ПОМИ ПРЕПРИНТ — 4/2023

УСРЕДНЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ ПРИ УСЛОВИИ НЕЙМАНА

Т. А. Суслина

Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., д. 7/9,
Санкт-Петербург, 199034, Россия

e-mail: t.suslina@spbu.ru

29 июня 2023 г.

АННОТАЦИЯ

Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. В пространстве $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ рассматривается самосопряженный матричный эллиптический дифференциальный оператор $B_{N,\varepsilon}$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, второго порядка при условии Неймана на границе. Старшая часть оператора задана в факторизованной форме. Оператор включает члены первого и нулевого порядков. Коэффициенты оператора $B_{N,\varepsilon}$ периодичны и зависят от $\mathbf{x}/\varepsilon$. Изучается обобщенная резольвента $(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0(\cdot/\varepsilon))^{-1}$, где Q_0 — периодическая ограниченная и положительно определенная матрица-функция, а ζ — комплексный параметр. Получены аппроксимации обобщенной резольвенты по операторной норме в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ и по норме операторов, действующих из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в класс Соболева $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, с двухпараметрическими (относительно ε и ζ) оценками погрешности. Результаты применяются к изучению поведения решений начально-краевой задачи с условием Неймана для параболического уравнения $Q_0(\mathbf{x}/\varepsilon)\partial_t \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t) = -(B_{N,\varepsilon}\mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x},t)$ в цилиндре $\mathcal{O} \times (0,T)$, где $0 < T \leqslant \infty$.

Ключевые слова: периодические дифференциальные операторы, эллиптические системы, параболические системы, усреднение, операторные оценки погрешности.

Исследование выполнено при поддержке РФФИ (проект 16-01-00087).

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
РАН

Введение

Работа относится к теории усреднения (гомогенизации) периодических дифференциальных операторов (ДО). Теории усреднения посвящена обширная литература. Укажем в первую очередь книги [BeLPap, BaPa, OlSh, ZhKO].

0.1. **Класс операторов.** Пусть Γ — решетка в $\mathbb{R}^d$, Ω — ячейка решетки Γ. Для Γ-периодических функций в $\mathbb{R}^d$ используем обозначения $\psi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \psi(\mathbf{x}/\varepsilon)$, $\overline{\psi} := |\Omega|^{-1}\int_\Omega \psi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$.

Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. В пространстве $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ изучается самосопряженный матричный сильно эллиптический ДО второго порядка $\mathcal{B}_{N,\varepsilon}$, $0<\varepsilon\leqslant 1$, при условии Неймана на границе. Старшая часть $A_{N,\varepsilon}$ оператора $\mathcal{B}_{N,\varepsilon}$ задается в факторизованной форме $A_{N,\varepsilon} = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$, где $b(\mathbf{D})$ — матричный однородный ДО первого порядка, $g(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая матрица-функция в $\mathbb{R}^d$, ограниченная и положительно определенная. Задача усреднения для оператора $A_{N,\varepsilon}$ изучалась в работах [Su6, Su8]. Сейчас мы рассматриваем более общий класс самосопряженных ДО $\mathcal{B}_{N,\varepsilon}$, включающих младшие члены:

$$\mathcal{B}_{N,\varepsilon} = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^d \bigl(a_j^\varepsilon(\mathbf{x}) D_j + D_j a_j^\varepsilon(\mathbf{x})^*\bigr) + Q^\varepsilon(\mathbf{x}). \tag{0.1}$$

Здесь $a_j(\mathbf{x})$, $j=1,\dots,d$, и $Q(\mathbf{x})$ — Γ-периодические матрицы-функции, вообще говоря, неограниченные. Строгое определение оператора $\mathcal{B}_{N,\varepsilon}$ дается через соответствующую квадратичную форму, определенную на классе Соболева $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Делаются предположения, обеспечивающие сильную эллиптичность оператора $\mathcal{B}_{N,\varepsilon}$.

Коэффициенты оператора (0.1) быстро осциллируют при малом ε. Типичная задача теории усреднения применительно к оператору $\mathcal{B}_{N,\varepsilon}$ состоит в нахождении аппроксимации при $\varepsilon\to 0$ для резольвенты $(\mathcal{B}_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}$ либо обобщенной резольвенты $(\mathcal{B}_{N,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$. Здесь $Q_0(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая матрица-функция, положительно определенная, ограниченная и ограниченно обратимая.

0.2. **Обзор результатов по операторным оценкам погрешности.** В серии работ [BSu1–3] Бирман и Суслина разработали теоретико-операторный (спектральный) подход к задачам теории усреднения. Изучались операторы

$$A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \tag{0.2}$$

действующие в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. В [BSu1] было показано, что при $\varepsilon\to 0$ резольвента $(A_\varepsilon+I)^{-1}$ сходится по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ к резольвенте эффективного оператора $A^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$. Здесь g^0 — постоянная положительная эффективная матрица. Была установлена оценка

$$\bigl\|(A_\varepsilon+I)^{-1} - (A^0+I)^{-1}\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.3}$$

В [BSu3] была получена аппроксимация резольвенты $(A_\varepsilon+I)^{-1}$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в класс Соболева $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$:

$$\bigl\|(A_\varepsilon+I)^{-1} - (A^0+I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon)\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.4}$$

В этой аппроксимации учтен корректор $K(\varepsilon)$. Оператор $K(\varepsilon)$ содержит быстро осциллирующие множители, а потому зависит от ε. При этом $\|\varepsilon K(\varepsilon)\|_{L_2\to H^1} = O(1)$.

Оценки (0.3), (0.4) точны по порядку. Постоянные в оценках контролируются явно в терминах данных задачи. Подобные результаты получили название *операторных оценок погрешности* в теории усреднения. Метод работ [BSu1–3] основан на применении масштабного преобразования, теории Флоке–Блоха и аналитической теории возмущений.

Впоследствии спектральный метод был распространен Суслиной [Su4, Su7] на случай оператора
$$\mathcal{B}_\varepsilon = A_\varepsilon + \sum_{j=1}^{d} \left(a_j^\varepsilon(\mathbf{x}) D_j + D_j (a_j^\varepsilon(\mathbf{x}))^* \right) + Q^\varepsilon(\mathbf{x}), \tag{0.5}$$
действующего в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Удобно фиксировать вещественный параметр λ так, чтобы оператор $B_\varepsilon := \mathcal{B}_\varepsilon + \lambda Q_0^\varepsilon$ был положительно определен. В [Su4] установлены аналоги оценок (0.3), (0.4):
$$\left\| B_\varepsilon^{-1} - (B^0)^{-1} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon, \tag{0.6}$$
$$\left\| B_\varepsilon^{-1} - (B^0)^{-1} - \varepsilon \mathcal{K}(\varepsilon) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.7}$$
Здесь B^0 — соответствующий эффективный оператор и $\mathcal{K}(\varepsilon)$ — корректор.

К параболическим системам спектральный метод применялся в работах Суслиной [Su1, Su2, Su3]. В [Su1, Su2] был найден старший член аппроксимации операторной экспоненты $e^{-A_\varepsilon t}$, $t>0$, по $(L_2 \to L_2)$-норме, а в [Su3] была установлена аппроксимация экспоненты по $(L_2 \to H^1)$-норме при учете корректора:
$$\left\| e^{-A_\varepsilon t} - e^{-A^0 t} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon (t+\varepsilon^2)^{-1/2}, \quad t \geqslant 0, \tag{0.8}$$
$$\left\| e^{-A_\varepsilon t} - e^{-A^0 t} - \varepsilon \mathcal{K}(t;\varepsilon) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon (t^{-1/2} + t^{-1}), \quad t \geqslant \varepsilon^2. \tag{0.9}$$
Экспонента от оператора B_ε вида (0.1) изучалась в работе Мешковой [M1], где установлены аналоги неравенств (0.8) и (0.9).

Другой подход к получению операторных оценок погрешности в теории усреднения был предложен Жиковым и Пастуховой. В работах [Zh1, Zh2, ZhPas1] были получены оценки вида (0.3), (0.4) для операторов акустики и теории упругости. Метод, названный авторами „модифицированным методом первого приближения“ или „методом сдвига“, основан на анализе первого приближения к решению и введении в задачу дополнительного параметра. Помимо задач в $\mathbb{R}^d$ в работах [Zh2, ZhPas1] изучались задачи усреднения в ограниченной области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ при условии Дирихле либо Неймана на границе. К параболическим уравнениям метод сдвига применялся в [ZhPas2]. Дальнейшие результаты Жикова, Пастуховой и их учеников отражены в обзоре [ZhPas3].

В присутствии членов младшего порядка задача усреднения для оператора (0.5) в $\mathbb{R}^d$ изучалась в статье Борисова [Bo]. Было найдено выражение для эффективного оператора $\mathcal{B}^0$ и получены оценки погрешности вида (0.6), (0.7). При этом предполагалось, что коэффициенты оператора зависят не только от быстрой, но и от медленной переменной. Однако в [Bo] коэффициенты оператора $\mathcal{B}_\varepsilon$ предполагались достаточно гладкими. Упомянем также работу Сеника [Se], в которой изучался несамосопряженный сильно эллиптический оператор второго порядка (с включением членов младшего порядка) на бесконечном цилиндре. Коэффициенты периодичны вдоль цилиндра и быстро осциллируют; получены оценки вида (0.6), (0.7).

Операторные оценки погрешности для эллиптических уравнений второго порядка (без младших членов) в ограниченной области при условиях Дирихле или Неймана изучались многими авторами. Первыми, по-видимому, были Москоу и Вогелиус, установившие оценку (см. [MoV1, следствие 2.2]), допускающую запись в операторных терминах:
$$\left\| A_{D,\varepsilon}^{-1} - (A_D^0)^{-1} \right\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.10}$$
Здесь оператор $A_{D,\varepsilon}$ в $L_2(\mathcal{O})$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$, задан выражением $-\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla$ при условии Дирихле на $\partial\mathcal{O}$, а матрица-функция $g(\mathbf{x})$ предполагается C^∞-гладкой. В случае условия Неймана аналогичная оценка получена в [MoV2, следствие 1]. В той же статье найдена аппроксимация с корректором для обратного оператора по норме операторов, действующих из $L_2(\mathcal{O})$ в класс Соболева $H^1(\mathcal{O})$, с оценкой погрешности порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$. Ухудшение

порядка по сравнению с аналогичным результатом в $\mathbb{R}^d$ объясняется влиянием границы области.

В случае произвольной размерности эллиптические задачи в ограниченной области с достаточно гладкой границей изучались в работах [Zh2] и [ZhPas1]. Гладкость коэффициентов не предполагалась. Для операторов акустики и упругости при условии Дирихле либо Неймана на границе была получена $(L_2 \to H^1)$-аппроксимация резольвенты при учете корректора с оценкой погрешности порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$. В качестве следствия была установлена оценка вида (0.10), но с погрешностью порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$. Близкие результаты для оператора, заданного выражением $-\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla$ в ограниченной области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ при условии Дирихле либо Неймана на $\partial\mathcal{O}$, были установлены в работах Гризо [Gr1, Gr2] с помощью метода „анфолдинга“. В [Gr2] для того же оператора впервые была получена точная по порядку оценка (0.10). Для эллиптических систем сходные результаты независимо получены в [KeLiS] и [PSu, Su5]. Дальнейшие продвижения и подробный обзор можно найти в работах [Su6, Su8].

Для матричного эллиптического оператора второго порядка (при включении младших членов) в ограниченной области при краевых условиях Дирихле либо Неймана операторные оценки погрешности установлены в работах Ху [Xu1, Xu2, Xu3]. Однако в этих статьях на оператор наложено весьма жесткое условие равномерной эллиптичности. Мы сравним наши результаты с результатами [Xu3] ниже в п. 0.3.

Упомянем также монографию Шена [S], статью [SZh] и цитированную там литературу.

До сих пор речь шла об аппроксимации резольвент в фиксированной регулярной точке. Аппроксимация резольвенты $(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1}$ оператора (0.2) в зависимости от ε и спектрального параметра $\zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$ найдена Суслиной [Su8]. В этой работе также получены двухпараметрические (относительно ε и ζ) оценки погрешности при усреднении резольвент операторов $A_{D,\varepsilon}$ и $A_{N,\varepsilon}$ вида (0.2), действующих в ограниченной области при условии Дирихле либо Неймана на границе.

Стимулом к получению двухпараметрических оценок послужило изучение усреднения параболических систем. Аппроксимация экспоненты от операторов $A_{D,\varepsilon}$ и $A_{N,\varepsilon}$ найдена в работе Мешковой и Суслиной [MSu2]:

$$\begin{aligned}
&\left\| e^{-A_{\flat,\varepsilon}t} - e^{-A_\flat^0 t} \right\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2}e^{-ct}, \quad t \geqslant 0,\\
&\left\| e^{-A_{\flat,\varepsilon}t} - e^{-A_\flat^0 t} - \varepsilon\mathcal{K}_\flat(t;\varepsilon) \right\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-ct}, \quad t \geqslant \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Здесь $\flat = D, N$. Метод работы [MSu2] основан на использовании тождества

$$e^{-A_{\flat,\varepsilon}t} = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-\zeta t}(A_{\flat,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}\, d\zeta,$$

где $\gamma \subset \mathbb{C}$ — контур, обходящий спектр оператора $A_{\flat,\varepsilon}$ в положительном направлении. Это тождество позволяет вывести аппроксимации операторной экспоненты $e^{-A_{\flat,\varepsilon}t}$ из соответствующих аппроксимаций резольвенты $(A_{\flat,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$ с двухпараметрическими (относительно ε и ζ) оценками погрешности.

Оператор с коэффициентами, периодическими по пространственным переменным и по времени, изучался Генгом и Шеном [GeS]. В [GeS] получены операторные оценки погрешности для уравнения

$$\partial_t \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t) = -\operatorname{div} g(\varepsilon^{-1}\mathbf{x}, \varepsilon^{-2}t)\nabla \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t)$$

в цилиндре $\mathcal{O} \times (0,T)$, где $\mathcal{O}$ — ограниченная область класса $C^{1,1}$, при граничных условиях Дирихле либо Неймана.

Настоящая работа опирается на следующие двухпараметрические оценки для оператора B_ε, полученные в [MSu1]:

$$\big\|(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(\phi)\varepsilon|\zeta|^{-1/2}, \tag{0.11}$$

$$\big\|(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon;\zeta)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(\phi)\varepsilon. \tag{0.12}$$

Здесь $\phi = \arg\zeta \in (0,2\pi)$, $|\zeta| \geqslant 1$. Зависимость констант в оценках от угла ϕ прослежена. Оценки (0.11), (0.12) равномерны по углу ϕ в любой области вида

$$\{\zeta = |\zeta|e^{i\phi} \in \mathbb{C} : |\zeta| \geqslant 1, \phi_0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi - \phi_0\} \tag{0.13}$$

при сколь угодно малом $\phi_0 > 0$. В [MSu1] получены также и оценки при $|\zeta| < 1$, $\phi \in (0,2\pi)$.

0.3. **Основные результаты.** Прежде чем формулировать результаты, удобно перейти к положительно определенному оператору $B_{N,\varepsilon} = \mathcal{B}_{N,\varepsilon} + \lambda Q_0^\varepsilon$, выбирая подходящую постоянную λ. Пусть B_N^0 — соответствующий эффективный оператор.

Основные результаты работы — оценки

$$\big\|(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_N^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C(\phi)\varepsilon|\zeta|^{-1/2}, \tag{0.14}$$

$$\big\|(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_N^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_N(\varepsilon;\zeta)\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C(\phi)\big(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + \varepsilon\big), \tag{0.15}$$

справедливые при $\zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, и достаточно малом ε. Величины $C(\phi)$ контролируются явно в терминах данных задачи и угла ϕ. Оценки (0.14), (0.15) равномерны по ϕ в любой области вида (0.13) при сколь угодно малом $\phi_0 > 0$.

При фиксированном ζ оценка (0.14) имеет точный порядок $O(\varepsilon)$. Порядок оценки (0.15) хуже, чем в $\mathbb{R}^d$ (ср. (0.7)), из-за влияния границы области.

Корректор в (0.15) в общем случае содержит сглаживающий оператор. Мы выделяем случаи, когда можно использовать более простой корректор. Помимо оценок для обобщенной резольвенты мы находим также аппроксимации по $(L_2 \to L_2)$-норме для операторов $g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$, отвечающих потокам. Показано, что в строго внутренней подобласти $\mathcal{O}'$ области $\mathcal{O}$ можно получить аппроксимацию оператора $(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$ по $(L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O}'))$-норме с оценкой погрешности точного порядка $O(\varepsilon)$.

Мы находим также аппроксимации оператора $(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$, справедливые в более широкой области изменения спектрального параметра ζ, с оценками погрешности, имеющими другое поведение относительно ζ. (Подробнее см. §9 ниже.)

Двухпараметрические оценки (0.14), (0.15) применяются к изучению поведения решения начально-краевой задачи для параболического уравнения:

$$\begin{cases} Q_0^\varepsilon(\mathbf{x})\partial_t \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t) = -(B_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x},t), & \mathbf{x} \in \mathcal{O},\ t > 0; \\ Q_0^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathcal{O}, \end{cases} \tag{0.16}$$

при естественном условии (условии Неймана) на $\partial\mathcal{O} \times \mathbb{R}_+$. Здесь $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Показано, что при $\varepsilon \to 0$ решение $\mathbf{u}_\varepsilon(\,\cdot\,,t)$ сходится в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ к решению $\mathbf{u}_0(\,\cdot\,,t)$ эффективной задачи с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \overline{Q_0}\partial_t \mathbf{u}_0(\mathbf{x},t) = -(B^0 \mathbf{u}_0)(\mathbf{x},t), & \mathbf{x} \in \mathcal{O},\ t > 0; \\ \overline{Q_0}\mathbf{u}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathcal{O}, \end{cases}$$

при условии Неймана на $\partial\mathcal{O} \times \mathbb{R}_+$. Мы устанавливаем оценку

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\,\cdot\,,t) - \mathbf{u}_0(\,\cdot\,,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2}e^{-ct}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad t \geqslant 0, \tag{0.17}$$

справедливую при достаточно малом ε. При фиксированном значении времени $t > 0$ эта оценка имеет точный порядок $O(\varepsilon)$. Второй результат для задачи (0.16) — аппроксимация решения $\mathbf{u}_\varepsilon(\,\cdot\,,t)$ по энергетической норме:

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\,\cdot\,,t) - \mathbf{v}_\varepsilon(\,\cdot\,,t)\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant C(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1})e^{-ct}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad t > 0. \tag{0.18}$$

Здесь $\mathbf{v}_\varepsilon(\,\cdot\,,t) = \mathbf{u}_0(\,\cdot\,,t)+\varepsilon\mathcal{K}_N(t;\varepsilon)\boldsymbol{\varphi}(\,\cdot\,)$ — первое приближение к решению $\mathbf{u}_\varepsilon(\,\cdot\,,t)$, оператор $\mathcal{K}_N(t;\varepsilon)$ — корректор. При фиксированном t оценка (0.18) имеет порядок $O(\varepsilon^{1/2})$ из-за влияния границы.

