

Распространение волн в абстрактной динамической системе с граничным управлением

М. И. Белишев

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А.СТЕКЛОВА РАН, САНКТ-ПЕТЕРБУРГ, РОССИЯ

E-mail: belishev@pdmi.ras.ru

8 июля 2023 г.

Посвящается 85-летию А.С.Благовещенского

Abstract. Пусть L_0 есть положительно-определенный оператор в гильбертовом пространстве \mathcal{H} с индексами дефекта $n_{\pm} \geq 1$ и пусть $\{\text{Ker } L_0^*; \Gamma_1, \Gamma_2\}$ есть его каноническая (по М.И.Вишику) граничная тройка. В работе рассматривается эволюционная динамическая система

$$\begin{aligned} u_{tt} + L_0^* u &= 0 && \text{in } \mathcal{H}, \quad t > 0; \\ u|_{t=0} &= u_t|_{t=0} = 0 && \text{in } \mathcal{H}; \\ \Gamma_1 u &= f(t), && t \geq 0, \end{aligned}$$

в которой f есть граничное управление ($\text{Ker } L_0^*$ -значная функция времени), $u = u^f(t)$ – траектория. Изучаются некоторые общие свойства таких систем. Найден абстрактный аналог принципа конечности скорости распространения волн.

Ключевые слова: симметрический полуограниченный оператор, граничная тройка Вишика, динамическая система с граничным управлением, конечность скорости распространения волн.

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ
В. М. Бабич, Н. А. Вавилов, А. М. Вершик, М. А. Всемирнов,
А. И. Генералов, И. А. Ибрагимов, Л. Ю. Колотилина,
Ю. В. Матиясевич, С. И. Репин, Г. А. Серегин

0 О работе

- Динамическая система с граничным управлением (ДСГУ), которая рассматривается в работе, определяется симметрическим полуограниченным оператором с ненулевыми индексами дефекта. Изучаются наиболее общие свойства таких систем. Это мотивировано программой построения функциональной модели таких операторов (т.н. *волновой модели*: см. [3], [6]-[9]). Настоящая работа развивает результаты [2, 5], относящиеся к наиболее общим свойствам ДСГУ. Возможно, наиболее примечательный новый факт состоит в том, что хорошо известный в многочисленных приложениях принцип конечности скорости распространения волн (далее коротко КС принцип) имеет адекватный аналог в абстрактных ДСГУ.
- Работа посвящается 85-летию моего учителя Александра Сергеевича Благовещенского, одного из пионеров и создателей теории динамических обратных задач. В свое время он объяснил мне глубину и возможности формулы Даламбера. Не будет преувеличением сказать, что данная работа выполнена в манере и технике Александра Сергеевича.

1 Оператор L_0

Граничная тройка

- Как отмечено выше, ДСГУ определяется полуограниченным оператором. Опишем класс операторов, с которыми мы имеем дело. Предполагается, что L_0 есть замкнутый, плотно заданный симметрический положительно-определенный оператор, так что выполнено

$$\overline{\text{Dom } L_0} = \mathcal{H}; \quad L_0 \subset L_0^*; \quad L_0 \geq \gamma \mathbb{I}, \quad \gamma > 0; \quad 1 \leq n_+^{L_0} = n_-^{L_0} \leq \infty,$$

где \mathbb{I} есть единичный оператор. Отметим, что в силу $n_{\pm}^{L_0} \neq 0$ такой оператор с обязательно неограничен.

- Мы обозначаем $\mathcal{K} := \text{Ker } L_0^*$ и используем (ортогональный) проектор P в \mathcal{H} на \mathcal{K} . Отметим соотношение $\dim \mathcal{K} = n_{\pm}^{L_0}$.

Пусть L есть расширение L_0 по Фридрихсу: $L_0 \subset L = L^* \subset L_0^*$, $L \geq \gamma \mathbb{I}$, $\text{Ran } L = \mathcal{K}$. Обратный к нему L^{-1} есть самосопряженный ограниченный оператор в \mathcal{K} .

Известное разложение Вишика [20] имеет вид

$$\text{Dom } L_0^* = \text{Dom } L_0 \dot{+} L^{-1}\mathcal{K} \dot{+} \mathcal{K} = \text{Dom } L \dot{+} \mathcal{K}; \quad (1)$$

последнее равенство устанавливается в рамках теории М.Г.Крейна [15]. Таким образом, каждый элемент $y \in \text{Dom } L_0^*$ единственным образом представляется в виде

$$y = y_0 + L^{-1}g + h = y' + h \quad (2)$$

с некоторыми $g, h \in \mathcal{K}$ и $y' := y_0 + L^{-1}g \in \text{Dom } L$. Компоненты определяются по y следующим образом:

$$y' = L^{-1}L_0^*y, \quad y_0 = L^{-1}L_0^*(y - y'), \quad h = y - y' - y_0. \quad (3)$$

Отображения

$$\Gamma_1 := L^{-1}L_0^* - \mathbb{I}, \quad \Gamma_2 := PL_0^*; \quad \text{Dom } \Gamma_{1,2} = \text{Dom } L_0^*$$

называются *граничными операторами*. Из определений и (2) имеем

$$\Gamma_1 y = -h, \quad \Gamma_2 y = g. \quad (4)$$

Кроме того, из определений следует:

$$\text{Ran } \Gamma_1 = \text{Ran } \Gamma_2 = \mathcal{K}. \quad (5)$$

Заметим, что граничные операторы могут не допускать замыкания; более того, такая ситуация типична в приложениях. Однако, если снабдить $\text{Dom } L_0^*$ нормой графика $\|y\|_{\text{graph}}^2 = \|y\|^2 + \|L_0^*y\|^2$, то $\Gamma_{1,2}$ становятся непрерывными [15].

- Справедливо соотношение

$$(L_0^*u, v) - (u, L_0^*v) = (\Gamma_1 u, \Gamma_2 v) - (\Gamma_2 u, \Gamma_1 v), \quad u, v \in \text{Dom } L_0^* \quad (6)$$

(См, например, [5]). По терминологии теории операторов [15], соотношения (5) и (6) означают, что набор $\{\mathcal{K}; \Gamma_1, \Gamma_2\}$ составляет *граничную тройку* оператора L_0 . По общей теории граничных троек имеем:

$$L_0 = L_0^* \upharpoonright [\text{Ker } \Gamma_1 \cap \text{Ker } \Gamma_2], \quad L = L_0^* \upharpoonright \text{Ker } \Gamma_1 \quad (7)$$

(см. [15], глава 7).

- Возможный способ реализовать разложение (2) состоит в решении двух "граничных задач".

Лемма 1. Пусть $y = y_0 + L^{-1}g + h$ есть представление Вишика элемента $y \in \text{Dom } L_0^*$. Тогда элементы h и g единственным образом определяются соотношениями

$$L_0^*h = 0; \quad \Gamma_1h = \Gamma_1y. \quad (8)$$

и

$$L_0^{*2}w = 0; \quad \Gamma_1w = 0; \quad \Gamma_2w = \Gamma_2(y - h), \quad (9)$$

соответственно, где $w := L^{-1}g$.

Доказательство. Элемент h , удовлетворяющий второму соотношению в (8), существует в силу (5). Он единствен. В самом деле, если h' удовлетворяет (8), то $\tilde{y} := h - h'$ влечет $\Gamma_1\tilde{y} = 0$, т.е. $\tilde{y} \in \text{Dom } L$. Последнее ведет к $\tilde{y} = 0$ в силу $\text{Dom } L \cap \text{Ker } L_0^* = \{0\}$ (см. (1)).

Так как $L_0^*L_0^*L^{-1}g = L_0^*g = 0$, $L^{-1}g \in \text{Dom } L$ справедливо (так что $\Gamma_1L^{-1}g \stackrel{\text{см. (7)}}{=} 0$ и $\Gamma_2L^{-1}g = \Gamma_2(y - y_0 - h) \stackrel{(7)}{=} \Gamma_2(y - h)$ выполнено), мы видим, что $w = L^{-1}g$ решает задачу (9). Если w' также решает ее, то для $\tilde{w} := w - w'$ имеем $\Gamma_1\tilde{w} = \Gamma_2\tilde{w} = 0$, что ведет к $\tilde{w} \in \text{Dom } L_0$ в силу (7). Поэтому $L_0^*\tilde{w} = L_0\tilde{w} \in \text{Ran } L_0$ и, следовательно, $L_0^*\tilde{w} \perp \text{Ker } L_0^*$. Последнее делает возможным $L_0^*L_0^*\tilde{w} = 0$ только если $L_0^*\tilde{w} = 0$. Поскольку $L_0^*\tilde{w} = L_0\tilde{w} = 0$, мы приходим к $\tilde{w} = 0$ по инъективности L_0 . \square

Таким образом, для нахождения h и g из (2), можно найти h из (8), решить (9) и затем получить $g = Lw$.

Пример

- В качестве иллюстрации рассмотрим оператор Лапласа. Пусть (Ω, g) есть компактное гладкое ¹ риманово многообразие размерности $n \geq 2$ с гладкой связной границей Γ ; пусть Δ – дифференциальный оператор Лапласа-Бельтрами в Ω .

