PDMI Preprint — 06/2023

КЛАССИФИКАЦИЯ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ И МАТРИЧНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

А. М. ВЕРШИК

Памяти моего заочного учителя И. М. Гельфанда

Санкт-Петербургское отделение Математического Института им. В.А.Стеклова РАН, Санкт-Петербург; С-Петербургский Государственный Университет, Московский институт проблем передачи информации

E-mail: `vershik@pdmi.ras.ru`

27 октября 2023 г.

Abstract. Рассматривается понятие матричного (тензорного) распределения измеримой функции нескольких переменных; с одной стороны, это инвариант этой функции относительно некоторой группы преобразований переменных, а с другой, — есть специальная вероятностная мера в пространстве матриц (тензоров), обладающая инвариантностью относительно действия естественных бесконечных групп подстановок. Сложное взаимодействие обеих интерпретаций матричных (тензорных) распределений делает их важным объектом современного функционального анализа. Мы формулируем и доказываем теорему о том, что при некоторых условиях на измеримую функцию двух переменных ее матричное распределение является полным инвариантом.

Ключевые слова: классификация функций. матричное распределение, метрические тройки, индивидуальная эргодическая теорема

Исследование выполнено за счетгранта Российского научного фонда No. 21-11-00152

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

---

Содержание

1 ВВЕДЕНИЕ, ПОСТАНОВКА ВОПРОСА, ОБЗОР ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ

1.1 Общие замечания

Матричное распределение функции k переменных есть мера на множестве тензоров ранга k (матриц при $k = 2$), или, другими словами, — случайная матрица или тензор. При $k = 1$ это просто бернуллиевская мера на пространстве последовательностей (независимых) значений функции. При $k = 2, 3 \dots$ эта случайная матрица (тензор), строится по многомерной бернуллиевской выборке аргументов.

Вот простейший пример для k=2: если функция есть метрика на пространстве с непрерывной мерой (метрическая тройка, см. далее и [2]), то её матричное распределение есть мера на ограничениях метрики на счетные бернуллиевские сетки точек пространства, т.е случайная метрика на бернуллиевском счетном подмножестве. В общем случае, как мы увидим, для того чтобы матричное распределение функции стало ее полным инвариантом относительно замен переменных, необходимо снабдить его дополнительной структурой.

Впервые матричное распределение возникло по разным поводам в работах Олдоса [16], Громова (для метрик) [1] и автора [8] (см. далее). Позже оно рассматривалось в ряде статей: [6, 14, 15, 2]. Мы уточняем и обобщаем предыдущие работы и ставим ряд задач связанных с приложениями предлагаемой техники.

1.2 Определение изоморфизма измеримых функций

Пространство с непрерывной мерой, где будет задана измеримая функция, как правило, всегда одно и тоже с точностью до изоморфирма а именно, стандартное пространство с вероятностной мерой, пространство Лебега, но в этом пространстве можно определять различные системы сигма-подалгебр, их произведений и отождествлений. Тем самым понятию отдельной переменной дается точное истолкование как параметра, связанного с некоторой сигма-подалгеброй в сигма-алгебре области задания функции. В главном для нас случае, который мы только и рассматриваем, в пространстве с мерой, на котором функция определена, задана структура *прямого произведения некоторого числа стандартных сигма-алгебр*, и каждая подалгебра имеет свою меру и определяет свою переменную. Таким образом, область задания функции представлена как прямое произведение двух или конечного числа стандартных пространств Лебега с непрерывными мерами $(X_1\times, X_2\times\dots X_k, \mu_1\times\mu_2\times\dots\times\mu_k)$. Сигма-алгебра всех измеримых множеств пространства есть прямое произведение сигма-алгебр:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1\times\mathfrak{A}_2\times\dots\mathfrak{A}_k.$$

Заметим, что здесь переменные независимы в смысле теории меры, обобщения на более сложные случаи (когда независимые — в расхожем смысле — переменные не являются независимыми в вероятностном смысле) также удобно систематически осмысливать в терминах разложения глобальной сигма-алгебры пространства в ту или иную конфигурацию симгма-подалгебр. Здесь пойдет речь о самом простом случае прямого произведения. Уместно сказать, что теория конечных наборов сигма-подалгебр стандартного пространства и их инвариантов по мнению автора должна стать главным предметом геометрической теории меры.

Введем естественное для данной категории понятие изоморфизма измеримых функций:

Определение 1. *Две измеримые функции* $f_i(.,.,\dots,.), i = 1,2$ *от* k *переменных, заданные соответственно на произведениях пространств* $\prod_{j=1}^{k}(X_j^i,\mu_j^i)$ $i = 1,2$ *называются изоморфными, если существуют такие обратимые измеримые преобразования* $T_j : X_j^1 \longrightarrow X_j^2$*,* $j = 1,\dots k$*,* $T_j\mu_j^1 = \mu_j^2$*, что*

$$f_2(T_1x_1\dots T_kx_k) = f_1(x_1,x_2,\dots x_k)$$

при почти всех наборах переменных.

