ (а значит, и оператор $\mathbb{A}(a,\mu)$) коммутируют с операторами $S_{\mathbf{n}}$ целочисленного сдвига, определенными по правилу

$$S_{\mathbf{n}} u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x} + \mathbf{n}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d.$$

Это означает, что $\mathbb{A}(a,\mu)$ и $\mathbb{B}(a,\mu)$ — периодические операторы с решеткой периодов $\mathbb{Z}^d$. Обозначим через $\Omega := [0,1)^d$ ячейку решетки $\mathbb{Z}^d$ и через $\widetilde{\Omega} := [-\pi, \pi)^d$ — ячейку двойственной решетки $(2\pi\mathbb{Z})^d$.

Определим преобразование Гельфанда $\mathcal{G}$ (см., например, [15] или [3, глава 2]). Первоначально $\mathcal{G}$ задается на классе Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ равенством

$$\mathcal{G}u(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) := (2\pi)^{-d/2} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} u(\mathbf{x} + \mathbf{n}) e^{-i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} + \mathbf{n}\rangle}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Затем $\mathcal{G}$ распространяется по непрерывности до унитарного отображения

$$L_2(\mathbb{R}^d) \to \int_{\widetilde{\Omega}} \oplus L_2(\Omega)\, d\boldsymbol{\xi} = L_2(\widetilde{\Omega} \times \Omega).$$

Как и все периодические операторы, $\mathbb{A}(a,\mu)$ и $\mathbb{B}(a,\mu)$ раскладываются в прямой интеграл с помощью преобразования Гельфанда (т. е. частично диагонализуются):

$$\mathbb{A}(a,\mu) = \mathcal{G}^* \Big(\int_{\widetilde{\Omega}} \oplus \mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)\, d\boldsymbol{\xi} \Big) \mathcal{G}, \quad \mathbb{B}(a,\mu) = \mathcal{G}^* \Big(\int_{\widetilde{\Omega}} \oplus \mathbb{B}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)\, d\boldsymbol{\xi} \Big) \mathcal{G}. \tag{1.7}$$

Здесь операторы $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)$ и $\mathbb{B}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{B}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)$ — самосопряженные ограниченные операторы в $L_2(\Omega)$, заданные соотношениями:

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)u(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}; a, \mu)u(\mathbf{x}) - \mathbb{B}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)u(\mathbf{x}), \quad u \in L_2(\Omega), \tag{1.8}$$

$$\mathbb{B}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)u(\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega} \widetilde{a}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} - \mathbf{y})\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})u(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}, \quad u \in L_2(\Omega), \tag{1.9}$$

где

$$\widetilde{a}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{z}) := \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} a(\mathbf{z} + \mathbf{n}) e^{-i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{z} + \mathbf{n} \rangle}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d. \tag{1.10}$$

Отметим равенство

$$p(\mathbf{x}; a, \mu) = \int\limits_{\Omega} \widetilde{a}(\mathbf{0}, \mathbf{x} - \mathbf{y})\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y}. \tag{1.11}$$

Поясним, как понимается (1.7), на примере первого равенства. Пусть $u \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и $v = \mathbb{A}u$. Тогда $\mathcal{G}v(\boldsymbol{\xi}, \cdot) = \mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})\mathcal{G}u(\boldsymbol{\xi}, \cdot)$, $\boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}$.

Оператор $\mathbb{B}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)$ компактен (см. [14, пункт 4.1]); в силу леммы Шура его норма допускает оценку

$$\|\mathbb{B}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)\| \leqslant \mu_+ \|a\|_{L_1(\mathbb{R}^d)}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}.$$

Оператор $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)$, $\boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}$, обладает существенным спектром

$$\sigma_{\mathrm{e}}(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)) = \operatorname{ess-Ran} p(\cdot; a, \mu).$$

В силу компактности оператора $\mathbb{B}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)$ и нижней оценки (1.4) при всяком $\boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}$ спектр оператора $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)$ левее точки $\mu_- \|a\|_{L_1}$ дискретен.

В [14, лемма 1.1] получено удобное представление для квадратичной формы оператора $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)$.

Лемма 1.1 ([14])**.** *При условиях* (1.1)–(1.3) *справедливо равенство*

$$(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)u, u) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} d\mathbf{x} \int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y}\, a(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left| e^{i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} \rangle} u(\mathbf{x}) - e^{i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{y} \rangle} u(\mathbf{y}) \right|^2, \quad u \in L_2(\Omega), \quad \boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}. \tag{1.12}$$

Здесь подразумевается, что функция $u \in L_2(\Omega)$ периодически продолжена на все $\mathbb{R}^d$.

1.4. **Оценки квадратичной формы оператора $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)$.** Как и выше, полезно отдельно рассмотреть случай $\mu = \mu_0 \equiv 1$. Введем обозначения $\mathbb{A}_0(\boldsymbol{\xi}; a) := \mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu_0)$, $\mathbb{B}_0(\boldsymbol{\xi}; a) := \mathbb{B}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu_0)$. Из соотношений (1.2) и (1.12) вытекают двусторонние оценки

$$\mu_-(\mathbb{A}_0(\boldsymbol{\xi}; a)u, u) \leqslant (\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)u, u) \leqslant \mu_+(\mathbb{A}_0(\boldsymbol{\xi}; a)u, u), \quad u \in L_2(\Omega), \quad \boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}. \tag{1.13}$$

Операторы $\mathbb{A}_0(\boldsymbol{\xi}; a)$, $\boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}$, диагонализуются унитарным дискретным преобразованием Фурье $\mathcal{F} : L_2(\Omega) \to \ell_2(\mathbb{Z}^d)$, заданным соотношениями:

$$\mathcal{F}u(\mathbf{n}) = \int\limits_{\Omega} u(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle} d\mathbf{x}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d, \quad u \in L_2(\Omega);$$

$$\mathcal{F}^* v(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} v_{\mathbf{n}} e^{2\pi i \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad v = \{v_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} \in \ell_2(\mathbb{Z}^d).$$

Имеем:

$$\mathbb{A}_0(\boldsymbol{\xi}; a) = \mathcal{F}^* \big[\widehat{a}(\mathbf{0}) - \widehat{a}(2\pi \mathbf{n} + \boldsymbol{\xi})\big] \mathcal{F}, \quad \widehat{a}(\mathbf{k}) := \int\limits_{\mathbb{R}^d} a(\mathbf{x}) e^{-i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle} d\mathbf{x}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d. \tag{1.14}$$

Здесь через $[\widehat{a}(\mathbf{0}) - \widehat{a}(2\pi\mathbf{n} + \boldsymbol{\xi})]$, обозначается оператор умножения на функцию $\widehat{a}(\mathbf{0}) - \widehat{a}(2\pi\mathbf{n} + \boldsymbol{\xi})$ в пространстве $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$. Таким образом, символом оператора $\mathbb{A}_0(\boldsymbol{\xi}; a)$ является последовательность $\{\widehat{A}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi})\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}$, где

$$\widehat{A}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi}) = \widehat{A}(\boldsymbol{\xi} + 2\pi\mathbf{n}) = \widehat{a}(\mathbf{0}) - \widehat{a}(2\pi\mathbf{n} + \boldsymbol{\xi}) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \bigl(1 - \cos(\langle \mathbf{z}, \boldsymbol{\xi} + 2\pi\mathbf{n}\rangle)\bigr) a(\mathbf{z})\, d\mathbf{z}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d, \quad \boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}.$$

Мы учли, что интеграл $\int_{\mathbb{R}^d} \sin(\langle \mathbf{z}, \boldsymbol{\xi} + 2\pi\mathbf{n}\rangle) a(\mathbf{z})\, d\mathbf{z}$ обращается в нуль, поскольку $a(\mathbf{z}) = a(-\mathbf{z})$.

Из описанной диагонализации легко следует, что $\operatorname{Ker} \mathbb{A}_0(\mathbf{0}; a) = \mathcal{L}\{\mathbf{1}_\Omega\}$. Следовательно, в силу (1.13) имеет место $\operatorname{Ker} \mathbb{A}(\mathbf{0}; a, \mu) = \mathcal{L}\{\mathbf{1}_\Omega\}$. Мы приходим к следующему утверждению (см. [14, лемма 1.2]).

Лемма 1.2 ([14])**.** *При условиях* (1.1)–(1.3) *число* $\lambda_0 = 0$ *является простым собственным значением оператора* $\mathbb{A}(\mathbf{0}; a, \mu)$. *При этом* $\operatorname{Ker} \mathbb{A}(\mathbf{0}; a, \mu) = \mathcal{L}\{\mathbf{1}_\Omega\}$.

Исследуем подробнее символ оператора $\mathbb{A}_0(\boldsymbol{\xi}; a)$, $\boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}$, и получим некоторые оценки для квадратичной формы оператора $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)$. Величина

$$\widehat{A}(\mathbf{y}) := \int\limits_{\mathbb{R}^d} \bigl(1 - \cos(\langle \mathbf{z}, \mathbf{y}\rangle)\bigr) a(\mathbf{z})\, d\mathbf{z} = 2 \int\limits_{\mathbb{R}^d} \sin^2\left(\frac{\langle \mathbf{z}, \mathbf{y}\rangle}{2}\right) a(\mathbf{z})\, d\mathbf{z}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d,$$

при условии (1.1) непрерывно зависит от $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ и (согласно лемме Римана–Лебега) стремится к $\|a\|_{L_1} > 0$ при $|\mathbf{y}| \to \infty$. Кроме того, нетрудно видеть, что $\widehat{A}(\mathbf{y}) > 0$ при $\mathbf{y} \neq 0$. Следовательно, справедлива оценка

$$\min_{|\mathbf{y}| \geqslant r} \widehat{A}(\mathbf{y}) =: \mathcal{C}_r(a) > 0, \quad r > 0. \tag{1.15}$$

Поскольку при $\boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}$ и $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ выполнено $|\boldsymbol{\xi} + 2\pi\mathbf{n}| \geqslant \pi$, то

$$\widehat{A}(\boldsymbol{\xi} + 2\pi\mathbf{n}) \geqslant \mathcal{C}_\pi(a), \quad \boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}. \tag{1.16}$$

Далее, при условии $M_2(a) < \infty$ величина

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} a(\mathbf{z}) \langle \mathbf{z}, \mathbf{y}\rangle^2\, d\mathbf{z} =: M_a(\mathbf{y})$$

непрерывно зависит от $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ и при ненулевых $\mathbf{y}$ не обращается в нуль. Следовательно,

$$\min_{|\boldsymbol{\theta}|=1} M_a(\boldsymbol{\theta}) =: \mathcal{M}(a) > 0. \tag{1.17}$$

Следующее утверждение получено в [14, лемма 1.3].

Лемма 1.3 ([14])**.** *При условиях* (1.1)–(1.3) *и условии* $M_3(a) < \infty$ *справедлива оценка*

$$\widehat{A}(\boldsymbol{\xi} + 2\pi\mathbf{n}) \geqslant C(a)|\boldsymbol{\xi}|^2, \quad \boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d.$$

Здесь

$$C(a) := \min\Bigl\{\frac{1}{4}\mathcal{M}(a), \mathcal{C}_{r(a)}(a)\pi^{-2}d^{-1}, \mathcal{C}_\pi(a)\pi^{-2}d^{-1}\Bigr\} > 0, \tag{1.18}$$

величина $\mathcal{C}_r(a)$, $r > 0$, *определена в* (1.15), *постоянная* $\mathcal{M}(a)$ *определена в* (1.17),

$$r(a) := \frac{3\mathcal{M}(a)}{2M_3(a)}.$$

При условиях (1.1)–(1.3) из (1.13), (1.14) и (1.16) вытекает оценка

$$(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)u, u) \geqslant \mu_- \mathcal{C}_\pi(a) \|u\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad u \in L_2(\Omega) \ominus \mathcal{L}\{\mathbf{1}_\Omega\}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}. \tag{1.19}$$

Из соотношений (1.13), (1.14) и леммы 1.3 вытекает следующее утверждение; см. [14, предложение 1.4].

Предложение 1.4 ([14]). *При условиях* (1.1)–(1.3) *и условии* $M_3(a) < \infty$ *справедлива оценка*

$$(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)u, u) \geqslant \mu_- C(a)|\boldsymbol{\xi}|^2 \|u\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad u \in L_2(\Omega), \quad \boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}. \tag{1.20}$$

Нам потребуется также следующая оценка, которая проверяется применением леммы Шура при условиях (1.1)–(1.3) и условии $M_1(a) < \infty$:

$$\|\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu) - \mathbb{A}(\boldsymbol{\eta}; a, \mu)\| \leqslant \mu_+ M_1(a)|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|, \quad \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \widetilde{\Omega}. \tag{1.21}$$

§ 2. Пороговые характеристики нелокального оператора свёрточного типа вблизи нижнего края спектра

2.1. **Край спектра оператора** $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)$**.** Согласно лемме 1.2 при условиях (1.1)–(1.3) нижний край спектра оператора $\mathbb{A}(\mathbf{0}; a, \mu)$ есть изолированное простое собственное значение $\lambda_0 = 0$. Для краткости обозначим через $d_0 := d_0(a, \mu)$ расстояние от точки λ_0 до остального спектра оператора $\mathbb{A}(\mathbf{0}; a, \mu)$. Из оценки (1.19) вытекает, что при условиях (1.1)–(1.3) справедливо неравенство

$$d_0(a, \mu) \geqslant \mu_- \mathcal{C}_\pi(a). \tag{2.1}$$

Положим

$$\delta_0(a, \mu) := \frac{\mu_- \mathcal{C}_\pi(a)}{3M_1(a)\mu_+}. \tag{2.2}$$

Нетрудно видеть, что $\delta_0(a, \mu) < \pi$, а потому шар $|\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(a, \mu)$ лежит внутри множества $\widetilde{\Omega}$. Из оценки (1.21) и теории возмущений следует, что при условиях (1.1)–(1.3) и $M_1(a) < \infty$ выполнено

$$\operatorname{rank} E_{\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)}[0, d_0/3] = 1, \quad \sigma(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)) \cap (d_0/3; 2d_0/3) = \varnothing, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(a, \mu).$$

Мы пришли к следующему утверждению.

Предложение 2.1. *Пусть выполнены условия* (1.1)–(1.3) *и* $M_1(a) < \infty$. *Пусть число* $\delta_0(a, \mu)$ *определено в* (2.2). *При* $|\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(a, \mu)$ *спектр оператора* $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)$ *на отрезке* $[0, d_0/3]$ *состоит из однократного собственного значения*; *на интервале* $(d_0/3, 2d_0/3)$ *нет точек спектра оператора* $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)$.