Пусть $H^p(\Omega)$, $p = 1, 2$, $H_0^1(\Omega) = \{y \in H^1(\Omega) \mid y|_\Gamma = 0\}$ и $H_0^2(\Omega) = \{y \in H^2(\Omega) \mid y|_\Gamma = \partial_\nu y|_\Gamma = 0\}$ суть пространства Соболева (ν – внешняя нормаль к Γ). Положим $\mathcal{H} := L_2(\Omega)$ и обозначим через $\text{Harm}(\Omega) := \{h \in \mathcal{H} \mid \Delta h = 0 \text{ in } \Omega \setminus \Gamma\}$ подпространство гармонических функций. Следующие факты хорошо известны.

¹Всюду далее *гладкий* означает C^∞ -гладкий.

²случай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ вполне подходит для наших целей.

Оператор (минимальный лапласиан) $L_0 := \overline{-\Delta \upharpoonright C_0^\infty(\Omega)} = -\Delta \upharpoonright H_0^2(\Omega)$ положительно определен. Сопряженный к нему (максимальный лапласиан) есть $L_0^* = -\Delta \upharpoonright [H^2(\Omega) + \text{Harm}(\Omega)]$ и выполнено $\mathcal{K} = \text{Ker } L_0^* = \text{Harm}(\Omega)$. Расширение Фридрихса оператора L_0 есть $L = -\Delta \upharpoonright [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]$.

• Согласно (2) и (4), чтобы описать действие граничных операторов $\Gamma_{1,2}$, надо показать, как находятся гармонические функции h и g по заданному $y \in \text{Dom } L_0^*$. Так как y_0 и $L^{-1}g$ принадлежат $H_0^1(\Omega)$, мы имеем $y = h$ на Γ . Тем самым, функция h может быть определена как (единственное) решение задачи Дирихле

$$\Delta h = 0 \quad \text{in } \Omega \setminus \Gamma; \quad h = y \quad \text{on } \Gamma. \quad (10)$$

Чтобы определить гармоническую функцию g , напомним, что слагаемое y_0 в (2) лежит в $\text{Dom } L_0 = H_0^2(\Omega)$ и, следовательно, удовлетворяет условию $\partial_\nu y_0|_\Gamma = 0$. Из этого следует

$$\partial_\nu L^{-1}g \stackrel{(2)}{=} \partial_\nu(y - y_0 - h) = \partial_\nu(y - h).$$

В то же время, мы имеем $L^{-1}g \in H_0^1(\Omega)$ и $L_0^* L_0^* L^{-1}g = L_0^* g = 0$. В результате, для $L^{-1}g$ получаем:

$$\Delta^2(L^{-1}g) = 0 \quad \text{in } \Omega \setminus \Gamma; \quad L^{-1}g = 0, \quad \partial_\nu(L^{-1}g) = \partial_\nu(y - h) \quad \text{on } \Gamma \quad (11)$$

(функция h уже найдена). Решая эту корректную задачу Коши для бигармонического уравнения, мы получаем $L^{-1}g$ и затем находим $g = \Delta L^{-1}g$.

Легко видеть, что соотношения (10) и (11) являются конкретными версиями (8) и (9) соответственно. Можно сказать, что $L_0^* h = 0$ и $L_0^{*2} w = 0$ суть абстрактное уравнение Лапласа и бигармоническое уравнение соответственно.

2 Динамика, определяемая оператором L_0

Система α

- Граничная тройка определяет *динамическую систему с граничным управлением* (ДСГУ) вида

$$\ddot{u} + L_0^* u = 0 \quad \text{in } \mathcal{H}, \quad t > 0; \quad (12)$$

$$u|_{t=0} = \dot{u}|_{t=0} = 0 \quad \text{in } \mathcal{H}; \quad (13)$$

$$\Gamma_1 u = f \quad \text{in } \mathcal{H}, \quad t \geq 0, \quad (14)$$

где $(\dot{}) := \frac{d}{dt}$, а $f = f(t)$ есть \mathcal{H} -значная функция времени (*граничное управление*). Через $u = u^f(t)$ мы обозначаем решение (*волну*). Для краткости мы называем (12)–(14) просто системой α ; функция $u^f(\cdot)$ есть ее траектория.

Введем класс гладких управлений

$$\mathcal{M} := \{f \in C^\infty([0, \infty); \mathcal{H}) \mid \text{supp } f \subset (0, \infty)\},$$

аннулирующих вблизи $t = 0$. Как показано в [5], для каждого $f \in \mathcal{M}$ существует единственное классическое решение $u = u^f(t) \in C^\infty([0, \infty); \mathcal{H})$ (*гладкая волна*), удовлетворяющее условию $u^f(t) \in \text{Dom } L_0^*$, $t \geq 0$ и представимое в виде

$$u^f(t) = -f(t) + L^{-\frac{1}{2}} \int_0^t \sin[(t-s)L^{\frac{1}{2}}] \ddot{f}(s) ds, \quad t \geq 0. \quad (15)$$

Интегрирование по частям дает эквивалентное представление

$$u^f(t) = -f(t) + L^{-1} \int_0^t \left\{ 1 - \cos[(t-s)L^{\frac{1}{2}}] \right\} \ddot{f}(s) ds = -f(t) + u_L^f(t), \quad t \geq 0, \quad (16)$$

в котором слагаемое $u_L^f(t) \in \text{Dom } L$ соответствует элементу $y' \in \text{Dom } L$ в разложении (2).

Правая часть в (15) имеет смысл для любого $f \in H_{\text{loc}}^2([0, \infty); \mathcal{H})$, аннулирующегося вблизи $t = 0$. Для таких управлений она определяет (обобщенное) решение u^f системы (12)–(14).

- Приведем известные свойства волн. В дальнейшем мы полагаем все функции от времени продолженными на $t < 0$ нулем.

Введем оператор запаздывания \mathcal{T}_τ , действующий на функции от времени по правилу $(\mathcal{T}_\tau w)(t) := w(t - \tau)$. Так как оператор L_0^* , определяющий эволюцию системы α , не зависит от времени, имеет место соотношение стационарности

$$u^{\mathcal{T}_\tau f}(t) = (\mathcal{T}_\tau u^f)(t) = u^f(t - \tau), \quad t \geq 0, \quad \tau > 0 \quad (17)$$

и его следствие

$$u^f(t) = \dot{u}^f(t), \quad u^f(t) = \ddot{u}^f(t) \stackrel{(12)}{=} -L_0^* u^f(t), \quad t \geq 0. \quad (18)$$

- Система α снабжена стандартными атрибутами теории управления.

Пространство управлений (входов) $\mathcal{F} := L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathcal{K})$ есть *внешнее пространство*. Оно содержит семейство запаздывающих управлений $\mathcal{F}_\tau := \mathcal{T}_\tau \mathcal{F}$, $\tau > 0$ и гладкий класс \mathcal{M} , который удовлетворяет соотношению

$$\frac{d^p}{dt^p} \mathcal{M} = \mathcal{M}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (19)$$

и является локально плотным в \mathcal{F} : соотношение $\overline{\{f|_{[0,T]} \mid f \in \mathcal{M}\}} = L_2([0, T]; \mathcal{K})$ справедливо при всех $T > 0$.

Пространство \mathcal{H} есть *внутреннее пространство* системы α , волны (состояния) $u^f(t)$ суть его элементы. Оно содержит расширяющееся семейство *достижимых множеств* $\mathcal{U}^\tau := \{u^f(\tau) \mid f \in \mathcal{M}\}$, $\tau \geq 0$ и *тотальное достижимое множество* $\mathcal{U} := \text{span} \{\mathcal{U}^\tau \mid \tau \geq 0\}$. Согласно (19) и (18), имеет место инвариантность достижимых множеств: выполнено

$$L_0^* \mathcal{U}^\tau = \mathcal{U}^\tau, \quad \tau \geq 0; \quad L_0^* \mathcal{U} = \mathcal{U}. \quad (20)$$

В системе α , отображение

$$W^\tau : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}, \quad \text{Dom } W^\tau = \mathcal{M}, \quad W^\tau f := u^f(\tau), \quad \tau \geq 0$$

реализует соответствие "вход-состояние".

Лемма 2. При любом $\tau > 0$ отображение W^τ замыкаемо.