Это определение можно конкретизировать для специальных случаев, Например, если фиксирован изоморфизм сигма-алгебр $\mathfrak{A}_j$ между собой, то, полагая $T_j = T$ при всех j и рассматривая симметричные функции, мы определим понятие изомрфизма симметричных функций нескольких переменных. *Ставится задача нахождения инвариантов измеримых функций относительно приведенного понятия изоморфизма функций.* Фактически мы говорим о действии группы (или произведения групп) преобразований, сохраняющих меру на пространстве классов совпадающих почти всюду измеримых функций, и о *пространстве орбит* этого действия. Мы предлагаем ниже описание этого пространства.

1.3 Одна или несколько переменных

Для одной переменной речь идет об изоморфизме между двумя измеримыми функциями f_1, f_2, заданными на $[0,1]$: $f_2(Tx) = f_1(x)$ для почти всех x, где T обратимое $\mod 0$ измеримое отображение отрезка на себя, сохраняющее лебегову меру. Эта проблема давно решена в терминах теории измеримых разбиений Рохлина (см.[4]). Прежде всего — очевидно, что для измеримых, почти всюду однозначных функций распределение функции $f : X \to \mathbb{R}$ в обычном смысле, (как мера на множестве значений, т.е. мера $f_*(\mu)$) есть полный инвариант функции, а пространство борелевских мер на образе и есть пространтсво орбит проблемы изоморфизма взаимно однозначных функций.

В случае не взаимнооднозначных функций возникает измеримое разбиение на прообразы точек (с учетом кратности значений), к которым можно применить теорему Рохлина об общем виде инвариантов измеримого разбиения. Таким образом, проблема классификации функций одной переменной полностью решена, описаны сами полные инварианты и их пространство.

Может показаться, что дальнейшее свидетельствует о том, что и в случае нескольких независимых переменных проблема тоже может быть полностью решена. Однако для классификации функций двух и более переменных требуются совершенно новые идеи. Возможно, решения могут быть различными: и инварианты, и их пространства могут быть совершенно разными. Мы же для решения проблемы классификации функций нескольких переменных, предлагаем изучать (вместо распределения самой функции или её простейших преобразований, как в одномерном случае) ограничения функции на случайные счетные подмножества (сетки) определённого типа. Вероятностные распределения этих ограничений позволят по весьма нетривиальным причинам получить полные инварианты. По сути дела это метод аппроксимации функций заданных на континуальном множестве функциями на счетных подмножествах с определённой структуры —- бернуллиевской или подобной. с Это напоминает *монте-карловский подход* к вычислениям. Любопытно, что даже в одномерном случае оправдание этого метода сводится к индивидуальной эргодической теореме, по которой распределение функции совпадает с пределом эмпирических распределений. Но в многомерном случае ситуация сложнее уже по тому, что нет аналога распределения функции и заменой его служит именно матричное распределение.

1.4 Сетки в пространствах с мерой и чистота функций.

Начнем с измеримых функций двух переменных, заданных на пространстве с мерой. Не умаляя, общности можно считать, что функция f задана на квадрате $[0,1]^2$, снабженном лебеговой мерой μ^2.

Определение 2. *Функция ($k=2$) называется чистой, если при фиксации почти любого значения одной из переменных (x или y), ограничения функции на другую переменную $y \to f(.,y)$ (или $x \to f(x,.)$) являются взаимно однозначными почти всюду отображениями интервала изменения одной переменной в пространство классов функкий от другой переменной. Очевидно, это определение обобщает понятие взамной однозначности функции одной переменной.*

Естественно продолжить это определение на функциии от $k, (k>2)$ переменных, требуя того же условия однозначности при фиксации всех переменных, кроме одной, и в этом случае также назовем ее *функцию* *чистой.* Однако, если число переменных k больше двух, то, зафиксировав почти всякий набор каких-либо $k-r$ переменных, $r = 1, 2, \dots k-1$, можно потребовать, чтобы функции от r остальных переменных были бы все $\mod 0$, и назвать в этом случае исходную функцию k переменных r-чистой. Мы ограничимся понятием 1-чистых функций (называемых просто чистыми).

Наша основная теорема будет относиться к чистым функциям k, $k > 1$ переменных. Перенос полученных формулировок на общие функции $k > 1$ переменных более или менее такой же, как и аналогичный перенос на не взаимнооднозначные функций одной переменной в теореме Рохлина. Наше изложение проводится для чистых функций двух переменных, так как для чистых функций большего числа переменных все рассуждения остаются верными. *Очищением функции* двух переменных $f(.,.)$, заданной на $X_1 \times X_2$ называется, функция $\bar{f}$, заданная на пространстве $X_1/\xi_1 \times X_2/\xi_2$, где ξ_i — разбиение пространтсва X_i на максимальные классы точек по каждой из переменных с одинаковыми ограничениями функции f на другую переменную. Очевидно, что чистая функция совпадает со своим очищением.