При условиях (1.1)–(1.3) и $M_k(a) < \infty$ оператор-функция $\mathbb{A}(\cdot; a, \mu)$ k раз непрерывно дифференцируема по операторной норме в $\mathcal{B}(L_2(\Omega))$. При этом справедливы равенства

$$\begin{gathered}\partial^\alpha \mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}; a, \mu)u(\mathbf{x}) = \int_\Omega \widetilde{a}_\alpha(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} - \mathbf{y})\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})u(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad u \in L_2(\Omega); \\ \widetilde{a}_\alpha(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{z}) = (-1)(-i)^{|\alpha|} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} (\mathbf{z} + \mathbf{n})^\alpha a(\mathbf{z} + \mathbf{n}) e^{-i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{z} + \mathbf{n}\rangle}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}^d_+, \quad |\alpha| \leqslant k.\end{gathered} \tag{2.3}$$

Лемма 2.2. *Пусть выполнены условия* (1.1)–(1.3).
1°. *Если* $M_1(a) < \infty$, *то*

$$\|\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) - \mathbb{A}(\mathbf{0})\| \leqslant \mu_+ M_1(a)|\boldsymbol{\xi}|, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(a, \mu). \tag{2.4}$$

2°. *Если* $M_2(a) < \infty$, *то*

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{A}(\mathbf{0}) + [\Delta_1 \mathbb{A}](\boldsymbol{\xi}) + \mathbb{K}_1(\boldsymbol{\xi}), \quad [\Delta_1 \mathbb{A}](\boldsymbol{\xi}) := \sum_{j=1}^d \partial_j \mathbb{A}(\mathbf{0})\xi_j, \tag{2.5}$$

$$\|\mathbb{K}_1(\boldsymbol{\xi})\| \leqslant \frac{1}{2}\mu_+ M_2(a)|\boldsymbol{\xi}|^2, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(a, \mu). \tag{2.6}$$

3°. *Если $M_3(a) < \infty$, то*

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{A}(\mathbf{0}) + [\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi}) + [\Delta_2\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi}) + \mathbb{K}_2(\boldsymbol{\xi}), \quad [\Delta_2\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi}) := \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{d} \partial_k\partial_l\mathbb{A}(\mathbf{0})\xi_k\xi_l, \tag{2.7}$$

$$\|\mathbb{K}_2(\boldsymbol{\xi})\| \leqslant \frac{1}{6}\mu_+ M_3(a)|\boldsymbol{\xi}|^3, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(a,\mu). \tag{2.8}$$

4°. *Если $M_4(a) < \infty$, то*

$$\begin{aligned} &\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{A}(\mathbf{0}) + [\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi}) + [\Delta_2\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi}) + [\Delta_3\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi}) + \mathbb{K}_3(\boldsymbol{\xi}), \\ &[\Delta_3\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi}) := \frac{1}{6}\sum_{j,k,l=1}^{d} \partial_j\partial_k\partial_l\mathbb{A}(\mathbf{0})\xi_j\xi_k\xi_l, \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\|\mathbb{K}_3(\boldsymbol{\xi})\| \leqslant \frac{1}{24}\mu_+ M_4(a)|\boldsymbol{\xi}|^4, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(a,\mu). \tag{2.10}$$

Доказательство. Доказательство всех четырех утверждений получается применением леммы Адамара и леммы Шура. Для примера, докажем утверждение 4°.

В силу леммы Адамара оператор-функция $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})$ допускает разложение (2.9), где

$$\mathbb{K}_3(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{d}\sum_{l=1}^{d}\sum_{m=1}^{d} \xi_j\xi_k\xi_l\xi_m \int_0^1 ds_1 s_1^3 \int_0^1 ds_2\, s_2^2 \int_0^1 ds_3\, s_3 \int_0^1 ds_4\, \partial_j\partial_k\partial_l\partial_m\mathbb{A}(s_1s_2s_3s_4\boldsymbol{\xi}).$$

С учетом (2.3) отсюда следует, что $\mathbb{K}_3(\boldsymbol{\xi}) : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ — интегральный оператор с ядром

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{\xi};\mathbf{x},\mathbf{y}) =$$

$$= -\mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} \langle \mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{n}, \boldsymbol{\xi}\rangle^4 a(\mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{n}) \int_0^1 ds_1 s_1^3 \int_0^1 ds_2\, s_2^2 \int_0^1 ds_3\, s_3 \int_0^1 ds_4\, e^{-is_1s_2s_3s_4\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{n}\rangle}.$$

Следовательно,

$$\int_\Omega |\mathcal{K}(\boldsymbol{\xi};\mathbf{x},\mathbf{y})|\, d\mathbf{y} \leqslant \frac{1}{24}\mu_+ \int_{\mathbb{R}^d} a(\mathbf{x}-\mathbf{y})\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}\rangle^4\, d\mathbf{y} \leqslant \frac{1}{24}\mu_+ M_4(a)|\boldsymbol{\xi}|^4.$$

Такую же оценку допускает величина $\int_\Omega |\mathcal{K}(\boldsymbol{\xi};\mathbf{x},\mathbf{y})|\, d\mathbf{x}$. Теперь из леммы Шура вытекает оценка (2.10). $\square$

Применяя лемму Шура, легко проверить следующие оценки:

$$\|[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})\| \leqslant \mu_+ M_1(a)|\boldsymbol{\xi}|; \tag{2.11}$$

$$\|[\Delta_2\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})\| \leqslant \frac{1}{2}\mu_+ M_2(a)|\boldsymbol{\xi}|^2. \tag{2.12}$$

2.2. **Пороговые аппроксимации.** Обозначим через $F(\boldsymbol{\xi})$ спектральный проектор оператора $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi};a,\mu)$, отвечающий отрезку $[0, d_0/3]$. Через $\mathfrak{N}$ обозначим ядро $\operatorname{Ker}\mathbb{A}(\mathbf{0};a,\mu) = \mathcal{L}\{\mathbf{1}_\Omega\}$; через P обозначим ортопроектор на $\mathfrak{N}$; имеем $P = (\cdot, \mathbf{1}_\Omega)\mathbf{1}_\Omega$. Пусть Γ — контур на комплексной плоскости, проходящий через середину интервала $(d_0/3, 2d_0/3)$ и эквидистантно охватывающий отрезок $[0, d_0/3]$. В силу формулы Рисса справедливы представления

$$F(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma (\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) - \zeta I)^{-1}\, d\zeta, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(a,\mu), \tag{2.13}$$

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})F(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma (\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) - \zeta I)^{-1}\zeta\, d\zeta, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(a,\mu). \tag{2.14}$$

Здесь в интегралах направление обхода контура идет против часовой стрелки.

Наша цель — получить приближение к оператору $F(\boldsymbol{\xi})$ с погрешностью $O(|\boldsymbol{\xi}|^2)$ и приближение к оператору $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})F(\boldsymbol{\xi})$ с погрешностью $O(|\boldsymbol{\xi}|^4)$. Ранее в работе [14] были получены менее точные приближения к $F(\boldsymbol{\xi})$ и $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})F(\boldsymbol{\xi})$ (с погрешностями $O(|\boldsymbol{\xi}|)$ и $O(|\boldsymbol{\xi}|^3)$ соответственно). Нам удобно воспроизвести здесь эти результаты (см. ниже предложения 2.3 и 2.6); при вычислении аппроксимаций мы последовательно применяем метод интегрирования резольвенты по контуру (названный “третьим способом” в [14, § 4]).

Предложение 2.3. *Пусть выполнены условия* (1.1)–(1.3) *и* $M_1(a) < \infty$. *Тогда справедлива оценка*

$$\|F(\boldsymbol{\xi}) - P\| \leqslant C_1(a,\mu)|\boldsymbol{\xi}|, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(a,\mu). \tag{2.15}$$

Постоянная $C_1(a,\mu)$ *определена ниже в* (2.19) *и контролируется в терминах величин* μ_-, μ_+, $\mathcal{C}_\pi(a)$, $M_1(a)$.

Доказательство. Введем обозначения

$$\begin{aligned} R(\boldsymbol{\xi},\zeta) &:= (\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) - \zeta I)^{-1}, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(a,\mu), \quad \zeta \in \Gamma;\\ R_0(\zeta) &:= R(\mathbf{0},\zeta), \quad \zeta \in \Gamma;\\ \Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) &:= \mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) - \mathbb{A}(\mathbf{0}), \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(a,\mu). \end{aligned}$$

В силу формулы Рисса (2.13) разность $F(\boldsymbol{\xi}) - P$ допускает представление

$$F(\boldsymbol{\xi}) - P = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} (R(\boldsymbol{\xi},\zeta) - R_0(\zeta))\, d\zeta, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(a,\mu). \tag{2.16}$$

Справедливо резольвентное тождество

$$R(\boldsymbol{\xi},\zeta) = R_0(\zeta) - R(\boldsymbol{\xi},\zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta), \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(a,\mu), \quad \zeta \in \Gamma. \tag{2.17}$$

Длина контура Γ есть $\frac{\pi+2}{3}d_0$, и обе резольвенты допускают на контуре Γ оценки

$$\|R(\boldsymbol{\xi},\zeta)\| \leqslant 6d_0^{-1}, \quad \|R_0(\zeta)\| \leqslant 6d_0^{-1}, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(a,\mu), \quad \zeta \in \Gamma. \tag{2.18}$$

Теперь из (2.4) и (2.16)–(2.18) вытекает оценка (2.15) с постоянной

$$C_1(a,\mu) := \frac{6(\pi+2)\mu_+ M_1(a)}{\pi d_0}. \tag{2.19}$$

$\square$

Предложение 2.4. *Пусть выполнены условия* (1.1)–(1.3) *и* $M_2(a) < \infty$. *Тогда справедливо представление*

$$F(\boldsymbol{\xi}) = P + [F]_1(\boldsymbol{\xi}) + \Phi(\boldsymbol{\xi}), \quad [F]_1(\boldsymbol{\xi}) := \sum_{j=1}^{d} F_j \xi_j, \tag{2.20}$$

и оценка

$$\|\Phi(\boldsymbol{\xi})\| \leqslant C_2(a,\mu)|\boldsymbol{\xi}|^2, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(a,\mu). \tag{2.21}$$

Операторы F_j *имеют вид*

$$F_j = -P\partial_j\mathbb{A}(\mathbf{0})P^\perp\mathbb{A}(\mathbf{0})^{-1}P^\perp - P^\perp\mathbb{A}(\mathbf{0})^{-1}P^\perp\partial_j\mathbb{A}(\mathbf{0})P, \quad j = 1,\dots,d. \tag{2.22}$$

Здесь под $\mathbb{A}(\mathbf{0})^{-1}$ *подразумевается оператор, обратный к* $\mathbb{A}(\mathbf{0})|_{\mathfrak{N}^\perp} : \mathfrak{N}^\perp \to \mathfrak{N}^\perp$. *Постоянная* $C_2(a,\mu)$ *определена ниже в* (2.32) *и контролируется в терминах величин* μ_-, μ_+, $\mathcal{C}_\pi(a)$, $M_1(a)$, $M_2(a)$. *Оператор* $[F]_1(\boldsymbol{\xi})$ *допускает оценку*

$$\|[F]_1(\boldsymbol{\xi})\| \leqslant C_1(a,\mu)|\boldsymbol{\xi}|, \quad \boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}. \tag{2.23}$$

Доказательство. Итерируя резольвентное тождество (2.17), получаем

$$R(\boldsymbol{\xi},\zeta)=R_0(\zeta)-R_0(\zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)+R(\boldsymbol{\xi},\zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta),\quad |\boldsymbol{\xi}|\leqslant\delta_0(a,\mu),\quad \zeta\in\Gamma. \tag{2.24}$$

В силу (2.4) и (2.18) для оператора $Z_1(\boldsymbol{\xi},\zeta):=R(\boldsymbol{\xi},\zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)$ справедлива оценка

$$\|Z_1(\boldsymbol{\xi},\zeta)\|\leqslant(6d_0^{-1})^3\mu_+^2M_1(a)^2|\boldsymbol{\xi}|^2,\quad |\boldsymbol{\xi}|\leqslant\delta_0(a,\mu),\quad \zeta\in\Gamma. \tag{2.25}$$

Далее, с учетом (2.5) из (2.24) вытекает представление

$$R(\boldsymbol{\xi},\zeta)=R_0(\zeta)-R_0(\zeta)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)+Z_1(\boldsymbol{\xi},\zeta)+Z_2(\boldsymbol{\xi},\zeta),\quad |\boldsymbol{\xi}|\leqslant\delta_0(a,\mu),\quad \zeta\in\Gamma, \tag{2.26}$$

где $Z_2(\boldsymbol{\xi},\zeta)=-R_0(\zeta)\mathbb{K}_1(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)$. В силу (2.6) и (2.18)

$$\|Z_2(\boldsymbol{\xi},\zeta)\|\leqslant 18d_0^{-2}\mu_+M_2(a)|\boldsymbol{\xi}|^2,\quad |\boldsymbol{\xi}|\leqslant\delta_0(a,\mu),\quad \zeta\in\Gamma. \tag{2.27}$$

Применяя формулу Рисса (2.13) и представление (2.26), получаем

$$F(\boldsymbol{\xi})=P+\sum_{j=1}^d F_j\xi_j+\Phi(\boldsymbol{\xi}),\quad |\boldsymbol{\xi}|\leqslant\delta_0(a,\mu), \tag{2.28}$$

где

$$F_j=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma R_0(\zeta)\partial_j\mathbb{A}(\mathbf{0})R_0(\zeta)\,d\zeta, \tag{2.29}$$

$$\Phi(\boldsymbol{\xi})=-\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma (Z_1(\boldsymbol{\xi},\zeta)+Z_2(\boldsymbol{\xi},\zeta))\,d\zeta. \tag{2.30}$$

Из (2.25) и (2.27) вытекает оценка для оператора (2.30):

$$\|\Phi(\boldsymbol{\xi})\|\leqslant C_2(a,\mu)|\boldsymbol{\xi}|^2,\quad |\boldsymbol{\xi}|\leqslant\delta_0(a,\mu), \tag{2.31}$$

$$C_2(a,\mu):=\frac{(\pi+2)}{\pi}\left(\frac{36\mu_+^2M_1(a)^2}{d_0^2}+\frac{3\mu_+M_2(a)}{d_0}\right). \tag{2.32}$$

Теперь представление (2.20) и оценка (2.21) вытекают из (2.28) и (2.31).

Для вычисления интеграла в (2.29) используем разложение резольвенты оператора $\mathbb{A}(\mathbf{0})$:

$$R_0(\zeta)=R_0(\zeta)P+R_0(\zeta)P^\perp=-\frac{1}{\zeta}P+R_0(\zeta)P^\perp,\quad \zeta\in\Gamma. \tag{2.33}$$

Подставим разложение (2.33) в контурный интеграл (2.29) и воспользуемся тем, что оператор-функция $R_0^\perp(\zeta):=R_0(\zeta)P^\perp$ голоморфна внутри контура Γ. Получаем

$$\begin{aligned}F_j&=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\Big(-\frac{1}{\zeta}P+R_0^\perp(\zeta)\Big)\partial_j\mathbb{A}(\mathbf{0})\Big(-\frac{1}{\zeta}P+R_0^\perp(\zeta)\Big)\,d\zeta\\&=-\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{1}{\zeta}\Big(P\partial_j\mathbb{A}(\mathbf{0})R_0^\perp(\zeta)+R_0^\perp(\zeta)\partial_j\mathbb{A}(\mathbf{0})P\Big)\,d\zeta\\&=-P\partial_j\mathbb{A}(\mathbf{0})R_0^\perp(0)-R_0^\perp(0)\partial_j\mathbb{A}(\mathbf{0})P,\quad j=1,\dots,d.\end{aligned}$$

Оператор $R_0^\perp(0)$ запишем в виде $R_0^\perp(0)=P^\perp\mathbb{A}(\mathbf{0})^{-1}P^\perp$. Здесь под $\mathbb{A}(\mathbf{0})^{-1}$ подразумевается оператор, обратный к $\mathbb{A}(\mathbf{0})|_{\mathfrak{N}^\perp}:\mathfrak{N}^\perp\to\mathfrak{N}^\perp$; этот оператор корректно определен и ограничен. Мы приходим к представлению (2.22).