Доказательство. **1.** Возьмем произвольное $\phi \in \mathcal{H}$. Применяя $L^{-\frac{1}{2}}$ в (15), имеем:

$$(L^{-\frac{1}{2}}u^f(\tau), \phi) = -(L^{-\frac{1}{2}}f(\tau), \phi) + (L^{-1} \int_0^\tau \sin[(\tau-s)L^{\frac{1}{2}}] \ddot{f}(s) ds, \phi) =: -I + II. \quad (21)$$

Поскольку $L = L^*$, второе слагаемое имеет вид

$$II = \int_0^\tau (\ddot{f}(s), \psi(s)) ds,$$

где $\psi(s) := L^{-1} \sin[(\tau-s)L^{\frac{1}{2}}]\phi$ удовлетворяет $\ddot{\psi}(s) = -\sin[(\tau-s)L^{\frac{1}{2}}]\phi \in \mathcal{H}$. Затем легко оправдывается интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} II &= \left[(\dot{f}(s), L^{-1} \sin[(\tau-s)L^{\frac{1}{2}}]\phi) + (f(s), L^{-\frac{1}{2}} \cos[(\tau-s)L^{\frac{1}{2}}]\phi) \right] \Big|_{s=0}^{s=\tau} + \\ &+ \int_0^\tau (f(s), \sin[(\tau-s)L^{\frac{1}{2}}]\phi) ds = (f(\tau), L^{-\frac{1}{2}}\phi) + \\ &+ \int_0^\tau (f(s), \sin[(\tau-s)L^{\frac{1}{2}}]\phi) ds = (L^{-\frac{1}{2}}f(\tau), \phi) + \int_0^\tau (\sin[(\tau-s)L^{\frac{1}{2}}]f(s), \phi) ds. \end{aligned}$$

Подставляя II в виде последней суммы в (21) и учитывая произвольность ϕ , приходим к представлению

$$L^{-\frac{1}{2}}u^f(\tau) = \int_0^\tau \sin[(\tau-s)L^{\frac{1}{2}}]f(s) ds. \quad (22)$$

2. В силу (15), значение волны $u^f(\tau)$ определяется значениями управления $f|_{0 \leq t \leq \tau}$ (не зависит от $f|_{t > \tau}$). Пусть $f|_{[0, \tau]} \rightarrow 0$ в $L_2([0, \tau]; \mathcal{H})$ и $u^f(\tau) \rightarrow y$ в \mathcal{H} . Предельный переход в (22) ведет к $L^{-\frac{1}{2}}y = 0$. Из последнего следует $y = 0$.

Таким образом, $f \rightarrow 0$ и $W^\tau f \rightarrow y$ приводят к $y = 0$. Следовательно W^T допускает замыкание. \square

Пример

- В примере, выбранном в качестве иллюстрации, мы имеем $\mathcal{H} = \text{Harm}(\Omega)$, причем соответствие $\text{Harm}(\Omega) \ni y \leftrightarrow y|_\Gamma$ есть биекция. По-

этому, согласно (4), системе α можно придать эквивалентную (традиционную) форму начально-краевой задачи

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \quad \text{in } (\Omega \setminus \Gamma) \times \mathbb{R}_+; \quad (23)$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \quad \text{in } \Omega; \quad (24)$$

$$u = f \quad \text{on } \Gamma \times \overline{\mathbb{R}_+}, \quad (25)$$

которая описывает распространение волны $u = u^f(x, t)$ в Ω , инициированной граничным источником (управлением) $f = f(\gamma, t)$. Приведем известные свойства волн.

Для гладких управлений класса $\mathcal{M} := \{f \in C^\infty(\Gamma \times \overline{\mathbb{R}_+}) \mid \text{supp } f \subset \Gamma \times \mathbb{R}_+\}$, аннулирующихся вблизи $t = 0$, система (23)–(25) имеет единственное классическое решение $u^f \in C^\infty(\Omega \times \overline{\mathbb{R}_+})$.

При всех $\tau > 0$ отображение $W^\tau : f|_{[0, \tau]} \mapsto u^f(\cdot, \tau)$ непрерывно из $\mathcal{F}^\tau := L_2(\Gamma \times [0, \tau])$ в \mathcal{H} [17].

Пусть $\Omega^r := \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \Gamma) < r\}$ есть метрическая окрестность границы радиуса $r > 0$; обозначим $T_* := \inf \{r > 0 \mid \Omega^r = \Omega\}$. Соотношение

$$\text{supp } u^f(\cdot, t) \subset \overline{\Omega^t}, \quad t > 0 \quad (26)$$

имеет место и показывает, что волны движутся от границы внутрь многообразия со скоростью ≤ 1 . В момент $t = T_*$ волны заполняют все Ω . В последующем мы говорим об этом факте как о *принципе конечности скорости распространения волн* (КС-принцип). Он отвечает гиперболичности начально-граничной задачи (23)–(25).

• Введем достижимые множества $\mathcal{U}^t := \{u^f(\cdot, t) \mid f \in \mathcal{M}\}$ и отметим соотношение $\mathcal{U}^s \subset \mathcal{U}^t$ при $s < t$. Как следствие (26), имеет место вложение $\mathcal{U}^t \subset \mathcal{H}^t := \{y \in \mathcal{H} \mid \text{supp } y \subset \overline{\Omega^t}\}$. Важный факт, который интерпретируется как локальная приближенная граничная управляемость системы α , состоит в том, что это вложение плотно: выполнено равенство

$$\overline{\mathcal{U}^\tau} = \mathcal{H}^\tau, \quad \tau > 0 \quad (27)$$

(см. [4], [19]). Так как Ω компактно, при $\tau \geq T_*$ из соотношения (27) следует $\overline{\mathcal{U}^\tau} = \mathcal{H}$, так что система (23)–(25) управляема при всех $T > T_*$.

Добавим, что в данном Примере семейство проекторов P^τ в \mathcal{H} на $\overline{\mathcal{U}^\tau}$ непрерывно по τ . Однако, в системе, описываемой уравнениями Максвелла, соответствующее семейство может иметь бесконечномерные разрывы: см. [14]. Таким образом, непрерывность $\overline{\mathcal{U}^\tau}$ определенно не является общим фактом.

Управляемость системы α

• Для абстрактной системы α вида (12)–(14) достижимые множества суть $\mathcal{U}^\tau := \{u^f(\tau) \mid f \in \mathcal{M}\}$. Однако, обсуждать свойство (27) не имеет смысла, поскольку в ней нет аналога подпространств \mathcal{H}^τ . Тем не менее, вопрос можно поставить так. Определим тотальное достижимое множество $\mathcal{U} := \text{span}\{\mathcal{U}^\tau \mid \tau > 0\}$ и скажем, что система α управляема, если выполнено равенство

$$\overline{\mathcal{U}} = \mathcal{H}, \quad (28)$$

Если (28) не имеет места, мы называем $\mathcal{D} := \mathcal{H} \ominus \overline{\mathcal{U}}$ дефектным (недостижимым) подпространством. Вопрос состоит в условиях, обеспечивающих выполнение (28). Ответ таков.

Пусть A есть оператор в гильбертовом пространстве \mathcal{H} и $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ – подпространство. Скажем, что \mathcal{G} есть *инвариантное подпространство* оператора A , если выполнено $\overline{\text{Dom } A \cap \mathcal{G}} = \mathcal{G}$ и $A(\text{Dom } A \cap \mathcal{G}) \subset \mathcal{G}$ ³, а оператор $A_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$, $\text{Dom } A_{\mathcal{G}} = \text{Dom } A \cap \mathcal{G}$, $A_{\mathcal{G}}u := Au$ назовем частью A в \mathcal{G} .

Симметрический плотно заданный оператор A называется *вполне несамосопряженным* если он не имеет (в существенном) самосопряженных частей, т.е. отсутствуют части $A_{\mathcal{G}}$, для которых выполнено $A_{\mathcal{G}}^* = \overline{A_{\mathcal{G}}}$.

Система α определяется оператором L_0 . Как показано в [5], она управляема, т.е. выполнено (28), если и только если L_0 вполне несамосопряжен.

• Существуют динамические системы (12)–(14), в которых (27) принимает форму $\overline{\mathcal{U}^\tau} = \mathcal{H}$ при любом $\tau > 0$. Как пример, можно упомянуть систему на $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, эволюция которой определяется уравнением Эйлера-Бернулли $u_{tt} + \Delta^2 u = 0$ и адекватным граничным управлением [18]. Следующее соглашение исключает такие случаи как тривиальные.

Соглашение 1. Предполагается, что система α такова, что имеются $\tau > 0$, для которых выполнено $\overline{\mathcal{U}^{\tau+\epsilon}} \ominus \overline{\mathcal{U}^\tau} \neq \{0\}$ при любых $\epsilon > 0$.

Иными словами, предполагается, что семейство достижимых подпространств $\overline{\mathcal{U}^\tau}$ имеет положительные точки роста.

В конкретных системах, в которых реализуется тривиальный случай, КС-принцип не имеет места: (26) нарушается и волны распространяются с бесконечной скоростью. Если условие Соглашения 1 нарушено, наши

³см. комментарии к этому определению в [9]

дальнейшие результаты сохраняют силу, но становятся тривиальными. В оставшейся части работы соглашение считается принятым.