В общем случае корректор содержит сглаживающий оператор. Мы выделяем условия, при которых можно использовать более простой корректор без сглаживающего оператора. Помимо оценки (0.18) мы получаем аппроксимацию потока $g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon(\,\cdot\,,t)$ по L_2-норме. В строго внутренней подобласти $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ найдена аппроксимация решения $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)$ по норме в $H^1(\mathcal{O}';\mathbb{C}^n)$ с погрешностью точного порядка $O(\varepsilon)$.

Оценки (0.17) и (0.18) можно переписать в равномерной операторной топологии. В более простом случае, когда $Q_0(\mathbf{x}) = \mathbf{1}_n$, формулировки таковы:

$$\begin{aligned}
&\left\| e^{-B_{N,\varepsilon}t} - e^{-B_N^0 t} \right\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2}e^{-ct}, \quad t \geqslant 0,\\
&\left\| e^{-B_{N,\varepsilon}t} - e^{-B_N^0 t} - \varepsilon\mathcal{K}_N(t;\varepsilon) \right\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}+\varepsilon t^{-1})e^{-ct}, \quad t>0.
\end{aligned}$$

Аналогичные результаты для оператора $B_{D,\varepsilon}$ с условием Дирихле получены в работах Мешковой и Суслиной: статья [MSu4] (см. также [MSu5]) посвящена эллиптической задаче Дирихле, а работа [MSu3] посвящена первой начально-краевой задаче для параболического уравнения.

Отметим, что двухпараметрические оценки погрешности для эллиптических задач уже нашли применение к получению операторных оценок погрешности не только в параболических, но и в гиперболических задачах (см. [M2]).

Сопоставим наши результаты для эллиптических задач с результатами близкой статьи [Xu3]. Перечислим наши преимущества. Во-первых, мы изучаем сильно эллиптический оператор вида (0.1), а в [Xu3] (как и в [KeLiS, Xu1, Xu2]) на оператор накладывается весьма ограничительное условие равномерной эллиптичности. Во-вторых, мы включаем в рассмотрение младшие члены с неограниченными коэффициентами (из подходящих $L_p(\Omega)$-классов), а в [Xu3] коэффициенты младших членов предполагаются ограниченными. В-третьих, мы получаем двухпараметрические оценки погрешности (относительно ε и ζ), а в [Xu3] оценки однопараметрические (по параметру ε). С другой стороны, отметим преимущества работы [Xu3]: некоторые результаты получены в областях с липшицевой границей; допускаются несамосопряженные операторы (с самосопряженной старшей частью).

0.4. **Метод доказательства.** Для доказательства оценок (0.14), (0.15) используется метод из работ [Su6, Su8]. Он основан на рассмотрении ассоциированной задачи в $\mathbb{R}^d$, использовании оценок (0.11), (0.12) (полученных в [MSu1]), введении поправки типа пограничного слоя и ее тщательном анализе. Существенную техническую роль играет использование сглаживания по Стеклову (заимствованное из работы [ZhPas1]) и оценок в ε-окрестности границы. Зависимость от спектрального параметра в оценках тщательно отслеживается. Присутствие младших членов с неограниченными коэффициентами вносит дополнительные технические трудности (по сравнению с [Su8]). Сначала рассматривается случай $\operatorname{Re}\zeta \leqslant 0$, $|\zeta| \geqslant 1$. Мы доказываем оценку (0.15), а затем оценку (0.14), опираясь на неравенство (0.15) и соображения двойственности. Затем мы переносим уже доказанные оценки из точки ζ в левой полуплоскости в симметричную точку правой полуплоскости, используя подходящие тождества для резольвент.

Аппроксимации, справедливые в более широкой области изменения параметра ζ, выводятся из уже доказанных оценок в точке $\zeta = -1$ и подходящих резольвентных тождеств.

0.5. **Структура работы.** Работа состоит из одиннадцати параграфов. В §1 вводится класс операторов B_ε, действующих в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, и формулируются результаты усреднения обобщенной резольвенты $(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$, полученные в [MSu1]. В §2 описывается класс операторов $B_{N,\varepsilon}$ и определяется эффективный оператор B_N^0. В §3 формулируются основные результаты работы, вводится поправка типа пограничного слоя и устанавливается теорема об аппроксимации решения $\mathbf{u}_\varepsilon = (B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\mathbf{F}$ при учете этой поправки. В §4 содержится вспомогательный материал. В §5 установлена оценка поправки по H^1-норме и найдена аппроксимация (0.15) для обобщенной резольвенты по $(L_2 \to H^1)$-норме в случае $\operatorname{Re}\zeta \leqslant 0$. В §6 получена оценка поправки по L_2-норме и для обобщенной резольвенты получена аппроксимация по $(L_2 \to L_2)$-норме с оценкой (0.14) в случае $\operatorname{Re}\zeta \leqslant 0$. В §7 результаты перенесены в точку ζ в правой полуплоскости; завершено доказательство основных результатов для обобщенной резольвенты. В §8 выделены условия, когда сглаживающий оператор в корректоре можно устранить; рассмотрены специальные случаи; получены оценки в строго внутренней подобласти. Оценки, справедливые в более широкой области изменения спектрального параметра, установлены в §9. §10 посвящен усреднению решений второй начально-краевой задачи для параболического уравнения. Пример применения общих результатов рассмотрен в §11.

0.6. **Обозначения.** Пусть $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Символы $(\cdot,\cdot)_\mathfrak{H}$ и $\|\cdot\|_\mathfrak{H}$ означают скалярное произведение и норму в $\mathfrak{H}$; символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*}$ означает норму линейного непрерывного оператора из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}_*$.

Символы $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $|\cdot|$ означают соответственно скалярное произведение и норму в $\mathbb{C}^n$, $\mathbf{1}_n$ – единичная $(n\times n)$-матрица. Если a — $(m\times n)$-матрица, то символ $|a|$ означает норму матрицы a как оператора из $\mathbb{C}^m$ в $\mathbb{C}^n$. Для $z \in \mathbb{C}$ через z^* обозначается комплексно сопряженное число. (Мы используем такое нестандартное обозначение, так как верхняя черта означает среднее значение периодической функции по ячейке периодов.) Используем обозначения $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_d) \in \mathbb{R}^d$, $iD_j = \partial_j = \partial/\partial x_j$, $j = 1,\dots,d$, $\mathbf{D} = -i\nabla = (D_1,\dots,D_d)$. Классы L_p функций в области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ со значениями в $\mathbb{C}^n$ обозначаем через $L_p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Классы Соболева $\mathbb{C}^n$-значных функций в области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ обозначаются через $H^s(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Через $H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ обозначается замыкание класса $C_0^\infty(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. При $n = 1$ пишем просто $L_p(\mathcal{O})$, $H^s(\mathcal{O})$ и т. д., но часто мы применяем такие упрощенные обозначения и для пространств вектор-функций или матричнозначных функций.

Используем обозначение $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$. Различные оценочные постоянные обозначаются символами c, $\mathfrak{c}$, C, $\mathcal{C}$, $\mathfrak{C}$, C, β, γ (возможно, с индексами и значками).

§ 1. Задача усреднения для эллиптического оператора, действующего в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$

В этом параграфе формулируются результаты усреднения для эллиптических систем в $\mathbb{R}^d$, полученные в [MSu1].

1.1. **Решетки в $\mathbb{R}^d$.** Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ — решетка, порожденная базисом $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_d \in \mathbb{R}^d$:

$$\Gamma = \left\{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{a} = \sum_{j=1}^d \nu_j \mathbf{a}_j,\ \nu_j \in \mathbb{Z}\right\},$$

и пусть Ω — элементарная ячейка решетки Γ:

$$\Omega = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{x} = \sum_{j=1}^d \tau_j \mathbf{a}_j,\ -\frac{1}{2} < \tau_j < \frac{1}{2}\right\}.$$

Через $|\Omega|$ обозначим объем ячейки Ω. Базис $\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_d$ в $\mathbb{R}^d$, двойственный к $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_d$, определяется соотношениями $\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{a}_j\rangle = 2\pi\delta_{ij}$. Двойственной к Γ называется решетка $\widetilde{\Gamma}$, порожденная двойственным базисом. Обозначим

$$2r_0 := \min_{0\ne\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}} |\mathbf{b}|, \quad 2r_1 := \operatorname{diam}\Omega.$$

Через $\widetilde{H}^1(\Omega)$ обозначается подпространство тех функций из $H^1(\Omega)$, Γ-периодическое продолжение которых на $\mathbb{R}^d$ принадлежит $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Если $f(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая матрица-функция в $\mathbb{R}^d$, положим $f^\varepsilon(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$;

$$\overline{f} := |\Omega|^{-1} \int_\Omega f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \quad \underline{f} := \left(|\Omega|^{-1} \int_\Omega f(\mathbf{x})^{-1}\, d\mathbf{x} \right)^{-1}.$$

Здесь при определении $\overline{f}$ предполагается, что $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, а при определении $\underline{f}$ считается, что матрица f квадратная и неособая, причем $f^{-1} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Через $[f^\varepsilon]$ обозначается оператор умножения на матрицу-функцию $f^\varepsilon(\mathbf{x})$.

1.2. **Сглаживание по Стеклову.** Рассмотрим оператор сглаживания по Стеклову $S_\varepsilon^{(k)}$, действующий в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^k)$ (где $k \in \mathbb{N}$) по правилу

$$(S_\varepsilon^{(k)} \mathbf{u})(\mathbf{x}) = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x} - \varepsilon \mathbf{z})\, d\mathbf{z}, \quad \mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^k). \tag{1.1}$$

Значок (k) будем опускать и писать просто S_ε. Очевидно, $S_\varepsilon \mathbf{D}^\alpha \mathbf{u} = \mathbf{D}^\alpha S_\varepsilon \mathbf{u}$ при $\mathbf{u} \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^k)$ для любого мультииндекса α такого, что $|\alpha| \leqslant s$. Отметим неравенство

$$\| S_\varepsilon \|_{H^l(\mathbb{R}^d) \to H^l(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1, \quad l \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.2}$$

Нам потребуются следующие свойства оператора S_ε (см. [ZhPas1, леммы 1.1 и 1.2] или [PSu, предложения 3.1 и 3.2]).

Предложение 1.1. *Для любой функции* $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^k)$ *выполнена оценка*

$$\| S_\varepsilon \mathbf{u} - \mathbf{u} \|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon r_1 \| \mathbf{D} \mathbf{u} \|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

где $2r_1 = \operatorname{diam} \Omega$.

Предложение 1.2. *Пусть* f — Γ-*периодическая функция в* $\mathbb{R}^d$ *такая, что* $f \in L_2(\Omega)$. *Тогда оператор* $[f^\varepsilon] S_\varepsilon$ *непрерывен в* $L_2(\mathbb{R}^d)$ *и справедлива оценка*

$$\| [f^\varepsilon] S_\varepsilon \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant |\Omega|^{-1/2} \| f \|_{L_2(\Omega)}.$$

1.3. **Класс операторов A_ε.** В $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор A_ε, формально заданный дифференциальным выражением $A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$. Здесь $g(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая эрмитова $(m \times m)$-матрица-функция (вообще говоря, с комплексными элементами). Считаем, что $g(\mathbf{x}) > 0$ и $g, g^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$. Дифференциальный оператор $b(\mathbf{D})$ имеет вид

$$b(\mathbf{D}) = \sum_{j=1}^d b_j D_j, \tag{1.3}$$

где b_j, $j = 1, \dots, d$, — постоянные матрицы размера $m \times n$ (вообще говоря, с комплексными элементами). Считаем, что $m \geqslant n$ и что символ $b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^d b_j \xi_j$ оператора $b(\mathbf{D})$ имеет максимальный ранг:

$$\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi}) = n, \quad 0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d. \tag{1.4}$$

Это условие равносильно существованию таких постоянных α_0 и α_1, что

$$\alpha_0 \mathbf{1}_n \leqslant b(\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta}) \leqslant \alpha_1 \mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad 0 < \alpha_0 \leqslant \alpha_1 < \infty. \tag{1.5}$$

Отметим сразу оценки, вытекающие из (1.5):

$$|b_j| \leqslant \alpha_1^{1/2}, \quad j = 1, \dots, d. \tag{1.6}$$

Точное определение оператора A_ε дается через квадратичную форму

$$\mathfrak{a}_\varepsilon[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \int_{\mathbb{R}^d} \langle g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{u}, b(\mathbf{D}) \mathbf{u} \rangle\, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n).$$

При сделанных предположениях эта форма замкнута и неотрицательна. С помощью преобразования Фурье и условия (1.5) можно показать, что

$$\alpha_0\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{a}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant \alpha_1\|g\|_{L_\infty}\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n). \tag{1.7}$$

Положим $c_1 := \alpha_0^{-1/2}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}$. Тогда нижнюю оценку (1.7) можно записать так:

$$\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant c_1^2\mathfrak{a}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}], \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n). \tag{1.8}$$

1.4. **Оператор B_ε.** Мы изучаем самосопряженный оператор B_ε, старшая часть которого совпадает с A_ε. Чтобы определить младшие члены оператора, введем Γ-периодические $(n\times n)$-матрицы-функции (вообще говоря, с комплексными элементами) a_j, $j=1,\dots,d$, такие, что

$$a_j\in L_\rho(\Omega), \quad \rho=2 \text{ при } d=1, \quad \rho>d \text{ при } d\geqslant 2, \quad j=1,\dots,d. \tag{1.9}$$

Далее, пусть Q и Q_0 — такие Γ-периодические эрмитовы $(n\times n)$-матрицы-функции (с комплексными элементами), что

$$\begin{aligned} &Q\in L_s(\Omega), \quad s=1 \text{ при } d=1, \quad s>d/2 \text{ при } d\geqslant 2; \\ &Q_0(\mathbf{x})>0; \quad Q_0, Q_0^{-1}\in L_\infty(\mathbb{R}^d). \end{aligned} \tag{1.10}$$

(При нашем выборе условий на матрицу-функцию Q реализуется пример 2.4 из [MSu1].)

Ниже считаем, что $0<\varepsilon\leqslant 1$. Рассмотрим квадратичную форму

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \mathfrak{a}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] + 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^d (a_j^\varepsilon D_j\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ + (Q^\varepsilon\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \lambda(Q_0^\varepsilon\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Здесь постоянная λ выбирается так (см. (1.16) ниже), чтобы форма $\mathfrak{b}_\varepsilon$ была неотрицательна.

Для удобства дальнейших ссылок назовем „исходными данными" следующие величины

$$\begin{aligned} &d,\ m,\ n,\ \rho,\ s;\ \alpha_0,\ \alpha_1,\ \|g\|_{L_\infty},\ \|g^{-1}\|_{L_\infty},\ \|a_j\|_{L_\rho(\Omega)},\ j=1,\dots,d; \\ &\|Q\|_{L_s(\Omega)};\ \|Q_0\|_{L_\infty},\ \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty},\ \lambda;\ \text{параметры решетки } \Gamma. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Проверим замкнутость формы $\mathfrak{b}_\varepsilon$. Применяя неравенство Гёльдера и теорему вложения Соболева, можно показать (см. [Su4, (5.11)–(5.14)]), что для любого $\nu>0$ найдутся такие постоянные $C_j(\nu)>0$, что

$$\|a_j^*\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \nu\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C_j(\nu)\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \quad j=1,\dots,d.$$

Делая замену переменной $\mathbf{y}:=\varepsilon^{-1}\mathbf{x}$ и обозначая $\mathbf{u}(\mathbf{x}) =: \mathbf{v}(\mathbf{y})$, отсюда получаем

$$\begin{aligned} \|(a_j^\varepsilon)^*\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} &= \int_{\mathbb{R}^d} |a_j(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})^*\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} = \varepsilon^d\int_{\mathbb{R}^d}|a_j(\mathbf{y})^*\mathbf{v}(\mathbf{y})|^2\,d\mathbf{y} \\ &\leqslant \varepsilon^d\nu\int_{\mathbb{R}^d}|\mathbf{D}_\mathbf{y}\mathbf{v}(\mathbf{y})|^2\,d\mathbf{y} + \varepsilon^d C_j(\nu)\int_{\mathbb{R}^d}|\mathbf{v}(\mathbf{y})|^2\,d\mathbf{y} \\ &\leqslant \nu\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C_j(\nu)\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \quad 0<\varepsilon\leqslant 1. \end{aligned}$$

Тогда с учетом (1.7) для любого $\nu>0$ найдется такая постоянная $C(\nu)>0$, что

$$\sum_{j=1}^d \|(a_j^\varepsilon)^*\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \nu\mathfrak{a}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] + C(\nu)\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n). \tag{1.13}$$

Если ν фиксировано, то $C(\nu)$ зависит лишь от d, ρ, α_0, от норм $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}$, $j=1,\dots,d$, и от параметров решетки Γ.