Осталось проверить оценку (2.23). В силу (2.29), оценки $\|R_0(\zeta)\|\leqslant 6d_0^{-1}$ при $\zeta\in\Gamma$ и (2.11), имеем

$$\|[F]_1(\boldsymbol{\xi})\|\leqslant\frac{6(\pi+2)}{\pi d_0}\|[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})\|\leqslant\frac{6(\pi+2)\mu_+M_1(a)}{\pi d_0}|\boldsymbol{\xi}|=C_1(a,\mu)|\boldsymbol{\xi}|,\quad \boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}.$$

$\square$

Представление (2.22) можно “расшифровать” в терминах решений вспомогательных задач. Из равенства $P = (\cdot, \mathbf{1}_\Omega)\mathbf{1}_\Omega$ следуют соотношения

$$\partial_j \mathbb{A}(\mathbf{0})P = i(\cdot, \mathbf{1}_\Omega)w_j, \quad \text{где} \quad iw_j = \partial_j \mathbb{A}(\mathbf{0})\mathbf{1}_\Omega, \quad j = 1, \dots, d. \tag{2.34}$$

В силу (2.3) справедливы равенства

$$w_j(\mathbf{x}) = \overline{w_j(\mathbf{x})} = \int\limits_\Omega \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} (x_j - y_j + n_j) a(\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{n})\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^d} (x_j - y_j) a(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad j = 1, \dots, d. \tag{2.35}$$

Мы учли условие периодичности функции μ. Легко видеть, что $Pw_j = 0$, т. е. $w_j = P^\perp w_j$. Следовательно,

$$P\partial_j \mathbb{A}(\mathbf{0})P = 0, \quad j = 1, \dots, d. \tag{2.36}$$

Из (2.34) и (2.36) следует, что

$$P^\perp \mathbb{A}(\mathbf{0})^{-1} P^\perp \partial_j \mathbb{A}(\mathbf{0})P = i(\cdot, \mathbf{1}_\Omega)v_j, \quad v_j = P^\perp \mathbb{A}(\mathbf{0})^{-1} P^\perp w_j, \quad j = 1, \dots, d. \tag{2.37}$$

Функции $v_j = \overline{v_j} \in L_2(\Omega)$, $j = 1, \dots, d$, являются решениями следующих задач на ячейке Ω:

$$\int\limits_\Omega \widetilde{a}(\mathbf{0}, \mathbf{x} - \mathbf{y})\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})(v_j(\mathbf{x}) - v_j(\mathbf{y}))\, d\mathbf{y} = w_j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega; \quad \int\limits_\Omega v_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{2.38}$$

Считая, что функции $v_j \in L_2(\Omega)$, $j = 1, \dots, d$, периодически продолжены на все $\mathbb{R}^d$, можно переписать вспомогательные задачи на ячейке в следующем виде

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} a(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})(v_j(\mathbf{x}) - v_j(\mathbf{y}))\, d\mathbf{y} = \int\limits_{\mathbb{R}^d} a(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})(x_j - y_j)\, d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Omega; \quad \int\limits_\Omega v_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{2.39}$$

Задачи (2.39) однозначно разрешимы. В §5 показано, что $v_j \in L_\infty(\Omega)$.

Из (2.37) следует, что

$$P\partial_j \mathbb{A}(\mathbf{0})P^\perp \mathbb{A}(\mathbf{0})^{-1} P^\perp = \left(P^\perp \mathbb{A}(\mathbf{0})^{-1} P^\perp \partial_j \mathbb{A}(\mathbf{0})P\right)^* = -i(\cdot, v_j)\mathbf{1}_\Omega, \quad j = 1, \dots, d. \tag{2.40}$$

В итоге, из (2.22), (2.37) и (2.40) вытекает следующее утверждение.

Предложение 2.5. *В условиях предложения* 2.4 *для операторов* F_j *справедливы представления*

$$F_j = i(\cdot, v_j)\mathbf{1}_\Omega - i(\cdot, \mathbf{1}_\Omega)v_j, \quad j = 1, \dots, d, \tag{2.41}$$

где v_j *— периодическое решение задачи* (2.39).

Перейдем к пороговым аппроксимациям для оператора $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})F(\boldsymbol{\xi})$.

Предложение 2.6. *Пусть выполнены условия* (1.1)–(1.3) *и* $M_3(a) < \infty$. *Тогда справедливо представление*

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})F(\boldsymbol{\xi}) = [G]_2(\boldsymbol{\xi}) + \Psi(\boldsymbol{\xi}), \quad [G]_2(\boldsymbol{\xi}) := \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^d G_{kl}\xi_k\xi_l, \tag{2.42}$$

и оценка

$$\|\Psi(\boldsymbol{\xi})\| \leqslant C_3(a, \mu)|\boldsymbol{\xi}|^3, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(a, \mu). \tag{2.43}$$

Операторы G_{kl} *имеют вид*

$$\begin{aligned} G_{kl} =& P\partial_k\partial_l \mathbb{A}(\mathbf{0})P - P\partial_k \mathbb{A}(\mathbf{0})P^\perp \mathbb{A}(\mathbf{0})^{-1} P^\perp \partial_l \mathbb{A}(\mathbf{0})P \\ &- P\partial_l \mathbb{A}(\mathbf{0})P^\perp \mathbb{A}(\mathbf{0})^{-1} P^\perp \partial_k \mathbb{A}(\mathbf{0})P, \quad k, l = 1, \dots, d. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Постоянная $C_3(a,\mu)$ определена ниже в (2.54) и контролируется в терминах величин μ_-, μ_+, $\mathcal{C}_\pi(a)$, $M_1(a)$, $M_2(a)$, $M_3(a)$.

Доказательство. Итерируя еще раз резольвентное тождество (2.17), получаем

$$\begin{aligned} R(\boldsymbol{\xi},\zeta) &= R_0(\zeta) - R_0(\zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta) + R_0(\zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta) + Z_3(\boldsymbol{\xi},\zeta), \\ Z_3(\boldsymbol{\xi},\zeta) &:= - R(\boldsymbol{\xi},\zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta), \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(a,\mu), \quad \zeta \in \Gamma. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Из (2.4) и (2.18) вытекает оценка

$$\|Z_3(\boldsymbol{\xi},\zeta)\| \leqslant (6d_0^{-1})^4\mu_+^3 M_1(a)^3|\boldsymbol{\xi}|^3, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(a,\mu), \quad \zeta \in \Gamma. \tag{2.46}$$

Далее, подставляя (2.7) во второе слагаемое в правой части (2.45) и (2.5) — в третье слагаемое, получаем

$$\begin{aligned} R(\boldsymbol{\xi},\zeta) &= R_0(\zeta) - R_0(\zeta)\left([\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi}) + [\Delta_2\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})\right)R_0(\zeta) \\ &\quad + R_0(\zeta)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta) + Z_3(\boldsymbol{\xi},\zeta) + Z_4(\boldsymbol{\xi},\zeta), \\ Z_4(\boldsymbol{\xi},\zeta) &:= - R_0(\zeta)\mathbb{K}_2(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta) + R_0(\zeta)\mathbb{K}_1(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta) \\ &\quad + R_0(\zeta)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\mathbb{K}_1(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta), \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(a,\mu), \quad \zeta \in \Gamma. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Из (2.4), (2.6), (2.8), (2.11) и (2.18) вытекает оценка

$$\|Z_4(\boldsymbol{\xi},\zeta)\| \leqslant \left(6d_0^{-2}\mu_+ M_3(a) + (6d_0^{-1})^3\mu_+^2 M_1(a)M_2(a)\right)|\boldsymbol{\xi}|^3, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(a,\mu), \quad \zeta \in \Gamma. \tag{2.48}$$

Применяя формулу Рисса (2.14) и представление (2.47), получаем

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})F(\boldsymbol{\xi}) = G_0 + \sum_{j=1}^d G_j\xi_j + \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^d G_{kl}\xi_k\xi_l + \Psi(\boldsymbol{\xi}), \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(a,\mu), \tag{2.49}$$

где

$$G_0 = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma R_0(\zeta)\zeta\, d\zeta, \tag{2.50}$$

$$G_j = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma R_0(\zeta)\partial_j\mathbb{A}(\mathbf{0})R_0(\zeta)\zeta\, d\zeta, \tag{2.51}$$

$$\begin{aligned} G_{kl} &= \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma R_0(\zeta)\partial_k\partial_l\mathbb{A}(\mathbf{0})R_0(\zeta)\zeta\, d\zeta \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \left(R_0(\zeta)\partial_k\mathbb{A}(\mathbf{0})R_0(\zeta)\partial_l\mathbb{A}(\mathbf{0})R_0(\zeta) + R_0(\zeta)\partial_l\mathbb{A}(\mathbf{0})R_0(\zeta)\partial_k\mathbb{A}(\mathbf{0})R_0(\zeta)\right)\zeta\, d\zeta, \end{aligned} \tag{2.52}$$

$$\Psi(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma (Z_3(\boldsymbol{\xi},\zeta) + Z_4(\boldsymbol{\xi},\zeta))\zeta\, d\zeta. \tag{2.53}$$

Из (2.46) и (2.48) вытекает оценка (2.43) для оператора (2.53) с постоянной

$$C_3(a,\mu) := \frac{(\pi+2)}{2\pi}\left(\frac{6^3\mu_+^3 M_1(a)^3}{d_0^2} + \mu_+ M_3(a) + \frac{36\mu_+^2 M_1(a)M_2(a)}{d_0}\right). \tag{2.54}$$

Чтобы вычислить интегралы в (2.50)–(2.52), воспользуемся разложением (2.33) и учтем, что оператор-функция $R_0^\perp(\zeta)$ голоморфна внутри контура Γ. Получаем:

$$G_0 = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \Big(-\frac{1}{\zeta}P + R_0^\perp(\zeta)\Big)\zeta\, d\zeta = 0; \tag{2.55}$$

$$\begin{aligned} G_j &= \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \Big(-\frac{1}{\zeta}P + R_0^\perp(\zeta)\Big)\partial_j\mathbb{A}(\mathbf{0})\Big(-\frac{1}{\zeta}P + R_0^\perp(\zeta)\Big)\zeta\, d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{1}{\zeta}P\partial_j\mathbb{A}(\mathbf{0})P\, d\zeta = P\partial_j\mathbb{A}(\mathbf{0})P = 0, \quad j = 1,\dots,d. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Мы учли равенство (2.36). Далее, имеем

$$
\begin{aligned}
G_{kl} = {} & \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \Big(-\frac{1}{\zeta}P + R_0^{\perp}(\zeta)\Big)\partial_k\partial_l \mathbb{A}(\mathbf{0})\Big(-\frac{1}{\zeta}P + R_0^{\perp}(\zeta)\Big)\zeta\, d\zeta \\
& - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \Big(-\frac{1}{\zeta}P + R_0^{\perp}(\zeta)\Big)\partial_k \mathbb{A}(\mathbf{0})\Big(-\frac{1}{\zeta}P + R_0^{\perp}(\zeta)\Big)\partial_l \mathbb{A}(\mathbf{0})\Big(-\frac{1}{\zeta}P + R_0^{\perp}(\zeta)\Big)\zeta\, d\zeta \\
& - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \Big(-\frac{1}{\zeta}P + R_0^{\perp}(\zeta)\Big)\partial_l \mathbb{A}(\mathbf{0})\Big(-\frac{1}{\zeta}P + R_0^{\perp}(\zeta)\Big)\partial_k \mathbb{A}(\mathbf{0})\Big(-\frac{1}{\zeta}P + R_0^{\perp}(\zeta)\Big)\zeta\, d\zeta \\
& = P\partial_k\partial_l\mathbb{A}(\mathbf{0})P - P\partial_k\mathbb{A}(\mathbf{0})R_0^{\perp}(0)\partial_l\mathbb{A}(\mathbf{0})P - P\partial_l\mathbb{A}(\mathbf{0})R_0^{\perp}(0)\partial_k\mathbb{A}(\mathbf{0})P, \quad k,l = 1,\dots,d.
\end{aligned}
$$

Мы учли голоморфность оператор-функции $R_0^{\perp}(\zeta)$ внутри контура Γ, а также равенство (2.36). Этим доказано представление (2.44).

Представление (2.42) вытекает из (2.49), (2.55) и (2.56). $\square$

Расшифруем теперь представление (2.44) в терминах решений вспомогательных задач. Из (2.34) и (2.37) следуют равенства

$$
P\partial_k\mathbb{A}(\mathbf{0})P^{\perp}\mathbb{A}(\mathbf{0})^{-1}P^{\perp}\partial_l\mathbb{A}(\mathbf{0})P = (v_l, w_k)P, \quad k,l = 1,\dots,d, \tag{2.57}
$$

где функции $w_j \in L_2(\Omega)$, $j = 1,\dots,d$, определены в (2.35) и функции $v_j \in L_2(\Omega)$, $j = 1,\dots,d$, удовлетворяют вспомогательным задачам (2.39). Поскольку $P = (\cdot, \mathbf{1}_\Omega)\mathbf{1}_\Omega$, то справедливо равенство

$$
P\partial_k\partial_l\mathbb{A}(\mathbf{0})P = (w_{kl}, \mathbf{1}_\Omega)P, \quad k,l = 1,\dots,d. \tag{2.58}
$$

Здесь

$$
w_{kl} = \overline{w_{kl}} = \partial_k\partial_l\mathbb{A}(\mathbf{0})\mathbf{1}_\Omega \in L_2(\Omega), \tag{2.59}
$$

т. е.

$$
\begin{aligned}
w_{kl}(\mathbf{x}) &= \int\limits_{\Omega} \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} (x_k - y_k + n_k)(x_l - y_l + n_l)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{n})\mu(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mathbf{y} = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^d} (x_k - y_k)(x_l - y_l)a(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mu(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x}\in\Omega, \quad k,l = 1,\dots,d.
\end{aligned} \tag{2.60}
$$

Таким образом, из (2.44) и (2.57)–(2.60) вытекает следующее утверждение.

Предложение 2.7. *В условиях предложения* 2.6 *для операторов* G_{kl} *справедливы представления*

$$
G_{kl} = g_{kl}P, \quad k,l = 1,\dots,d,
$$

где

$$
\begin{aligned}
g_{kl} &= (w_{kl}, \mathbf{1}_\Omega) - (v_k, w_l) - (v_l, w_k) \\
&= \int\limits_{\Omega} d\mathbf{x} \int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} ((x_k - y_k)(x_l - y_l) - v_k(\mathbf{x})(x_l - y_l) - v_l(\mathbf{x})(x_k - y_k))a(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mu(\mathbf{x},\mathbf{y}),
\end{aligned} \tag{2.61}
$$

а v_j *— периодическое решение задачи* (2.39)*. Таким образом,*

$$
[G]_2(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{d} G_{kl}\xi_k\xi_l = \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{d} g_{kl}\xi_k\xi_l P = \langle g^0\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}\rangle P, \quad \boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d, \tag{2.62}
$$

где g^0 *—* $(d\times d)$*-матрица с элементами* $\frac{1}{2}g_{kl}$, $k,l = 1,\dots,d$.

Матрицу g^0 назовем *эффективной матрицей*; ниже в пункте 3.1 мы убедимся, что матрица g^0 положительно определена.