Система β

- Рассмотрим динамическую систему β вида

$$\ddot{v} + Lv = \psi \quad \text{in } \mathcal{H}, \quad t > 0; \quad (29)$$

$$v|_{t=0} = \dot{v}|_{t=0} = 0 \quad \text{in } \mathcal{H}, \quad (30)$$

управляемую *источником* ψ , являющимся \mathcal{H} -значной функцией времени. Через $v = v^\psi(t)$ обозначим решение. Для гладких источников класса

$$\mathcal{N} := \{ \psi \in C^\infty([0, \infty); \mathcal{H}) \mid \text{supp } \psi \subset (0, \infty) \},$$

аннулирующих вблизи $t = 0$, решение единственно, является классическим, гладким, представляется в виде

$$v^\psi(t) = L^{-\frac{1}{2}} \int_0^t \sin[(t-s)L^{\frac{1}{2}}] \psi(s) ds, \quad t \geq 0 \quad (31)$$

и принадлежит $\text{Dom } L$ при любом t . В силу (7), последнее влечет

$$\Gamma_1 v^\psi(t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (32)$$

Правая часть в (31) имеет смысл при $\psi \in L_2^{\text{loc}}([0, \infty); \mathcal{H})$ и рассматривается как обобщенное решение. Если $\psi \in H_{\text{loc}}^1([0, \infty); \mathcal{H})$, то интегрирование по частям в (31) дает

$$v^\psi(t) = L^{-1} \int_0^t \left\{ \mathbb{I} - \cos[(t-s)L^{\frac{1}{2}}] \right\} \dot{\psi}(s) ds, \quad t \geq 0.$$

В этом случае выполнено $v^\psi(t) \in \text{Dom } L$ и соотношение (32) сохраняет силу.

- Как частный случай, мы рассматриваем мгновенные источники $\psi = \delta(t)y$, где $y \in \mathcal{H}$ и $\delta(\cdot)$ есть дельта-функция Дирака, и соответствующие решения $v = v^{\delta y}(t) =: v^y(t)$ системы

$$\ddot{v} + Lv = 0 \quad \text{in } \mathcal{H}, \quad t > 0; \quad (33)$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad \dot{v}|_{t=0} = y \quad \text{in } \mathcal{H}. \quad (34)$$

Решения представимы в виде

$$v^y(t) = L^{-\frac{1}{2}}[\sin(t L^{\frac{1}{2}})] y, \quad t \geq 0. \quad (35)$$

Обобщенное решение v^y корректно определено для любого $y \in \mathcal{H}$. Если $y \in \text{Dom } L^{\frac{1}{2}}$, то $v^y(t) \in \text{Dom } L$ и свойство (32) сохраняет силу для v^y :

$$\Gamma_1 v^y(t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (36)$$

- Обсудим связи между системами α и β .

Лемма 3. При любом $T > 0$ справедливо соотношение

$$(u^f(T), y) = - \int_0^T (f(t), \Gamma_2 v^y(T-t)) dt, \quad f \in \mathcal{M}, \quad y \in \text{Dom } L. \quad (37)$$

Доказательство. В силу выбора управления и гладкости соответствующих траекторий u^f и v^y , легко оправдываются следующие выкладки:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(12)}{=} \int_0^T (\ddot{u}^f(t) + L_0^* u^f(t), v^y(T-t)) dt = \int_0^T (\ddot{u}^f(t), v^y(T-t)) dt + \\ &+ \int_0^T (L_0^* u^f(t), v^y(T-t)) dt = [(\dot{u}^f(t), v^y(T-t)) + (u^f(t), \dot{v}^y(T-t))] \Big|_{t=0}^{t=T} + \\ &+ \int_0^T (u^f(t), \ddot{v}^y(T-t)) dt + \int_0^T (L_0^* u^f(t), v^y(T-t)) dt = \\ &\stackrel{(13), (34)}{=} (u^f(T), y) + \int_0^T (u^f(t), \ddot{v}^y(T-t)) dt + \int_0^T (L_0^* u^f(t), v^y(T-t)) dt = \\ &\stackrel{(6)}{=} (u^f(T), y) + \int_0^T (u^f(t), \ddot{v}^y(T-t) + L_0^* v^y(T-t)) dt + \\ &+ \int_0^T [(\Gamma_1 u^f(t), \Gamma_2 v^y(T-t)) - (\Gamma_2 u^f(t), \Gamma_1 v^y(T-t))] dt = \\ &\stackrel{(14), (33), (36)}{=} (u^f(T), y) + \int_0^T (f(t), \Gamma_2 v^y(T-t)) dt \end{aligned}$$

(мы также использовали $L_0^* v^y = L v^y$, следующее из $L \subset L_0^*$). Сопоставляя начало и конец, приходим к (37). \square

Еще одна связь между траекториями систем α и β состоит в следующем. Вполне аналогичные выкладки, начинающиеся с равенства $0 = \int_0^T (\ddot{u}^f(t) + L_0^* u^f(t), v^\psi(T-t)) dt$, приводят к соотношению

$$\int_0^T (u^f(t), \psi(T-t)) dt = - \int_0^T (f(t), \Gamma_2 v^\psi(T-t)) dt, \quad f \in \mathcal{M}, \quad \psi \in \mathcal{N}. \quad (38)$$

• Выведем одно следствие соотношения (38). Скажем, что источник ψ действует из подпространства $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$, если $\psi(t) \in \mathcal{G}$ выполнено при всех t .

Фиксируем положительное $\sigma < T$; пусть ψ действует из $\overline{\mathcal{U}} \ominus \overline{\mathcal{U}}^\sigma$ ⁴. Также пусть $f \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{M}$ есть запаздывающее управление. При таком выборе, согласно (17) мы имеем $u^f(t) \in \mathcal{U}^\sigma$ при всех $0 \leq t \leq T$, что ведет к $(u^f(t), \psi(T-t)) = 0$, $0 \leq t \leq T$. Значит, интеграл слева в (38) исчезает и мы получаем

$$\int_{T-\sigma}^T (f(t), \Gamma_2 v^\psi(T-t)) dt = \int_0^\sigma (f(T-t), \Gamma_2 v^\psi(t)) dt = 0.$$

В результате, используя произвольность f , заключаем, что для любого гладкого ψ , действующего из $\overline{\mathcal{U}} \ominus \overline{\mathcal{U}}^\sigma$, выполнено соотношение

$$\Gamma_2 v^\psi(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq \sigma. \quad (39)$$

Позже оно будет использовано и интерпретировано.

Поскольку $T > 0$ произвольно, последнее соотношение в прежнем виде верно для системы β : если ψ действует из $\overline{\mathcal{U}} \ominus \overline{\mathcal{U}}^\sigma$, то (39) выполнено.

Вполне аналогично, для системы (33)–(34), из (37) при условии $y \in [\overline{\mathcal{U}} \ominus \overline{\mathcal{U}}^\sigma] \cap \text{Dom } L$ выводится соотношение

$$\Gamma_2 v^y(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq \sigma. \quad (40)$$

3 Абстрактный КС-принцип

Как уже отмечалось, обсуждать свойство (26) для абстрактных систем α и β не имеет смысла: в них нет многообразий, областей и границ. Тем

⁴Напомним о Соглашении 1!

не менее, примечательный факт состоит в том, что адекватный аналог КС-принципа для них все же существует.

- Сначала обратимся к Примеру и поясним, какой именно факт, относящийся к КС-принципу, мы собираемся усмотреть в абстрактном случае.

Соответствующая система β есть

$$\begin{aligned} v_{tt} - \Delta v &= \psi && \text{in } (\Omega \setminus \Gamma) \times \mathbb{R}_+; \\ v|_{t=0} = v_t|_{t=0} &= 0 && \text{in } \Omega; \\ v &= 0 && \text{on } \Gamma \times \overline{\mathbb{R}_+}. \end{aligned}$$

Фиксируем $0 < \sigma < \tau < T_*$. Пусть источник ψ действует из подпространства $\mathcal{H}^\tau \ominus \mathcal{H}^\sigma$, т.е. выполнено $\text{supp } \psi(\cdot, t) = \Omega^\tau \setminus \Omega^\sigma$, $t > 0$. Таким образом, источник локализован в "слое" $\Omega^\tau \setminus \Omega^\sigma$, отделенном от границы Γ расстоянием σ , а $\Omega \setminus \overline{\Omega^\tau}$ есть непустое открытое множество. В этом случае волна v^ψ распространяется в обе стороны от слоя со скоростью 1. В силу последнего, при $t > 0$ она локализована в большем слое $\Omega^{\tau+t} \setminus \Omega^{\sigma-t}$. В терминах подпространств это может быть записано в виде $v^\psi(t) \in \mathcal{H}^{\tau+t} \ominus \mathcal{H}^{\sigma-t}$. Именно это свойство имеет абстрактный аналог в системе β .

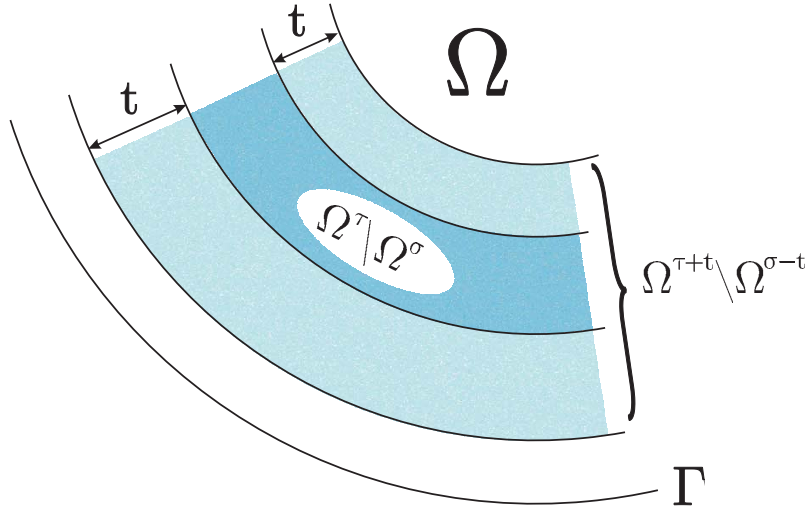


Рис. 1: Domains

- Приведем этот аналог. Для удобства формулировок примем $\mathcal{U}^t|_{t<0} := \{0\}$ и $\Psi := L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$.