Рассмотрим чистую функцию двух переменных f, заданную на произведении пространств Лебега $X = (X_1 \times X_2, \mu^1 \times \mu^2)$. Все функции мы считаем вещественными лишь для удобства; область значений может быть любым стандартным борелевским пространством.

Будем отождествлять сомножители X_1, X_2 с отрезком $[0, 1]$, а обе меры считать мерой Лебега. Построение инвариантов такой функции относительно изоморфизма (см. выше) основано на изучении ограничений функции f на некоторые случайные счетные подмножества, называемые традиционно *сетками*[1]. Таким образом, сетка есть элемент пространства $(X \times X)^\infty = X^\infty \times X^\infty$. В определении предполагается, что пространство $X = X_1 \times X_2$ задано явно (корректность по отношению к отождествлению $\mod 0$ очевидна).

Нам понадобятся два типа сеток. Первый тип — бернуллиевские сетки: выберем две, вообще говоря, разные, последовательность независимых одинаково распределённых точек $\{x_n\}_n$ и $\{y_m\}_m$. Совокупность точек $\{x_n, y_m\}_{(n,)}$ назовем *бернуллиевской сеткой.* Если f симметрична и изучаются инварианты симметричных функций,— (например, если f-метрика), то последовательности совпадвют и сетка симметрична.

Нам удобней рассматривать двусторонние сетки $\{x_n\}_n, \{y_m\}_m$, т.е. иначе говоря, считать, что n, m пробегают группу $\mathbb{Z}$, однако все сказан-

[1]хотя их роль иная, чем роль сеток в теории вычислений

ное останется верным и для случаю полугруппы $n, m \in \mathbb{Z}_+$

Очевидно, что каждая последовательность всюду плотна в X_1 и X_2, а сетка всюду плотна в $X = X_1 \times X_2$, и любые две бернуллиевские сетки в X изоморфны.

Второй тип сеток, о котором скажем позже, — локально конечные сетки: это возрастающие последовательности конечных подмножеств $H_n = H_n^1 \times H_n^2 \subset X = (X_1 \times X_2$, причем $\{H_n^i\}_{n \in N}$ при $i = 1, 2$ — равномерно распределенные последовательности на $X_i, i = 1, 2$. В обоих случаях нас интеремуют асимптотические свойства ограничений измеримых функций на сетки.

2 МАТРИЧНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ ФУНКЦИЙ

2.1 Определение

Пусть задана чистая функция $f(\,.\,,\,.\,)$ двух переменных на $X = X_1 \times X_2$ и фиксирована бернуллиевская сетка $(\{x_n\}_n, \{y_m\}_m)$. Рассмотрим двумерный массив

$$||f(x_k, y_m)||_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2},$$

как бесконечную (вещественную с четырьмя бесконечностями) матрицу. Тем самым мы вводим отображение

$$F_f : X^\infty \times X^\infty \longrightarrow Mat_{\infty \times \infty}(\mathbb{R}),$$

где

$$F_f(\{x_n\}_n \times \{y_m\}_m) = ||f(x_k, y_m)||_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2}$$

Теперь мы можем рассмотреть это отображение как отображение борелевского пространства бернуллиевских сеток в пространстве мерой $\mu^\infty \times \mu^\infty$ в пространство бесконечных матриц $Mat_{\infty \times \infty}(\mathbb{R})$. Это отображение фиксирует на образе действие группы сдвигов.

Поскольку в дальнейшем мы используем индивидуальную эргодическую теорему, будем считать, что все рассматриваемые измеримые функции интегрируемы. Перенос утверждений о классификации на произвольные измеримые функции можно провести разными искусственными приемами; мы не останавливаемся на этом.

В общей теории борелевских отображений есть понятие отображения борелевских мер, ассоциированного с борелевским отображением пространств (см., например, [12]) — определение использует идею обратных прообразов). В соответствии с этим понятием мы можем определить образ бернуллиевской меры.

Определение 3. *Рассмотрим образ бернуллиевской меры $\mu^\infty \times \mu^\infty$ относительно отображения F_f:*

$$D_f = (F_f)_*(\mu^\infty \times \mu^\infty)$$

назовем меру D_f на множестве бесконечных матриц — матричным распределением чистой функции f.

Напомним, что это определение возникло в теории классификации функций в [6] и обсуждалось в [14, 2]. Но сам этот объект, по-видимому, впервые возник в работе [16] как мера, инвариантная относительно группы подстановок, а также фактически в [1] как инвариант метрик в пространтсвах с мерой (см. далее).

Очевидным образом из определения следует, что матричное распределение есть мера в пространстве матриц, инвариантная и эргодическая относительно действия группы $S_{\mathbb{Z}} \times S_{\mathbb{Z}}$ подстановок строк и стобцов (в симметрическом случае– относительно группы $DIAG$ одновременных подстановок строк и столбцов).