Предложение 2.8. *Пусть выполнены условия* (1.1)–(1.3) *и* $M_4(a) < \infty$. *Тогда справедливо представление*

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})F(\boldsymbol{\xi}) = [G]_2(\boldsymbol{\xi}) + [G]_3(\boldsymbol{\xi}) + \Upsilon(\boldsymbol{\xi}) \tag{2.63}$$

и оценка

$$\|\Upsilon(\boldsymbol{\xi})\| \leqslant C_4(a,\mu)|\boldsymbol{\xi}|^4, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(a,\mu). \tag{2.64}$$

Здесь $[G]_2(\boldsymbol{\xi})$ *определено в* (2.42), (2.44), *а* $[G]_3(\boldsymbol{\xi})$ *имеет вид*

$$\begin{aligned}
[G]_3(\boldsymbol{\xi}) :=& \frac{1}{6}\sum_{j,k,l=1}^{d} G_{jkl}\xi_j\xi_k\xi_l \\
=& P[\Delta_3\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})P - P[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0^{\perp}(0)[\Delta_2\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})P \\
&- P[\Delta_2\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0^{\perp}(0)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})P + P[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0^{\perp}(0)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0^{\perp}(0)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})P \\
&- R_0^{\perp}(0)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})P[\Delta_2\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})P - P[\Delta_2\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})P[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0^{\perp}(0) \\
&+ R_0^{\perp}(0)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})P[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0^{\perp}(0)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})P \\
&+ P[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0^{\perp}(0)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})P[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0^{\perp}(0).
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Постоянная $C_4(a,\mu)$ *определена ниже в* (2.72) *и контролируется в терминах величин* μ_-, μ_+, $\mathcal{C}_\pi(a)$, $M_1(a)$, $M_2(a)$, $M_3(a)$, $M_4(a)$.

Доказательство. Итерируя еще раз резольвентное тождество (2.17), получаем

$$\begin{aligned}
R(\boldsymbol{\xi},\zeta) =& R_0(\zeta) - R_0(\zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta) + R_0(\zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta) \\
&- R_0(\zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta) + Z_5(\boldsymbol{\xi},\zeta), \\
Z_5(\boldsymbol{\xi},\zeta) :=& R(\boldsymbol{\xi},\zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta),
\end{aligned} \tag{2.66}$$

при $|\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(a,\mu)$ и $\zeta \in \Gamma$. Из (2.4) и (2.18) вытекает оценка

$$\|Z_5(\boldsymbol{\xi},\zeta)\| \leqslant (6d_0^{-1})^5\mu_+^4 M_1(a)^4|\boldsymbol{\xi}|^4, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(a,\mu), \quad \zeta \in \Gamma. \tag{2.67}$$

Подставляя (2.9) во второе слагаемое в правой части (2.66), (2.7) — в третье слагаемое и (2.5) — в четвертое слагаемое, получаем

$$\begin{aligned}
R(\boldsymbol{\xi},\zeta) =& R_0(\zeta) - R_0(\zeta)\left([\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi}) + [\Delta_2\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi}) + [\Delta_3\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})\right)R_0(\zeta) \\
&+ R_0(\zeta)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta) \\
&+ R_0(\zeta)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)[\Delta_2\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta) \\
&+ R_0(\zeta)[\Delta_2\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta) \\
&- R_0(\zeta)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta) \\
&+ Z_5(\boldsymbol{\xi},\zeta) + Z_6(\boldsymbol{\xi},\zeta), \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(a,\mu), \quad \zeta \in \Gamma.
\end{aligned} \tag{2.68}$$

где

$$\begin{aligned}
Z_6(\boldsymbol{\xi},\zeta) :=& - R_0(\zeta)\mathbb{K}_3(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta) + R_0(\zeta)\mathbb{K}_2(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta) \\
&+ R_0(\zeta)[\Delta_2\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\mathbb{K}_1(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta) \\
&+ R_0(\zeta)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\mathbb{K}_2(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta) \\
&- R_0(\zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\mathbb{K}_1(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta) \\
&- R_0(\zeta)\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\mathbb{K}_1(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta) \\
&- R_0(\zeta)\mathbb{K}_1(\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta).
\end{aligned}$$

Из (2.4), (2.6), (2.8), (2.10)–(2.12) и (2.18) вытекает оценка

$$\begin{aligned}
|Z_6(\boldsymbol{\xi},\zeta)\| \leqslant& \Big(\frac{3}{2}d_0^{-2}\mu_+M_4(a) + d_0^{-3}\mu_+^2(72M_1(a)M_3(a) + 54M_2(a)^2) + \frac{3}{2}\cdot 6^4 d_0^{-4}\mu_+^3 M_1(a)^2M_2(a)\Big)|\boldsymbol{\xi}|^4, \\
&|\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(a,\mu), \quad \zeta \in \Gamma.
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Применяя формулу Рисса (2.14) и представление (2.68), получаем

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})F(\boldsymbol{\xi}) = G_0 + \sum_{j=1}^{d} G_j\xi_j + \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{d} G_{kl}\xi_k\xi_l + \frac{1}{6}\sum_{j,k,l=1}^{d} G_{jkl}\xi_j\xi_k\xi_l + \Upsilon(\boldsymbol{\xi}), \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(a,\mu),$$

где операторы G_0, G_j, G_{kl} определены в (2.50)–(2.52), а четвертое и пятое слагаемые справа заданы соотношениями

$$\begin{aligned}[G]_3(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{6}\sum_{j,k,l=1}^{d} G_{jkl}\xi_j\xi_k\xi_l = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma R_0(\zeta)[\Delta_3\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\zeta\, d\zeta \\ - \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma R_0(\zeta)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)[\Delta_2\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\zeta\, d\zeta \\ - \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma R_0(\zeta)[\Delta_2\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\zeta\, d\zeta \\ + \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma R_0(\zeta)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\zeta\, d\zeta,\end{aligned} \tag{2.70}$$

$$\Upsilon(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma (Z_5(\boldsymbol{\xi},\zeta) + Z_6(\boldsymbol{\xi},\zeta))\zeta\, d\zeta. \tag{2.71}$$

Из (2.67) и (2.69) вытекает оценка (2.64) для оператора (2.71) с постоянной

$$C_4(a,\mu) := \frac{(\pi+2)}{2\pi}\Big(\frac{6^4\mu_+^4 M_1(a)^4}{d_0^3} + \frac{\mu_+ M_4(a)}{4} + \frac{\mu_+^2(12M_1(a)M_3(a)+9M_2(a)^2)}{d_0} + \frac{6^4\mu_+^3 M_1(a)^2 M_2(a)}{4d_0^2}\Big). \tag{2.72}$$

Операторы G_0, G_j, G_{kl} уже были найдены: $G_0 = 0$, $G_j = 0$, $j = 1,\dots,d$, а G_{kl} заданы соотношениями (2.44). Чтобы вычислить интегралы в (2.70), подставим разложение (2.33) и учтем, что оператор-функция $R_0^\perp(\zeta)$ голоморфна внутри контура Γ. Для первого слагаемого справа получаем:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma R_0(\zeta)[\Delta_3\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\zeta\, d\zeta = P[\Delta_3\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})P.$$

При вычислении второго слагаемого учтем равенство (2.36). Имеем:

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma R_0(\zeta)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)[\Delta_2\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\zeta\, d\zeta \\ &\quad = -R_0^\perp(0)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})P[\Delta_2\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})P - P[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0^\perp(0)[\Delta_2\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})P.\end{aligned}$$

Аналогично, третье слагаемое представляется в виде

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma R_0(\zeta)[\Delta_2\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\zeta\, d\zeta \\ &\quad = -P[\Delta_2\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0^\perp(0)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})P - P[\Delta_2\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})P[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0^\perp(0).\end{aligned}$$

Наконец, четвертое слагаемое принимает вид

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma R_0(\zeta)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0(\zeta)\zeta\, d\zeta \\ &\qquad = R_0^\perp(0)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})P[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0^\perp(0)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})P \\ &\qquad + P[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0^\perp(0)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})P[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0^\perp(0) \\ &\qquad + P[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0^\perp(0)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0^\perp(0)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})P.\end{aligned}$$

В итоге получаем представление (2.65). □

Предложение 2.9. *В условиях предложения* 2.8 *справедливо равенство*

$$P[G]_3(\boldsymbol{\xi})P = 0. \tag{2.73}$$

Доказательство. Согласно (2.65) имеем

$$\begin{aligned} P[G]_3(\boldsymbol{\xi})P =& P[\Delta_3\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})P - P[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0^{\perp}(0)[\Delta_2\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})P \\ & - P[\Delta_2\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0^{\perp}(0)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})P + P[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0^{\perp}(0)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0^{\perp}(0)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})P. \end{aligned} \tag{2.74}$$

В соответствии с (2.9) выполнено

$$P[\Delta_3\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})P = \frac{1}{6}\sum_{j,k,l=1}^{d} \xi_j\xi_k\xi_l (f_{jkl}, \mathbf{1}_\Omega)P, \quad f_{jkl} := \partial_j\partial_k\partial_l\mathbb{A}(\mathbf{0})\mathbf{1}_\Omega.$$

Из (2.3) следует, что функция $f_{jkl}(\mathbf{x})$ принимает чисто мнимые значения, а потому число $(f_{jkl}, \mathbf{1}_\Omega)$ — чисто мнимое. Следовательно,

$$(P[\Delta_3\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})P)^* = -\frac{1}{6}\sum_{j,k,l=1}^{d} \xi_j\xi_k\xi_l (f_{jkl}, \mathbf{1}_\Omega)P.$$

С другой стороны, оператор $P[\Delta_3\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})P$ самосопряжен, а потому

$$P[\Delta_3\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})P = 0. \tag{2.75}$$

Далее, согласно (2.37) имеем

$$R_0^{\perp}(0)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})P = i\sum_{j=1}^{d} \xi_j(\cdot, \mathbf{1}_\Omega)v_j. \tag{2.76}$$

В силу (2.59)

$$[\Delta_2\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})P = \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{d} \xi_k\xi_l(\cdot, \mathbf{1}_\Omega)w_{kl},$$

а потому

$$P[\Delta_2\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{d} \xi_k\xi_l(\cdot, w_{kl})\mathbf{1}_\Omega. \tag{2.77}$$

Из (2.76) и (2.77) вытекает, что

$$P[\Delta_2\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0^{\perp}(0)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})P = \frac{i}{2}\sum_{j,k,l=1}^{d} \xi_j\xi_k\xi_l(v_j, w_{kl})P.$$

С учетом равенств $v_j = \overline{v_j}$, $w_{kl} = \overline{w_{kl}}$ отсюда следует, что

$$P[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0^{\perp}(0)[\Delta_2\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})P = (P[\Delta_2\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0^{\perp}(0)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})P)^* = -\frac{i}{2}\sum_{j,k,l=1}^{d} \xi_j\xi_k\xi_l(v_j, w_{kl})P.$$

Поэтому сумма второго и третьего членов в правой части (2.74) равна нулю:

$$P[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0^{\perp}(0)[\Delta_2\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})P + P[\Delta_2\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0^{\perp}(0)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})P = 0. \tag{2.78}$$

Наконец, с учетом (2.76) получаем

$$P[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0^{\perp}(0)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0^{\perp}(0)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})P = \sum_{j,k,l=1}^{d} \xi_j\xi_k\xi_l(h_{kj}, v_l)P,$$

где $h_{kj} := \partial_k\mathbb{A}(\mathbf{0})v_j$. Из (2.3) и равенства $v_j = \overline{v_j}$ видно, что функция $h_{kj}(\mathbf{x})$ принимает чисто мнимые значения. Поэтому число (h_{kj}, v_l) — чисто мнимое. С другой стороны, оператор $P[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0^{\perp}(0)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0^{\perp}(0)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})P$ самосопряжен. Следовательно,

$$P[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0^{\perp}(0)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})R_0^{\perp}(0)[\Delta_1\mathbb{A}](\boldsymbol{\xi})P = 0. \tag{2.79}$$

В итоге, из (2.74), (2.75), (2.78) и (2.79) вытекает искомое равенство (2.73). □

§ 3. Аппроксимация резольвенты $(\mathbb{A}+\varepsilon^2 I)^{-1}$

3.1. **Аппроксимация резольвенты оператора $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})$ в старшем порядке.** Аппроксимация резольвенты $(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^2 I)^{-1}$ при малом $\varepsilon>0$ с погрешностью $O(\varepsilon^{-1})$ была найдена в [14, §2]. Нам удобно воспроизвести здесь этот результат (см. теорему 3.2), а затем перейти к выводу более точного приближения.

Из (1.20) следует неравенство

$$(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi};a,\mu)F(\boldsymbol{\xi})u,u) \geqslant \mu_- C(a)|\boldsymbol{\xi}|^2(F(\boldsymbol{\xi})u,u), \quad u\in L_2(\Omega), \quad |\boldsymbol{\xi}|\leqslant \delta_0(a,\mu). \tag{3.1}$$

Подставляя в (3.1) разложения $F(\boldsymbol{\xi})=P+O(|\boldsymbol{\xi}|)$ (см. (2.15)) и $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})F(\boldsymbol{\xi})=\langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle P+O(|\boldsymbol{\xi}|^3)$ (см. (2.42), (2.43) и (2.62)) и полагая $u=\mathbf{1}_\Omega$, получаем

$$\langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle \geqslant \mu_- C(a)|\boldsymbol{\xi}|^2+O(|\boldsymbol{\xi}|^3), \quad |\boldsymbol{\xi}|\to 0.$$

Поделим последнее соотношение на $|\boldsymbol{\xi}|^2$ и устремим $|\boldsymbol{\xi}|\to 0$. В итоге мы убедились, что матрица g^0 положительно определена:

$$\langle g^0\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}\rangle \geqslant \mu_- C(a), \quad \boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1},$$

или окончательно

$$\langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle \geqslant \mu_- C(a)|\boldsymbol{\xi}|^2, \quad \boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d. \tag{3.2}$$

Предложение 3.1. *Пусть выполнены условия* (1.1)–(1.3) *и* $M_3(a)<\infty$. *Положим*

$$\Xi(\boldsymbol{\xi},\varepsilon) := (\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^2 I)^{-1}F(\boldsymbol{\xi}) - \left(\langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle+\varepsilon^2\right)^{-1}P, \quad \boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}, \quad \varepsilon>0. \tag{3.3}$$

Справедлива оценка

$$\|\Xi(\boldsymbol{\xi},\varepsilon)\| \leqslant \frac{2C_1(a,\mu)|\boldsymbol{\xi}|}{\mu_- C(a)|\boldsymbol{\xi}|^2+\varepsilon^2} + \frac{C_3(a,\mu)|\boldsymbol{\xi}|^3}{(\mu_- C(a)|\boldsymbol{\xi}|^2+\varepsilon^2)^2}, \quad |\boldsymbol{\xi}|\leqslant\delta_0(a,\mu), \quad \varepsilon>0. \tag{3.4}$$

Доказательство. Из (1.20) и (3.2) вытекают оценки

$$\|(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^2 I)^{-1}\| \leqslant (\mu_- C(a)|\boldsymbol{\xi}|^2+\varepsilon^2)^{-1}, \quad \varepsilon>0, \quad \boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}; \tag{3.5}$$

$$(\langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle+\varepsilon^2)^{-1} \leqslant (\mu_- C(a)|\boldsymbol{\xi}|^2+\varepsilon^2)^{-1}, \quad \varepsilon>0, \quad \boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}. \tag{3.6}$$

Справедливо очевидное тождество

$$\begin{aligned}\Xi(\boldsymbol{\xi},\varepsilon) = F(\boldsymbol{\xi})(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^2 I)^{-1}(F(\boldsymbol{\xi})-P) + (F(\boldsymbol{\xi})-P)(\langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle+\varepsilon^2)^{-1}P -\\ - F(\boldsymbol{\xi})(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^2 I)^{-1}\left(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})F(\boldsymbol{\xi})-\langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle P\right)(\langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle+\varepsilon^2)^{-1}P.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Теперь (3.4) следует из (2.15), (2.43) и (3.5)–(3.7). $\square$

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия* (1.1)–(1.3) *и* $M_3(a)<\infty$. *Тогда справедлива оценка*

$$\left\|(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^2 I)^{-1} - (\langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle+\varepsilon^2)^{-1}P\right\| \leqslant C_5(a,\mu)\varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon>0, \quad |\boldsymbol{\xi}|\leqslant\delta_0(a,\mu). \tag{3.8}$$