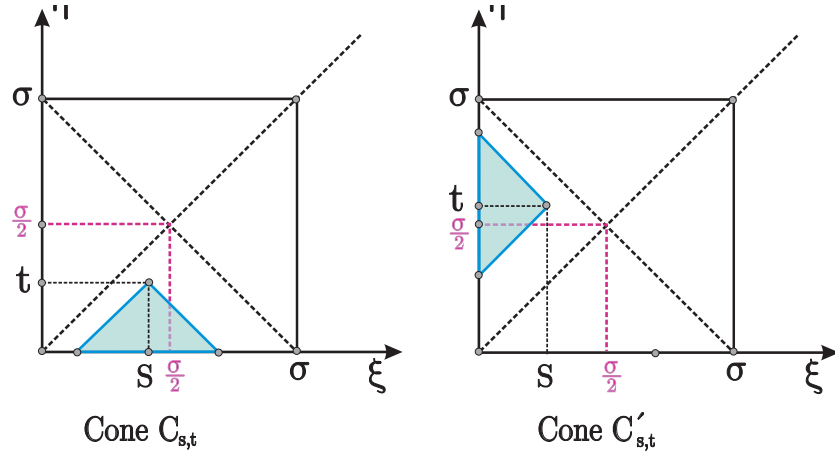


Рис. 2: Cones

Теорема 1. Пусть $0 < \sigma < \tau$ и пусть источник $\psi \in \Psi$ действует из подпространства $\overline{\mathcal{U}^\tau} \ominus \overline{\mathcal{U}^\sigma}$. Тогда при всех $t > 0$ выполнено соотношение $v^\psi(t) \in \overline{\mathcal{U}^{\tau+t}} \ominus \overline{\mathcal{U}^{\sigma-t}}$.

Доказательство. Доказательство проводится в несколько шагов.

Шаг 1. Здесь выводится вспомогательное соотношение. Через

$$C_{s,t} := \{(\xi, \eta) \in \overline{\mathbb{R}_+^2} \mid 0 \leq \eta \leq t, s - t + \eta \leq \xi \leq s + t - \eta\}$$

обозначается характеристический конус уравнения струны $u_{tt} - u_{ss} = 0$.

Лемма 4. Пусть $f \in \mathcal{M}$ и пусть $\psi \in \mathcal{N}$ есть управление и источник в системах α и β . Справедливо соотношение

$$(v^\psi(s), u^f(t)) = -\frac{1}{2} \int_{C_{s,t}} [(\Gamma_2 v^\psi(\xi), f(\eta)) + (\psi(\xi), u^f(\eta))] d\xi d\eta, \quad 0 \leq t \leq s. \quad (41)$$

Доказательство. Для функции Благовещенского $b(s, t) := (v^\psi(s), u^f(t))$

имеем:

$$\begin{aligned}
b_{tt}(s, t) - b_{ss}(s, t) &= (v^\psi(s), \ddot{u}^f(t)) - (\ddot{v}^\psi(s), u^f(t)) \stackrel{(12), (29)}{=} \\
&= -(v^\psi(s), L_0^* u^f(t)) + (Lv^\psi(s) - \psi(s), u^f(t)) \stackrel{\text{by } L \subset L_0^*}{=} \\
&= -(v^\psi(s), L_0^* u^f(t)) + (L_0^* v^\psi(s), u^f(t)) - (\psi(s), u^f(t)) \stackrel{(6)}{=} \\
&= (\Gamma_1 v^\psi(s), \Gamma_2 u^f(t)) - (\Gamma_2 v^\psi(s), \Gamma_1 u^f(t)) - (\psi(s), u^f(t)) \stackrel{(14), (32)}{=} \\
&= -(\Gamma_2 v^\psi(s), f(t)) - (\psi(s), u^f(t)) =: F(s, t) \quad \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+.
\end{aligned}$$

В то же время, условия (30) приводят к данным Коши: $b|_{t=0} = b_t|_{t=0} = 0$ на основании $[s - t, s + t] \subset \overline{\mathbb{R}_+}$ конуса $C_{s,t}$. Интегрируя по Даламберу, получаем

$$b(s, t) = -\frac{1}{2} \int_{C_{s,t}} F(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

что есть (41). □

Теперь выберем (s, t) с условием $C_{s,t} \subset C_{\frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2}}$. По выбору, в конусе $C_{s,t}$ имеем:

$$\Gamma_2 v^\psi(\xi)|_{\xi \leq \sigma} \stackrel{(39)}{=} 0 \tag{42}$$

и $(\psi(\xi), u^f(\eta)) = 0$, причем последнее выполнено ввиду $u^f(\eta) \in \mathcal{U}^\eta \subset \mathcal{U}^{\frac{\sigma}{2}} \subset \mathcal{U}^\sigma$, в то время как $\psi(\xi)$ ортогонален \mathcal{U}^σ . Таким образом, оба слагаемых под интегралом (41) аннулируются в конусе и мы получаем $(u^f(t), v^\psi(s)) = 0$. Поскольку $f \in \mathcal{M}$ произвольно, последнее равенство означает, что выполнено $v^\psi(s) \perp \mathcal{U}^t$. Сохраняя s фиксированным и варьируя $t \in [0, \sigma - s]$ (пока $(s, t) \in C_{\frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2}}$ имеет место), мы получаем $v^\psi(s) \perp \mathcal{U}^{\sigma-s}$. Меняя s в допустимом сегменте $[0, \frac{\sigma}{2}]$, приходим к

$$v^\psi(s) \in \overline{\mathcal{U}} \ominus \overline{\mathcal{U}^{\sigma-s}}, \quad 0 \leq s \leq \frac{\sigma}{2}. \tag{43}$$

Шаг 2. В проведенных выше рассмотрениих расширить сегмент до $[0, \sigma]$ невозможно, т.к. при $s < t$ основание $[s - t, s + t]$ конуса $C_{t,s}$ не попадает в $\overline{\mathbb{R}_+}$. Поэтому мы заменяем конус на

$$C'_{s,t} := \{(\xi, \eta) \in \overline{\mathbb{R}_+^2} \mid 0 \leq \xi \leq s, \xi - s + t \leq \eta \leq -\xi + s + t\}.$$

Фиксируем (s, t) так, чтобы $C'_{s,t} \subset C'_{\frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2}}$. Повторяя те же вычисления, что и в Шаге 1, мы приходим к задаче Коши для уравнения струны

$$\begin{aligned} b_{tt} - b_{ss} &= F(s, t), & 0 < s < t; \\ b|_{s=0} &= b_s|_{s=0} \stackrel{(30)}{=} 0, & t \geq 0 \end{aligned}$$

с теми же b и F , что и выше. Интегрируя по Даламберу, получим

$$(v^\psi(s), u^f(t)) = -\frac{1}{2} \int_{C'_{s,t}} [(\Gamma_2 v^\psi(\xi), f(\eta)) + (\psi(\xi), u^f(\eta))] d\xi d\eta, \quad 0 \leq s \leq t.$$

В силу (42) и ортогональности $(u^f(\eta), \psi(\xi)) = 0$ при всех $\xi < \sigma$, слагаемые под интегралом исчезают и мы получаем $(u^f(t), v^\psi(s)) = 0$ для $(s, t) \in C'_{\frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2}}$. Сохраняя значения $\frac{\sigma}{2} < t < \sigma$ и увеличивая s от 0 до $\sigma - t$, заключаем, что $(u^f(t), v^\psi(\sigma - t)) = 0$ выполнено при $0 \leq t \leq \sigma$. Так как $f \in \mathcal{M}$ произвольно, последнее ведет к $v^\psi(t) \perp \overline{\mathcal{U}^{\sigma-t}}$, т.е. к

$$v^\psi(t) \in \overline{\mathcal{U}} \ominus \overline{\mathcal{U}^{\sigma-t}}, \quad \frac{\sigma}{2} \leq t \leq \sigma. \quad (44)$$

Сопоставляя (43) с (44), мы получаем

$$v^\psi(t) \in \overline{\mathcal{U}} \ominus \overline{\mathcal{U}^{\sigma-t}}, \quad 0 \leq t \leq \sigma \quad (45)$$

и доказываем первую часть теоремы для гладких ψ . Аппроксимируя $\psi \in \Psi$ гладкими источниками и используя непрерывность соответствия $\psi|_{[0,t]} \rightarrow v^\psi(t)$, получаем утверждение первой части.

Остается доказать соотношение $v^\psi(t) \in \overline{\mathcal{U}^{\tau+t}}$.

Шаг 3. Пусть $I^t : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $I^t y := v^y(t)$ отображение, разрешающее задачу (33)–(34). Согласно (35) мы имеем $I^t = L^{-\frac{1}{2}} \sin[tL^{\frac{1}{2}}]$, так что I^t есть ограниченный самосопряженный оператор в \mathcal{H} .