Следующее утверждение очевидно

Лемма 1. *Матричное распределение (как мера на пространтсве матриц) есть инвариант измеримой функции относительно изоморфизма (измеримых функций двух перменных).*

Доказательство. Если две функции изоморфны, то из определений следует, что существует изоморфизм между пространствами матриц, который переводит матричное распределение одной функции в матричное распределение другой. При этом используется тот факт, что все бернуллиевские сетки изоморфны между собой. Заметим, что всякий изоморфизм пространств матриц по определению коммутирует с группой подстановок строк и столбцов. □

2.2 Теорема восстановления и полнота инваринтов

В формулировке леммы чистота функции не предполагается.Очевидно, что метрическое распределение функции совпадает с метрическим распределнием ее очищения. Но главная проблема классификации —в доказательстве *полноты предлагаемого инварианта.* Оказывается, проблема полноты метрического распределения даже для чистых функций более деликатна: недостаточно рассматривать матричное распределение просто как меру на подмножестве пространства матриц, *важно сохранить на подмножестве ещё одно действие, индуцируемое группой сдвигов сетки* $\mathbb{Z}^2$, по обеим переменным, которая действует на пространстве матриц (сдвигами строк и столбцов). Дело в том, что бернуллиевские сетки $\{x_n\} \times \{y_m\}$ в нашем случае инвариантны относительно двустороннего сдвига по обеим переменным т.е. группы $\mathbb{Z}^2$.(или относительно одностороннего сдвига по обеим переменным, если речь идет о полугруппе $\mathbb{Z}^2_+$)

Поэтому матричное распределение надо рассматривать, как меру на пространстве матриц вместе с действием на нем этой группы, Однако стандартное определение образа меры не учитывает дополнительное действие групп и мы должны особо учитывать его. Мы докажем, что две чистых функции, у которых совпадают матричные распределения и сохраняется действия на них группы $\mathbb{Z}^2$— изоморфны. Без этого добавления полноту матричного распределения как инврианта утверждать нельзя.. Однако, во многих (можно сказать почти во всех) этой оговорки не надо, так указанные действия по тем или иным причинам совпадают автомоатически.

Для доказательства мы ннуждаемся в одном следствии из индивидуальной эргодической теоремы для эргодических действий группы Z^k, которое является решающим для задач подобного типа, однако автору это следствие в литературе по эргодической теории не встречалось (ср. [21]). *Оно позволяет однозначно восстановить действие группы на пространств с мерой по ее действию на одной (типичной) траектории действия и по некоторой структуре этой траектории.*

Лемма 2. *Рассмотрим группу* $G = \mathbb{Z}^k$ *и инвариантную эргодическую меру* μ *на* $l^\infty(G)$. *Пусть* $x_0 \in l^\infty(G)$ *— тиичная точка для меры* μ *т.е. такая, для которой выделенное счетное число пределов существует). Тогда функционал*

$$E(\phi) = \lim_n |Q_n|^{-1} \sum_{g \in A_n} \phi(gx_0) \equiv \bar{\phi}$$

определен и однозначно определяет меру μ *как единственную меру на пространстве* X *функций на* G, *для которой*

$$\int_X \phi(g_0 x) d\mu = \bar{\phi}.$$

Здесь Q_n *последовательность множеств Фельнера, например, последовательность центрально-симметричных кубов в группе* $\mathbb{Z}^k$ *со стороной* n, *а* $|Q_n|$ *— число точек в кубе.*

Доказательство. Существование пределов есть прямое следствие индивидуальной эргодической теоремы, а единственность меры с данными пределами вытекает из того, что указанное множество функций тотально, следовательно мера однозначно определена. если фиксированы интегралы от всех этих функций. □

Замечание 1. Отвлекаясь от основной линии, заметим, что приведенная лемма может рассматриваться как средство изучения проблемы изоморфзима действий аменабельных групп, сохраняющих меру. Указанный функционал E линеен на некотором пространстве Φ_G ограниченных функций на группе G (образ которого тотален во всех пространствах $L^1(G)$ по инвариантным относительно сдвига эргодическим мерам). Совокупность значений функционала есть метрический инвариант действия (при фиксации выбора пространства Φ_G), и, если учесть, что E можно рассматривать как инвриантное среднее на группе, то открывается возможность изучать соответствие между некоторыми классами инвариантных средних на группе и метрическими типами действий с инвариантной мерой. В широком контексте подобные леммы позволяют восстанавливать континуальные объекты по счетным подобъектам. Заметим, что связь между инвариантными средними на аменабельных группах и индивидуальными эргодическими теоремами для действий групп изучена недостаточно.