С учетом (1.8) из (1.13) вытекает, что

$$2\left|\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{d}(D_j\mathbf{u},(a_j^\varepsilon)^*\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right| \leqslant \frac{1}{4}\mathfrak{a}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}]+c_2\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \tag{1.14}$$

где $c_2 = 8c_1^2 C(\nu_0)$ при $\nu_0 = 2^{-6}\alpha_0\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}$.

Далее, в силу условия (1.10) на Q для любого $\nu > 0$ найдется постоянная $C_Q(\nu) > 0$ такая, что

$$|(Q^\varepsilon\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}| \leqslant \nu\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C_Q(\nu)\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n). \tag{1.15}$$

При фиксированном ν величина $C_Q(\nu)$ контролируется через d, s, $\|Q\|_{L_s(\Omega)}$ и параметры решетки Γ.

Мы подчиняем постоянную λ в (1.11) ограничению

$$\lambda \geqslant \lambda_* := (C_Q(\nu_*)+c_2)\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty} \quad \text{при } \nu_* = 2^{-1}\alpha_0\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}. \tag{1.16}$$

Теперь из (1.14), (1.15) при $\nu = \nu_*$ и (1.16) с учетом (1.8) получаем оценку снизу для формы (1.11):

$$\mathfrak{b}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geqslant \frac{1}{4}\mathfrak{a}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geqslant c_*\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n); \tag{1.17}$$

$$c_* = \frac{1}{4}\alpha_0\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}. \tag{1.18}$$

В силу (1.7), (1.14) и (1.15) при $\nu = 1$ выполнено

$$\mathfrak{b}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant C_*\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + c_3\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n),$$

$$C_* = \frac{5}{4}\alpha_1\|g\|_{L_\infty}+1, \quad c_3 = C_Q(1)+\lambda\|Q_0\|_{L_\infty}+c_2.$$

Таким образом, форма $\mathfrak{b}_\varepsilon$ замкнута и неотрицательна. Отвечающий ей самосопряженный в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ оператор обозначим через B_ε. Формально можно написать

$$B_\varepsilon = b(\mathbf{D})^*g^\varepsilon(\mathbf{x})b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^{d}\left(a_j^\varepsilon(\mathbf{x})D_j + D_j a_j^\varepsilon(\mathbf{x})^*\right) + Q^\varepsilon(\mathbf{x}) + \lambda Q_0^\varepsilon(\mathbf{x}). \tag{1.19}$$

1.5. **Эффективная матрица.** Эффективный оператор для A_ε задается дифференциальным выражением $A^0 = b(\mathbf{D})^*g^0 b(\mathbf{D})$. Здесь g^0 — постоянная эффективная матрица размера $m\times m$. Матрица g^0 выражается через решение вспомогательной задачи на ячейке. Пусть Γ-периодическая $(n\times m)$-матрица-функция $\Lambda(\mathbf{x})$ — (слабое) решение задачи

$$b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x})+\mathbf{1}_m) = 0, \qquad \int_\Omega \Lambda(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0. \tag{1.20}$$

Тогда эффективная матрица задана выражением

$$g^0 = |\Omega|^{-1}\int_\Omega \widetilde{g}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}, \tag{1.21}$$

$$\widetilde{g}(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x})+\mathbf{1}_m). \tag{1.22}$$

Можно показать, что матрица g^0 положительно определена.

На основании (1.20) легко проверить оценки

$$\|g^{1/2}b(\mathbf{D})\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{1/2}\|g\|^{1/2}_{L_\infty}, \tag{1.23}$$

$$\|\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{1/2}M_1, \quad M_1 = (2r_0)^{-1}\alpha_0^{-1/2}\|g\|^{1/2}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}, \tag{1.24}$$

$$\|\mathbf{D}\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{1/2}M_2, \quad M_2 = \alpha_0^{-1/2}\|g\|^{1/2}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}. \tag{1.25}$$

Отметим оценки для эффективной матрицы, известные в теории усреднения как вилка Фойгта–Рейсса (см., например, [BSu1, гл. 3, теорема 1.5]).

Предложение 1.3. *Пусть g^0 — эффективная матрица* (1.21)*. Тогда*

$$\underline{g} \leqslant g^0 \leqslant \overline{g}. \tag{1.26}$$

В случае $m = n$ справедливо равенство $g^0 = \underline{g}$.

Из (1.26) вытекают неравенства

$$|g^0| \leqslant \|g\|_{L_\infty}, \quad |(g^0)^{-1}| \leqslant \|g^{-1}\|_{L_\infty}. \tag{1.27}$$

Выделим случаи, когда в (1.26) реализуется верхняя или нижняя грань, см. [BSu1, гл. 3, предложения 1.6 и 1.7].

Предложение 1.4. *Равенство $g^0 = \overline{g}$ равносильно соотношениям*

$$b(\mathbf{D})^* \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, \dots, m, \tag{1.28}$$

где $\mathbf{g}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \dots, m$, — столбцы матрицы $g(\mathbf{x})$.

Предложение 1.5. *Равенство $g^0 = \underline{g}$ равносильно представлениям*

$$\mathbf{l}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{l}_k^0 + b(\mathbf{D})\mathbf{w}_k, \quad \mathbf{l}_k^0 \in \mathbb{C}^m, \quad \mathbf{w}_k \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^m), \quad k = 1, \dots, m, \tag{1.29}$$

где $\mathbf{l}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \dots, m$, — столбцы матрицы $g(\mathbf{x})^{-1}$.

1.6. **Эффективный оператор.** Чтобы описать усреднение младших членов оператора B_ε, рассмотрим Γ-периодическую $(n \times n)$-матрицу-функцию $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$, являющуюся решением задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{d} D_j a_j(\mathbf{x})^* = 0, \quad \int_\Omega \widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{1.30}$$

(Уравнение понимается в слабом смысле.) Легко проверить оценки

$$\|g^{1/2} b(\mathbf{D}) \widetilde{\Lambda}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_a \alpha_0^{-1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}, \tag{1.31}$$

$$\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant (2r_0)^{-1} C_a \alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty} =: \widetilde{M}_1 |\Omega|^{1/2}, \tag{1.32}$$

$$\|\mathbf{D}\widetilde{\Lambda}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_a \alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty} =: \widetilde{M}_2 |\Omega|^{1/2}, \tag{1.33}$$

где $C_a^2 := \sum_{j=1}^d \int_\Omega |a_j(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x}$.

Определим постоянные матрицы V и W равенствами

$$V = |\Omega|^{-1} \int_\Omega (b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}))^* g(\mathbf{x}) (b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}, \tag{1.34}$$

$$W = |\Omega|^{-1} \int_\Omega (b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}))^* g(\mathbf{x}) (b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}. \tag{1.35}$$

Отметим оценки, вытекающие из (1.23), (1.31), (1.34) и (1.35):

$$|V| \leqslant C_V, \quad |W| \leqslant C_W, \tag{1.36}$$

где $C_V = \alpha_0^{-1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2} C_a |\Omega|^{-1/2}$, $C_W = \alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty} C_a^2 |\Omega|^{-1}$.

Эффективный оператор для оператора (1.19) задан выражением

$$B^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) - b(\mathbf{D})^* V - V^* b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^{d} (\overline{a_j + a_j^*}) D_j - W + \overline{Q} + \lambda \overline{Q_0}. \tag{1.37}$$

Оператор B^0 — эллиптический оператор второго порядка с постоянными коэффициентами с символом

$$L(\boldsymbol{\xi}) = b(\boldsymbol{\xi})^* g^0 b(\boldsymbol{\xi}) - b(\boldsymbol{\xi})^* V - V^* b(\boldsymbol{\xi}) + \sum_{j=1}^{d} (\overline{a_j + a_j^*}) \xi_j - W + \overline{Q} + \lambda \overline{Q_0}. \tag{1.38}$$

Несложно проверить (см. [MSu4, лемма 1.6]), что символ (1.38) подчинен оценкам

$$c_* |\boldsymbol{\xi}|^2 \mathbf{1}_n \leqslant L(\boldsymbol{\xi}) \leqslant C_L (|\boldsymbol{\xi}|^2 + 1) \mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d. \tag{1.39}$$

Здесь c_* — постоянная (1.18). Постоянная C_L зависит только от исходных данных (1.12). Отсюда вытекают оценки для квадратичной формы $\mathfrak{b}^0$ оператора (1.37):

$$c_* \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{b}^0[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leqslant C_L \|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n).$$

1.7. **Результаты усреднения обобщенной резольвенты.** В настоящем пункте мы приводим результаты, установленные в [MSu1, теоремы 5.1, 5.2 и 5.4].

Теорема 1.6 ([MSu1]). *Пусть выполнены условия п.* 1.3–1.6. *Пусть* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $\zeta = |\zeta| e^{i\phi}$, $\phi \in (0, 2\pi)$, *причем* $|\zeta| \geqslant 1$. *Положим*

$$c(\phi) = \begin{cases} |\sin \phi|^{-1}, & \phi \in (0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi), \\ 1, & \phi \in [\pi/2, 3\pi/2]. \end{cases} \tag{1.40}$$

Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_1 c(\phi)^2 \varepsilon |\zeta|^{-1/2}.$$

Постоянная C_1 *контролируется через исходные данные* (1.12).

Далее, введем корректор

$$K(\varepsilon; \zeta) = \left([\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon] \right) S_\varepsilon (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}. \tag{1.41}$$

Корректор (1.41) ограничен как оператор, действующий из $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Это нетрудно установить с помощью предложения 1.2 и включений $\Lambda, \widetilde{\Lambda} \in \widetilde{H}^1(\Omega)$. Отметим, что $\|\varepsilon K(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2 \to H^1} = O(1)$ при малом ε и фиксированном ζ.

Введем обозначение

$$G(\varepsilon; \zeta) := \left(\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) + g^\varepsilon (b(\mathbf{D}) \widetilde{\Lambda})^\varepsilon \right) S_\varepsilon (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}. \tag{1.42}$$

В силу предложения 1.2 и включений $\widetilde{g}, g(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}) \in L_2(\Omega)$ оператор (1.42) ограничен из $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$, причем $\|G(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2 \to L_2} = O(1)$.

Теорема 1.7 ([MSu1]). *Пусть выполнены условия теоремы* 1.6. *Пусть операторы* $K(\varepsilon; \zeta)$ *и* $G(\varepsilon; \zeta)$ *определены в* (1.41) *и* (1.42) *соответственно. Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *и* $|\zeta| \geqslant 1$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned}
&\left\| (B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon; \zeta) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_2 c(\phi)^2 \varepsilon |\zeta|^{-1/2}, \\
&\left\| \mathbf{D} \left((B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon; \zeta) \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_3 c(\phi)^2 \varepsilon, \\
&\left\| g^\varepsilon b(\mathbf{D}) (B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G(\varepsilon; \zeta) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_4 c(\phi)^2 \varepsilon.
\end{aligned}$$

Постоянные C_2, C_3 *и* C_4 *контролируются через исходные данные* (1.12).

§ 2. Постановка задачи. Эффективный оператор

2.1. **Коэрцитивность.** На символ $b(\boldsymbol{\xi})$ оператора $b(\mathbf{D})$ накладывается дополнительное ограничение.

Условие 2.1. *Предположим, что для матрицы-функции $b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{l=1}^{d} b_l \xi_l$ выполнено*

$$\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi}) = n, \quad 0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^d. \tag{2.1}$$

Отметим, что условие (2.1) является более ограничительным, чем условие (1.4). Следующее утверждение установлено в книге [Ne] (см. теорему 7.8 из §3.7; в этом утверждении границу $\partial\mathcal{O}$ достаточно считать липшицевой).

Предложение 2.2. ([Ne]) *Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с липшицевой границей. Условие* 2.1 *необходимо и достаточно для существования постоянных $k_1 > 0$, $k_2 \geqslant 0$ таких, что выполнено неравенство Гординга*

$$\|b(\mathbf{D})\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} + k_2 \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \geqslant k_1 \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \tag{2.2}$$

Замечание 2.3. *Постоянные k_1, k_2 зависят от матрицы $b(\boldsymbol{\xi})$ и от области $\mathcal{O}$, но в общем случае их трудно контролировать явно. Однако часто для конкретных операторов их можно найти. Поэтому в дальнейшем мы будем ссылаться на зависимость других постоянных от k_1, k_2.*

2.2. **Оператор $A_{N,\varepsilon}$.** *Ниже предполагается, что $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$* — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. В пространстве $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор $A_{N,\varepsilon}$, формально заданный дифференциальным выражением $b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$ при условии Неймана на границе. Строгое определение: $A_{N,\varepsilon}$ есть самосопряженный оператор в $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$, порожденный квадратичной формой

$$\mathfrak{a}_{N,\varepsilon}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \int_{\mathcal{O}} \langle g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u} \rangle \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \tag{2.3}$$

В силу (1.3) и (1.6) выполнена оценка сверху

$$\mathfrak{a}_{N,\varepsilon}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leqslant d\alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \tag{2.4}$$

Из (2.2) следует оценка снизу

$$\mathfrak{a}_{N,\varepsilon}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \geqslant \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} \left(k_1 \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} - k_2 \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \right), \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \tag{2.5}$$

Из (2.3)–(2.5) видно, что форма $\mathfrak{a}_{N,\varepsilon}$ замкнута и неотрицательна.

2.3. **Оператор $B_{N,\varepsilon}$.** Пусть $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Рассмотрим теперь более общий оператор $B_{N,\varepsilon}$, добавляя к $A_{N,\varepsilon}$ члены младшего порядка. Формально оператор $B_{N,\varepsilon}$ задан дифференциальным выражением

$$b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^{d} \left(a_j^\varepsilon(\mathbf{x}) D_j + D_j a_j^\varepsilon(\mathbf{x})^* \right) + Q^\varepsilon(\mathbf{x}) + \lambda Q_0^\varepsilon(\mathbf{x})$$

при условии Неймана на границе. Коэффициенты g, a_j, Q, Q_0 удовлетворяют условиям пунктов 1.3, 1.4; оператор $b(\mathbf{D})$ вида (1.3) подчинен условию 2.1; постоянную $\lambda > 0$ фиксируем ниже. Точное определение оператора $B_{N,\varepsilon}$ дается через квадратичную форму

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \mathfrak{a}_{N,\varepsilon}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] + 2\mathrm{Re} \sum_{j=1}^{d} (D_j \mathbf{u}, (a_j^\varepsilon)^* \mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} \\ + (Q^\varepsilon \mathbf{u}, \mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} + \lambda (Q_0^\varepsilon \mathbf{u}, \mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Оценим форму $\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}$. Начнем с анализа младших членов. Имеем

$$\left|2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{d}(D_j\mathbf{u},(a_j^\varepsilon)^*\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})}\right| \leqslant 2\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}\left(\sum_{j=1}^{d}\int_{\mathcal{O}}|a_j^\varepsilon(\mathbf{x})|^2|\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x}\right)^{1/2}. \tag{2.7}$$

Воспользуемся неравенством Гёльдера:

$$\int_{\mathcal{O}}|a_j^\varepsilon(\mathbf{x})|^2|\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} \leqslant \left(\int_{\mathcal{O}}|a_j^\varepsilon(\mathbf{x})|^\rho\,d\mathbf{x}\right)^{2/\rho}\|\mathbf{u}\|^2_{L_q(\mathcal{O})}. \tag{2.8}$$

Здесь ρ — показатель из условия (1.9), $q=\infty$ при $d=1$, $q=2\rho/(\rho-2)$ при $d\geqslant 2$. Покроем область $\mathcal{O}$ объединением ячеек решетки $\varepsilon\Gamma$, имеющих непустое пересечение с $\mathcal{O}$. Через N_ε обозначим количество ячеек в этом покрытии. Ясно, что это объединение ячеек содержится в области $\widetilde{\mathcal{O}}$, представляющей собой $2r_1$-окрестность области $\mathcal{O}$, где $2r_1=\mathrm{diam}\,\Omega$. Поэтому количество ячеек N_ε можно оценить сверху: $N_\varepsilon\leqslant\mathfrak{c}_1\varepsilon^{-d}$, где величина $\mathfrak{c}_1$ зависит только от области $\mathcal{O}$ и от параметров решетки Γ. Имеем

$$\int_{\mathcal{O}}|a_j^\varepsilon(\mathbf{x})|^\rho\,d\mathbf{x} \leqslant \mathfrak{c}_1\varepsilon^{-d}\int_{\varepsilon\Omega}|a_j^\varepsilon(\mathbf{x})|^\rho\,d\mathbf{x} = \mathfrak{c}_1\|a_j\|^\rho_{L_\rho(\Omega)}. \tag{2.9}$$

Теперь из (2.8) и (2.9) получаем

$$\int_{\mathcal{O}}|a_j^\varepsilon(\mathbf{x})|^2|\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} \leqslant \mathfrak{c}_1^{2/\rho}\|a_j\|^2_{L_\rho(\Omega)}\|\mathbf{u}\|^2_{L_q(\mathcal{O})}. \tag{2.10}$$

В силу компактности вложения $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)\hookrightarrow L_q(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ для любого $\mu>0$ существует постоянная $\check{\mathcal{C}}(\mu)>0$ такая, что

$$\|\mathbf{u}\|^2_{L_q(\mathcal{O})} \leqslant \mu\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} + \check{\mathcal{C}}(\mu)\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{2.11}$$

Если μ фиксировано, то $\check{\mathcal{C}}(\mu)$ зависит лишь от d, ρ и от области $\mathcal{O}$. Из (2.7), (2.10) и (2.11) следует, что для любого $\nu>0$ найдется постоянная $\mathcal{C}(\nu)$ такая, что

$$\left|2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{d}(D_j\mathbf{u},(a_j^\varepsilon)^*\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})}\right| \leqslant \nu\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} + \mathcal{C}(\nu)\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{2.12}$$

Если ν фиксировано, то $\mathcal{C}(\nu)$ зависит лишь от d, ρ, $\|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}$, $j=1,\dots,d$, от области $\mathcal{O}$ и параметров решетки Γ.