Здесь величина $C_5(a,\mu)$ определяется равенством

$$C_5(a,\mu) := \Big(\frac{3}{d_0}\Big)^{1/2} + \frac{C_1(a,\mu)}{(\mu_- C(a))^{1/2}} + \frac{C_3(a,\mu)}{(\mu_- C(a))^{3/2}}$$

и (с учетом (1.18), (2.1), (2.19), (2.54)) *контролируется в терминах параметров d, μ_-, μ_+, $M_1(a)$, $M_2(a)$, $M_3(a)$, $\mathcal{M}(a)$, $\mathcal{C}_\pi(a)$, $\mathcal{C}_{r(a)}(a)$.*

Доказательство. Из определения $F(\boldsymbol{\xi})$ вытекает очевидное неравенство

$$\|(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^2 I)^{-1}(I-F(\boldsymbol{\xi}))\| \leqslant \frac{3}{d_0}, \quad |\boldsymbol{\xi}|\leqslant\delta_0(a,\mu), \quad \varepsilon>0. \tag{3.9}$$

Отсюда следует, что

$$\|(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^2 I)^{-1}(I-F(\boldsymbol{\xi}))\| \leqslant \Big(\frac{3}{d_0}\Big)^{1/2}\varepsilon^{-1}, \quad |\boldsymbol{\xi}|\leqslant\delta_0(a,\mu), \quad \varepsilon>0. \tag{3.10}$$

Из (3.4) непосредственно вытекает оценка

$$\|\Xi(\boldsymbol{\xi},\varepsilon)\| \leqslant \left(\frac{C_1(a,\mu)}{(\mu_- C(a))^{1/2}} + \frac{C_3(a,\mu)}{(\mu_- C(a))^{3/2}}\right)\varepsilon^{-1}, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(a,\mu), \quad \varepsilon > 0. \tag{3.11}$$

Очевидно, оператор под знаком нормы в (3.8) равен $(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 I)^{-1}(I - F(\boldsymbol{\xi})) + \Xi(\boldsymbol{\xi},\varepsilon)$, а потому оценка (3.8) следует из (3.10) и (3.11). $\square$

Введем *эффективный оператор* — самосопряженный эллиптический дифференциальный оператор второго порядка с постоянными коэффициентами в $L_2(\mathbb{R}^d)$:

$$\mathbb{A}^0 := \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{d} g_{kl} D_k D_l = -\operatorname{div} g^0 \nabla, \quad \operatorname{Dom}\mathbb{A}^0 = H^2(\mathbb{R}^d). \tag{3.12}$$

При этом *эффективная матрица* g^0 — $(d\times d)$-матрица с элементами $\frac{1}{2}g_{kl}$, где коэффициенты g_{kl}, $k,l = 1,\dots,d$, определены в (2.61). Выполнена оценка (3.2), тем самым матрица g^0 положительно определена.

С помощью унитарного преобразования Гельфанда оператор $\mathbb{A}^0$ раскладывается в прямой интеграл:

$$\mathbb{A}^0 = \mathcal{G}^* \Big(\int_{\widetilde{\Omega}} \oplus \mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi}\Big)\mathcal{G}. \tag{3.13}$$

Здесь $\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi})$ — самосопряженный оператор в пространстве $L_2(\Omega)$, заданный выражением

$$\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi}) = (\mathbf{D}+\boldsymbol{\xi})^* g^0 (\mathbf{D}+\boldsymbol{\xi}), \quad \operatorname{Dom}\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi}) = \widetilde{H}^2(\Omega).$$

Пространство $\widetilde{H}^2(\Omega)$ определяется как подпространство в $H^2(\Omega)$, состоящее из функций, $\mathbb{Z}^d$-периодическое продолжение которых на $\mathbb{R}^d$ принадлежит классу $H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Равенство (3.13) означает следующее. Пусть $u \in \operatorname{Dom}\mathbb{A}^0 = H^2(\mathbb{R}^d)$ и $v = \mathbb{A}^0 u$. Тогда $\mathcal{G}u(\boldsymbol{\xi},\cdot) \in \operatorname{Dom}\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi}) = \widetilde{H}^2(\Omega)$ и $\mathcal{G}v(\boldsymbol{\xi},\cdot) = \mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi})\mathcal{G}u(\boldsymbol{\xi},\cdot)$, $\boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}$.

Из теоремы 3.2 легко выводится следующий результат.

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия* (1.1)–(1.3) *и* $M_3(a) < \infty$. *Тогда справедлива оценка*

$$\big\|(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 I)^{-1} - (\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 I)^{-1}\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathrm{C}_1(a,\mu)\varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon > 0, \quad \boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}. \tag{3.14}$$

Постоянная $\mathrm{C}_1(a,\mu)$ *контролируется в терминах параметров* d, μ_-, μ_+, $M_1(a)$, $M_2(a)$, $M_3(a)$, $\mathcal{M}(a)$, $\mathcal{C}_\pi(a)$, $\mathcal{C}_{r(a)}(a)$.

Доказательство. Из (3.5) и (3.6) вытекают очевидные оценки

$$\begin{aligned}
&\big\|(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 I)^{-1}\big\| \leqslant (\mu_- C(a))^{-1/2}(\delta_0(a,\mu))^{-1}\varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon>0, \quad \boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}, \quad |\boldsymbol{\xi}| \geqslant \delta_0(a,\mu),\\
&\big(\langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle + \varepsilon^2\big)^{-1} \leqslant (\mu_- C(a))^{-1/2}(\delta_0(a,\mu))^{-1}\varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon>0, \quad \boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}, \quad |\boldsymbol{\xi}| \geqslant \delta_0(a,\mu).
\end{aligned}$$

Отсюда и из теоремы 3.2 следует оценка

$$\big\|(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 I)^{-1} - (\langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle + \varepsilon^2)^{-1}P\big\| \leqslant \widetilde{C}_5(a,\mu)\varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon>0, \quad \boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}, \tag{3.15}$$

где $\widetilde{C}_5(a,\mu) = \max\{C_5(a,\mu), 2(\mu_- C(a))^{-1/2}(\delta_0(a,\mu))^{-1}\}$.

Далее, справедливо очевидное равенство

$$\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi})P = \langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle P,$$

а потому

$$(\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 I)^{-1}P = \big(\langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle + \varepsilon^2\big)^{-1} P. \tag{3.16}$$

Перепишем (3.15) в виде

$$\big\|(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 I)^{-1} - (\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 I)^{-1}P\big\| \leqslant \widetilde{C}_5(a,\mu)\varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon>0, \quad \boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}. \tag{3.17}$$

С помощью дискретного преобразования Фурье имеем

$$\left\|(\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^2 I)^{-1}(I-P)\right\| = \sup_{0\neq \mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} (\langle g^0(2\pi\mathbf{n}+\boldsymbol{\xi}), 2\pi\mathbf{n}+\boldsymbol{\xi}\rangle+\varepsilon^2)^{-1} \leqslant (\mu_- C(a)\pi^2+\varepsilon^2)^{-1}. \quad (3.18)$$

Мы учли (3.2) и очевидное неравенство $|2\pi\mathbf{n}+\boldsymbol{\xi}|\geqslant\pi$ при $\boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}$ и $0\neq\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d$. Следовательно,

$$\left\|(\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^2 I)^{-1}(I-P)\right\| \leqslant (\mu_- C(a))^{-1/2}\pi^{-1}\varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon>0, \quad \boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}.$$

Отсюда и из (3.17) вытекает искомая оценка (3.14) с постоянной $\mathrm{C}_1(a,\mu) = \widetilde{C}_5(a,\mu) + (\mu_- C(a))^{-1/2}\pi^{-1}$. $\square$

3.2. **Более точная аппроксимация резольвенты оператора $\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})$.**

Теорема 3.4. *Пусть выполнены условия* (1.1)–(1.3) *и* $M_4(a)<\infty$. *Тогда справедливо представление*

$$(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^2 I)^{-1} = (\langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle+\varepsilon^2)^{-1}P + [F]_1(\boldsymbol{\xi})(\langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle+\varepsilon^2)^{-1}P + (\langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle+\varepsilon^2)^{-1}P[F]_1(\boldsymbol{\xi}) + Y(\boldsymbol{\xi},\varepsilon) \quad (3.19)$$

и оценка

$$\|Y(\boldsymbol{\xi},\varepsilon)\| \leqslant C_6(a,\mu), \quad \varepsilon>0, \quad |\boldsymbol{\xi}|\leqslant\delta_0(a,\mu). \quad (3.20)$$

Здесь $[F]_1(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^d F_j\xi_j$, *а операторы* F_j *определены в* (2.41). *Величина* $C_6(a,\mu)$ *определяется равенством*

$$C_6(a,\mu) := \frac{3}{d_0} + \frac{2C_1(a,\mu)^2+2C_2(a,\mu)}{\mu_- C(a)} + \frac{3C_1(a,\mu)C_3(a,\mu)+C_4(a,\mu)}{(\mu_- C(a))^2} + \frac{C_3(a,\mu)^2}{(\mu_- C(a))^3}$$

и (с учетом (1.18), (2.1), (2.19), (2.32), (2.54), (2.72)) *контролируется в терминах параметров* d, μ_-, μ_+, $M_1(a)$, $M_2(a)$, $M_3(a)$, $M_4(a)$, $\mathcal{M}(a)$, $\mathcal{C}_\pi(a)$, $\mathcal{C}_{r(a)}(a)$.

Доказательство. Воспользуемся представлением (3.7) и заменим оператор $F(\boldsymbol{\xi})(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^2 I)^{-1}$ на $(\langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle+\varepsilon^2)^{-1}P+\Xi(\boldsymbol{\xi},\varepsilon)$ в первом и третьем членах в правой части. Получаем

$$\Xi(\boldsymbol{\xi},\varepsilon) = \widetilde{\Xi}(\boldsymbol{\xi},\varepsilon) + Y_1(\boldsymbol{\xi},\varepsilon), \quad (3.21)$$

где

$$\begin{aligned}\widetilde{\Xi}(\boldsymbol{\xi},\varepsilon) = (\langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle+\varepsilon^2)^{-1}P(F(\boldsymbol{\xi})-P) + (F(\boldsymbol{\xi})-P)(\langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle+\varepsilon^2)^{-1}P \\ - (\langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle+\varepsilon^2)^{-1}P\left(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})F(\boldsymbol{\xi})-\langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle P\right)(\langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle+\varepsilon^2)^{-1}P \quad (3.22)\end{aligned}$$

и

$$Y_1(\boldsymbol{\xi},\varepsilon) = \Xi(\boldsymbol{\xi},\varepsilon)(F(\boldsymbol{\xi})-P) - \Xi(\boldsymbol{\xi},\varepsilon)\Psi(\boldsymbol{\xi})(\langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle+\varepsilon^2)^{-1}P. \quad (3.23)$$

Здесь оператор $\Psi(\boldsymbol{\xi})$ определен в (2.42). Из (2.15), (2.43), (3.4) и (3.6) вытекает следующая оценка оператора (3.23):

$$\begin{aligned}\|Y_1(\boldsymbol{\xi},\varepsilon)\| &\leqslant \left(\frac{2C_1(a,\mu)|\boldsymbol{\xi}|}{\mu_- C(a)|\boldsymbol{\xi}|^2+\varepsilon^2} + \frac{C_3(a,\mu)|\boldsymbol{\xi}|^3}{(\mu_- C(a)|\boldsymbol{\xi}|^2+\varepsilon^2)^2}\right)\left(C_1(a,\mu)|\boldsymbol{\xi}| + \frac{C_3(a,\mu)|\boldsymbol{\xi}|^3}{\mu_- C(a)|\boldsymbol{\xi}|^2+\varepsilon^2}\right) \\ &\leqslant \frac{2C_1(a,\mu)^2}{\mu_- C(a)} + \frac{3C_1(a,\mu)C_3(a,\mu)}{(\mu_- C(a))^2} + \frac{C_3(a,\mu)^2}{(\mu_- C(a))^3}, \quad |\boldsymbol{\xi}|\leqslant\delta_0(a,\mu), \quad \varepsilon>0. \quad (3.24)\end{aligned}$$

Теперь подставим разложение (2.20) в первые два члена в правой части (3.22) и разложение (2.63) — в третий член. Получаем

$$\widetilde{\Xi}(\boldsymbol{\xi},\varepsilon) = \Xi^0(\boldsymbol{\xi},\varepsilon) + Y_2(\boldsymbol{\xi},\varepsilon), \quad (3.25)$$

где

$$\begin{aligned}\Xi^0(\boldsymbol{\xi},\varepsilon) = (\langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle+\varepsilon^2)^{-1}P[F]_1(\boldsymbol{\xi}) + [F]_1(\boldsymbol{\xi})(\langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle+\varepsilon^2)^{-1}P \\ - (\langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle+\varepsilon^2)^{-1}P[G]_3(\boldsymbol{\xi})(\langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle+\varepsilon^2)^{-1}P, \quad (3.26)\end{aligned}$$

$$Y_2(\boldsymbol{\xi},\varepsilon) = (\langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle+\varepsilon^2)^{-1}P\Phi(\boldsymbol{\xi})+\Phi(\boldsymbol{\xi})(\langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle+\varepsilon^2)^{-1}P-(\langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle+\varepsilon^2)^{-1}P\Upsilon(\boldsymbol{\xi})(\langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle+\varepsilon^2)^{-1}P. \tag{3.27}$$

Из (2.21), (2.64) и (3.6) вытекает следующая оценка оператора (3.27):

$$\begin{aligned}\|Y_2(\boldsymbol{\xi},\varepsilon)\| &\leqslant \frac{2C_2(a,\mu)|\boldsymbol{\xi}|^2}{\mu_- C(a)|\boldsymbol{\xi}|^2+\varepsilon^2} + \frac{C_4(a,\mu)|\boldsymbol{\xi}|^4}{(\mu_- C(a)|\boldsymbol{\xi}|^2+\varepsilon^2)^2} \\ &\leqslant \frac{2C_2(a,\mu)}{\mu_- C(a)} + \frac{C_4(a,\mu)}{(\mu_- C(a))^2}, \quad |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta_0(a,\mu), \quad \varepsilon>0.\end{aligned} \tag{3.28}$$

В силу предложения 2.9 третий член в правой части (3.26) обращается в ноль, а потому

$$\Xi^0(\boldsymbol{\xi},\varepsilon) = (\langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle+\varepsilon^2)^{-1}P[F]_1(\boldsymbol{\xi}) + [F]_1(\boldsymbol{\xi})(\langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle+\varepsilon^2)^{-1}P. \tag{3.29}$$

Сопоставляя (3.3), (3.21), (3.25) и (3.29), приходим к представлению (3.19), в котором

$$Y(\boldsymbol{\xi},\varepsilon) = (\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^2 I)^{-1}(I-F(\boldsymbol{\xi})) + Y_1(\boldsymbol{\xi},\varepsilon) + Y_2(\boldsymbol{\xi},\varepsilon).$$

Из (3.9), (3.24) и (3.28) вытекает оценка (3.20). □

Из теоремы 3.4 с помощью следствия 5.5 выводим следующий результат.