Следствием предыдущей леммы является следующее утверждение:

Лемма 3. *Пусть f — чистая интегрируемая функция двух переменных на $[0,1]^2$. Матричное распределение функции f, расматриваемое как мера на множестве матриц вместе с действием группы сдвигов $\mathbb{Z}^2$, оставляющих функцию f инвариантной, является полной системой инвариантов функции f.*

Доказательство. Для доказательства достаточно использовать следующее очевидное характеристическое свойство чистых функций (см. [6, 14]): Пусть $f \in L^1$ — чистая интегрируемая функция двух переменных и $\{x_n, y_m\}_{(n,m)}$ две последовательности независимых, одинаково распределённых точек в (X_1, μ) и (X_2, μ). Тогда для почти всех таких пар последовательностей совокупность функций

$$\phi_{x_n}(.) = f(x_n, .), \psi_{y_m}(.) = f(., y_m)$$

образуют тотальное множество в $L^1(X_1 \times X_2, \mu \times \mu)$. □

Как доказано в [15] группа преобразований, сохраняющих меру и оставляющих инвариантной произвольную измеримую функцию, компактна, поэтому факторизация по этой группе корректно определена. Однако мы не используем этот факт, поскольку факторизация по группе симметрий может нарушать структуру прямого произведения сигма-алгебр.

Симметрии функции f определяются условием $f(Tx, Sy) = f(x, y)$, где S, T — обратимые преобразования, сохраняющие меру. Если 'nj условие выполнено только для $S = Id, T = Id$, то бдуем говорить, что *функция f имеет тривиальную (единичную) группу симметрий.* В этом случае, оговорка в формулировке леммы о группе сдвигов не нужна и мы получаем

Теорема 1. *(О восстановлении) Полной системой инвариантов относительно изоморфизма чистой интегрируемой функции с тривиальной группой симметрий является матричное распределение, как мера в пространстве матриц. Более подробно, если две интегрируемые, чистые функции с тривиальной группой симметрий имеют одинаковые (т.е. изоморфные) матричные распределения и равные усреднения по соотвествующим переменным, то они изоморфны.*

Нетривиальность теоремы состоит в том, что трудная проверка изоморфизма функций сводятся к проверке сравнительно относительно легко проверяемыж соотношений (равенство интегралов). Справедливость утверждения теоремы в конце концов основывается на индивидуальной эргодической теореме.

Подчеркнем, что в условиях теоремы, матричное распределении, как мере в пространстве матриц, наследует структуры пространства матриц. Но в отличие от работ [6, 14] мы не строим и не используем универсальную модель измеримой функции за ненадобностью, хотя её построение как плотность Радона–Никодима на бесконечном произведениии очевидно.

Для классификации симметричных функций (см. далее) формулировки должны быть несколько изменены.

2.3 Необходимый пример

Нетривиальность теоремы о восстановлении проявляется уже при рассмотрении самых простых ситуаций.

Рассмотрим инварианты следующей функции двух переменных

($k\!=\!2$): на единичном квадрате $[0,1]^2$ задана функция

$$f(x,y)=x+y \qquad \mod 1$$

. Соответственно, рассмотрим две последовательности независимых $\{(x_n),(y_m)\}$ точек и пространство пар точек $\{(x_n,y_m)\},(n,m\in\mathbb{Z}$, т.е. сетку на квадрате, и группу сдвигов на бесконечном произведении с бернуллиевской мерой $1/2,1/2$ на $(O,1)$. Отображение F_f таково:

$$\{(x_n,y_m)\}_{n,m}\to\{(x_n+y_m)\}_{n,m}$$

Утверждение теоремы 1 в данном случаемы состоит в том, что это отображение обратимо $\mod 0$, и что можно восстановить каждое слагаемое (т.е. функцию), зная их сумму (т.е. матричное распределение). Но именно такое множество меры 1, на котором отображение F_f обратимо, существует (!): $\forall n,m\in\mathbb{N}$

$$\Big\{(x_n,y_m):\lim_{r\to\infty}r^{-1}\sum_{k=1}^{r}(x_n,y_k)=(x_n,0),\quad \lim_{r}r^{-1}\sum_{k=1}^{r}(x_k,y_m)=(0,y_m)\Big\}.$$

Тот факт, что его мера равна 1, следует из закона больших чисел (эргодической теоремы). Очевидно, что при всех n,m и заданной сумме x_n+y_m, слагаемые однозначно восстанавливаются.

Как мы видим, в этом случае отображение F_f обратимо, т.е. является изоморфизмом $\mod 0$). Любопытно, что здесь на простейшем примере показано, как с помошью эргодической теоремы можно выделить подмножество, "правых частей"каких-то уравнений, для которых однозначно решается система уравнений $(x+y=C)$. В этом случае построение очень простое, и для обращения есть формула, но разумеется, в случае произовльной функции мы получаем лишь теорему о существовании такого множества и явного построение обратного отображения нет.

Замечание 2. Следует помнить, что все рассматриваемые матричные распределения как подмножества в пространстве матриц снабжены семейством условных предельных распределений всех строк и столбцов; утверждения "два матричных распределения совпадают"включает совпадение этих пределов. Специфика матричных распределений как мер на пространстве матриц, состоит в том, что привычное описание мер с помощью конечномерных распределений неэффективно, хотя это описание явно указано (см. следующий раздел –Теория Олдоса).Из него непосредственно не следует ни существовование, ни описание условных предельных распределений строк и столбцов для почти всех матриц. Видимо, в этом состоит новизна матричных распределений, как мер в пространствах бесконечных матриц.