Аналогично, используя условие (1.10) и неравенство Гёльдера, имеем

$$\int_{\mathcal{O}}|Q^\varepsilon(\mathbf{x})||\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} \leqslant \mathfrak{c}_1^{1/s}\|Q\|_{L_s(\Omega)}\|\mathbf{u}\|^2_{L_{\check{q}}(\mathcal{O})}, \tag{2.13}$$

где $\check{q}=\infty$ при $d=1$, $\check{q}=2s/(s-1)$ при $d\geqslant 2$. Отсюда и из компактности вложения $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)\hookrightarrow L_{\check{q}}(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ следует, что для любого $\nu>0$ существует постоянная $\mathcal{C}_Q(\nu)>0$ такая, что

$$\left|(Q^\varepsilon\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})}\right| \leqslant \nu\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} + \mathcal{C}_Q(\nu)\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{2.14}$$

Если ν фиксировано, то $\mathcal{C}_Q(\nu)$ зависит лишь от d, s, $\|Q\|_{L_s(\Omega)}$, от области $\mathcal{O}$ и параметров решетки Γ.

Теперь из (2.5), (2.6), (2.12) и (2.14) вытекает оценка

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] &\geqslant \left(k_1\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} - 2\nu\right)\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \\ &+ \left(\lambda\|Q_0^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} - k_2\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} - \mathcal{C}(\nu) - \mathcal{C}_Q(\nu)\right)\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n),\end{aligned} \tag{2.15}$$

справедливая при любом $\nu>0$. Выберем ν равным $\widehat{\nu}_0 := \frac{1}{4}k_1\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}$. Подчиним постоянную λ в (2.6) ограничению

$$\lambda\geqslant\lambda_0 := \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}\left((k_1/2+k_2)\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} + \mathcal{C}(\widehat{\nu}_0) + \mathcal{C}_Q(\widehat{\nu}_0)\right). \tag{2.16}$$

При таком выборе из (2.15) вытекает оценка формы (2.6) снизу:

$$\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geqslant c_4 \|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n); \quad c_4 := \frac{1}{2} k_1 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}. \tag{2.17}$$

Оценка формы (2.6) сверху вытекает из (2.4) и (2.12), (2.14) (при $\nu = 1$):

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant & c_5 \|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n); \\ & c_5 := \max\{d\alpha_1 \|g\|_{L_\infty} + 2; \mathcal{C}(1) + \mathcal{C}_Q(1) + \lambda \|Q_0\|_{L_\infty}\}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Неравенства (2.17) и (2.18) показывают, что форма (2.6) замкнута и положительно определена. Самосопряженный оператор в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, порожденный этой формой, мы обозначаем через $B_{N,\varepsilon}$.

Нам понадобится вспомогательный оператор $\widetilde{B}_{N,\varepsilon}$. Факторизуем матрицу Q_0:

$$Q_0(\mathbf{x})^{-1} = f(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})^*. \tag{2.19}$$

Пусть $\widetilde{B}_{N,\varepsilon}$ — самосопряженный оператор в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, порожденный квадратичной формой

$$\begin{aligned} &\widetilde{\mathfrak{b}}_{N,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] := \mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[f^\varepsilon \mathbf{u}, f^\varepsilon \mathbf{u}], \\ &\operatorname{Dom} \widetilde{\mathfrak{b}}_{N,\varepsilon} = \{\mathbf{u} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) : f^\varepsilon \mathbf{u} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)\}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Имеем $\widetilde{B}_{N,\varepsilon} = (f^\varepsilon)^* B_{N,\varepsilon} f^\varepsilon$. Отметим равенство

$$(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} = f^\varepsilon (\widetilde{B}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} (f^\varepsilon)^*. \tag{2.21}$$

2.4. **Оценки обобщенной резольвенты** $(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$**.** *Наша цель* — найти аппроксимацию обобщенной резольвенты $(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$ с двухпараметрическими (по ε и ζ) оценками погрешности. Считаем, что $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Иначе говоря, нас интересует поведение при малом ε решения

$$\mathbf{u}_\varepsilon = (B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} \mathbf{F}, \quad \mathbf{F} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n),$$

задачи Неймана. Решение $\mathbf{u}_\varepsilon \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ удовлетворяет тождеству

$$\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\mathbf{u}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}] - \zeta (Q_0^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} = (\mathbf{F}, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{2.22}$$

Лемма 2.4. *Пусть $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. При $0 < \varepsilon \leqslant 1$ справедливы оценки*

$$\left\| (B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} \right\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant c(\phi) |\zeta|^{-1} \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}, \tag{2.23}$$

$$\left\| (B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} \right\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_1 c(\phi) |\zeta|^{-1/2}. \tag{2.24}$$

Здесь $c(\phi)$ — величина (1.40). Постоянная $\mathcal{C}_1$ определяется равенством $\mathcal{C}_1^2 = c_4^{-1} \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty} \left(1 + \|Q_0\|_{L_\infty} \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}\right)$.

Доказательство. В силу (2.19), (2.21) и неравенства $\widetilde{B}_{N,\varepsilon} > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \left\| (B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} \right\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} &\leqslant \|f\|^2_{L_\infty} \left\| (\widetilde{B}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} \right\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant (\operatorname{dist}\{\zeta; \mathbb{R}_+\})^{-1} \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty} = c(\phi) |\zeta|^{-1} \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}, \end{aligned}$$

что доказывает (2.23).

Чтобы проверить (2.24), подставим $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}_\varepsilon$ в тождество (2.22) и воспользуемся оценкой (2.17) и уже доказанным неравенством (2.23). Получаем

$$c_4 \|\mathbf{u}_\varepsilon\|^2_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant |\zeta|^{-1} \left(c(\phi) \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty} + c(\phi)^2 \|Q_0\|_{L_\infty} \|Q_0^{-1}\|^2_{L_\infty} \right) \|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Это влечет (2.24). $\square$

2.5. **Эффективный оператор.** В пространстве $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ рассмотрим квадратичную форму

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}_N^0[\mathbf{u},\mathbf{u}] =&(g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} + 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{d}(\overline{a_j}D_j\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} - 2\mathrm{Re}\,(V\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})}\\ &- (W\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} + (\overline{Q}\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} + \lambda(\overline{Q_0}\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n).\end{aligned} \tag{2.25}$$

Получим оценки формы (2.25). Начнем с младших членов. Очевидно,

$$\begin{aligned}&\left|2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{d}(\overline{a_j}D_j\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})}\right| \leqslant 2\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}\left(\sum_{j=1}^{d}|\overline{a_j}|^2\right)^{1/2}\\ &\leqslant 2C_a|\Omega|^{-1/2}\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}\\ &\leqslant \frac{1}{4}k_1\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} + 4k_1^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty}C_a^2|\Omega|^{-1}\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n).\end{aligned} \tag{2.26}$$

Далее, из (1.36) следует неравенство

$$\begin{aligned}&\left|2\mathrm{Re}(V\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})}\right| \leqslant 2C_V\|b(\mathbf{D})\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}\\ &\leqslant \frac{1}{4}\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}\|b(\mathbf{D})\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} + 4C_V^2\|g^{-1}\|_{L_\infty}\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})},\ \mathbf{u}\in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n).\end{aligned} \tag{2.27}$$

Наконец, при $\mathbf{u}\in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ выполнено

$$\left|(W\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})}\right| \leqslant C_W\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{2.28}$$

$$\left|(\overline{Q}\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})}\right| \leqslant |\overline{Q}|\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant |\Omega|^{-1}\|Q\|_{L_1(\Omega)}\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{2.29}$$

$$\lambda(\overline{Q_0}\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} \geqslant \lambda\|Q_0^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{2.30}$$

Из (2.26)–(2.30) с учетом (1.27) вытекает следующая оценка для формы (2.25):

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}_N^0[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geqslant& \frac{3}{4}\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}\|b(\mathbf{D})\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} - \frac{1}{4}k_1\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}\\ &+ \left(\lambda\|Q_0^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} - C_5\right)\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n),\\ &C_5 := 4k_1^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty}C_a^2|\Omega|^{-1} + 4C_V^2\|g^{-1}\|_{L_\infty} + |\Omega|^{-1}\|Q\|_{L_1(\Omega)} + C_W.\end{aligned}$$

Теперь используем (2.2) и наложим на число λ еще одно ограничение

$$\lambda \geqslant \widehat{\lambda} := \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}\left(\left(k_1/2 + 3k_2/4\right)\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} + C_5\right). \tag{2.31}$$

В итоге приходим к оценке

$$\mathfrak{b}_N^0[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geqslant c_4\|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n), \tag{2.32}$$

где постоянная c_4 определена в (2.17).

Перейдем к оценке формы (2.25) сверху. Из (1.27), (2.26), (2.27) и (2.29) с учетом неравенства $W\geqslant 0$ вытекает оценка

$$\begin{aligned}&\mathfrak{b}_N^0[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant 2\|g\|_{L_\infty}\|b(\mathbf{D})\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} + C_6\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n);\\ &C_6 := |\Omega|^{-1}(C_a^2 + \|Q\|_{L_1(\Omega)}) + C_V^2\|g\|^{-1}_{L_\infty} + \lambda\|Q_0\|_{L_\infty}.\end{aligned}$$

Используя (1.3) и (1.6), отсюда получаем

$$\mathfrak{b}_N^0[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant c_6\|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n), \tag{2.33}$$

где $c_6 = \max\{2d\alpha_1\|g\|_{L_\infty} + 1, C_6\}$.

Таким образом, в силу (2.32) и (2.33) форма (2.25) замкнута и положительно определена. Отвечающий ей самосопряженный оператор в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ обозначим через B_N^0.

Теперь мы окончательно фиксируем значение параметра λ:

$$\lambda = \max\{\lambda_*, \lambda_0, \widehat{\lambda}\}, \tag{2.34}$$

где λ_* определено в (1.16), λ_0 — в (2.16) и $\widehat{\lambda}$ — в (2.31). Это обеспечивает неотрицательность оператора B_ε, действующего в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, и положительную определенность операторов $B_{N,\varepsilon}$ и B_N^0, действующих в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$.

Для удобства дальнейших ссылок назовем „исходными данными” следующие величины

$$\begin{gathered} d,\ m,\ n,\ \rho,\ s;\ \alpha_0,\ \alpha_1,\ \|g\|_{L_\infty},\ \|g^{-1}\|_{L_\infty},\ \|a_j\|_{L_\rho(\Omega)},\ j=1,\dots,d; \\ \|Q\|_{L_s(\Omega)},\ \|Q_0\|_{L_\infty},\ \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty},\ k_1,\ k_2;\ \text{параметры решетки } \Gamma,\ \text{область } \mathcal{O}. \end{gathered} \tag{2.35}$$

Ясно, что постоянная (2.34), а также постоянные c_4, c_5, c_6 контролируются через исходные данные (2.35).

В силу условия $\partial\mathcal{O} \in C^{1,1}$ оператор $(B_N^0)^{-1}$ является непрерывным отображением из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. При этом выполнена оценка

$$\|(B_N^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{c}. \tag{2.36}$$

Здесь постоянная $\widehat{c}$ зависит лишь от исходных данных (2.35). Для оправдания этого факта сошлемся на теоремы о регулярности решений сильно эллиптических систем (см. [McL, глава 4]).

Замечание 2.5. *Вместо условия $\partial\mathcal{O} \in C^{1,1}$ можно было бы наложить неявное требование: ограниченная область $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ с липшицевой границей такова, что справедлива оценка* (2.36). *Для такой области результаты работы остаются в силе. В случае скалярных эллиптических операторов широкие достаточные условия на $\partial\mathcal{O}$, обеспечивающие справедливость оценки* (2.36), *можно найти в* [KoE] *и* [MaSh, гл. 7] (*в частности, достаточно, чтобы $\partial\mathcal{O} \in C^\alpha$, $\alpha > 3/2$*).

Факторизуем $\overline{Q_0} = f_0^{-2}$. Отметим, что согласно (2.19)

$$|f_0| \leqslant \|f\|_{L_\infty} = \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}, \quad |f_0^{-1}| \leqslant \|f^{-1}\|_{L_\infty} = \|Q_0\|_{L_\infty}^{1/2}. \tag{2.37}$$

Нам потребуется вспомогательный оператор $\widetilde{B}_N^0 = f_0 B_N^0 f_0$. Отметим равенство

$$(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} = f_0(\widetilde{B}_N^0 - \zeta I)^{-1} f_0. \tag{2.38}$$

Пусть

$$\mathbf{u}_0 = (B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\mathbf{F}, \quad \mathbf{F} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n),$$

— решение усредненной задачи Неймана. Решение $\mathbf{u}_0 \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ удовлетворяет тождеству

$$\mathfrak{b}_N^0[\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\eta}] - \zeta(\overline{Q_0}\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} = (\mathbf{F}, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{2.39}$$

Лемма 2.6. *При $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ справедливы оценки*

$$\big\|(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant c(\phi)|\zeta|^{-1}\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}, \tag{2.40}$$

$$\big\|(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_1 c(\phi)|\zeta|^{-1/2}, \tag{2.41}$$

$$\big\|(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_2 c(\phi). \tag{2.42}$$

Здесь постоянная $\mathcal{C}_1$ — та же, что в лемме 2.4, $\mathcal{C}_2 = \widehat{c}\|Q_0\|_{L_\infty}^{1/2}\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}$.

Доказательство. Оценки (2.40), (2.41) устанавливаются аналогично оценкам из леммы 2.4. Проверим (2.42). Очевидно,

$$\big\|(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})} \leqslant \big\|(B_N^0)^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})}\big\|B_N^0(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}. \tag{2.43}$$

В силу (2.38) имеем $B_N^0(B_N^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}=B_N^0 f_0(\widetilde{B}_N^0-\zeta I)^{-1}f_0=f_0^{-1}\widetilde{B}_N^0(\widetilde{B}_N^0-\zeta I)^{-1}f_0$. Тогда

$$\big\|B_N^0(B_N^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant|f_0^{-1}||f_0|\sup_{x\geqslant 0}\frac{x}{|x-\zeta|}\leqslant\|Q_0\|^{1/2}_{L_\infty}\|Q_0^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}c(\phi). \qquad (2.44)$$

Мы учли (2.37). Теперь из (2.36), (2.43) и (2.44) вытекает оценка (2.42). $\square$

§ 3. Формулировка результатов. Введение поправки типа пограничного слоя

3.1. **Результаты в случае $\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta|\geqslant 1$.** Положим $(\partial\mathcal{O})_\varepsilon:=\big\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d:\operatorname{dist}\{\mathbf{x};\partial\mathcal{O}\}<\varepsilon\big\}$. Выберем числа ε_0, $\varepsilon_1\in(0,1]$ согласно следующему условию.

Условие 3.1. *Пусть число $\varepsilon_0\in(0,1]$ таково, что полоску $(\partial\mathcal{O})_{\varepsilon_0}$ можно покрыть конечным набором окрестностей, допускающих диффеоморфизмы класса $C^{0,1}$, распрямляющие границу $\partial\mathcal{O}$. Обозначим $\varepsilon_1=\varepsilon_0(1+r_1)^{-1}$, где $2r_1=\operatorname{diam}\Omega$.*

Ясно, что ε_1 зависит только от области $\mathcal{O}$ и от параметров решетки Γ. Отметим, что для справедливости условия 3.1 достаточно, чтобы $\partial\mathcal{O}$ была липшицевой. Мы наложили более ограничительное условие $\partial\mathcal{O}\in C^{1,1}$, чтобы гарантировать справедливость оценки (2.36).

Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 3.2. *Пусть $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. Пусть $\zeta=|\zeta|e^{i\phi}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta|\geqslant 1$. Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon=(B_{N,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\mathbf{F}$ и $\mathbf{u}_0=(B_N^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\mathbf{F}$, где $\mathbf{F}\in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Пусть число ε_1 подчинено условию 3.1. Тогда при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon-\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant\mathcal{C}_3 c(\phi)^2\varepsilon|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \qquad (3.1)$$

Здесь $c(\phi)$ — величина (1.40); постоянная $\mathcal{C}_3$ зависит только от исходных данных (2.35). В операторных терминах,

$$\big\|(B_{N,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-(B_N^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant\mathcal{C}_3 c(\phi)^2\varepsilon|\zeta|^{-1/2}. \qquad (3.2)$$

Чтобы аппроксимировать решение в классе Соболева $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, введем корректор. Для этого фиксируем линейный непрерывный оператор продолжения

$$P_\mathcal{O}:H^l(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)\to H^l(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n),\quad l\in\mathbb{Z}_+. \qquad (3.3)$$

Такой „универсальный” оператор продолжения существует для любой ограниченной области с липшицевой границей (см. [St] или [R]). При этом

$$\|P_\mathcal{O}\|_{H^l(\mathcal{O})\to H^l(\mathbb{R}^d)}\leqslant C_\mathcal{O}^{(l)},\quad l\in\mathbb{Z}_+, \qquad (3.4)$$

где постоянная $C_\mathcal{O}^{(l)}$ зависит лишь от l и от области $\mathcal{O}$. Через $R_\mathcal{O}$ обозначим оператор сужения функций в $\mathbb{R}^d$ на область $\mathcal{O}$. Положим

$$K_N(\varepsilon;\zeta):=R_\mathcal{O}\big([\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D})+[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]\big)S_\varepsilon P_\mathcal{O}(B_N^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}. \qquad (3.5)$$

Нам понадобится также оператор

$$G_N(\varepsilon;\zeta):=R_\mathcal{O}[\widetilde{g}^\varepsilon]S_\varepsilon b(\mathbf{D})P_\mathcal{O}(B_N^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}+R_\mathcal{O}[g^\varepsilon\big(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\big)^\varepsilon]S_\varepsilon P_\mathcal{O}(B_N^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}. \qquad (3.6)$$

Лемма 3.3. *Пусть операторы $K_N(\varepsilon;\zeta)$ и $G_N(\varepsilon;\zeta)$ определены в (3.5) и (3.6) соответственно. Оператор $K_N(\varepsilon;\zeta)$ непрерывен из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, а оператор $G_N(\varepsilon;\zeta)$ непрерывен из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^m)$. При $\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta|\geqslant 1$, и $0<\varepsilon\leqslant 1$ выполнены оценки*

$$\varepsilon\|K_N(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant C_K' c(\phi)\varepsilon|\zeta|^{-1/2}, \qquad (3.7)$$

$$\varepsilon\|\mathbf{D}K_N(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant C_K'' c(\phi)\big(\varepsilon+|\zeta|^{-1/2}\big), \qquad (3.8)$$

$$\|G_N(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant C_G c(\phi)|\zeta|^{-1/2}. \qquad (3.9)$$

Постоянные C_K', C_K'' и C_G зависят только от исходных данных (2.35).