Теорема 3.5. *Пусть выполнены условия* (1.1)–(1.3) *и* $M_4(a)<\infty$. *Тогда справедлива оценка*

$$\left\|(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^2 I)^{-1} - (\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^2 I)^{-1} - K(\boldsymbol{\xi},\varepsilon)\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathrm{C}_2(a,\mu), \quad \varepsilon>0, \quad \boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}. \tag{3.30}$$

Здесь

$$K(\boldsymbol{\xi},\varepsilon) := -i\sum_{j=1}^d [v_j](D_j+\xi_j)(\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^2 I)^{-1} + i\sum_{j=1}^d (\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^2 I)^{-1}(D_j+\xi_j)[v_j],$$

функции $v_j(\mathbf{x})$ *являются решениями задач* (2.39); *символ* $[v_j]$ *означает оператор умножения на функцию* $v_j(\mathbf{x})$. *Константа* $\mathrm{C}_2(a,\mu)$ *контролируется в терминах параметров* d, μ_-, μ_+, $M_1(a)$, $M_2(a)$, $M_3(a)$, $M_4(a)$, $\mathcal{M}(a)$, $\mathcal{C}_\pi(a)$, $\mathcal{C}_{r(a)}(a)$ *и константы* $\mathfrak{C}(\widetilde{a},\mu)$, *определенной в* (5.27).

Доказательство. Из (2.23), (3.5) и (3.6) вытекают очевидные оценки

$$\begin{gathered}\left\|(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^2 I)^{-1}\right\| \leqslant (\mu_- C(a))^{-1}(\delta_0(a,\mu))^{-2}, \quad \varepsilon>0, \quad \boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}, \quad |\boldsymbol{\xi}|\geqslant\delta_0(a,\mu), \\ \left(\langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle+\varepsilon^2\right)^{-1} \leqslant (\mu_- C(a))^{-1}(\delta_0(a,\mu))^{-2}, \quad \varepsilon>0, \quad \boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}, \quad |\boldsymbol{\xi}|\geqslant\delta_0(a,\mu), \\ \|[F]_1(\boldsymbol{\xi})\|\left(\langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle+\varepsilon^2\right)^{-1} \leqslant C_1(a,\mu)(\mu_- C(a)\delta_0(a,\mu))^{-1}, \quad \varepsilon>0, \quad \boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}, \quad |\boldsymbol{\xi}|\geqslant\delta_0(a,\mu).\end{gathered}$$

Отсюда и из теоремы 3.4 следует оценка

$$\begin{aligned}&\left\|(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^2 I)^{-1} - \left(\langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle+\varepsilon^2\right)^{-1}P - [F]_1(\boldsymbol{\xi})\left(\langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle+\varepsilon^2\right)^{-1}P - \left(\langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle+\varepsilon^2\right)^{-1}P[F]_1(\boldsymbol{\xi})\right\| \\ &\qquad \leqslant \widetilde{C}_6(a,\mu), \quad \varepsilon>0, \quad \boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega},\end{aligned} \tag{3.31}$$

где $\widetilde{C}_6(a,\mu)=\max\{C_6(a,\mu), 2(\mu_- C(a))^{-1}(\delta_0(a,\mu))^{-2}+2C_1(a,\mu)(\mu_- C(a)\delta_0(a,\mu))^{-1}\}$.

Учтем теперь (3.16) и равенство

$$[F]_1(\boldsymbol{\xi})P = \sum_{j=1}^d F_j\xi_j P = -i\sum_{j=1}^d [v_j]\xi_j P = -i\sum_{j=1}^d [v_j](D_j+\xi_j)P;$$

см. (2.20) и (2.41). Тогда

$$[F]_1(\boldsymbol{\xi})\left(\langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle+\varepsilon^2\right)^{-1}P = -i\sum_{j=1}^d [v_j](D_j+\xi_j)(\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^2 I)^{-1}P.$$

Перепишем (3.31) в виде

$$\Big\|(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^2 I)^{-1}-(\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^2 I)^{-1}P+i\sum_{j=1}^d [v_j](D_j+\xi_j)(\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^2 I)^{-1}P$$

$$-\,i\sum_{j=1}^d (\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^2 I)^{-1}(D_j+\xi_j)P[v_j]\Big\|\leqslant \widetilde{C}_6(a,\mu),\quad \varepsilon>0,\quad \boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}. \quad (3.32)$$

В силу (3.18) выполнено

$$\big\|(\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^2 I)^{-1}(I-P)\big\|\leqslant (\mu_- C(a))^{-1}\pi^{-2}. \quad (3.33)$$

Используя дискретное преобразование Фурье и следствие 5.5, имеем

$$\Big\|\sum_{j=1}^d [v_j](D_j+\xi_j)(\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^2 I)^{-1}(I-P)\Big\|\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^d \|v_j\|_{L_\infty}\sup_{0\neq \mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}|2\pi n_j+\xi_j|(\langle g^0(2\pi\mathbf{n}+\boldsymbol{\xi}),2\pi\mathbf{n}+\boldsymbol{\xi}\rangle+\varepsilon^2)^{-1}\leqslant$$

$$\leqslant \Big(\sum_{j=1}^d \|v_j\|^2_{L_\infty}\Big)^{1/2}(\mu_- C(a)\pi)^{-1}. \quad (3.34)$$

В итоге, из (3.32)–(3.34) вытекает искомая оценка (3.30) с постоянной

$$\mathrm{C}_2(a,\mu)=\widetilde{C}_6(a,\mu)+(\mu_- C(a))^{-1}\pi^{-2}+2\Big(\sum_{j=1}^d \|v_j\|^2_{L_\infty}\Big)^{1/2}(\mu_- C(a)\pi)^{-1}.$$

Заметим, что нормы $\|v_j\|_{L_\infty}$ подчинены оценкам (5.29). □

3.3. **Аппроксимация резольвенты** $(\mathbb{A}+\varepsilon^2 I)^{-1}$.

Теорема 3.6. *Пусть выполнены условия* (1.1)–(1.3) *и* $M_3(a)<\infty$. *Тогда справедлива оценка*

$$\big\|(\mathbb{A}+\varepsilon^2 I)^{-1}-(\mathbb{A}^0+\varepsilon^2 I)^{-1}\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant \mathrm{C}_1(a,\mu)\varepsilon^{-1},\quad \varepsilon>0. \quad (3.35)$$

Доказательство. Из разложений (1.7) и (3.13) следует, что оператор под знаком нормы в (3.35) с помощью преобразования Гельфанда раскладывается в прямой интеграл по операторам $(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^2 I)^{-1}-(\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^2 I)^{-1}$. Следовательно,

$$\big\|(\mathbb{A}+\varepsilon^2 I)^{-1}-(\mathbb{A}^0+\varepsilon^2 I)^{-1}\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}$$

$$=\sup_{\boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}}\big\|(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^2 I)^{-1}-(\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^2 I)^{-1}\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}.$$

Поэтому оценка (3.35) вытекает из (3.14). □

Теорема 3.7. *Пусть выполнены условия* (1.1)–(1.3) *и* $M_4(a)<\infty$. *Тогда справедлива оценка*

$$\big\|(\mathbb{A}+\varepsilon^2 I)^{-1}-(\mathbb{A}^0+\varepsilon^2 I)^{-1}-K(\varepsilon)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant \mathrm{C}_2(a,\mu),\quad \varepsilon>0. \quad (3.36)$$

Здесь

$$K(\varepsilon):=-\sum_{j=1}^d [v_j]\partial_j(\mathbb{A}^0+\varepsilon^2 I)^{-1}+\sum_{j=1}^d(\mathbb{A}^0+\varepsilon^2 I)^{-1}\partial_j[v_j], \quad (3.37)$$

символ $[v_j]$ *означает оператор умножения на функцию* $v_j(\mathbf{x})$.

Доказательство. Оператор под знаком нормы в (3.36) с помощью преобразования Гельфанда раскладывается в прямой интеграл по операторам $(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 I)^{-1} - (\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 I)^{-1} - K(\boldsymbol{\xi}, \varepsilon)$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\big\|(\mathbb{A} + \varepsilon^2 I)^{-1} &- (\mathbb{A}^0 + \varepsilon^2 I)^{-1} - K(\varepsilon)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &= \sup_{\boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}} \big\|(\mathbb{A}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 I)^{-1} - (\mathbb{A}^0(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 I)^{-1} - K(\boldsymbol{\xi}, \varepsilon)\big\|_{L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Отсюда и из (3.30) вытекает оценка (3.36). $\square$

§ 4. Усреднение нелокального оператора свёрточного типа

4.1. **Основные результаты.** Предполагая выполненными условия (1.1)–(1.3), рассмотрим семейство нелокальных операторов в $L_2(\mathbb{R}^d)$, заданных по правилу

$$\mathbb{A}_\varepsilon u(\mathbf{x}) := \varepsilon^{-d-2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} a((\mathbf{x} - \mathbf{y})/\varepsilon) \mu(\mathbf{x}/\varepsilon, \mathbf{y}/\varepsilon)(u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y}))\, d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d), \quad \varepsilon > 0.$$

Пусть эффективный оператор $\mathbb{A}^0$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$ определен в (3.12). Напомним, что эффективная матрица g^0 — это матрица с элементами $\frac{1}{2} g_{kl}$, где коэффициенты g_{kl}, $k, l = 1, \dots, d$, определены в (2.61).

Из теоремы 3.6 с помощью масштабного преобразования выводится следующий результат, полученный в [14, теорема 4.1]; для полноты изложения мы приводим доказательство.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия* (1.1)–(1.3) *и* $M_3(a) < \infty$. *Тогда справедлива оценка*

$$\|(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_1(a, \mu)\varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \tag{4.1}$$

Постоянная $\mathrm{C}_1(a, \mu)$ *контролируется через следующие величины*: d, μ_-, μ_+, $M_1(a)$, $M_2(a)$, $M_3(a)$, $\mathcal{M}(a)$, $\mathcal{C}_\pi(a)$, $\mathcal{C}_{r(a)}(a)$.

Доказательство. Введем масштабное преобразование (семейство унитарных операторов):

$$T_\varepsilon u(\mathbf{x}) := \varepsilon^{d/2} u(\varepsilon \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d), \quad \varepsilon > 0.$$

Нетрудно проверить равенство

$$\mathbb{A}_\varepsilon = \varepsilon^{-2} T_\varepsilon^* \mathbb{A} T_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Следовательно,

$$(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} = T_\varepsilon^* \varepsilon^2 (\mathbb{A} + \varepsilon^2 I)^{-1} T_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \tag{4.2}$$

Для эффективного оператора также выполнено тождество

$$\mathbb{A}^0 = \varepsilon^{-2} T_\varepsilon^* \mathbb{A}^0 T_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

а потому

$$(\mathbb{A}^0 + I)^{-1} = T_\varepsilon^* \varepsilon^2 (\mathbb{A}^0 + \varepsilon^2 I)^{-1} T_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \tag{4.3}$$

Из (4.2) и (4.3) с учетом унитарности оператора T_ε вытекает равенство

$$\|(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} = \varepsilon^2 \|(\mathbb{A} + \varepsilon^2 I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + \varepsilon^2 I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Отсюда и из теоремы 3.6 вытекает искомая оценка (4.1). $\square$

Наш *основной новый результат* представляет следующая теорема.

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия* (1.1)–(1.3) *и* $M_4(a) < \infty$. *Тогда справедлива оценка*

$$\|(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon K_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_2(a, \mu)\varepsilon^2, \quad \varepsilon > 0. \tag{4.4}$$

Корректор K_ε *задан соотношением*

$$K_\varepsilon = -\sum_{j=1}^d [v_j^\varepsilon] \partial_j (\mathbb{A}^0 + I)^{-1} + \sum_{j=1}^d (\mathbb{A}^0 + I)^{-1} \partial_j [v_j^\varepsilon],$$

функции $v_j(\mathbf{x})$ являются решениями задач (2.39); $[v_j^\varepsilon]$ *— оператор умножения на функцию $v_j(\mathbf{x}/\varepsilon)$. Постоянная $\mathrm{C}_2(a,\mu)$ контролируется через следующие величины: d, μ_-, μ_+, $M_1(a)$, $M_2(a)$, $M_3(a)$, $M_4(a)$, $\mathcal{M}(a)$, $\mathcal{C}_\pi(a)$, $\mathcal{C}_{r(a)}(a)$ и $\mathfrak{C}(\widetilde{a},\mu)$.*

Доказательство. Воспользуемся соотношениями (4.2), (4.3), а также равенством

$$K_\varepsilon = T_\varepsilon^* \varepsilon K(\varepsilon) T_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

где $K(\varepsilon)$ — оператор (3.37). С учетом унитарности оператора T_ε получаем

$$\|(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon K_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = \varepsilon^2 \|(\mathbb{A} + \varepsilon^2 I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + \varepsilon^2 I)^{-1} - K(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Отсюда и из теоремы 3.7 вытекает искомая оценка (4.4). $\square$

4.2. **Заключительные замечания.** 1. Теоремы 4.1 и 4.2 сохраняют силу, если решетку периодов $\mathbb{Z}^d$ заменить на произвольную решетку в $\mathbb{R}^d$. Тогда постоянные в оценках будут зависеть не только от коэффициентов a и μ, но и от параметров решетки.

2. В [14, §4], при дополнительном условии $a \in L_2(\mathbb{R}^d)$ получены оценки величин $\mathcal{M}(a)$, $\mathcal{C}_\pi(a)$, $\mathcal{C}_{r(a)}(a)$, из которых следует, что константу $\mathrm{C}_1(a,\mu)$ можно оценить сверху в терминах параметров d, μ_-, μ_+, $\|a\|_{L_1}$, $\|a\|_{L_2}$, $M_1(a)$, $M_2(a)$, $M_3(a)$. Ниже в замечании 5.6 отмечено, что при дополнительном условии $\widetilde{a} = \widetilde{a}(\mathbf{0},\cdot) \in L_2(\Omega)$ нормы $\|v_j\|_{L_\infty}$, $j = 1,\dots,d$, допускают контроль в терминах μ_-, μ_+, $\|a\|_{L_1}$, $\|\widetilde{a}\|_{L_2(\Omega)}$, $\mathcal{C}_\pi(a)$ и $M_1(a)$. Тем самым, при дополнительном условии $\widetilde{a} \in L_2(\Omega)$ (а тогда условие $a \in L_2(\mathbb{R}^d)$ автоматически выполнено) константу $\mathrm{C}_2(a,\mu)$ можно оценить сверху в терминах параметров d, μ_-, μ_+, $\|a\|_{L_1}$, $\|\widetilde{a}\|_{L_2(\Omega)}$, $M_1(a)$, $M_2(a)$, $M_3(a)$, $M_4(a)$.