2.4 Связь с теорией Олдоса

Напомним, что Олдос (см. [16, 17, 18]), обобщая классическую теорему Де Финетти о мерах Бернулли для последовательностей на случай матриц, сформулировал и доказал следующую теорему (мы приводим её в несколько иных, по сравнению с оригинальными. терминами): всякая эргодическая мера на множестве бесконечных вещественных матриц, инвариантная относительно любой из групп

1) $S_{\mathbb{N}} \times S_{\mathbb{N}}$ — группа всех подстановок строк и столбцов матриц

2)DIAG $S_{\mathbb{N}}$ — группа одинаковых подстановок строк и столбцов матриц,

есть вероятностная борелевская мера на пространстве матриц, $(||f(\xi_i, \eta_j, \lambda_{i,j})||_{i,j})$, задаваемых измеримой функцией от трех переменных f, каждая из которых пробегает отрезок $[0, 1]$ и вычисляется в узлах бернулиевской сетки (в случае 1), с дополнительным условием $\eta_j \equiv \xi_j$ (в случае 2); здесь $\xi_i, \eta_j, \lambda_{i,j}$ — независимые последовательности независимых случайных величин равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$.

Нам важен частный случай этого результата, при котором переменная $\lambda_{i,j}$ отсутствует и связь с классификацией выглядит так:

Предложение 1. *Всякая меры Олдоса с нулевым λ) суть матричное распределение измеримой функциии двух переменных, задающей эту меру 4 функцию можно считать чистой. В случае 2 имеется в виду матричное распределение симметрической функции (см о нем в следующиам параграфе).*

Здесь мы не обсуждаем сам результат Олдоса во всей его общности или даже в указанном случае (в отсутствии λ), но подчеркнем, что он состоит в доказательстве того, что искомые инвариантные меры на матрицах описыаются через измеримые функции, в то время как мы хотим, наоборот, использовать меры на матрицах, как инварианты функций и описываем свойства этих мер. До сих пор, как будто такого описания не было сделано. Более подробный анализ, включающий попытку доказать теорему Олдоса с помощью эргодического метода автора и связать обе задачи будет сделан в другом месте. Случай $\lambda = 0$ является вырожденным в теореме Олдоса (этот случа был пропущен в [5]), но он наиболее интересен именно потому что, приводит к мерам (матричным распределниям), непохожим по своим свойствам, на хорошо изученные случайные матрицы с независимыми коэффициентами и соответствующим случайным спектром (см. далее).

3 СИММЕТРИЧНОЕ МАТРИЧНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СУТЬ ПОЛНЫЙ ИНВАРИАНТ МЕТРИЧЕСКИХ ТРОЕК

3.1 Определение

Классификация измеримых симметричных функций многих переменных, в частности, метрик в пространствах с мерой, несколько отличается от общей классификации произвольных измеримых функций в пространствах с мерой.

Детальное изложение совместной аксиоматики структуры пространств с мерой и метрикой см. в [1, 2] и в цитируемой там литературе по этому вопросу. Речь идет о так называемых метрических тройках (X, μ, ρ) (пространство, мера, метрика), а именно, о польских пространствах X с борелевской, непрерывной мерой μ, имеющей полный носитель относительно метрики ρ. Вопрос о полной системе инвариантов относительно группы изометрий, сохраняющих меру, для таких троек был поставлен и решен Громовым в [1]; последующее доказательство этого результата автором использовало другие (эргодические) методы, в частности, связанные с классификацией функций нескольких переменных в пространствах Лебега. Оба доказательства приведены в [1] и статьях автора [8], см также [2].

Определение матричного распределения, приведенное выше и использующее произвольные двумерные сетки, можно применить к метрикам, что дает полный инвариант метрик в классе общих функций двух переменных. Однако определение матричного распределения естественное меняется при замене понятия изморфизма, в частности, если рассматривать симметричные функции двух или более переменных (например, метрики на простраствах с мерой), то естественно ввести специальные сетки для рассмотрения инвариантов симметричных функций k переменных относительно одинаковых преобразований переменных:

$$f_2(Tx_1, \dots Tx_k) = f_1(x_1 \dots x_k).$$

Определение матричного распределения в этой ситуации ($k = 2$) естественно основывать на сетках вида $\{x_n, x_m\}_{n,m}$.

Определение 4. *Матричным распределением симметричной функции двух переменных называется мера в пространстве бесконечных матриц являющаяся образом при отображении*

$$F_f(\{x_n\}_n \times \{x_m\}_m) = ||f(x_k, x_m)||_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2},$$

определяемая формулой:

$$D_\rho = (F_f)_*(\mu^\infty \times \mu^\infty.$$

В частности, матричное распределение метрики как измеримой функции ρ на пространстве с мерой (X, μ) есть мера на пространстве дистанционных матриц, т.е. метрик на счетном пространстве ($\mathbb{Z}$ целых чисел или натуральных чисел в случае односторонних сеток),

Заметим, что не всякая эргодическая и инвариантная, относительно одновременных подстановок, мера на множестве матриц расстояний (=дистанционных матриц) может быть матричным распределением некоторой метрической тройки. Например, для бернуллиевской меры на симметричных 0-1 матрицах, определяющей случайный (универсальный) граф, неравенство треугольника выполнено автоматически, и эта мера не является матричным распределением какой-либо метрической тройки, поскольку, в частности, не выполнено энтропийное условие (см. далее).