Доказательство. В силу предложения 1.2 и соотношений (1.5), (1.24), (1.32), (3.4)

$$\begin{aligned}\varepsilon\|K_N(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \varepsilon M_1\alpha_1^{1/2}C_{\mathcal{O}}^{(1)}\big\|(B_N^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\ +\varepsilon\widetilde{M}_1C_{\mathcal{O}}^{(0)}\big\|(B_N^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned}$$

Вместе с (2.40) и (2.41) с учетом ограничения $|\zeta|\geqslant 1$ это приводит к оценке (3.7) с постоянной $C_K'=M_1\alpha_1^{1/2}C_{\mathcal{O}}^{(1)}\mathcal{C}_1+\widetilde{M}_1C_{\mathcal{O}}^{(0)}\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}$.

Далее, имеем

$$\begin{aligned}\varepsilon D_lK_N(\varepsilon;\zeta)=(D_l\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})P_{\mathcal{O}}(B_N^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}+(D_l\widetilde{\Lambda})^\varepsilon S_\varepsilon P_{\mathcal{O}}(B_N^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\\ +\varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})D_lP_{\mathcal{O}}(B_N^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}+\varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon D_lP_{\mathcal{O}}(B_N^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Применяя предложение 1.2 и соотношения (1.5), (1.24), (1.25), (1.32), (1.33), (3.4), отсюда получаем

$$\begin{aligned}\varepsilon\|\mathbf{D}K_N(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant\big(M_2\alpha_1^{1/2}+\varepsilon\widetilde{M}_1\big)C_{\mathcal{O}}^{(1)}\big\|(B_N^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\ +\widetilde{M}_2C_{\mathcal{O}}^{(0)}\big\|(B_N^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}+\varepsilon M_1\alpha_1^{1/2}C_{\mathcal{O}}^{(2)}\big\|(B_N^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})}.\end{aligned}$$

Комбинируя это с оценками (2.40)–(2.42), приходим к неравенству (3.8) с постоянной $C_K''=\max\{\widetilde{M}_1C_{\mathcal{O}}^{(1)}\mathcal{C}_1+M_1\alpha_1^{1/2}C_{\mathcal{O}}^{(2)}\mathcal{C}_2;M_2\alpha_1^{1/2}C_{\mathcal{O}}^{(1)}\mathcal{C}_1+\widetilde{M}_2C_{\mathcal{O}}^{(0)}\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}\}$.

Теперь оценим оператор (3.6) с помощью предложения 1.2 и соотношений (1.5), (1.22), (1.23), (1.31), (3.4):

$$\|G_N(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant C_G'\big\|(B_N^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}+C_G''\big\|(B_N^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})},$$

где $C_G'=2\|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}C_{\mathcal{O}}^{(1)}$ и $C_G''=|\Omega|^{-1/2}\alpha_0^{-1/2}C_a\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}C_{\mathcal{O}}^{(0)}$. Вместе с (2.40) и (2.41) это дает оценку (3.9) с постоянной $C_G=C_G'\mathcal{C}_1+C_G''\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}$. □

Положим $\widetilde{\mathbf{u}}_0=P_{\mathcal{O}}\mathbf{u}_0$. Через $\mathbf{v}_\varepsilon$ обозначим первое приближение к решению $\mathbf{u}_\varepsilon$:

$$\widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon:=\widetilde{\mathbf{u}}_0+\varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0+\varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0,\tag{3.11}$$

$$\mathbf{v}_\varepsilon:=\widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon|_{\mathcal{O}}.\tag{3.12}$$

Иначе говоря, $\mathbf{v}_\varepsilon=(B_N^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\mathbf{F}+\varepsilon K_N(\varepsilon;\zeta)\mathbf{F}$, где $K_N(\varepsilon;\zeta)$ — оператор (3.5).

Теорема 3.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.2. *Пусть матрицы-функции* $\Lambda(\mathbf{x})$ *и* $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ — Γ*-периодические решения задач* (1.20) *и* (1.30) *соответственно,* S_ε — *оператор сглаживания по Стеклову* (1.1), *и пусть* $P_{\mathcal{O}}$ — *оператор продолжения* (3.3). *Положим* $\widetilde{\mathbf{u}}_0=P_{\mathcal{O}}\mathbf{u}_0$. *Пусть функция* $\mathbf{v}_\varepsilon$ *определена в* (3.11), (3.12). *Тогда при* $\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta|\geqslant1$, *и* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *выполнена оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon-\mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}\leqslant\big(\mathcal{C}_4c(\phi)\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}+\mathcal{C}_5c(\phi)^2\varepsilon\big)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.\tag{3.13}$$

В операторных терминах,

$$\big\|(B_{N,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-(B_N^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}-\varepsilon K_N(\varepsilon;\zeta)\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\leqslant\mathcal{C}_4c(\phi)\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}+\mathcal{C}_5c(\phi)^2\varepsilon,\tag{3.14}$$

где $K_N(\varepsilon;\zeta)$ — *оператор* (3.5). *Пусть матрица-функция* $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ *определена в* (1.22). *Для потока* $\mathbf{p}_\varepsilon:=g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$ *при* $\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta|\geqslant1$, *и* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *справедлива оценка*

$$\big\|\mathbf{p}_\varepsilon-\widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0-g^\varepsilon\big(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\big)^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0\big\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant\big(\widetilde{\mathcal{C}}_4c(\phi)\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}+\widetilde{\mathcal{C}}_5c(\phi)^2\varepsilon\big)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.\tag{3.15}$$

В операторных терминах,

$$\big\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{N,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-G_N(\varepsilon;\zeta)\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant\widetilde{\mathcal{C}}_4c(\phi)\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}+\widetilde{\mathcal{C}}_5c(\phi)^2\varepsilon.\tag{3.16}$$

Здесь оператор $G_N(\varepsilon;\zeta)$ определен в (3.6)*. Постоянные $\mathcal{C}_4$, $\mathcal{C}_5$, $\widetilde{\mathcal{C}}_4$ и $\widetilde{\mathcal{C}}_5$ зависят только от исходных данных* (2.35)*.*

Следствие 3.5. *В условиях теоремы* 3.4 *при $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta|\geqslant 1$, и $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ справедлива оценка*

$$\big\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{N,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G_N(\varepsilon;\zeta)\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}_4' c(\phi)^{3/2}\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}. \tag{3.17}$$

Постоянная $\widetilde{\mathcal{C}}_4'$ зависит только от исходных данных (2.35)*.*

3.2. **Первый этап доказательства. Ассоциированная задача в $\mathbb{R}^d$.** В силу леммы 2.6 и (3.4) при $\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ справедливы оценки

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_7 c(\phi)|\zeta|^{-1}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})};\quad C_7 := C_{\mathcal{O}}^{(0)}\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}, \tag{3.18}$$

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_8 c(\phi)|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})};\quad C_8 := C_{\mathcal{O}}^{(1)}\mathcal{C}_1, \tag{3.19}$$

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_9 c(\phi)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})};\quad C_9 := C_{\mathcal{O}}^{(2)}\mathcal{C}_2. \tag{3.20}$$

Положим

$$\widetilde{\mathbf{F}} := (B^0 - \zeta\overline{Q_0})\widetilde{\mathbf{u}}_0, \tag{3.21}$$

где B^0 — оператор (1.37). Тогда $\widetilde{\mathbf{F}}\in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и $\widetilde{\mathbf{F}}|_{\mathcal{O}}=\mathbf{F}$. В силу верхней оценки (1.39), (3.18) и (3.20) имеем

$$\begin{gathered}\|\widetilde{\mathbf{F}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_L\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} + |\zeta||\overline{Q_0}|\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{10}c(\phi)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},\\ C_{10} := C_L C_9 + C_7\|Q_0\|_{L_\infty}.\end{gathered} \tag{3.22}$$

Пусть $\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ — решение уравнения в $\mathbb{R}^d$:

$$B_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon = \widetilde{\mathbf{F}}, \tag{3.23}$$

т. е. $\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon = (B_\varepsilon-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\widetilde{\mathbf{F}}$. Объединяя (3.21)–(3.23) и применяя теоремы 1.6 и 1.7, находим, что при $0<\varepsilon\leqslant 1$ и $\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta|\geqslant 1$, справедливы оценки

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_1 C_{10} c(\phi)^3\varepsilon|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{3.24}$$

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_2 C_{10} c(\phi)^3\varepsilon|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{3.25}$$

$$\|\mathbf{D}(\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_3 C_{10} c(\phi)^3\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{3.26}$$

$$\big\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 - g^\varepsilon(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda})^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_4 C_{10} c(\phi)^3\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{3.27}$$

Теперь из (3.25) и (3.26) с учетом $|\zeta|\geqslant 1$ следует, что

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant (C_2+C_3)C_{10}c(\phi)^3\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{3.28}$$

3.3. **Второй этап доказательства. Введение поправки типа пограничного слоя.** Введем поправку $\mathbf{w}_\varepsilon\in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ как функцию, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\mathbf{w}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta}] - \zeta(Q_0^\varepsilon\mathbf{w}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} = \mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}],\quad \boldsymbol{\eta}\in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n), \tag{3.29}$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}] :=& \big(\widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 + g^\varepsilon(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda})^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})}\\ &+\sum_{j=1}^d\Big(\big(D_j\mathbf{v}_\varepsilon,(a_j^\varepsilon)^*\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})} + \big((a_j^\varepsilon)^*\mathbf{v}_\varepsilon, D_j\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})}\Big) + \big(Q^\varepsilon\mathbf{v}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})}\\ &+(\lambda-\zeta)(Q_0^\varepsilon\mathbf{u}_0,\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})} - \big(\mathbf{F},\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})},\quad \boldsymbol{\eta}\in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n).\end{aligned} \tag{3.30}$$

Легко видеть, что функционал (3.30) является антилинейным и непрерывным в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Для первого члена непрерывность следует из предложения 1.2 и включений $\widetilde{g}, g(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda})\in$

$L_2(\Omega)$. Далее, в силу (2.10) и непрерывности вложения $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \hookrightarrow L_q(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ (с константой вложения $C(q;\mathcal{O})$) выполнена оценка

$$\left(\sum_{j=1}^d \|(a_j^\varepsilon)^*\boldsymbol{\eta}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}\right)^{1/2} \leqslant C_{11}\|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n), \tag{3.31}$$

где $C_{11} = \mathfrak{c}_1^{1/\rho}C(q;\mathcal{O})\left(\sum_{j=1}^d \|a_j\|^2_{L_\rho(\Omega)}\right)^{1/2}$. Отсюда следует, что второй член в (3.30) непрерывен в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Аналогично, из (2.13) и непрерывности вложения $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \hookrightarrow L_{\check{q}}(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ (с константой вложения $C(\check{q};\mathcal{O})$) вытекает оценка

$$\||Q^\varepsilon|^{1/2}\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{12}\|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n), \tag{3.32}$$

где $C_{12} = \mathfrak{c}_1^{1/2s}C(\check{q};\mathcal{O})\|Q\|^{1/2}_{L_s(\Omega)}$. Поэтому третье слагаемое в (3.30) непрерывно в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Для последних двух членов непрерывность очевидна.

Стандартным образом проверяется, что решение $\mathbf{w}_\varepsilon$ задачи (3.29) существует и единственно. Поправку $\mathbf{w}_\varepsilon$ такого типа часто называют „корректором типа пограничного слоя“.

Лемма 3.6. *Пусть $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ и $|\zeta| \geqslant 1$. Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon = (B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\mathbf{F}$, где $\mathbf{F} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Пусть $\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon$ определено в п.* 3.2. *Пусть $\mathbf{w}_\varepsilon \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ удовлетворяет тождеству* (3.29). *Тогда справедливы оценки*

$$\|\mathbf{D}(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon + \mathbf{w}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_6\varepsilon c(\phi)^4\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{3.33}$$

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon + \mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_7\varepsilon c(\phi)^4|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{3.34}$$

Постоянные $\mathcal{C}_6$ и $\mathcal{C}_7$ зависят лишь от данных задачи (2.35).

Доказательство. Обозначим $\mathbf{V}_\varepsilon := \mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon + \mathbf{w}_\varepsilon$. С учетом (2.22), (3.12) и (3.29) функция $\mathbf{V}_\varepsilon \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\mathbf{V}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta}] - \zeta(Q_0^\varepsilon\mathbf{V}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}\\
&= -\big(g^\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 - g^\varepsilon(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda})^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})}\\
&- \sum_{j=1}^d \Big(\big(D_j(\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon),(a_j^\varepsilon)^*\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})} + \big((a_j^\varepsilon)^*(\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon), D_j\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})}\Big)\\
&- \big(Q^\varepsilon(\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon),\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})} - (\lambda-\zeta)\big(Q_0^\varepsilon(\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_0),\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n).
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Обозначим правую часть (3.35) через $J_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}]$. Используя (3.24), (3.26)–(3.28), (3.31), (3.32), убеждаемся, что

$$|J_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}]| \leqslant C_{13}c(\phi)^3\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\left(\|\mathbf{D}\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + |\zeta|^{1/2}\|\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})}\right), \tag{3.36}$$

где постоянная C_{13} зависит лишь от данных задачи (2.35).

Подставим $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{V}_\varepsilon$ в тождество (3.35), возьмем мнимую часть от полученного равенства и применим (3.36):

$$|\operatorname{Im}\zeta|(Q_0^\varepsilon\mathbf{V}_\varepsilon,\mathbf{V}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{13}c(\phi)^3\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\left(\|\mathbf{D}\mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + |\zeta|^{1/2}\|\mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}\right). \tag{3.37}$$

При $\operatorname{Re}\zeta \geqslant 0$ (а тогда $\operatorname{Im}\zeta \neq 0$) отсюда выводим

$$\begin{aligned}
&(Q_0^\varepsilon\mathbf{V}_\varepsilon,\mathbf{V}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant 2C_{13}c(\phi)^4\varepsilon|\zeta|^{-1}\|\mathbf{D}\mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\\
&+ C_{13}^2\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}c(\phi)^8\varepsilon^2|\zeta|^{-1}\|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \operatorname{Re}\zeta \geqslant 0.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Если $\operatorname{Re}\zeta < 0$, то в равенстве (3.35) при $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{V}_\varepsilon$ возьмем вещественную часть. При рассматриваемых значениях ζ имеем $c(\phi) = 1$ и с учетом (3.36) получаем

$$|\operatorname{Re}\zeta|(Q_0^\varepsilon \mathbf{V}_\varepsilon, \mathbf{V}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{13}\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \left(\|\mathbf{D}\mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + |\zeta|^{1/2} \|\mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \right). \tag{3.39}$$

Складывая (3.37) и (3.39), приходим к неравенству

$$|\zeta|(Q_0^\varepsilon \mathbf{V}_\varepsilon, \mathbf{V}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant 2C_{13}\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \left(\|\mathbf{D}\mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + |\zeta|^{1/2} \|\mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}(Q_0^\varepsilon \mathbf{V}_\varepsilon, \mathbf{V}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant 4C_{13}\varepsilon |\zeta|^{-1} \|\mathbf{D}\mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\quad + 4C_{13}^2 \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty} \varepsilon^2 |\zeta|^{-1} \|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \operatorname{Re}\zeta < 0.\end{aligned}$$

В итоге отсюда и из (3.38) следует, что при всех рассматриваемых значениях ζ выполнено

$$\begin{aligned}(Q_0^\varepsilon \mathbf{V}_\varepsilon, \mathbf{V}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant 4C_{13} c(\phi)^4 \varepsilon |\zeta|^{-1} \|\mathbf{D}\mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\quad + 4C_{13}^2 \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty} c(\phi)^8 \varepsilon^2 |\zeta|^{-1} \|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{3.40}$$

Теперь из (3.35) при $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{V}_\varepsilon$ и (3.36) получаем

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\mathbf{V}_\varepsilon, \mathbf{V}_\varepsilon] &\leqslant |J_\varepsilon[\mathbf{V}_\varepsilon]| + |\zeta|(Q_0^\varepsilon \mathbf{V}_\varepsilon, \mathbf{V}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant C_{13} c(\phi)^3 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{D}\mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\quad + C_{13}^2 \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty} c(\phi)^6 \varepsilon^2 \|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} + 2|\zeta|(Q_0^\varepsilon \mathbf{V}_\varepsilon, \mathbf{V}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned}$$

С учетом (2.17) и (3.40) отсюда вытекает искомая оценка (3.33) с постоянной $\mathcal{C}_6^2 = 81 C_{13}^2 c_4^{-2} + 18 C_{13}^2 c_4^{-1} \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}$. Соотношения (3.33) и (3.40) приводят к неравенству (3.34) с постоянной $\mathcal{C}_7^2 = 4C_{13}\mathcal{C}_6 \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty} + 4C_{13}^2 \|Q_0^{-1}\|^2_{L_\infty}$. $\square$

Из леммы 3.6 и оценки (3.28) вытекает следующая теорема, которая показывает, что при учете поправки $\mathbf{w}_\varepsilon$ решение $\mathbf{u}_\varepsilon$ приближается функцией $\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{w}_\varepsilon$ по норме в $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ с погрешностью точного порядка $O(\varepsilon)$.