3. Если в условиях теоремы 4.1 заменить условие $M_3(a) < \infty$ условием

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^k a(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} < \infty, \tag{4.5}$$

где $2 < k < 3$, то выполнена оценка

$$\|(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon^{k-2}, \quad \varepsilon > 0.$$

Если в условиях теоремы 4.2 заменить условие $M_4(a) < \infty$ условием (4.5) при $3 < k < 4$, то выполнена оценка

$$\|(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon K_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon^{k-2}, \quad \varepsilon > 0.$$

§ 5. Приложение: ограниченность решений вспомогательных задач

5.1. **Приближение оператора $\mathbb{A}(\mathbf{0})$.** Рассмотрим функцию

$$\widetilde{a}(\mathbf{z}) := \widetilde{a}(\mathbf{0},\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} a(\mathbf{z}+\mathbf{n}), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d, \tag{5.1}$$

см. (1.10). Из (1.1) и (5.1) следует, что $\widetilde{a}(\mathbf{z})$ — неотрицательная $\mathbb{Z}^d$-периодическая функция, причем $\widetilde{a}(\mathbf{z}) = \widetilde{a}(-\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d$; $\widetilde{a} \in L_1(\Omega)$ и

$$\|\widetilde{a}\|_{L_1(\Omega)} = \|a\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} > 0. \tag{5.2}$$

При каждом $N \in \mathbb{N}$ положим

$$\widetilde{a}_N(\mathbf{z}) := \begin{cases} \widetilde{a}(\mathbf{z}), & \text{если } \widetilde{a}(\mathbf{z}) \leqslant N, \\ N, & \text{если } \widetilde{a}(\mathbf{z}) > N. \end{cases} \tag{5.3}$$

Очевидно, $\widetilde{a}_N(\mathbf{z})$ — $\mathbb{Z}^d$-периодическая функция, причем

$$0 \leqslant \widetilde{a}_N(\mathbf{z}) \leqslant \widetilde{a}(\mathbf{z}), \quad \widetilde{a}_N(\mathbf{z}) = \widetilde{a}_N(-\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d, \quad N \in \mathbb{N},$$

и

$$\lim_{N\to\infty} \widetilde{a}_N(\mathbf{z}) = \widetilde{a}(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d.$$

Тогда в силу теоремы Лебега

$$\|\widetilde{a}_N - \widetilde{a}\|_{L_1(\Omega)} \to 0 \quad \text{при } N \to \infty. \tag{5.4}$$

Согласно (5.2), $\widetilde{a}(\mathbf{z}) > 0$ на множестве положительной меры на Ω. Из (5.3) следует, что $\widetilde{a}_N(\mathbf{z}) > 0$ на том же множестве (при всех $N \in \mathbb{N}$). Кроме того,

$$\widetilde{a}_N(\mathbf{z}) \leqslant \widetilde{a}_{N+1}(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d, \quad N \in \mathbb{N}. \tag{5.5}$$

Следовательно,

$$0 < \|\widetilde{a}_1\|_{L_1(\Omega)} \leqslant \|\widetilde{a}_N\|_{L_1(\Omega)} \leqslant \|\widetilde{a}\|_{L_1(\Omega)}, \quad N \in \mathbb{N}. \tag{5.6}$$

Рассмотрим теперь ограниченный самосопряженный оператор $\mathbf{A} := \mathbb{A}(\mathbf{0})$ в $L_2(\Omega)$, определенный согласно (1.8), (1.9):

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}u(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) - \mathbf{B}u(\mathbf{x}),\\
&\mathbf{B}u(\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega} \widetilde{a}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mu(\mathbf{x},\mathbf{y})u(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}, \quad u \in L_2(\Omega),
\end{aligned}$$

где

$$p(\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega} \widetilde{a}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mu(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{y},$$

см. (1.11). (Прежде оператор $\mathbf{B}$ обозначался $\mathbb{B}(\mathbf{0})$.) Напомним оценки

$$\mu_-\|\widetilde{a}\|_{L_1(\Omega)} \leqslant p(\mathbf{x}) \leqslant \mu_+\|\widetilde{a}\|_{L_1(\Omega)}, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{5.7}$$

При каждом $N \in \mathbb{N}$ определим ограниченный самосопряженный оператор $\mathbf{A}_N$ в $L_2(\Omega)$ по правилу

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}_N u(\mathbf{x}) := p_N(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) - \mathbf{B}_N u(\mathbf{x}),\\
&\mathbf{B}_N u(\mathbf{x}) := \int\limits_{\Omega} \widetilde{a}_N(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mu(\mathbf{x},\mathbf{y})u(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}, \quad u \in L_2(\Omega),
\end{aligned} \tag{5.8}$$

где

$$p_N(\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega} \widetilde{a}_N(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mu(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{y}. \tag{5.9}$$

Очевидно,

$$\begin{gathered}
0 < \mu_-\|\widetilde{a}_N\|_{L_1(\Omega)} \leqslant p_N(\mathbf{x}) \leqslant \mu_+\|\widetilde{a}_N\|_{L_1(\Omega)}, \\
\|p_N - p\|_{L_\infty} \leqslant \mu_+\|\widetilde{a}_N - \widetilde{a}\|_{L_1(\Omega)}.
\end{gathered} \tag{5.10}$$

В силу леммы Шура

$$\|\mathbf{B}_N - \mathbf{B}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mu_+\|\widetilde{a}_N - \widetilde{a}\|_{L_1(\Omega)}.$$

Следовательно,

$$\|\mathbf{A}_N - \mathbf{A}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant 2\mu_+\|\widetilde{a}_N - \widetilde{a}\|_{L_1(\Omega)}. \tag{5.11}$$

С учетом (5.4) отсюда следует, что $\|\mathbf{A}_N - \mathbf{A}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \to 0$ при $N \to \infty$.

5.2. **Приближение оператора $\mathbf{A}_\perp^{-1}$.** Напомним, что ядро $\operatorname{Ker}\mathbf{A}$ одномерно и состоит из констант: $\mathfrak{N} := \operatorname{Ker}\mathbf{A} = \mathcal{L}\{\mathbf{1}_\Omega\}$. В силу самосопряженности оператора $\mathbf{A}$ имеем $\operatorname{Ran}\mathbf{A} = \mathfrak{N}^\perp$. Корректно определен оператор $\mathbf{A}_\perp : \mathfrak{N}^\perp \to \mathfrak{N}^\perp$, являющийся сужением оператора $\mathbf{A}$ на подпространство

$$\mathfrak{N}^\perp = \left\{ u \in L_2(\Omega) : \int_\Omega u(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0 \right\}.$$

Оператор $\mathbf{A}_\perp$ обратим и, согласно (1.19), справедлива оценка

$$\|\mathbf{A}_\perp^{-1}\|_{\mathfrak{N}^\perp\to\mathfrak{N}^\perp} \leqslant (\mu_-\mathcal{C}_\pi(a))^{-1}. \tag{5.12}$$

Лемма 5.1. *При всех $N \in \mathbb{N}$ выполнено* $\operatorname{Ker} \mathbf{A}_N = \mathfrak{N}$. *Корректно определен оператор* $\mathbf{A}_{N,\perp} : \mathfrak{N}^\perp \to \mathfrak{N}^\perp$, *являющийся сужением оператора* $\mathbf{A}_N$ *на подпространство* $\mathfrak{N}^\perp$. *Оператор* $\mathbf{A}_{N,\perp}$ *обратим и справедлива оценка*

$$\|\mathbf{A}_{N,\perp}^{-1}\|_{\mathfrak{N}^\perp \to \mathfrak{N}^\perp} \leqslant \|\mathbf{A}_{1,\perp}^{-1}\|_{\mathfrak{N}^\perp \to \mathfrak{N}^\perp} \leqslant \left(\mu_- \widetilde{\mathcal{C}}_{2\pi}(\widetilde{a}_1)\right)^{-1}, \quad N \in \mathbb{N}, \tag{5.13}$$

где величина $\widetilde{\mathcal{C}}_{2\pi}(\widetilde{a}_1)$ *определена ниже согласно* (5.17), (5.18).

Доказательство. Из (5.8), (5.9) видно, что $\mathbf{1}_\Omega \in \operatorname{Ker} \mathbf{A}_N$. Покажем, что $\operatorname{Ker} \mathbf{A}_N = \mathfrak{N}$.

Нетрудно проверить справедливость представления

$$(\mathbf{A}_N u, u)_{L_2(\Omega)} = \frac{1}{2} \int\limits_\Omega d\mathbf{x} \int\limits_\Omega d\mathbf{y}\, \widetilde{a}_N(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) \big|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})\big|^2, \quad u \in L_2(\Omega), \tag{5.14}$$

ср. (1.12). Отсюда с учетом (5.5) следует, что

$$(\mathbf{A}_N u, u)_{L_2(\Omega)} \leqslant (\mathbf{A}_{N+1} u, u)_{L_2(\Omega)}, \quad u \in L_2(\Omega), \quad N \in \mathbb{N}. \tag{5.15}$$

Поэтому для нашей цели достаточно рассмотреть оператор $\mathbf{A}_1$ (случай $N = 1$).

Из (5.14) при $N = 1$ с учетом оценок для функции μ (см. (1.2)) вытекают неравенства

$$\mu_- \mathbf{A}_1^0 \leqslant \mathbf{A}_1 \leqslant \mu_+ \mathbf{A}_1^0, \tag{5.16}$$

где $\mathbf{A}_1^0$ — оператор вида (5.8) с коэффициентами $\widetilde{a}_1$ и $\mu = \mu_0 \equiv 1$. Оператор $\mathbf{A}_1^0$ диагонализуется с помощью дискретного преобразования Фурье $\mathcal{F}$ (ср. п. 1.4): $\mathbf{A}_1^0$ унитарно эквивалентен оператору умножения на символ

$$\widehat{A}_1(2\pi\mathbf{n}) := (\mathcal{F}\widetilde{a}_1)(\mathbf{0}) - (\mathcal{F}\widetilde{a}_1)(\mathbf{n}) = \int_\Omega \widetilde{a}_1(\mathbf{z})(1 - \cos\langle \mathbf{z}, 2\pi\mathbf{n}\rangle)\, d\mathbf{z}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d,$$

в пространстве $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$. По аналогии с аргументами из п. 1.4, рассмотрим величину

$$\widehat{A}_1(\mathbf{y}) = \int_\Omega \widetilde{a}_1(\mathbf{z})(1 - \cos\langle \mathbf{z}, \mathbf{y}\rangle)\, d\mathbf{z} = \frac{1}{2} \int_\Omega \widetilde{a}_1(\mathbf{z}) \sin^2\left(\frac{\langle \mathbf{z}, \mathbf{y}\rangle}{2}\right) d\mathbf{z}. \tag{5.17}$$

С учетом (5.6) справедливо следующее: функция $\widehat{A}_1(\mathbf{y})$ непрерывна, стремится к $\|\widetilde{a}_1\|_{L_1(\Omega)} > 0$ при $|\mathbf{y}| \to \infty$ и $\widehat{A}_1(\mathbf{y}) > 0$ при $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Следовательно,

$$\widetilde{\mathcal{C}}_{2\pi}(\widetilde{a}_1) := \min_{|\mathbf{y}| \geqslant 2\pi} \widehat{A}_1(\mathbf{y}) > 0. \tag{5.18}$$

Поскольку $\widehat{A}_1(2\pi\mathbf{n}) \geqslant \widetilde{\mathcal{C}}_{2\pi}(\widetilde{a}_1)$ при $\mathbf{0} \neq \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$, то

$$(\mathbf{A}_1^0 u, u)_{L_2(\Omega)} \geqslant \widetilde{\mathcal{C}}_{2\pi}(\widetilde{a}_1) \|u\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad u \in \mathfrak{N}^\perp.$$

Вместе с (5.16) это влечет

$$(\mathbf{A}_1 u, u)_{L_2(\Omega)} \geqslant \mu_- \widetilde{\mathcal{C}}_{2\pi}(\widetilde{a}_1) \|u\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad u \in \mathfrak{N}^\perp.$$

Отсюда, учитывая (5.15) и вспоминая, что $\mathbf{1}_\Omega \in \operatorname{Ker} \mathbf{A}_N$, получаем, что $\operatorname{Ker} \mathbf{A}_N = \mathfrak{N}$ при всех $N \in \mathbb{N}$. Тогда корректно определен оператор $\mathbf{A}_{N,\perp} : \mathfrak{N}^\perp \to \mathfrak{N}^\perp$, являющийся сужением оператора $\mathbf{A}_N$ на подпространство $\mathfrak{N}^\perp$. При этом справедлива оценка (5.13). □

Лемма 5.2. *Справедливо соотношение*

$$\|\mathbf{A}_{N,\perp}^{-1} - \mathbf{A}_\perp^{-1}\|_{\mathfrak{N}^\perp \to \mathfrak{N}^\perp} \to 0 \quad \text{\textit{при} } N \to \infty.$$

Доказательство. Запишем резольвентное тождество

$$\mathbf{A}_{N,\perp}^{-1} - \mathbf{A}_\perp^{-1} = \mathbf{A}_{N,\perp}^{-1} (\mathbf{A} - \mathbf{A}_N) \mathbf{A}_\perp^{-1}.$$

Отсюда и из оценок (5.11)–(5.13) следует неравенство

$$\|\mathbf{A}_{N,\perp}^{-1} - \mathbf{A}_\perp^{-1}\|_{\mathfrak{N}^\perp \to \mathfrak{N}^\perp} \leqslant 2\mu_+ \left(\mu_-^2 \mathcal{C}_\pi(a) \widetilde{\mathcal{C}}_{2\pi}(\widetilde{a}_1)\right)^{-1} \|\widetilde{a}_N - \widetilde{a}\|_{L_1(\Omega)}.$$

Остается учесть (5.4). $\square$

5.3. **Равномерная оценка нормы решения $v_N = \mathbf{A}_{N,\perp}^{-1} w$ в L_∞.** В пространстве $L_\infty(\Omega)$ рассмотрим подпространство функций с нулевым средним:

$$L_\infty^\perp(\Omega) := \left\{ u \in L_\infty(\Omega): \int_\Omega u(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0 \right\}.$$

Пусть $w \in L_\infty^\perp(\Omega)$ и $v_N := \mathbf{A}_{N,\perp}^{-1} w$, то есть $v_N \in L_2(\Omega)$ является решением задачи

$$\int\limits_\Omega \widetilde{a}_N(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mu(\mathbf{x},\mathbf{y})(v_N(\mathbf{x}) - v_N(\mathbf{y}))\,d\mathbf{y} = w(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega; \quad \int\limits_\Omega v_N(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0. \tag{5.19}$$

Учитывая (5.9) и (5.10), перепишем задачу (5.19) в виде

$$v_N(\mathbf{x}) = \frac{w(\mathbf{x})}{p_N(\mathbf{x})} - \frac{1}{p_N(\mathbf{x})} \int\limits_\Omega \widetilde{a}_N(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) v_N(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Omega; \quad \int\limits_\Omega v_N(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0. \tag{5.20}$$

Отсюда с учетом (5.3), (5.10) и леммы 5.1 следует, что решение $v_N(\mathbf{x})$ ограничено:

$$\begin{aligned}\|v_N\|_{L_\infty(\Omega)} &\leqslant \frac{\|w\|_{L_\infty(\Omega)}}{\mu_- \|\widetilde{a}_N\|_{L_1(\Omega)}} + \frac{N\mu_+ \|v_N\|_{L_2(\Omega)}}{\mu_- \|\widetilde{a}_N\|_{L_1(\Omega)}} \leqslant \frac{\|w\|_{L_\infty(\Omega)}}{\mu_- \|\widetilde{a}_N\|_{L_1(\Omega)}} + \frac{N\mu_+ \|w\|_{L_2(\Omega)}}{\mu_-^2 \widetilde{\mathcal{C}}_{2\pi}(\widetilde{a}_1) \|\widetilde{a}_N\|_{L_1(\Omega)}} \\ &\leqslant \mathfrak{C}_N \|w\|_{L_\infty(\Omega)}, \quad \mathfrak{C}_N = \left(\mu_- \|\widetilde{a}_N\|_{L_1(\Omega)}\right)^{-1} + N\mu_+ \left(\mu_-^2 \widetilde{\mathcal{C}}_{2\pi}(\widetilde{a}_1) \|\widetilde{a}_N\|_{L_1(\Omega)}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Это означает, что оператор $\mathbf{A}_{N,\perp}^{-1}$ переводит $L_\infty^\perp(\Omega)$ в себя и выполнена оценка

$$\|\mathbf{A}_{N,\perp}^{-1}\|_{L_\infty^\perp(\Omega) \to L_\infty^\perp(\Omega)} \leqslant \mathfrak{C}_N.$$

Наша ближайшая цель — получить равномерную оценку нормы этого оператора.

Лемма 5.3. *Справедлива оценка*

$$\|\mathbf{A}_{N,\perp}^{-1}\|_{L_\infty^\perp(\Omega) \to L_\infty^\perp(\Omega)} \leqslant \mathfrak{C}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Постоянная $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(\widetilde{a}, \mu)$ определена ниже в (5.27).