3.2 mm-энтропия метрических троек

Для всякого метрического пространства с мерой определено понятие mm=энтропии; это функция от ϵ:

$$H(\epsilon) = \min\{r \in \mathbb{N} : \mu(\bigcup_{i=1}^{r} V_i(\epsilon, x_i)) > 1 - \epsilon\},$$

здесь $V(\epsilon, x)$ — шар радиуса ϵ с центром в точке x. Конечность для метрических троек при конечных ϵ очевидна, и интерес представляет росток этой функциии в нуле, который и есть важная характеристика метрической тройки. Авторов этого определения, повидимому, несколько, одним из них является автор статьи, использовавший это понятие для определения, так называемой масштабированной энтропии автоморфизмов и каталитических инвариантов, обобщающих энтропию динамических систем Шеннона-Колмогорова (см [7, 2]). Но оказалось, что Шеннон в [13] в приложении к знаменитой статье по теории информации таже определил это mm-энтропию метрик с мерой, хотя на его определение долгое время не было обращено должного внимания. (см. [7]) Нетрудно понять, что mm-энтропия метрической тройки вычисляется по матричному распределению тройки как предел некоторых функционалов от его конечномерных фрагментов. Более существенно, как показано в [2], что конечность предела есть достаточное условие на эргодическую, инвариантную меру на дистанционных матрицах, чтобы она была матричным распределением метрики.

3.3 О сопоставлении доказательств теоремы о восстановления Громова-Вершика

Громов в [1] доказывает следующую теорему (теорему восстановления) в несколько изменённых терминах: *Полной системой инвариантов метрической тройки* (X, μ, ρ) *относительно группы изометрий, сохраняющих меру ти, является мера на множестве бесконечных дистанционных матриц, являющаяся единственным слабым пределом мер на* n*-мерных дистанционных матрицах, отвечающих случайным наборам из* n *независимых одинаково распределенных по заданной мере точек пространства.*

Наиболее трудная часть — это доказательство полноты, т.е. единственности (восстановления) метрической тройки по заданному слабому пределу случайных дистанционных матриц. Слабый предел, о котором идет речь, можно назвать матричным распределением относительно предела по конечным сеткам. Разумеется, доказательство восстановления требует оценок типа метода моментов, использованных в [1].

Другой подход состоит в том, что рассматриваются сразу бесконечные *бернуллиевские сетки* и их дистанционные матрицы. Фокус состоит в том, что почти всякая (типичная) сетка позволяет восстановить метрическую тройку, потому что сразу ясно, что метрика восстанавливается по метрике на плотном подмножестве; и дальше эргодичность нужна только для восстановления меры. Но способ восстановления по одной траектории, как мы видели, возможен и без ссылки на свойства метрики, по более глубоким "индивидуальным"причинам. Роль эргодической теоремы существенна и лемма 3, вытекающая из индивидуальной теоремы, объясняет, почему восстановление возможно в общем случае без привлечения конкретных свойств функции.

Остается вопрос — совпадает ли что слабый предел мер, возникающий в "конечном"подходе Громова с матричным распределением, определенном выше с помощью бесконечных бернуллиевских сеток? Не входя в детали, мы предполагаем, что это так, и ставим более общий вопрос:

Проблема 1. Совпадают ли для заданной измеримой функции (например, метрики на пространстве с мерой) матричные распределения, как меры в пространстве матриц, построенные по 1)бернуллиевским сеткам 2)локально конечным сеткам 3)по сеткам, построенным по стационарным последовательностям, удовлетворяющей закону $0-1$.

3.4 Применение матричного распределения метрик

ь Отображение, сопоставляющее метрической тройке матричное распределение, может использоваться при изучении различных свойств метрик. Липшицевость этого отображения доказана в [19]. Сходимость (по Хаусдорфу-Громову) метрических пространств с мерой может быть выражена в терминах сходимости матричных распределений. К сожалению, имеется мало примеров явных вычислений. Существенно расширить определение матричных распределений на пространства со структурой, более бедной, чем метрическая тройка. Типичный пример: пусть для последовательности метрических троек последовательность соответствующих матричных распределений сходится как последовательность мер в пространстве матриц к некоторой мере, которая не является матричным распределением. Что можно сказать о пределе троек? Требуется описать такие пределы.