Теорема 3.7. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.4. *Пусть* $\mathbf{w}_\varepsilon \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ *удовлетворяет тождеству* (3.29). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *и* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon + \mathbf{w}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_8 c(\phi)^4 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{3.41}$$

Постоянная $\mathcal{C}_8$ *зависит только от исходных данных* (2.35).

Дальнейший план доказательства теорем 3.2 и 3.4 таков. Мы сначала докажем оценку (3.14) при $\operatorname{Re}\zeta \leqslant 0$. Затем установим (3.2) также при $\operatorname{Re}\zeta \leqslant 0$, используя уже доказанную оценку (3.14) и соображения двойственности. После этого мы завершим доказательства теорем, опираясь на подходящие тождества для резольвент, позволяющие переносить уже доказанные оценки из точки ζ в левой полуплоскости в симметричную точку в правой полуплоскости. (Такой прием ранее применялся в [MSu4, §10].)

Выводы. 1) Из (3.41) следует оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_8 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}, \quad \operatorname{Re}\zeta \leqslant 0,\ |\zeta| \geqslant 1. \tag{3.42}$$

Поэтому для доказательства оценки (3.14) (при $\operatorname{Re}\zeta \leqslant 0$) нужно оценить надлежащим образом норму функции $\mathbf{w}_\varepsilon$ в $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$.

2) Из (3.24) и (3.34) видно, что

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_9 \varepsilon |\zeta|^{-1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \operatorname{Re}\zeta \leqslant 0,\ |\zeta| \geqslant 1, \tag{3.43}$$

где $\mathcal{C}_9 = \mathcal{C}_7 + C_1 C_{10}$. Поэтому доказательство теоремы 3.2 (при $\operatorname{Re}\zeta \leqslant 0$) сводится к оцениванию функции $\mathbf{w}_\varepsilon$ в $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$.

§ 4. Вспомогательные утверждения

4.1. **Оценки в окрестности границы.** В настоящем пункте приводятся вспомогательные утверждения, связанные с оценками интегралов по узкой окрестности $\partial\mathcal{O}$.

Лемма 4.1. *Пусть справедливо условие* 3.1. *Обозначим* $\Upsilon_\varepsilon = (\partial\mathcal{O})_\varepsilon \cap \mathcal{O}$. *Тогда для любой функции* $u \in H^1(\mathcal{O})$ *справедлива оценка*

$$\int_{\Upsilon_\varepsilon} |u|^2\,d\mathbf{x} \leqslant \beta\varepsilon \|u\|_{H^1(\mathcal{O})}\|u\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0.$$

Постоянная β *зависит только от области* $\mathcal{O}$.

Лемма 4.2. *Пусть выполнено условие* 3.1. *Пусть* $f(\mathbf{x})$ — Γ*-периодическая функция в* $\mathbb{R}^d$ *такая, что* $f \in L_2(\Omega)$. *Пусть* S_ε — *оператор* (1.1). *Обозначим* $\beta_* = \beta(1 + r_1)$, *где* $2r_1 = \operatorname{diam}\Omega$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *для любой функции* $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^k)$ *справедлива оценка*

$$\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |f^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |(S_\varepsilon\mathbf{u})(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} \leqslant \beta_*\varepsilon|\Omega|^{-1}\|f\|^2_{L_2(\Omega)}\|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Лемма 4.2 аналогична лемме 2.6 из [ZhPas1]. Леммы 4.1 и 4.2 проверены в [PSu, §5] при условии $\partial\mathcal{O} \in C^1$, но доказательства переносятся и на случай условия 3.1.

4.2. **Традиционная лемма теории усреднения.** Нам понадобится следующий вариант традиционной леммы теории усреднения (см., например, [ZhKO, глава 1, §1]); доказательство этого варианта леммы можно найти в [Su6, лемма 3.1].

Лемма 4.3. *Пусть* $f_l(\mathbf{x})$, $l = 1,\dots,d$, — Γ*-периодические* $(n\times m)$*-матрицы-функции в* $\mathbb{R}^d$, *причем*

$$f_l \in L_2(\Omega), \quad \int_\Omega f_l(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0,\ l = 1,\dots,d; \quad \sum_{l=1}^d D_l f_l(\mathbf{x}) = 0,$$

где последнее уравнение понимается в смысле теории распределений. Тогда существуют Γ*-периодические* $(n\times m)$*-матрицы-функции* $M_{lj}(\mathbf{x})$ *в* $\mathbb{R}^d$, $l,j = 1,\dots,d$, *такие что*

$$M_{lj} \in \widetilde{H}^1(\Omega), \quad \int_\Omega M_{lj}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0; \quad M_{lj}(\mathbf{x}) = -M_{jl}(\mathbf{x}),\ l,j = 1,\dots,d; \tag{4.1}$$

$$f_l(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^d \partial_j M_{lj}(\mathbf{x}), \quad l = 1,\dots,d. \tag{4.2}$$

Справедливы оценки

$$\|M_{lj}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant (2r_0)^{-1}\left(\|f_l\|_{L_2(\Omega)} + \|f_j\|_{L_2(\Omega)}\right), \quad l,j = 1,\dots,d. \tag{4.3}$$

4.3. **Лемма о** $h^\varepsilon - \overline{h}$**.** Будем считать, что $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Фиксируем срезку $\theta_\varepsilon(\mathbf{x})$ в $\mathbb{R}^d$, такую что

$$\begin{aligned} &\theta_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \operatorname{supp}\theta_\varepsilon \subset (\partial\mathcal{O})_\varepsilon, \quad 0 \leqslant \theta_\varepsilon(\mathbf{x}) \leqslant 1, \\ &\theta_\varepsilon(\mathbf{x}) = 1 \text{ при } \mathbf{x} \in \partial\mathcal{O}; \quad \varepsilon|\nabla\theta_\varepsilon(\mathbf{x})| \leqslant \kappa = \mathrm{Const}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Постоянная κ зависит только от d и от области $\mathcal{O}$.

Лемма 4.4. *Пусть* $p(\mathbf{x})$, $a(\mathbf{x})$ — Γ*-периодические* $(n\times n)$*-матрицы-функции в* $\mathbb{R}^d$, *причем* $p \in L_2(\Omega)$, $a \in L_\rho(\Omega)$, *где* $\rho = 2$ *при* $d = 1$, $\rho > d$ *при* $d \geqslant 2$. *Положим* $h(\mathbf{x}) := a(\mathbf{x})p(\mathbf{x})$ *и* $\overline{h} = |\Omega|^{-1}\int_\Omega h(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$. *Пусть* S_ε — *оператор* (1.1). *Пусть* $\widetilde{\mathbf{u}} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и* $\boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. *Обозначим*

$$\mathfrak{t}_\varepsilon[\widetilde{\mathbf{u}},\boldsymbol{\eta}] := \left((h^\varepsilon - \overline{h})S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}},\boldsymbol{\eta}\right)_{L_2(\mathcal{O})}.$$

1°. *При $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ справедлива оценка*

$$\begin{aligned} \left|\mathfrak{t}_\varepsilon[\widetilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\eta}]\right| \leqslant C'\varepsilon\|a\|_{L_\rho(\Omega)}\|p\|_{L_2(\Omega)}\bigl(\|\widetilde{\mathbf{u}}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\widetilde{\mathbf{u}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})}\bigr) \\ + C''\varepsilon^{1/2}\|p\|_{L_2(\Omega)}\|\widetilde{\mathbf{u}}\|^{1/2}_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|\widetilde{\mathbf{u}}\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}^d)}\|(a^\varepsilon)^*\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Здесь C'' зависит лишь от области $\mathcal{O}$ и решетки Γ, а C' зависит от тех же параметров и от ρ.
2°. *При дополнительном предположении $a(\mathbf{x}) = 1$ (т. е. $h = p \in L_2(\Omega)$) при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ справедлива оценка*

$$\left|\mathfrak{t}_\varepsilon[\widetilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\eta}]\right| \leqslant C'''\varepsilon\|h\|_{L_2(\Omega)}\bigl(\|\widetilde{\mathbf{u}}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\widetilde{\mathbf{u}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})}\bigr). \tag{4.6}$$

Постоянная C''' зависит лишь от области $\mathcal{O}$ и решетки Γ.
3°. *При дополнительном предположении $h \in L_\infty$ при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ справедлива оценка*

$$\begin{aligned} \left|\bigl((h^\varepsilon - \overline{h})\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}\bigr)_{L_2(\mathcal{O})}\right| \leqslant \widetilde{C}'''\varepsilon\|h\|_{L_\infty}\bigl(\|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})}\bigr), \\ \forall \mathbf{u}, \boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \end{aligned}$$

Постоянная $\widetilde{C}'''$ зависит лишь от области $\mathcal{O}$ и решетки Γ.

Доказательство. 1°. Пусть $\Phi(\mathbf{x})$ — Γ-периодическое (обобщенное) решение задачи

$$\Delta\Phi(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) - \overline{h}, \quad \int_\Omega \Phi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0.$$

Тогда $(n \times n)$-матрица-функция $\Phi \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ удовлетворяет тождеству

$$\bigl(\nabla\Phi\mathbf{C}, \nabla\boldsymbol{\psi}\bigr)_{L_2(\Omega)} = -(p\mathbf{C}, a^*\boldsymbol{\psi})_{L_2(\Omega)} + (\overline{h}\mathbf{C}, \boldsymbol{\psi})_{L_2(\Omega)}, \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n),\ \mathbf{C} \in \mathbb{C}^n. \tag{4.7}$$

Подставляя $\boldsymbol{\psi} = \Phi\mathbf{C}$ в тождество (4.7) и учитывая оценку

$$\|a^*\Phi\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C(q; \Omega)\|a\|_{L_\rho(\Omega)}\|\Phi\|_{H^1(\Omega)},$$

вытекающую из неравенства Гёльдера и теоремы вложения, и неравенство Пуанкаре $\|\Phi\|_{L_2(\Omega)} \leqslant (2r_0)^{-1}\|\nabla\Phi\|_{L_2(\Omega)}$, получаем

$$\|\Phi\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \check{C}\|p\|_{L_2(\Omega)}\|a\|_{L_\rho(\Omega)}, \tag{4.8}$$

где постоянная $\check{C}$ зависит лишь от ρ и параметров решетки Γ.

Положим $\varphi_j(\mathbf{x}) := \partial_j\Phi(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, d$. Тогда $h(\mathbf{x}) - \overline{h} = \sum_{j=1}^d \partial_j\varphi_j(\mathbf{x})$ (равенство понимается в смысле обобщенных функций). Следовательно, $h^\varepsilon - \overline{h} = \varepsilon\sum_{j=1}^d \partial_j\varphi_j^\varepsilon$, а потому

$$\mathfrak{t}_\varepsilon[\widetilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\eta}] = \mathfrak{t}^{(1)}_\varepsilon[\widetilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\eta}] - \mathfrak{t}^{(2)}_\varepsilon[\widetilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\eta}], \tag{4.9}$$

$$\mathfrak{t}^{(1)}_\varepsilon[\widetilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\eta}] = \varepsilon\sum_{j=1}^d \bigl(\partial_j(\varphi_j^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}), \boldsymbol{\eta}\bigr)_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{4.10}$$

$$\mathfrak{t}^{(2)}_\varepsilon[\widetilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\eta}] = \varepsilon\sum_{j=1}^d \bigl(\varphi_j^\varepsilon S_\varepsilon\partial_j\widetilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\eta}\bigr)_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{4.11}$$

Член (4.11) оценим с помощью предложения 1.2 и (4.8):

$$\begin{aligned} \left|\mathfrak{t}^{(2)}_\varepsilon[\widetilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\eta}]\right| &\leqslant \varepsilon|\Omega|^{-1/2}\|\nabla\Phi\|_{L_2(\Omega)}\|\mathbf{D}\widetilde{\mathbf{u}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\|\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \check{C}\varepsilon|\Omega|^{-1/2}\|p\|_{L_2(\Omega)}\|a\|_{L_\rho(\Omega)}\|\mathbf{D}\widetilde{\mathbf{u}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\|\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Пусть θ_ε — срезка, подчиненная условиям (4.4). Представим функционал (4.10) в виде

$$\mathfrak{t}_\varepsilon^{(1)}[\widetilde{\mathbf{u}},\boldsymbol{\eta}] = \widetilde{\mathfrak{t}}_\varepsilon^{(1)}[\widetilde{\mathbf{u}},\boldsymbol{\eta}] + \widehat{\mathfrak{t}}_\varepsilon^{(1)}[\widetilde{\mathbf{u}},\boldsymbol{\eta}], \tag{4.13}$$

$$\widetilde{\mathfrak{t}}_\varepsilon^{(1)}[\widetilde{\mathbf{u}},\boldsymbol{\eta}] = \varepsilon\sum_{j=1}^d \big(\partial_j(\theta_\varepsilon\varphi_j^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}),\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{4.14}$$

$$\widehat{\mathfrak{t}}_\varepsilon^{(1)}[\widetilde{\mathbf{u}},\boldsymbol{\eta}] = -\,\varepsilon\sum_{j=1}^d \big((1-\theta_\varepsilon)\varphi_j^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}},\partial_j\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{4.15}$$

Член (4.15) оценивается на основании (4.4), предложения 1.2 и (4.8):

$$\begin{aligned}\big|\widehat{\mathfrak{t}}_\varepsilon^{(1)}[\widetilde{\mathbf{u}},\boldsymbol{\eta}]\big| &\leqslant \varepsilon|\Omega|^{-1/2}\|\nabla\Phi\|_{L_2(\Omega)}\|\widetilde{\mathbf{u}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\|\mathbf{D}\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})}\\ &\leqslant \check{C}\varepsilon|\Omega|^{-1/2}\|p\|_{L_2(\Omega)}\|a\|_{L_\rho(\Omega)}\|\widetilde{\mathbf{u}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\|\mathbf{D}\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{4.16}$$

Далее, член (4.14) представим в виде

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathfrak{t}}_\varepsilon^{(1)}[\widetilde{\mathbf{u}},\boldsymbol{\eta}] = \varepsilon\sum_{j=1}^d \big((\partial_j\theta_\varepsilon)\varphi_j^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}},\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})} + \big(\theta_\varepsilon(h^\varepsilon-\overline{h})S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}},\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})}\\ +\,\varepsilon\sum_{j=1}^d\big(\theta_\varepsilon\varphi_j^\varepsilon S_\varepsilon\partial_j\widetilde{\mathbf{u}},\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{4.17}$$

Применяя леммы 4.1 и 4.2 и соотношения (4.4), (4.8), оценим первое слагаемое в правой части (4.17):

$$\begin{aligned}&\varepsilon\Big|\sum_{j=1}^d \big((\partial_j\theta_\varepsilon)\varphi_j^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}},\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})}\Big| \leqslant \kappa\|(\nabla\Phi)^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}\|_{L_2((\partial\mathcal{O})_\varepsilon)}\|\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)}\\ &\leqslant \check{C}'\varepsilon\|p\|_{L_2(\Omega)}\|a\|_{L_\rho(\Omega)}\|\widetilde{\mathbf{u}}\|^{1/2}_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|\widetilde{\mathbf{u}}\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}^d)}\|\boldsymbol{\eta}\|^{1/2}_{H^1(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\eta}\|^{1/2}_{L_2(\mathcal{O})}\\ &\leqslant \frac{1}{2}\check{C}'\varepsilon\|p\|_{L_2(\Omega)}\|a\|_{L_\rho(\Omega)}\big(\|\widetilde{\mathbf{u}}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\widetilde{\mathbf{u}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})}\big),\quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1.\end{aligned} \tag{4.18}$$

Здесь $\check{C}' = \kappa(\beta\beta_*)^{1/2}|\Omega|^{-1/2}\check{C}$.

Второй член в правой части (4.17) оценивается с помощью (4.4) и лемм 4.1, 4.2:

$$\begin{aligned}&\big|\big(\theta_\varepsilon(h^\varepsilon-\overline{h})S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}},\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})}\big| \leqslant \|p^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}\|_{L_2((\partial\mathcal{O})_\varepsilon)}\|(a^\varepsilon)^*\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)} + \|\overline{h}S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}\|_{L_2((\partial\mathcal{O})_\varepsilon)}\|\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)}\\ &\leqslant \beta_*^{1/2}|\Omega|^{-1/2}\varepsilon^{1/2}\|p\|_{L_2(\Omega)}\|\widetilde{\mathbf{u}}\|^{1/2}_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|\widetilde{\mathbf{u}}\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}^d)}\|(a^\varepsilon)^*\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)}\\ &+(\beta\beta_*)^{1/2}|\Omega|^{-1}\varepsilon\|p\|_{L_2(\Omega)}\|a\|_{L_2(\Omega)}\|\widetilde{\mathbf{u}}\|^{1/2}_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|\widetilde{\mathbf{u}}\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}^d)}\|\boldsymbol{\eta}\|^{1/2}_{H^1(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\eta}\|^{1/2}_{L_2(\mathcal{O})}\\ &\leqslant \beta_*^{1/2}|\Omega|^{-1/2}\varepsilon^{1/2}\|p\|_{L_2(\Omega)}\|\widetilde{\mathbf{u}}\|^{1/2}_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|\widetilde{\mathbf{u}}\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}^d)}\|(a^\varepsilon)^*\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)}\\ &+\frac{1}{2}(\beta\beta_*)^{1/2}|\Omega|^{-1}\varepsilon\|p\|_{L_2(\Omega)}\|a\|_{L_2(\Omega)}\big(\|\widetilde{\mathbf{u}}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\widetilde{\mathbf{u}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})}\big),\quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1.\end{aligned} \tag{4.19}$$

Наконец, третий член в правой части (4.17) оценивается по аналогии с (4.12):

$$\varepsilon\Big|\sum_{j=1}^d\big(\theta_\varepsilon\varphi_j^\varepsilon S_\varepsilon\partial_j\widetilde{\mathbf{u}},\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})}\Big| \leqslant \check{C}\varepsilon|\Omega|^{-1/2}\|p\|_{L_2(\Omega)}\|a\|_{L_\rho(\Omega)}\|\mathbf{D}\widetilde{\mathbf{u}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\|\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{4.20}$$

В итоге соотношения (4.9), (4.12), (4.13), (4.16)–(4.20) приводят к искомой оценке (4.5).