Доказательство. Как и выше, пусть $w \in L_\infty^\perp(\Omega)$ и $v_N := \mathbf{A}_{N,\perp}^{-1} w$. Оценим норму решения v_N в $L_\infty(\Omega)$; достаточно считать, что $\|w\|_{L_\infty(\Omega)} > 0$. Из (5.20) с учетом (5.6) и (5.10) следует, что

$$|v_N(\mathbf{x})| \leqslant \frac{\|w\|_{L_\infty(\Omega)}}{\mu_- \|\widetilde{a}_1\|_{L_1(\Omega)}} + \frac{1}{\mu_- \|\widetilde{a}_1\|_{L_1(\Omega)}} \int\limits_\Omega \widetilde{a}_N(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) |v_N(\mathbf{y})|\,d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{5.21}$$

Представим интеграл в правой части в виде суммы двух интегралов — по множествам $\Omega_{N,1}$ и $\Omega_{N,2} := \Omega \setminus \Omega_{N,1}$. Здесь

$$\Omega_{N,1} := \left\{ \mathbf{x} \in \Omega: \ |v_N(\mathbf{x})| > \|w\|_{L_\infty(\Omega)}^{1/2} \|v_N\|_{L_\infty(\Omega)}^{1/2} \right\}.$$

Поскольку при $\mathbf{x} \in \Omega_{N,2}$ выполнено $|v_N(\mathbf{x})| \leqslant \|w\|_{L_\infty(\Omega)}^{1/2} \|v_N\|_{L_\infty(\Omega)}^{1/2}$, получаем

$$\int\limits_{\Omega_{N,2}} \widetilde{a}_N(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) |v_N(\mathbf{y})|\,d\mathbf{y} \leqslant \mu_+ \|w\|_{L_\infty(\Omega)}^{1/2} \|v_N\|_{L_\infty(\Omega)}^{1/2} \|\widetilde{a}\|_{L_1(\Omega)}. \tag{5.22}$$

Мы учли очевидное неравенство $\widetilde{a}_N(\mathbf{z}) \leqslant \widetilde{a}(\mathbf{z})$.

Из определения множества $\Omega_{N,1}$ и леммы 5.1 вытекает оценка

$$\begin{aligned}\operatorname{mes}\Omega_{N,1} &\leqslant \int\limits_{\Omega_{N,1}} \frac{|v_N(\mathbf{x})|}{\|w\|^{1/2}_{L_\infty(\Omega)}\|v_N\|^{1/2}_{L_\infty(\Omega)}}\,d\mathbf{x} \leqslant \frac{\|v_N\|_{L_2(\Omega)}}{\|w\|^{1/2}_{L_\infty(\Omega)}\|v_N\|^{1/2}_{L_\infty(\Omega)}} \\ &\leqslant \frac{\|w\|_{L_2(\Omega)}}{\mu_-\widetilde{\mathcal{C}}_{2\pi}(\widetilde{a}_1)\|w\|^{1/2}_{L_\infty(\Omega)}\|v_N\|^{1/2}_{L_\infty(\Omega)}} \leqslant \frac{\|w\|^{1/2}_{L_\infty(\Omega)}}{\mu_-\widetilde{\mathcal{C}}_{2\pi}(\widetilde{a}_1)\|v_N\|^{1/2}_{L_\infty(\Omega)}}.\end{aligned} \tag{5.23}$$

Поскольку $\widetilde{a}_N(\mathbf{z}) \leqslant \widetilde{a}(\mathbf{z})$, имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega_{N,1}} \widetilde{a}_N(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mu(\mathbf{x},\mathbf{y})|v_N(\mathbf{y})|\,d\mathbf{y} &\leqslant \mu_+\|v_N\|_{L_\infty(\Omega)}\int\limits_{\Omega_{N,1}} \widetilde{a}_N(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,d\mathbf{y} \\ &\leqslant \mu_+\|v_N\|_{L_\infty(\Omega)}\int\limits_{\Omega_{N,1}} \widetilde{a}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,d\mathbf{y}.\end{aligned} \tag{5.24}$$

Введем обозначение

$$F_{\widetilde{a}}(t) := \sup\left\{\int_{\mathcal{O}} \widetilde{a}(\mathbf{z})\,d\mathbf{z}:\ \mathcal{O}\subset[-2,2]^d,\ \operatorname{mes}\mathcal{O}\leqslant t\right\},\quad t>0. \tag{5.25}$$

Очевидно, функция $F_{\widetilde{a}}(t)$ — монотонно неубывающая и $F_{\widetilde{a}}(t)\to 0$ при $t\to +0$. Из (5.23)–(5.25) вытекает оценка

$$\int\limits_{\Omega_{N,1}} \widetilde{a}_N(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mu(\mathbf{x},\mathbf{y})|v_N(\mathbf{y})|\,d\mathbf{y} \leqslant \mu_+\|v_N\|_{L_\infty(\Omega)}F_{\widetilde{a}}\left(\left(\mu_-\widetilde{\mathcal{C}}_{2\pi}(\widetilde{a}_1)\right)^{-1}\|w\|^{1/2}_{L_\infty(\Omega)}\|v_N\|^{-1/2}_{L_\infty(\Omega)}\right).$$

Вместе с (5.21) и (5.22) это влечет

$$\begin{aligned}\|v_N\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant& \frac{1}{\mu_-\|\widetilde{a}_1\|_{L_1(\Omega)}}\Big(\|w\|_{L_\infty(\Omega)} + \mu_+\|w\|^{1/2}_{L_\infty(\Omega)}\|v_N\|^{1/2}_{L_\infty(\Omega)}\|\widetilde{a}\|_{L_1(\Omega)} \\ &+\mu_+\|v_N\|_{L_\infty(\Omega)}F_{\widetilde{a}}\left(\left(\mu_-\widetilde{\mathcal{C}}_{2\pi}(\widetilde{a}_1)\right)^{-1}\|w\|^{1/2}_{L_\infty(\Omega)}\|v_N\|^{-1/2}_{L_\infty(\Omega)}\right)\Big).\end{aligned} \tag{5.26}$$

Фиксируем число $t_0 = t_0(\widetilde{a},\mu) > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\mu_+F_{\widetilde{a}}(t_0)}{\mu_-\|\widetilde{a}_1\|_{L_1(\Omega)}} \leqslant \frac{1}{2}.$$

В случае, когда $\left(\mu_-\widetilde{\mathcal{C}}_{2\pi}(\widetilde{a}_1)\right)^{-1}\|w\|^{1/2}_{L_\infty(\Omega)}\|v_N\|^{-1/2}_{L_\infty(\Omega)} > t_0$, очевидно, что

$$\|v_N\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \frac{\|w\|_{L_\infty(\Omega)}}{\left(t_0\mu_-\widetilde{\mathcal{C}}_{2\pi}(\widetilde{a}_1)\right)^2}.$$

В случае, когда $\left(\mu_-\widetilde{\mathcal{C}}_{2\pi}(\widetilde{a}_1)\right)^{-1}\|w\|^{1/2}_{L_\infty(\Omega)}\|v_N\|^{-1/2}_{L_\infty(\Omega)} \leqslant t_0$, из (5.26) следует неравенство

$$\frac{1}{2}\|v_N\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \frac{1}{\mu_-\|\widetilde{a}_1\|_{L_1(\Omega)}}\left(\|w\|_{L_\infty(\Omega)} + \mu_+\|w\|^{1/2}_{L_\infty(\Omega)}\|v_N\|^{1/2}_{L_\infty(\Omega)}\|\widetilde{a}\|_{L_1(\Omega)}\right).$$

Это квадратичное неравенство относительно $X := \|v_N\|^{1/2}_{L_\infty(\Omega)}$. Перепишем его в виде

$$X^2 - \frac{2\mu_+\|w\|^{1/2}_{L_\infty(\Omega)}}{\mu_-}X \leqslant \frac{2\|w\|_{L_\infty(\Omega)}}{\mu_-\|\widetilde{a}_1\|_{L_1(\Omega)}}.$$

Решая это неравенство, получаем

$$\|v_N\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \left(\frac{\mu_+}{\mu_-} + \left(\frac{2}{\mu_-\|\widetilde{a}_1\|_{L_1(\Omega)}} + \frac{\mu_+^2}{\mu_-^2}\right)^{1/2}\right)^2\|w\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

В итоге приходим к оценке

$$\|v_N\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \mathfrak{C}\|w\|_{L_\infty(\Omega)},$$

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(\widetilde{a},\mu) := \max\left\{ \frac{1}{\big(t_0\mu_- \widetilde{\mathcal{C}}_{2\pi}(\widetilde{a}_1)\big)^2}, \left(\frac{\mu_+}{\mu_-} + \left(\frac{2}{\mu_-\|\widetilde{a}_1\|_{L_1(\Omega)}} + \frac{\mu_+^2}{\mu_-^2}\right)^{1/2}\right)^2 \right\}. \tag{5.27}$$

$\square$

5.4. **Ограниченность решения $v = \mathbf{A}_\perp^{-1} w$.** Пусть, как и прежде, $w \in L_\infty^\perp(\Omega)$ и $v := \mathbf{A}_\perp^{-1} w$, то есть $v \in L_2(\Omega)$ является решением задачи

$$\int\limits_\Omega \widetilde{a}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mu(\mathbf{x},\mathbf{y})(v(\mathbf{x}) - v(\mathbf{y}))\,d\mathbf{y} = w(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega; \quad \int\limits_\Omega v(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0. \tag{5.28}$$

Как и в пункте 5.3, пусть $v_N := \mathbf{A}_{N,\perp}^{-1} w$ — решение задачи (5.19). Из леммы 5.2 следует, что

$$\|v_N - v\|_{L_2(\Omega)} \to 0 \quad \text{при } N \to \infty.$$

Тогда в силу теоремы Рисса существует подпоследовательность $N_k \to \infty$, такая что

$$v_{N_k}(\mathbf{x}) \to v(\mathbf{x}), \quad k \to \infty, \text{ при почти всех } \mathbf{x} \in \Omega.$$

В силу леммы 5.3

$$|v_{N_k}(\mathbf{x})| \leqslant \mathfrak{C}\|w\|_{L_\infty(\Omega)} \text{ при почти всех } \mathbf{x} \in \Omega.$$

Следовательно,

$$|v(\mathbf{x})| \leqslant \mathfrak{C}\|w\|_{L_\infty(\Omega)} \text{ при почти всех } \mathbf{x} \in \Omega.$$

Мы установили следующий результат.

Теорема 5.4. *Оператор $\mathbf{A}_\perp^{-1}$ переводит $L_\infty^\perp(\Omega)$ в себя и справедлива оценка*

$$\|\mathbf{A}_\perp^{-1}\|_{L_\infty^\perp(\Omega)\to L_\infty^\perp(\Omega)} \leqslant \mathfrak{C}.$$

Постоянная $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(\widetilde{a},\mu)$ определена в (5.27).

Следствие 5.5. *Пусть выполнены условия* (1.1)–(1.3) *и $M_1(a) < \infty$. Тогда решения $v_j(\mathbf{x})$, $j = 1,\dots,d$, задач* (2.38) *ограничены. Справедливы оценки*

$$\|v_j\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \mu_+ M_1(a)\mathfrak{C}(\widetilde{a},\mu), \quad j = 1,\dots,d. \tag{5.29}$$

Доказательство. Напомним, что $v_j = \mathbf{A}_\perp^{-1} w_j$, где функция $w_j(\mathbf{x})$ определена в (2.35). Легко видеть, что при условиях (1.1), (1.2) и $M_1(a) < \infty$ выполнено $w_j \in L_\infty^\perp(\Omega)$, причем

$$\|w_j\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \mu_+ M_1(a).$$

Отсюда и из теоремы 5.4 вытекает (5.29). $\square$

Замечание 5.6. *При дополнительном условии $\widetilde{a} \in L_2(\Omega)$ оценка решения задачи* (5.28) *получается непосредственно из уравнения*

$$v(\mathbf{x}) = \frac{w(\mathbf{x})}{p(\mathbf{x})} - \frac{1}{p(\mathbf{x})}\int\limits_\Omega \widetilde{a}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mu(\mathbf{x},\mathbf{y})v(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}$$

применением (5.7), (5.12) *и неравенства Шварца:*

$$\|v\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \frac{\|w\|_{L_\infty}}{\mu_-\|\widetilde{a}\|_{L_1(\Omega)}} + \frac{\mu_+\|\widetilde{a}\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{L_2(\Omega)}}{\mu_-\|\widetilde{a}\|_{L_1(\Omega)}} \leqslant \left(\frac{1}{\mu_-\|\widetilde{a}\|_{L_1(\Omega)}} + \frac{\mu_+\|\widetilde{a}\|_{L_2(\Omega)}}{\mu_-^2\mathcal{C}_\pi(a)\|\widetilde{a}\|_{L_1(\Omega)}}\right)\|w\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

Тогда решения v_j, $j = 1,\dots,d$, задач (2.38) *удовлетворяют оценкам*

$$\|v_j\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \mu_+ M_1(a)\left(\frac{1}{\mu_-\|\widetilde{a}\|_{L_1(\Omega)}} + \frac{\mu_+\|\widetilde{a}\|_{L_2(\Omega)}}{\mu_-^2\mathcal{C}_\pi(a)\|\widetilde{a}\|_{L_1(\Omega)}}\right), \quad j = 1,\dots,d,$$

и тем самым допускают контроль в терминах величин μ_-, μ_+, $\|\widetilde{a}\|_{L_1(\Omega)}$, $\|\widetilde{a}\|_{L_2(\Omega)}$, $\mathcal{C}_\pi(a)$, $M_1(a)$.

Список литературы

[1] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.

[2] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publishing Co., Amsterdam–New York, 1978.

[3] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), вып. 5, 1–108.

[4] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учётом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), вып. 6, 1–104.

[5] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учётом корректора. Приближение решений в классе Соболева* $H^1(\mathbb{R}^d)$, Алгебра и анализ **18** (2006), вып. 6, 1–130.

[6] Braides A., Piatnitski A., *Homogenization of quadratic convolution energies in periodically perforated domains*, Adv. Calc. Var. (2019), https://doi.org/10.1515/acv-2019-0083.

[7] Жиков В. В., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Докл. РАН **403** (2005), вып. 3, 305–308.

[8] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1993.

[9] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys. **12** (2005), no. 4, 515–524.

[10] Жиков В. В., Пастухова С. Е., *Операторные оценки в теории усреднения*, Успехи матем. наук **71** (2016), вып. 3, 27–122.

[11] Kondratiev Yu., Molchanov S., Pirogov S., Zhizhina E., *On ground state of some non local Schrödinger operators*, Appl. Anal. **96** (2017), no. 8, 1390–1400.

[12] Piatnitski A., Zhizhina E., *Periodic homogenization of nonlocal operators with a convolution-type kernel*, SIAM J. Math. Anal. **49** (2017), no. 1, 64–81.

[13] Piatnitski A., Zhizhina E., *Homogenization of biased convolution type operators*, Asymptotic Anal. **115** (2019), no. 3-4, 241–262.

[14] Piatnitski A., Sloushch V., Suslina T., Zhizhina E., *On operator estimates in homogenization of nonlocal operators of convolution type*, J. Diff. Equ. **352** (2023), 153–188.

[15] Скриганов М. М., *Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов*, Тр. МИАН СССР **171** (1985), 3–122.

[16] Суслина Т. А., *Теоретико-операторный подход к усреднению уравнений типа Шрёдингера с периодическими коэффициентами*, Успехи матем. наук **78** (2023), вып. 6.