3.5 Спектр матричного распределения

В заключение затронем кратко важный для приложений вопрос о спектре матричных распределений. Рассмотрим матричное распределение метрической тройки в смысле раздела 3.1. Это мера на дистанционных, т.е.симметричных и удовлетворяющих неравенству треугольника, неотрицательных матрицах. Можно ставить вопрос о поведении спектров конечных фрагментов матричного распределения, как случайных векторов, состоящих из собственных (вещественных) чисел. Особенно важны их асимптотические свойства.

Если матричное распределение есть полный инвариант метрики, то естественно спросить, насколько асимптотические спектральные свойства могут быть полными. Этот аналог вопроса М. Каца "Можно ли услышать форму барабана?"для спектров метрических троек автор ставил в [8]. Есть ряд наблюдений о спектрах метрик, интересные эксперименты с классическими метрическими пространствами проведены по инициативе автора в работе [9]. Но сколько-нибудь ясной картины пока нет. Важно исследовать асимптотику спектров не самих дмстанционных матриц, а матричных распределений, т.е. асимптотику метрических троек.

Естественно предполагать, что метрика всегда интегрируема, но не квадратично интегрируема по мере. в случае квадратичной интегрируемости предельный спектр матричного распределения всегда детерминирован и определяется спектром интегрального оператора, ядро которого есть метрика (см. [20]). Видимо, первый известный пример метрической тройки со случайным предельным спектром приведен в [10] это эвклидова метрика на полупрямой с мерой Коши.

Важный вопрос — насколько близким к полукруговому закону может быть предельный спектр матричных распределений метрических пространств. Например, *каковы предельные спектры метрики на универсальном пространства Урысона* относительно вероятностных мер в этом пространстве?

Список литературы

[1] M . Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Transl. from the French, Progr. Math., 152, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1999, xx+585 pp.

[2] А. Вершик, Г. Вепрев, П. Затицкий, *Динамика метрик в пространствах с мерой и масштабированная энтропия*, Успехи математических наук, 2023, том 78, выпуск 3(471), 53–114

[3] V .А. Рохлин, *Об основных понятиях теории меры*, Матем. сб., 25(67):1 (1949), 107–150

[4] V .А. Рохлин, *Метрическая классификация измеримых функций*, УМН, 12:2(74) (1957), 169–174

[5] А. Вершик, *Описание инвариантных мер для действия некоторых бесконечномерных групп*, ДАН СССР, 218:4 (1974), 749–752

[6] А. Вершик, *Классификация измеримых функций нескольких аргументов и инвариантно распределенные случайные матрицы*, Функц. анализ и его прил., 36:2 (2002), 12–27.

[7] A. Vershik, *Dynamics of metrics in measure spaces and their asymptotic invariants*, Markov Process. Related Fields, 16:1 (2010), 169–184.

[8] А. Вершик, *Случайные метрические пространства и универсальность*, УМН, 2004, 59:2(356), 65–104

[9] E. Bogomolny, O. Bohigas, C. Schmit, *Spectral properties of distance matrices*, J. Phys. A, 36:12 (2003), 3595–3616.

[10] А. Вершик, Ф. Петров, *Предельные спектральные меры матричных рас- пределений метрических троек*, Функц. анализ и его прил., 57:2 (2023), 106–110.

[11] А. Вершик, М. Лифшиц, *mm-энтропия банахова пространства с гауссовской мерой*, Теория вероятн. и ее примен., 68:3(2023) 532-543.

[12] В. Богачев, *Основы теории меры*, 2-е изд., 1, НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Москва–Ижевск, 2006

[13] К. Шеннон, *Математическая теория связи, Работы по теории информации и кибернетике*, ИЛ, М., 1963, 243–332; пер. с англ.: C.E. Shannon, *A mathematical theory of communication*, Bell System Tech. J., 27:3, 4 (1948), 379–423, 623–656.

[14] A. Vershik.U. Haboek, *On the classificstion problem jf measurable functions in several variables and on matrix distributions*, Zapiski Nauchn. Seminarov POMI. v.441, (2015) 119-141. Journ.of Math. Sci. 219:5 (2016), 683–699.

[15] A. Vershik.U. Haboek, *Compactness of the congruence group of measurable functions in several variables*, J. Math. Sci. (N. Y.), 141:6 (2007), 1601–1607

[16] D. Aldous, *Representations of Partially Exchangeable Arrays of Random Variables*, J. Multipliv. Analysis. 11, 381-398 (1981)

[17] D. Aldous, *Exchangeability and relster topics*, Lecture Notes on Math. v III7,pp. 1-198.

[18] O. Kallenberg, *On the Representation Theorem for Exchangeable Arrays*, J. Multipliv. Analysis, 30, 137-154 (1989).

[19] S. Gadgil, M. Krishnapur, *Lipschitz correspondence between metric measure spaces and random distance matrices*, Int. Math. Res. Not. IMRN, 2013:24 (2013),

[20] V. Koltchinskii, E. Gine, *Random matrix approximation of spectra of integral operators Bernoulli*, 6:1 (2000), 113–167

[21] B. Weiss, *Single Orbit Dynamics*, CBMS v. 95; 2000; 113 pp.