2°. При дополнительном предположении $a(\mathbf{x})=1$ следует учесть неравенство

$$\|\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)} \leqslant \beta^{1/2}\varepsilon^{1/2}\|\boldsymbol{\eta}\|^{1/2}_{H^1(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\eta}\|^{1/2}_{L_2(\mathcal{O})},$$

вытекающее из леммы 4.1. Отсюда и из (4.5) (при $a(\mathbf{x}) = 1$) вытекает (4.6).

3°. Пусть теперь $h \in L_\infty$. Пусть $\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. Положим $\widetilde{\mathbf{u}} = P_\mathcal{O} \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Очевидно,

$$\big((h^\varepsilon - \overline{h})\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})} = \mathfrak{t}_\varepsilon[\widetilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\eta}] + \big((h^\varepsilon - \overline{h})(I - S_\varepsilon)\widetilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})}.$$

В силу уже доказанного утверждения 2° первое слагаемое справа подчинено оценке (4.6). Второе слагаемое оценивается с помощью предложения 1.1:

$$\left|\big((h^\varepsilon - \overline{h})(I - S_\varepsilon)\widetilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})}\right| \leqslant 2\|h\|_{L_\infty} r_1 \varepsilon \|\widetilde{\mathbf{u}}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \|\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Остается учесть (3.4). □

4.4. **Свойства матриц-функций Λ и $\widetilde{\Lambda}$.** Следующий результат установлен в [PSu, следствие 2.4].

Лемма 4.5. *Пусть Γ-периодическое решение $\Lambda(\mathbf{x})$ задачи (1.20) ограничено: $\Lambda \in L_\infty$. Тогда для любой функции $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ при $\varepsilon > 0$ выполнена оценка*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |u(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant \beta_1 \|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \beta_2 \varepsilon^2 \|\Lambda\|^2_{L_\infty} \|\mathbf{D}u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Постоянные β_1 и β_2 зависят от m, d, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$ и $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$.

Следующее утверждение можно получить с помощью неравенства Гёльдера и теоремы вложения; ср. [MSu1, лемма 3.5].

Лемма 4.6. *Пусть $f(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая функция в $\mathbb{R}^d$ такая, что*

$$f \in L_p(\Omega), \quad p = 2 \text{ при } d = 1, \quad p > 2 \text{ при } d = 2, \quad p \geqslant d \text{ при } d \geqslant 3. \tag{4.21}$$

Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ оператор $[f^\varepsilon]$ непрерывно отображает $H^1(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$ и

$$\|[f^\varepsilon]\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|f\|_{L_p(\Omega)} C(\widehat{q}; \Omega),$$

где $C(\widehat{q}; \Omega)$ — норма оператора вложения $H^1(\Omega) \hookrightarrow L_{\widehat{q}}(\Omega)$. Здесь $\widehat{q} = \infty$ при $d = 1$ и $\widehat{q} = 2p(p-2)^{-1}$ при $d \geqslant 2$.

Следующий результат получен в [MSu1, следствие 3.6].

Лемма 4.7. *Пусть Γ-периодическое решение $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ задачи (1.30) удовлетворяет условию (4.21). Тогда при любом $u \in H^2(\mathbb{R}^d)$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$ справедлива оценка*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{D}\widetilde{\Lambda})^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |u(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant \widetilde{\beta}_1 \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} + \widetilde{\beta}_2 \varepsilon^2 \|\widetilde{\Lambda}\|^2_{L_p(\Omega)} C(\widehat{q}; \Omega)^2 \|\mathbf{D}u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Постоянные $\widetilde{\beta}_1$ и $\widetilde{\beta}_2$ зависят только от n, d, α_0, α_1, ρ, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, от норм $\|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}$, $j = 1, \dots, d$, а также от параметров решетки Γ.

§ 5. Оценка поправки $\mathbf{w}_\varepsilon$ в $H^1(\mathcal{O})$ при $\operatorname{Re}\zeta \leqslant 0$

5.1. **Случай $\operatorname{Re}\zeta \leqslant 0$. Оценка функционала $\mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}]$.** Используя (2.25) и (2.39), представим функционал (3.30) в виде

$$\mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}] = \sum_{k=1}^{5} \mathcal{I}_\varepsilon^{(k)}[\boldsymbol{\eta}], \quad \boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n), \tag{5.1}$$

где

$$\mathcal{I}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\eta}] = \big(\widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})} - \big(g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}] = &\big(g^\varepsilon (b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda})^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_0, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})} + \sum_{l=1}^d \big((a_l^\varepsilon)^* \mathbf{v}_\varepsilon, D_l\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})} \\ &- \sum_{l=1}^d \big(\overline{a_l^*}\mathbf{u}_0, D_l\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})} + (V\mathbf{u}_0, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})},\end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\mathcal{I}_\varepsilon^{(3)}[\boldsymbol{\eta}] = \sum_{l=1}^d \big(D_l\mathbf{v}_\varepsilon, (a_l^\varepsilon)^*\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})} - \sum_{l=1}^d \big(\overline{a_l} D_l\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})} + (b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0, V\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} + (W\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.4}$$

$$\mathcal{I}_\varepsilon^{(4)}[\boldsymbol{\eta}] = \big(Q^\varepsilon \mathbf{v}_\varepsilon - \overline{Q}\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.5}$$

$$\mathcal{I}_\varepsilon^{(5)}[\boldsymbol{\eta}] = (\lambda - \zeta)\big((Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.6}$$

Отметим, что при $\operatorname{Re}\zeta \leqslant 0$ выполнено $c(\phi) = 1$. Следующее утверждение проверяется по аналогии с леммой 11.1 из [Su8].

Лемма 5.1. *Пусть* $\operatorname{Re}\zeta \leqslant 0$ *и* $|\zeta| \geqslant 1$. *Пусть число* ε_1 *выбрано согласно условию* 3.1. *При* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *функционал* (5.2) *подчинен оценке*

$$\left|\mathcal{I}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\eta}]\right| \leqslant \gamma_1 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{D}\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \gamma_2 \varepsilon^{1/2} |\zeta|^{-1/4} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{D}\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)}. \tag{5.7}$$

Постоянные γ_1 *и* γ_2 *зависят лишь от данных задачи* (2.35).

Доказательство. Представим функционал (5.2) в виде

$$\mathcal{I}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\eta}] = \widetilde{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\eta}] + \widehat{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\eta}], \tag{5.8}$$

$$\widetilde{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\eta}] := \big(g^0 (S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.9}$$

$$\widehat{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\eta}] := \big((\widetilde{g}^\varepsilon - g^0) S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.10}$$

Член (5.9) оценим с помощью предложения 1.1 и соотношений (1.3), (1.5), (1.6) и (3.20):

$$\left|\widetilde{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\eta}]\right| \leqslant \|g\|_{L_\infty} r_1 \varepsilon \|\mathbf{D} b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \|b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \gamma_1^{(1)} \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{D}\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.11}$$

где $\gamma_1^{(1)} = \|g\|_{L_\infty} r_1 \alpha_1 d^{1/2} C_9$.

Используя (1.3), преобразуем член (5.10):

$$\widehat{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\eta}] = \sum_{l=1}^d \left(f_l^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0, D_l\boldsymbol{\eta}\right)_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.12}$$

где $f_l(\mathbf{x}) := b_l^*(\widetilde{g}(\mathbf{x}) - g^0)$, $l = 1, \dots, d$. Согласно (1.6) и (1.21)–(1.23) имеем

$$\|f_l\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \alpha_1^{1/2} \|g(b(\mathbf{D})\Lambda + \mathbf{1})\|_{L_2(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{1/2} \mathfrak{C}, \quad l = 1, \dots, d, \tag{5.13}$$

где $\mathfrak{C} := 2\alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}$. В силу (1.20)–(1.22) функции f_l, $l = 1, \dots, d$, удовлетворяют условиям леммы 4.3, а потому существуют Γ-периодические матрицы-функции $M_{lj}(\mathbf{x})$ в $\mathbb{R}^d$, $l, j = 1, \dots, d$, подчиненные условиям (4.1)–(4.3). Из (4.3) и (5.13) следуют оценки

$$\|M_{lj}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant r_0^{-1} |\Omega|^{1/2} \mathfrak{C}, \quad l, j = 1, \dots, d. \tag{5.14}$$

В силу (4.2) выполнено

$$f_l^\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon \sum_{j=1}^d \partial_j M_{lj}^\varepsilon(\mathbf{x}), \quad l = 1, \dots, d.$$

Отсюда и из (5.12) вытекает представление

$$\widehat{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\eta}] = \mathfrak{A}'_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}] + \mathfrak{A}''_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}], \tag{5.15}$$

$$\mathfrak{A}'_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}] := \varepsilon \sum_{l,j=1}^d \left(\partial_j (M^\varepsilon_{lj} S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0), D_l \boldsymbol{\eta} \right)_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.16}$$

$$\mathfrak{A}''_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}] := -\,\varepsilon \sum_{l,j=1}^d \left(M^\varepsilon_{lj} S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \partial_j \widetilde{\mathbf{u}}_0, D_l \boldsymbol{\eta} \right)_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.17}$$

Член (5.17) оценим на основании предложения 1.2 и соотношений (1.5), (3.20) и (5.14):

$$\begin{aligned} \left|\mathfrak{A}''_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}]\right| &\leqslant \varepsilon \sum_{l,j=1}^d |\Omega|^{-1/2} \|M_{lj}\|_{L_2(\Omega)} \|b(\mathbf{D})\partial_j \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \|D_l \boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \gamma_1^{(2)} \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{D}\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \end{aligned} \tag{5.18}$$

где $\gamma_1^{(2)} = d\alpha_1^{1/2} r_0^{-1} \mathfrak{C} C_9$.

Рассмотрим теперь член (5.16). Пусть θ_ε — срезка в $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющая условиям (4.4). Справедливо тождество

$$\sum_{j,l=1}^d \left(\partial_j ((1-\theta_\varepsilon) M^\varepsilon_{lj} S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0), D_l \boldsymbol{\eta} \right)_{L_2(\mathcal{O})} = 0, \quad \boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n),$$

что проверяется интегрированием по частям при учете равенства $M_{lj} = -M_{jl}$ (при проверке сначала считаем, что $\boldsymbol{\eta} \in H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, а затем замыкаем результат по непрерывности). Следовательно,

$$\mathfrak{A}'_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}] = \varepsilon \sum_{j,l=1}^d \left(\partial_j (\theta_\varepsilon M^\varepsilon_{lj} S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0), D_l \boldsymbol{\eta} \right)_{L_2(\mathcal{O})} = \sum_{l=1}^d \left(\boldsymbol{\psi}_l(\varepsilon), D_l \boldsymbol{\eta} \right)_{L_2(\mathcal{O})},$$

где $\boldsymbol{\psi}_l(\varepsilon) := \varepsilon \sum_{j=1}^d \partial_j (\theta_\varepsilon M^\varepsilon_{lj} S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0)$, $l = 1, \dots, d$. Имеем:

$$\boldsymbol{\psi}_l(\varepsilon) = \varepsilon \theta_\varepsilon \sum_{j=1}^d M^\varepsilon_{lj} S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \partial_j \widetilde{\mathbf{u}}_0 + \varepsilon \sum_{j=1}^d (\partial_j \theta_\varepsilon) M^\varepsilon_{lj} S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0 + \theta_\varepsilon f^\varepsilon_l S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0.$$

Обозначим последовательные слагаемые справа через $\boldsymbol{\psi}_l^{(1)}(\varepsilon)$, $\boldsymbol{\psi}_l^{(2)}(\varepsilon)$, $\boldsymbol{\psi}_l^{(3)}(\varepsilon)$. Тогда с учетом (4.4)

$$\left|\mathfrak{A}'_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}]\right| \leqslant \sum_{l=1}^d \left\|\boldsymbol{\psi}_l^{(1)}(\varepsilon)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \|D_l \boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \sum_{l=1}^d \left(\left\|\boldsymbol{\psi}_l^{(2)}(\varepsilon)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \left\|\boldsymbol{\psi}_l^{(3)}(\varepsilon)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \right) \|D_l \boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)}. \tag{5.19}$$

Для оценки $\boldsymbol{\psi}_l^{(1)}(\varepsilon)$ используем предложение 1.2 и (1.5), (3.20), (4.4), (5.14):

$$\begin{aligned} \left\|\boldsymbol{\psi}_l^{(1)}(\varepsilon)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \varepsilon \sum_{j=1}^d \|M^\varepsilon_{lj} S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \partial_j \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant (d\alpha_1)^{1/2} r_0^{-1} \mathfrak{C} \varepsilon \|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant C_{14} \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad l = 1, \dots, d, \end{aligned} \tag{5.20}$$

где $C_{14} = (d\alpha_1)^{1/2} r_0^{-1} \mathfrak{C} C_9$. В силу (4.4), (5.14) и леммы 4.2 при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ имеем

$$\begin{aligned} \left\|\boldsymbol{\psi}_l^{(2)}(\varepsilon)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \kappa \left(\sum_{j=1}^d \|M^\varepsilon_{lj} S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0\|^2_{L_2((\partial\mathcal{O})_\varepsilon)} \right)^{1/2} \\ &\leqslant \varepsilon^{1/2} \kappa (d\beta_*)^{1/2} r_0^{-1} \mathfrak{C} \|b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0\|^{1/2}_{H^1(\mathbb{R}^d)} \|b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad l = 1, \dots, d. \end{aligned}$$

С учетом (1.5), (3.19) и (3.20) отсюда получаем

$$\big\|\psi_l^{(2)}(\varepsilon)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{15}\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1,\ l=1,\dots,d, \tag{5.21}$$

где $C_{15} = \kappa(d\beta_*\alpha_1)^{1/2}r_0^{-1}\mathfrak{C}(C_8C_9)^{1/2}$. Аналогично, с помощью леммы 4.2 и (1.5), (3.19), (3.20) (4.4) и (5.13) приходим к оценке

$$\begin{aligned}\big\|\psi_l^{(3)}(\varepsilon)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \|f_l^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2((\partial\mathcal{O})_\varepsilon)} \leqslant \varepsilon^{1/2}\beta_*^{1/2}\mathfrak{C}\|b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^{1/2}_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant C_{16}\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1,\ l=1,\dots,d,\end{aligned} \tag{5.22}$$

где $C_{16} = (\beta_*\alpha_1)^{1/2}\mathfrak{C}(C_8C_9)^{1/2}$.

В итоге из (5.19)–(5.22) вытекает оценка

$$\big|\mathfrak{A}'_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}]\big| \leqslant \gamma_1^{(3)}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{D}\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \gamma_2\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{D}\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)}, \quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1,$$

где $\gamma_1^{(3)} = C_{14}d^{1/2}$ и $\gamma_2 = (C_{15}+C_{16})d^{1/2}$. Вместе с (5.8), (5.11), (5.15) и (5.18) это влечет искомую оценку (5.7) с постоянной $\gamma_1 = \gamma_1^{(1)}+\gamma_1^{(2)}+\gamma_1^{(3)}$. □

Лемма 5.2. *Пусть* $\operatorname{Re}\zeta\leqslant 0$ *и* $|\zeta|\geqslant 1$. *Пусть число* ε_1 *выбрано согласно условию* 3.1. *При* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *функционал* (5.3) *подчинен оценке*

$$\Big|\mathcal{I}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}]\Big| \leqslant \gamma_3\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{D}\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \gamma_4\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{D}\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)}. \tag{5.23}$$

Постоянные γ_3 *и* γ_4 *зависят лишь от данных задачи* (2.35).

Доказательство. Учитывая (3.11) и (3.12), представим функционал (5.3) в виде

$$\mathcal{I}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}] = \mathcal{T}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\eta}] + \mathcal{T}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}] + \mathcal{T}_\varepsilon^{(3)}[\boldsymbol{\eta}], \tag{5.24}$$

где

$$\mathcal{T}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\eta}] := \varepsilon\sum_{l=1}^d\big((a_l^\varepsilon)^*(\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0), D_l\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.25}$$

$$\mathcal{T}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}] := \sum_{l=1}^d\big((a_l^\varepsilon - \overline{a_l})^*(I-S_\varepsilon)\widetilde{\mathbf{u}}_0, D_l\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})} + \big(V(I-S_\varepsilon)\widetilde{\mathbf{u}}_0, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.26}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_\varepsilon^{(3)}[\boldsymbol{\eta}] :=& \big(g^\varepsilon(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda})^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})}\\ &+ \sum_{l=1}^d\big((a_l^\varepsilon - \overline{a_l})^* S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0, D_l\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})} + \big(VS_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{5.27}$$

Начнем с оценки члена (5.25). В силу неравенства Гёльдера и непрерывности вложения $H^1(\Omega)\hookrightarrow L_q(\Omega)$ (с константой вложения $C(q;\Omega)$) имеем

$$\begin{aligned}\|a_l^*\Lambda\|_{L_2(\Omega)} &\leqslant C(q;\Omega)\|a_l\|_{L_\rho(\Omega)}\|\Lambda\|_{H^1(\Omega)}\\ &\leqslant C(q;\Omega)\|a_l\|_{L_\rho(\Omega)}(M_1+M_2)|\Omega|^{1/2} =: C_{17,l}|\Omega|^{1/2}.\end{aligned} \tag{5.28}$$

Мы использовали оценки (1.24) и (1.25). Аналогично, с учетом (1.32) и (1.33) получаем

$$\|a_l^*\widetilde{\Lambda}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C(q;\Omega)\|a_l\|_{L_\rho(\Omega)}(\widetilde{M}_1+\widetilde{M}_2)|\Omega|^{1/2} =: C_{18,l}|\Omega|^{1/2}. \tag{5.29}$$

Функционал (5.25) оценивается с помощью предложения 1.2 и неравенств (5.28), (5.29):

$$\Big|\mathcal{T}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\eta}]\Big| \leqslant \varepsilon\sum_{l=1}^d\big(C_{17,l}\|b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C_{18,l}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\big)\|D_l\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Отсюда и из (1.5), (3.18), (3.19) с учетом ограничения $|\zeta|\geqslant 1$ вытекает оценка

$$\Big|\mathcal{T}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\eta}]\Big| \leqslant \gamma_3^{(1)}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{D}\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.30}$$

где $\gamma_3^{(1)} = \Big(\sum_{l=1}^d \big(C_{17,l} C_8 \alpha_1^{1/2} + C_{18,l} C_7\big)^2\Big)^{1/2}$.