Лемма 5. *Справедливо соотношение*

$$I^t \overline{\mathcal{U}^\tau} \subset \overline{\mathcal{U}^{\tau+t}}, \quad \tau > 0, t > 0. \quad (46)$$

Доказательство. Возьмем $f \in \mathcal{M}$ и $\theta > 0$. В силу (45), для источника $\psi \in \Psi$, действующего из $\overline{\mathcal{U}} \ominus \overline{\mathcal{U}^{\tau+\theta}}$, выполнено

$$(v^\psi(\tau + \theta - t), u^f(t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq \theta + \tau.$$

Полагая $t = \tau$, мы имеем:

$$\begin{aligned} 0 &= (v^\psi(\theta), u^f(\tau)) \stackrel{(31)}{=} \left(\int_0^\theta L^{-\frac{1}{2}} \sin[(\theta - s)L^{\frac{1}{2}}] \psi(s) ds, u^f(\theta) \right) = \\ &= \int_0^\theta (\psi(s), L^{-\frac{1}{2}} \sin[(\theta - s)L^{\frac{1}{2}}] u^f(\tau)) ds. \end{aligned}$$

По произвольности ψ , последнее ведет к

$$L^{-\frac{1}{2}} \sin[(\theta - s)L^{\frac{1}{2}}] u^f(\tau) \perp \overline{\mathcal{U}} \ominus \overline{\mathcal{U}^{\tau+\theta}}, \quad 0 \leq s \leq \theta,$$

что равносильно $L^{-\frac{1}{2}} \sin[(\theta - s)L^{\frac{1}{2}}] u^f(\tau) \in \overline{\mathcal{U}^{\tau+\theta}}$. Полагая $s = 0$ и $\theta = t$, получаем $I^t u^f(\tau) \subset \overline{\mathcal{U}^{\tau+t}}$. Поскольку волны $u^f(\tau)$ плотны в \mathcal{U}^τ , мы приходим к (46). \square

Пусть источник ψ таков, что $\psi(t) \in \overline{\mathcal{U}^\tau}$ выполнено при всех $t \geq 0$. Представляя

$$v^\psi(t) \stackrel{(31)}{=} \int_0^t [I^{t-s} \psi(s)] ds, \quad t > 0,$$

и учитывая $I^{t-s} \psi(s) \stackrel{(46)}{\in} \overline{\mathcal{U}^{\tau+t}}$ для всех $s \leq t$, заключаем, что $v^\psi(t) \in \overline{\mathcal{U}^{\tau+t}}$ выполняется и, таким образом, завершаем доказательство Теоремы 1. \square

Ключевое наблюдение, что скалярные произведения волн удовлетворяют уравнению струны $\square b = F$, принадлежит А.С.Благовещенскому. Именно оно позволило разработать версию ВС-метода для решения динамических обратных задач [1]. Простой, но продуктивный прием, состоящий в перемене ролей пространственной переменной s и времени t (с заменой конуса $C_{s,t}$ на конус $C'_{s,t}$) – тоже изобретение Александра Сергеевича [10, 12, 13].

4 Волновые части систем и операторов

Системы $\beta_{\mathcal{D}}$ и $\beta_{\mathcal{U}}$

- Напомним, что β есть система вида

$$\begin{aligned} \ddot{v} + Lv &= \psi & \text{in } \mathcal{H}, \quad t > 0; \\ v|_{t=0} &= \dot{v}|_{t=0} = 0 & \text{in } \mathcal{H} \end{aligned}$$

с траекторией

$$v^\psi(t) = L^{-\frac{1}{2}} \int_0^t \sin[(t-s)L^{\frac{1}{2}}] \psi(s) ds, \quad t > 0.$$

Как частный случай, рассматриваются, источники $\psi = \delta(t)y$ и соответствующие траектории $v = v^{\delta y} =: v^y$ of the system

$$\begin{aligned} \ddot{v} + Lv &= 0 & \text{in } \mathcal{H}, \quad t > 0; \\ v|_{t=0} &= 0, \quad \dot{v}|_{t=0} = y & \text{in } \mathcal{H}, \end{aligned}$$

для которых справедливо представление

$$v^y(t) = L^{-\frac{1}{2}} \sin[(t-s)L^{\frac{1}{2}}] y, \quad t > 0.$$

- Напомним разложение $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{U}} \oplus \mathcal{D}$, где $\mathcal{U} := \text{span} \{ \mathcal{U}^t \mid t > 0 \}$.

Лемма 6. Если $\psi(t) \in \mathcal{D}$ ($\psi(t) \in \mathcal{U}$) выполнено при всех $t > 0$, то $v^\psi(t) \in \mathcal{D}$ ($v^\psi(t) \in \mathcal{U}$) справедливо для всех $t > 0$. Если выполнено $y \in \mathcal{D}$ ($y \in \mathcal{U}$), то $v^y(t) \in \mathcal{D}$ ($v^y(t) \in \mathcal{U}$) справедливо при всех $t > 0$.

Доказательство. **1.** Пусть $\psi(t) \in \mathcal{D} \cap \mathcal{N}$, $t > 0$. Так как $\psi(t) \perp \mathcal{U}$ при $t > 0$, то из соотношения (38) легко следует $\Gamma_2 v^\psi|_{t>0} = 0$. Следовательно, в силу (41) мы имеем $(u^f(t), v^\psi(s)) = 0$ при всех s, t . Поэтому $v^\psi(s) \perp \mathcal{U}$ выполнено при всех $s > 0$. Аппроксимируя, при необходимости, источник $\psi \in \mathcal{D}$ источниками из \mathcal{N} , снимем ограничение $\psi(t) \in \mathcal{D} \cap \mathcal{N}$.

Легко проверить, что то же самое верно и для источников $\psi = \delta(t)y$ с $y \in \mathcal{D}$: мы имеем $v^y(t) \in \mathcal{D}$ для всех $t > 0$.

2. Пусть $\psi(t) \in \mathcal{U}$, $t > 0$. Выберем произвольно $y \in \mathcal{D}$. В силу (31) имеем

$$\begin{aligned} (v^\psi(t), y) &= \int_0^t \left(L^{-\frac{1}{2}} \sin[(t-s)L^{\frac{1}{2}}] \psi(s), y \right) ds = \\ &= \int_0^t \left(\psi(s), L^{-\frac{1}{2}} \sin[(t-s)L^{\frac{1}{2}}] y \right) ds = \int_0^t (\psi(s), v^y(t-s)) ds = \\ &= 0, \quad t > 0, \end{aligned}$$

причем последнее равенство справедливо в силу соотношения $v^y(t) \in \mathcal{D}$, доказанного выше. Таким образом, мы приходим к $v^\psi(t) \perp y$, т.е. к $v^\psi(t) \in \mathcal{U}$, $t > 0$. \square

- В результате мы заключаем, что система β эволюционирует либо в подпространстве \mathcal{D} , либо в подпространстве \mathcal{U} , – в зависимости от источника ψ , действующего из \mathcal{D} или из \mathcal{U} соответственно. Это означает, что система β распадается на две независимые (невзаимодействующие) системы $\beta_{\mathcal{D}}$ и $\beta_{\mathcal{U}}$, причем вторая система делит общее пространство эволюции с ДСГУ α . Если α управляема, т.е. выполнено $\overline{\mathcal{U}} = \mathcal{H}$, то $\mathcal{D} = \{0\}$ и система $\beta_{\mathcal{D}}$ отсутствует⁵. Напомним, что последнее имеет место тогда и только тогда, когда оператор L_0 , который определяет все рассматриваемые системы, является вполне несамосопряженным [5]. Можно сказать, что система $\beta_{\mathcal{D}}$ есть часть системы β , не управляемая (не наблюдаемая) с границы. Такая картина находится в полном согласии с общей теорией систем: см. [16], Глава 10.

Пространственная и волновая части L_0^*

- Фиксируем $T > 0$ и предположим, что оператор L_0^* имеет часть в подпространстве $\overline{\mathcal{U}^T}$. Напомним: это означает, что выполнены $\overline{\mathcal{U}^T} \cap \text{Dom } L_0^* = \overline{\mathcal{U}^T}$ и $L_0^*[\overline{\mathcal{U}^T} \cap \text{Dom } L_0^*] \subset \overline{\mathcal{U}^T}$. Упрощая обозначения, обозначим часть $L_0^*_{\overline{\mathcal{U}^T}}$ через L_0^{*T} . Эта часть есть замыкаемый оператор в $\overline{\mathcal{U}^T}$ и для ее замыкания мы сохраним обозначение L_0^{*T} . Будем говорить, что L_0^{*T} есть *пространственная часть* оператора L_0^* в $\overline{\mathcal{U}^T}$.

В то же время, линейал гладких волн \mathcal{U}^T плотен в $\overline{\mathcal{U}^T}$ и инвариантен: выполнено $L_0^* \mathcal{U}^T = \mathcal{U}^T$ (см. (20)). Поэтому оператор

$$L_{0u}^{*T} : \overline{\mathcal{U}^T} \rightarrow \overline{\mathcal{U}^T}, \quad \text{Dom } L_{0u}^{*T} = \mathcal{U}^T, \quad L_{0u}^{*T} y := L_0^* y$$

корректно определен, плотно задан и замыкаем в $\overline{\mathcal{U}^T}$. Для его замыкания сохраним обозначение L_{0u}^{*T} и назовем *волновой частью* оператора L_0^* в $\overline{\mathcal{U}^T}$. Как следует из ее определения, волновая часть обязательно существует.

Соотношение $L_{0u}^{*T} \subset L_0^{*T}$ очевидно, но можно сказать больше о соотношении между пространственной и волновой частями L_0^* . В следующей лемме под *изоморфизмом* понимается инъективный, сюръективный, ограниченный и ограниченно обратимый оператор. Напомним обозначение $\mathcal{K} := \text{Ker } L_0^*$ и положим $\mathcal{F}^T := L_2([0, T]; \mathcal{K})$ и $\mathcal{M}^T := \{f|_{[0, T]} \mid f \in \mathcal{M}\}$.

⁵Этот случай реализуется в Примере.

Лемма 7. Пусть оператор L_0^* имеет часть L_0^{*T} . Пусть W^T есть изоморфизм из \mathcal{F}^T на $\overline{\mathcal{U}^T}$ и пусть выполнено $\mathcal{K} \cap \overline{\mathcal{U}^T} = \{0\}$. Тогда пространственная и волновая части совпадают: $L_0^{*T} = L_{0u}^{*T}$.

Доказательство. Выберем пару $(y, L_0^{*T}y) = (y, L_0^*y) \in \text{graph } L_0^{*T}$. В силу (19) и (20), можно указать последовательность управлений $g_n \in \mathcal{M}^T$, таких, что выполнено $u^{g_n}(T) \rightarrow L_0^*y$ в $\overline{\mathcal{U}^T}$. По изоморфности W^T , эта последовательность обязательно сходится: $g_n \rightarrow g$ в \mathcal{F}^T . Представляя единственным образом $g_n = -\ddot{f}_n$, $g = -\ddot{f}$ с $f_n \in \mathcal{M}^T$, мы имеем сходимость $f_n \rightarrow f$ в \mathcal{F}^T , из которой следует $u^{f_n}(T) \rightarrow u^f(T)$ в $\overline{\mathcal{U}^T}$. Наряду с последней сходимостью, имеем $L_0^*u^{f_n}(T) \stackrel{(18)}{=} -\ddot{u}^{f_n}(T) = u^{-\ddot{f}_n}(T) = u^{g_n}(T) \rightarrow L_0^*y$. В результате заключаем, что выполнено $(u^f(T), L_0^*y) \in \text{graph } L_{0u}^{*T}$.

В то же время, из $L_{0u}^{*T} \subset L_0^{*T}$ следует $\text{graph } L_{0u}^{*T} \subset \text{graph } L_0^{*T}$. Значит, обе пары (y, L_0^*y) и $(u^f(T), L_0^*y)$ принадлежат $\text{graph } L_0^{*T}$. Последнее ведет к $(y - u^f(T), 0) \in \text{graph } L_0^{*T}$, т.е. имеем $y - u^f(T) \in \mathcal{K}$. Ввиду $\mathcal{K} \cap \overline{\mathcal{U}^T} = \{0\}$ мы приходим к $y = u^f(T)$ и заключаем, что графики пространственной и волновой частей оператора L_0^* в $\overline{\mathcal{U}^T}$ совпадают, т.е. получаем $L_0^{*T} = L_{0u}^{*T}$. \square

- Предположение об изоморфности W^T весьма ограничительно: уже в Примере оно не выполняется. Просматривая доказательство леммы 7, можно видеть, что это предположение можно ослабить следующим образом. Достаточно потребовать, чтобы сходимость последовательности $L_0^*u^{f_n}(T)$ влекла сходимость $u^{f_n}(T)$ в $\overline{\mathcal{U}^T}$, в то время как сходимость f_n в \mathcal{F}^T обязательной не является. Можно показать, что такое имеет место в Примере при $T < T_*$.

В этой связи стоит напомнить, что сходимость $L_0^*u^{f_n}(T)$ всегда влечет сходимость слагаемых $u_L^{f_n}(T) \in \text{Dom } L$ в представлении (16). Это отражает общий факт: в (3), если последовательность $L_0^*y_n$ сходится, то и $y'_n = L^{-1}L_0^*y_n$ тоже сходится.

Контпримеры с $L_0^{*T} \neq L_{0u}^{*T}$ не известны и надежда на равенство без дополнительных предположений пока остается.

Полнота волн

- В системе β можно ввести отображение "вход-состояние" по правилу $\mathcal{I}^t\psi := v^\psi(t)$, $t > 0$ для $\psi \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$ ⁶. Выберем подпространство

⁶Оно используется [3, 8] и называется *изотонией*

$\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$ и обозначим через $\Psi_{\mathcal{A}} := L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathcal{A})$ пространство источников, действующих из \mathcal{A} . В этих обозначениях утверждение теоремы 1 принимает вид

$$\mathcal{I}^t \Psi_{\overline{\mathcal{U}^\tau} \ominus \overline{\mathcal{U}^\sigma}} \subset \overline{\mathcal{U}^{\tau+t}} \ominus \overline{\mathcal{U}^{\sigma-t}}, \quad 0 < \sigma < \tau, \quad t > 0.$$

В то же время, в Примере, как и во многих других приложениях, оказывается справедливым более сильный результат: имеет место не вложение, а равенство. Оно интерпретируется как полнота волн в областях, которые они заполняют. В абстрактном случае, по аналогии с приложениями можно говорить о полноте волн в заполняемых подпространствах. Ниже мы представляем результат такого типа, полученный при дополнительных предположениях.

• Пусть P^ϵ есть проектор в $\overline{\mathcal{U}}$ на $\overline{\mathcal{U}^\epsilon}$; обозначим $P_\perp^\epsilon := \mathbb{I} - P^\epsilon$. Предположим, что существует непрерывное (по норме) семейство ограниченных операторов N^ϵ , $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_*$, такое, что выполнено

$$N^0 = \mathbb{I}; \quad N^\epsilon y \in \text{Dom } L, \quad P_\perp^\epsilon N^\epsilon y = P_\perp^\epsilon y, \quad y \in \text{Dom } L_0^*. \quad (47)$$

Отметим, что в соответствии с (47) выполнено $y - N^\epsilon y \in \overline{\mathcal{U}^\epsilon}$.

В Примере, в качестве N^ϵ можно взять оператор умножения на гладкую функцию χ^ϵ , удовлетворяющую условиям $0 \leq \chi^\epsilon(\cdot) \leq 1$, $\chi^\epsilon|_{\Omega \setminus \Omega^\epsilon} = 1$, $\chi^\epsilon|_\Gamma = 0$. Параметр ϵ_* выбирается так, чтобы внутренняя граница области $\Omega^{\epsilon*}$ была гладкой. По аналогии с χ^ϵ мы называем N^ϵ *нейтрализатором*.

Лемма 8. Пусть оператор L_0 таков, что нейтрализаторы N^ϵ , $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_*$ существуют и пусть L_0^* имеет пространственную часть $L_0^{*\epsilon}$ в каждом подпространстве $\overline{\mathcal{U}^\epsilon}$. Тогда справедливо соотношение

$$\overline{\mathcal{I}^t \Psi_{\overline{\mathcal{U}^\tau}}} = \overline{\mathcal{U}^{\tau+t}}, \quad \tau > 0, \quad t > 0. \quad (48)$$

Доказательство. (набросок) Фиксируем $0 < \tau < T$ и будем выбирать управления $f \in \mathcal{M}^T$. Соответствующие волны $u^f(T)$ образуют плотное множество в \mathcal{U}^T в силу определения последнего. Как очевидно, проекции $P_\perp^\epsilon u^f(T)$ плотны в $\overline{\mathcal{U}^T} \ominus \overline{\mathcal{U}^\epsilon}$. Грубо говоря, идея проводимого доказательства состоит в том, чтобы представить $u^f(T)$ как волну, произведенную адекватным источником F , действующим из подпространства $\overline{\mathcal{U}^\tau}$.

Волна u^f , удовлетворяющая (12)–(14), также определяется системой

$$\begin{aligned} \ddot{u} + L_0^* u &= \delta \dot{u}^f(\tau) + \dot{\delta} u^f(\tau), & \tau < t < T; \\ u|_{t=\tau} &= \dot{u}|_{t=\tau} = 0; \\ \Gamma_1 u &= f, & \tau \leq t \leq T, \end{aligned}$$

где $\delta = \delta(t)$ это дельта-функция Дирака.

Взяв $\epsilon < \tau$ и представляя $u^f = N^\epsilon u^f + [u^f - N^\epsilon u^f]$, мы получим систему β (со сдвинутым временем) вида

$$N^\epsilon \ddot{u}^f + L N^\epsilon u^f = F^\epsilon, \quad \tau < t < T; \quad (49)$$

$$N^\epsilon u^f|_{t=\tau} = N^\epsilon \dot{u}^f|_{t=\tau} = 0 \quad (50)$$

(использовано $L_0^* N^\epsilon u^f = L N^\epsilon u^f$) с источником

$$F^\epsilon(t) := - \left[\frac{d^2}{dt^2} + L_0^* \right] (u^f(t) - N^\epsilon u^f(t)) + \delta \dot{u}^f(\tau) + \dot{\delta} u^f(\tau),$$

где $u^f(t) - N^\epsilon u^f(t) \in \text{Dom } L_0^* \cap \overline{\mathcal{U}^\epsilon}$. В силу последнего соотношения, мы имеем $L_0^*[u^f(t) - N^\epsilon u^f(t)] = L_0^{*\epsilon}[u^f(t) - N^\epsilon u^f(t)] \in \overline{\mathcal{U}^\epsilon} \subset \overline{\mathcal{U}^\tau}$, где $L_0^{*\epsilon}$ есть пространственная часть L_0^* в \mathcal{U}^ϵ . В то же время, $u^f(\tau)$ и $\dot{u}^f(\tau)$ принадлежат $\overline{\mathcal{U}^\tau}$. Итак, источник F^ϵ в самом деле действует из подпространства $\overline{\mathcal{U}^\tau}$, причем его время действия равно $T - \tau$.

В силу последнего, сдвигая время $t \rightarrow t - \tau$ в (49)–(50) и применяя Теорему 1, мы видим, что источник F^ϵ производит волну $v^{F^\epsilon}(T - \tau) = N^\epsilon u^f(T)$. Когда f варьируется в \mathcal{M}^T , проекции $P_\perp^\epsilon N^\epsilon u^f(T) = P_\perp^\epsilon u^f(T)$ таких волн составляют полную систему в $\overline{\mathcal{U}^T} \ominus \overline{\mathcal{U}^\epsilon}$. Устремляя $\epsilon \rightarrow 0$, в силу (47) что существует последовательность источников $\{F^\epsilon\}$, которые действуют из $\overline{\mathcal{U}^\tau}$ обеспечивают сходимость $v^{F^\epsilon}(T - \tau) \rightarrow u^f(T)$. Поэтому такие источники производят набор волн, плотный в $\overline{\mathcal{U}^T}$.

Так как τ и T произвольны, нетрудно видеть, что установленный выше факт эквивалентен равенству (48). Чтобы оправдать формальные операции с δ и $\dot{\delta}$, их следует аппроксимировать адекватными гладкими регуляризациями: см. например [5]. \square

Идея использовать нейтрализаторы заимствована из Примера, где их существование гарантировано и не требует дополнительных предположений.

Еще одно абстрактное свойство

Здесь обобщается еще один факт, имеющий место в Примере. В нем он выглядит весьма специфично, но, как выясняется, имеет абстрактный аналог.

Напомним, что расширение по Фридрихсу $L = -\Delta$ минимального Лапласиана определено на $\text{Dom } L = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Пусть $y \in \text{Dom } L$ и $\text{supp } y \subset \Omega \setminus \Omega^\tau$ для некоторого положительного $\tau < T_*$, так что $\text{supp } y$ отделен от границы Γ расстоянием τ . В этом случае мы имеем $y|_\Gamma = \partial_\nu y|_\Gamma = 0$ и, следовательно, $y \in H_0^2(\Omega)$, т.е. выполнено $y \in \text{Dom } L_0$.

Лемма 9. Пусть $\tau > 0$ таково, что $\overline{\mathcal{U}} \ominus \overline{\mathcal{U}^\tau} \neq \{0\}$ и выполнено $y \in [\overline{\mathcal{U}} \ominus \overline{\mathcal{U}^\tau}] \cap \text{Dom } L$. Тогда справедливо соотношение $y \in \text{Dom } L_0$.

Доказательство. Напомним, что $y \stackrel{(7)}{\in} \text{Ker } \Gamma_1$. Пусть $T > \tau$. В силу $y \in \text{Dom } L$ и (40) мы имеем $\Gamma_2 v^y|_{0 < t \leq \tau} = 0$. Поскольку $y \in \text{Dom } L$, выполнено

$$\dot{v}^y(t) \stackrel{(35)}{=} \cos[tL^{\frac{1}{2}}] y = L^{-1} \cos[tL^{\frac{1}{2}}] Ly, \quad t \geq 0.$$

Отсюда имеем $\dot{v}^y \in C([0, T]; \text{Dom } L)$, где область $\text{Dom } L$ наделена нормой L -графика [11]. В силу соответствующей непрерывности $\Gamma_{1,2}$, мы получаем $\Gamma_2 \dot{v}^y|_{t=+0} = \Gamma_2 y = 0$. Таким образом, $y \in \text{Ker } \Gamma_1 \cap \text{Ker } \Gamma_2$ т.е. $y \stackrel{(7)}{\in} \text{Dom } L_0$. □

Немного философии

Характер и цели данной работы можно прокомментировать следующим образом. Как нам представляется, работая в конкретных областях математической физики (вроде обратных задач), все же полезно уделять внимание абстракциям. Сошлемся на классиков. Согласно Ван дер Вардену: "Максима, которой следовала Эмми Нетер на протяжении ее работы, может быть сформулирована следующим образом: любая взаимосвязь между числами, функциями и операциями становится прозрачной, поддающейся обобщению и продуктивной только после того, как она оказывается отделена от каких-либо конкретных объектов и сведена к общезначимым понятиям".

Системы α и β суть общезначимые понятия. Мы стараемся следовать этой максиме.

Список литературы

- [1] М.И.Белишев. Об одном подходе к многомерным обратным задачам для волнового уравнения. *Доклады Академии Наук СССР*, т. 297, вып. 3, (1987), 524–527.
- [2] M.I.Belishev. Dynamical systems with boundary control: models and characterization of inverse data. *Inverse Problems*, 17: 659–682, 2001.
- [3] M.I.Belishev. A unitary invariant of a semi-bounded operator in reconstruction of manifolds. *Journal of Operator Theory*, Volume 69 (2013), Issue 2, 299-326.
- [4] M.I.Belishev. Boundary Control Method. *Encyclopedia of Applied and Computational Mathematics*, Volume no: 1, Pages: 142–146. DOI: 10.1007/978-3-540-70529-1. ISBN 978-3-540-70528-4
- [5] М.И.Белишев, М.Н.Демченко. Динамическая система с граничным управлением, ассоциированная с симметрическим полуограниченным оператором. *Записки Науч. Семинаров ПОМИ*, 409 (2012), 17–39.
- [6] М.И.Белишев, С.А.Симонов. Волновая модель оператора Штурма-Лиувилля на полуоси. *Алгебра и Анализ*, 29:2 (2017), 3–33.
- [7] М.И.Белишев, С.А.Симонов. Волновая модель метрических пространств. *Функц. анализ и его прил.*, 53:2 (2019), 3–10.
- [8] М.И.Белишев, С.А.Симонов. Волновая модель метрического пространства с мерой и ее приложение. *Математический Сборник*, 2020 Том, 211, № 4, 44–62. DOI: <https://doi.org/10.4213/sm9242>.
- [9] М.И.Белишев, С.А.Симонов. Об эволюционной динамической системе первого порядка с граничным управлением. *Записки Научных Семинаров ПОМИ*, 2019, том 483, 41–54.
- [10] М.И.Белишев, А.С.Благовещенский. Динамические обратные задачи теории волн. СПбГУ, Санкт-Петербург, 1999.
- [11] М.Ш.Бирман, М.З.Соломяк. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. *Изд-во Ленинградского Университета, Ленинград*, 1980.

- [12] А.С.Благовещенский. О локальном методе решения нестационарной обратной задачи для неоднородной струны. *Труды МИАН им. В.А.Стеклова*, 115 (1971), 28-38.
- [13] A.S.Blagovestchenskii. Inverse Problems of Wave Processes. *VSP, Netherlands*, 2001.
- [14] М.Н.Демченко. О частично изометрическом преобразовании соленидальных векторных полей. *Записки научных семинаров ПОМИ*, том 370 (2009), с. 22–43.
- [15] В.Ф.Деркач, М.М.Маламуд. Теория расширений симметричных операторов и граничные задачи. *Київ*, 2017. ISBN 966-02-2571, ISBN 978-966-02-8267-4 (v.104)
- [16] Р.Калман, П.Фалб, М.Арбиб. Очерки по математической теории систем. *Мир, Москва*, 1971.
- [17] I.Lasiecka, R.Triggiani. Recent advances in regularity of second-order hyperbolic mixed problems, and applications. In Christopher K. R. T. (ed.) et al. Jones, editor, *Dynamics reported. Expositions in dynamical systems*, volume 3, pages 104–162. Berlin: Springer-Verlag, 1994.
- [18] I.Lasiecka and R.Triggiani. Exact Controllability of the Euler-Bernoulli Equation with Boundary Controls for Displacement and Moment. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 146, no 1, 1990.
- [19] D.Tataru. Unique continuation for solutions to PDE's: between Hormander's and Holmgren's theorem. *Comm. PDE*, 20 (1995), 855–884.
- [20] М.И.Вишик. Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений. *Труды Московского математического общества*, 1 (1952), 187–246.