Рассмотрим теперь член (5.26). Аналогично (3.31),

$$\begin{aligned} &\Big(\sum_{l=1}^d \big\|(a_l^\varepsilon - \overline{a_l})^* (I - S_\varepsilon)\widetilde{\mathbf{u}}_0\big\|^2_{L_2(\mathcal{O})}\Big)^{1/2} \leqslant 2C_{11} \big\|(I-S_\varepsilon)\widetilde{\mathbf{u}}_0\big\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant 2C_{11} r_1 \varepsilon \big\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\big\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2C_9 C_{11} r_1 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Мы применили предложение 1.1 и (3.20). Далее, из предложения 1.1 и оценок (1.36), (3.19) с учетом ограничения $|\zeta| \geqslant 1$ следует, что

$$\big\|V(I-S_\varepsilon)\widetilde{\mathbf{u}}_0\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_V r_1 \varepsilon \big\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\big\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_8 C_V r_1 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.32}$$

Соотношения (1.3), (1.6), (5.26), (5.31) и (5.32) влекут оценку

$$\Big|\mathcal{T}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}]\Big| \leqslant \gamma_3^{(2)} \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{D}\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.33}$$

где $\gamma_3^{(2)} = 2C_9 C_{11} r_1 + C_8 C_V r_1 (d\alpha_1)^{1/2}$.

Учитывая (1.3), представим функционал (5.27) в виде

$$\mathcal{T}_\varepsilon^{(3)}[\boldsymbol{\eta}] = \sum_{l=1}^d \big(\check{f}_l^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_0, D_l \boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.34}$$

где

$$\check{f}_l(\mathbf{x}) := b_l^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) + a_l^*(\mathbf{x}) - \overline{a_l^*} + b_l^* V, \quad l = 1, \dots, d. \tag{5.35}$$

Очевидно, $\check{f}_l(\mathbf{x})$ — Γ-периодические $(n \times n)$-матрицы-функции, причем $\check{f}_l \in L_2(\Omega)$ и в силу уравнения (1.30) выполнено $\sum_{l=1}^d D_l \check{f}_l(\mathbf{x}) = 0$. Заметим, что из (1.20) и (1.34) вытекает представление $V = -\overline{g(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda})}$. Поэтому $\int_\Omega \check{f}_l(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0$, $l = 1, \dots, d$. Таким образом, выполнены условия леммы 4.3, в силу которой существуют Γ-периодические $(n \times n)$-матрицы-функции $\check{M}_{lj}(\mathbf{x})$, $l, j = 1, \dots, d$, удовлетворяющие соотношениям $\check{M}_{lj} \in \widetilde{H}^1(\Omega)$, $\int_\Omega \check{M}_{lj}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0$,

$$\begin{aligned} &\check{M}_{lj}(\mathbf{x}) = -\check{M}_{jl}(\mathbf{x}),\ l,j = 1, \dots, d; \quad \check{f}_l(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^d \partial_j \check{M}_{lj}(\mathbf{x}),\ l = 1, \dots, d. \\ &\|\check{M}_{lj}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant (2r_0)^{-1} (\|\check{f}_l\|_{L_2(\Omega)} + \|\check{f}_j\|_{L_2(\Omega)}). \end{aligned} \tag{5.36}$$

Следовательно, $\check{f}_l^\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon \sum_{j=1}^d \partial_j \check{M}_{lj}^\varepsilon(\mathbf{x})$, $l = 1, \dots, d$. Отсюда и из (5.34) вытекает представление

$$\mathcal{T}_\varepsilon^{(3)}[\boldsymbol{\eta}] = \widetilde{\mathcal{T}}_\varepsilon^{(3)}[\boldsymbol{\eta}] + \widehat{\mathcal{T}}_\varepsilon^{(3)}[\boldsymbol{\eta}], \tag{5.37}$$

$$\widetilde{\mathcal{T}}_\varepsilon^{(3)}[\boldsymbol{\eta}] := \varepsilon \sum_{j,l=1}^d \big(\partial_j (\check{M}_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_0), D_l \boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.38}$$

$$\widehat{\mathcal{T}}_\varepsilon^{(3)}[\boldsymbol{\eta}] := -\,\varepsilon \sum_{j,l=1}^d \big(\check{M}_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon \partial_j \widetilde{\mathbf{u}}_0, D_l \boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.39}$$

В силу (1.6), (1.31) и (5.35) выполнена оценка

$$\|\check{f}_l\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|g^{1/2} b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\|_{L_2(\Omega)} + \|a_l\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_{19,l}, \quad l = 1, \dots, d, \tag{5.40}$$

где $C_{19,l} = \alpha_0^{-1/2} \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2} C_a + \|a_l\|_{L_2(\Omega)}$. Отсюда и из (5.36) видно, что

$$\|\check{M}_{lj}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant (2r_0)^{-1} (C_{19,l} + C_{19,j}), \quad l, j = 1, \dots, d, \tag{5.41}$$

Член (5.39) оценивается на основании предложения 1.2 и (3.19), (5.41) с учетом ограничения $|\zeta| \geqslant 1$:

$$\left|\widehat{\mathcal{T}}_\varepsilon^{(3)}[\boldsymbol{\eta}]\right| \leqslant \gamma_3^{(3)}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{D}\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.42}$$

где $\gamma_3^{(3)} = d^{1/2}r_0^{-1}|\Omega|^{-1/2}C_8\bigl(\sum_{l=1}^d C_{19,l}^2\bigr)^{1/2}$.

Остается рассмотреть член (5.38). Пусть $\theta_\varepsilon(\mathbf{x})$ — срезка в $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющая условиям (4.4). Справедливо тождество

$$\sum_{j,l=1}^d \bigl(\partial_j((1-\theta_\varepsilon)\check{M}_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0), D_l\boldsymbol{\eta}\bigr)_{L_2(\mathcal{O})} = 0, \quad \boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n),$$

что проверяется интегрированием по частям при учете равенства $\check{M}_{lj} = -\check{M}_{jl}$ (при проверке сначала считаем, что $\boldsymbol{\eta} \in H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, а затем замыкаем результат по непрерывности). Следовательно,

$$\widetilde{\mathcal{T}}_\varepsilon^{(3)}[\boldsymbol{\eta}] = \varepsilon\sum_{j,l=1}^d \bigl(\partial_j(\theta_\varepsilon\check{M}_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0), D_l\boldsymbol{\eta}\bigr)_{L_2(\mathcal{O})} = \sum_{l=1}^d \bigl(\check{\boldsymbol{\psi}}_l(\varepsilon), D_l\boldsymbol{\eta}\bigr)_{L_2(\mathcal{O})},$$

где $\check{\boldsymbol{\psi}}_l(\varepsilon) := \varepsilon\sum_{j=1}^d \partial_j(\theta_\varepsilon\check{M}_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0)$, $l = 1,\dots,d$. Имеем:

$$\check{\boldsymbol{\psi}}_l(\varepsilon) = \varepsilon\theta_\varepsilon\sum_{j=1}^d \check{M}_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon\partial_j\widetilde{\mathbf{u}}_0 + \varepsilon\sum_{j=1}^d(\partial_j\theta_\varepsilon)\check{M}_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0 + \theta_\varepsilon\check{f}_l^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0.$$

Обозначим последовательные слагаемые справа через $\check{\boldsymbol{\psi}}_l^{(1)}(\varepsilon)$, $\check{\boldsymbol{\psi}}_l^{(2)}(\varepsilon)$, $\check{\boldsymbol{\psi}}_l^{(3)}(\varepsilon)$. Тогда с учетом (4.4)

$$\begin{aligned}\bigl|\widetilde{\mathcal{T}}_\varepsilon^{(3)}[\boldsymbol{\eta}]\bigr| &\leqslant \sum_{l=1}^d \bigl\|\check{\boldsymbol{\psi}}_l^{(1)}(\varepsilon)\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\|D_l\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &+ \sum_{l=1}^d\Bigl(\bigl\|\check{\boldsymbol{\psi}}_l^{(2)}(\varepsilon)\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \bigl\|\check{\boldsymbol{\psi}}_l^{(3)}(\varepsilon)\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\Bigr)\|D_l\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)}.\end{aligned} \tag{5.43}$$

Для оценки $\check{\boldsymbol{\psi}}_l^{(1)}(\varepsilon)$ применим предложение 1.2 и (3.19), (5.41) и учтем ограничение $|\zeta| \geqslant 1$:

$$\bigl\|\check{\boldsymbol{\psi}}_l^{(1)}(\varepsilon)\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon\sum_{j=1}^d \|\check{M}_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon\partial_j\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{20,l}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad l = 1,\dots,d, \tag{5.44}$$

где $C_{20,l} = C_8(2r_0)^{-1}|\Omega|^{-1/2}\bigl(\sum_{j=1}^d(C_{19,l}+C_{19,j})^2\bigr)^{1/2}$. В силу (4.4) и леммы 4.2 при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ имеем

$$\begin{aligned}\bigl\|\check{\boldsymbol{\psi}}_l^{(2)}(\varepsilon)\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \kappa\left(\sum_{j=1}^d \|\check{M}_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2((\partial\mathcal{O})_\varepsilon)}^2\right)^{1/2} \\ &\leqslant \varepsilon^{1/2}\kappa\beta_*^{1/2}|\Omega|^{-1/2}\left(\sum_{j=1}^d \|\check{M}_{lj}\|_{L_2(\Omega)}^2\right)^{1/2}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^{1/2}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{1/2}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1,\ l = 1,\dots,d.\end{aligned}$$

С учетом (3.18), (3.19), (5.41) и ограничения $|\zeta| \geqslant 1$ отсюда получаем

$$\bigl\|\check{\boldsymbol{\psi}}_l^{(2)}(\varepsilon)\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{21,l}\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad l = 1,\dots,d, \tag{5.45}$$

где $C_{21,l} = \kappa\beta_*^{1/2}(2r_0)^{-1}|\Omega|^{-1/2}(C_7C_8)^{1/2}\big(\sum_{j=1}^d (C_{19,l}+C_{19,j})^2\big)^{1/2}$. Аналогично, применяя (4.4) и лемму 4.2, а затем (3.18), (3.19) и (5.40), приходим к оценке

$$\begin{aligned}\big\|\check{\boldsymbol{\psi}}_l^{(3)}(\varepsilon)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \|\check{f}_l^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2((\partial\mathcal{O})_\varepsilon)} \leqslant \varepsilon^{1/2}\beta_*^{1/2}|\Omega|^{-1/2}\|\check{f}_l\|_{L_2(\Omega)}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^{1/2}_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant C_{22,l}\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1,\ l=1,\dots,d,\end{aligned} \tag{5.46}$$

где $C_{22,l} = \beta_*^{1/2}|\Omega|^{-1/2}(C_7C_8)^{1/2}C_{19,l}$.

Соотношения (5.43)–(5.46) влекут оценку

$$\big|\widetilde{\mathcal{T}}_\varepsilon^{(3)}[\boldsymbol{\eta}]\big| \leqslant \gamma_3^{(4)}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{D}\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \gamma_4\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{D}\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)}, \quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1, \tag{5.47}$$

где $\gamma_3^{(4)} = \big(\sum_{l=1}^d C_{20,l}^2\big)^{1/2}$ и $\gamma_4 = \big(\sum_{l=1}^d (C_{21,l}+C_{22,l})^2\big)^{1/2}$.

В итоге, из (5.24), (5.30), (5.33), (5.37), (5.42) и (5.47) вытекает искомая оценка (5.23) с постоянной $\gamma_3 = \gamma_3^{(1)}+\gamma_3^{(2)}+\gamma_3^{(3)}+\gamma_3^{(4)}$. $\square$

Лемма 5.3. *Пусть* $\operatorname{Re}\zeta\leqslant 0$ *и* $|\zeta|\geqslant 1$. *Пусть число* ε_1 *выбрано согласно условию* 3.1. *При* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *функционал* (5.4) *подчинен оценке*

$$\Big|\mathcal{I}_\varepsilon^{(3)}[\boldsymbol{\eta}]\Big| \leqslant \gamma_5\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})} + \gamma_6\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\left(\sum_{l=1}^d \|(a_l^\varepsilon)^*\boldsymbol{\eta}\|^2_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)}\right)^{1/2}. \tag{5.48}$$

Постоянные γ_5 *и* γ_6 *зависят лишь от данных задачи* (2.35).

Доказательство. В силу (3.11), (3.12) функционал (5.4) можно представить в виде

$$\mathcal{I}_\varepsilon^{(3)}[\boldsymbol{\eta}] = \sum_{k=1}^5 \mathcal{J}_\varepsilon^{(k)}[\boldsymbol{\eta}], \tag{5.49}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\eta}] := &\sum_{l=1}^d \big((I-S_\varepsilon)D_l\widetilde{\mathbf{u}}_0, (a_l^\varepsilon-\overline{a_l})^*\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})} \\ &+ \big(V^*(I-S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0,\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})} + \big(W(I-S_\varepsilon)\widetilde{\mathbf{u}}_0,\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})},\end{aligned} \tag{5.50}$$

$$\mathcal{J}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}] := \varepsilon\sum_{l=1}^d \big(a_l^\varepsilon(\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})D_l\widetilde{\mathbf{u}}_0 + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon D_l\widetilde{\mathbf{u}}_0),\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.51}$$

$$\mathcal{J}_\varepsilon^{(3)}[\boldsymbol{\eta}] := \sum_{l=1}^d \big((a_l^\varepsilon-\overline{a_l})S_\varepsilon D_l\widetilde{\mathbf{u}}_0,\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.52}$$

$$\mathcal{J}_\varepsilon^{(4)}[\boldsymbol{\eta}] := \sum_{l=1}^d \big(a_l^\varepsilon(D_l\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0,\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})} + \big(V^*S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0,\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.53}$$

$$\mathcal{J}_\varepsilon^{(5)}[\boldsymbol{\eta}] := \sum_{l=1}^d \big(a_l^\varepsilon(D_l\widetilde{\Lambda})^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0,\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})} + \big(WS_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0,\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.54}$$

Аналогично (3.31),

$$\left(\sum_{l=1}^d \big\|(a_l^\varepsilon-\overline{a_l})^*\boldsymbol{\eta}\big\|^2_{L_2(\mathcal{O})}\right)^{1/2} \leqslant 2C_{11}\|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})}. \tag{5.55}$$

В силу предложения 1.1 и (1.5), (3.19), (3.20) с учетом $|\zeta|\geqslant 1$ справедливы оценки

$$\|(I-S_\varepsilon)\mathbf{D}\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant r_1\varepsilon\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_9r_1\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.56}$$

$$\|(I-S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant r_1\varepsilon\|b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_9r_1\alpha_1^{1/2}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.57}$$

$$\|(I-S_\varepsilon)\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant r_1\varepsilon\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_8r_1\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.58}$$

Комбинируя (1.36) и (5.55)–(5.58), получаем следующую оценку функционала (5.50):

$$\big|\mathcal{J}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\eta}]\big| \leqslant \gamma_5^{(1)}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})}, \tag{5.59}$$

где $\gamma_5^{(1)} = r_1(2C_9C_{11} + C_V C_9\alpha_1^{1/2} + C_W C_8)$.

Рассмотрим теперь член (5.51). Аналогично (5.28), (5.29) имеем

$$\|a_l\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_{17,l}|\Omega|^{1/2}, \tag{5.60}$$

$$\|a_l\widetilde{\Lambda}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_{18,l}|\Omega|^{1/2}. \tag{5.61}$$

В силу предложения 1.2 и (1.5), (3.19), (3.20), (5.60), (5.61) с учетом $|\zeta| \geqslant 1$

$$\big|\mathcal{J}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}]\big| \leqslant \gamma_5^{(2)}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.62}$$

где $\gamma_5^{(2)} = \alpha_1^{1/2}C_9\big(\sum_{l=1}^d C_{17,l}^2\big)^{1/2} + C_8\big(\sum_{l=1}^d C_{18,l}^2\big)^{1/2}$.

Для оценки функционала (5.52) применим лемму 4.4(2°) при $a(\mathbf{x}) = 1$, $p(\mathbf{x}) = a_l(\mathbf{x})$. Напомним обозначение $C_a = \big(\sum_{l=1}^d \|a_l\|^2_{L_2(\Omega)}\big)^{1/2}$. Получаем

$$\big|\mathcal{J}_\varepsilon^{(3)}[\boldsymbol{\eta}]\big| \leqslant 2C'''C_a\varepsilon\|\mathbf{D}\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1.$$

С учетом (3.20) отсюда выводим

$$\big|\mathcal{J}_\varepsilon^{(3)}[\boldsymbol{\eta}]\big| \leqslant \gamma_5^{(3)}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})}, \tag{5.63}$$

где $\gamma_5^{(3)} = 2C'''C_aC_9$.

Перейдем к рассмотрению члена (5.53). Из (1.30) и (1.34) вытекает представление $V^* = -\sum_{l=1}^d \overline{a_l(D_l\Lambda)}$. Поэтому член (5.53) можно записать в виде

$$\mathcal{J}_\varepsilon^{(4)}[\boldsymbol{\eta}] = \sum_{l=1}^d \Big(\big(a_l^\varepsilon(D_l\Lambda)^\varepsilon - \overline{a_l(D_l\Lambda)}\,\big)S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0, \boldsymbol{\eta}\Big)_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Применим лемму 4.4(1°) при $a(\mathbf{x}) = a_l(\mathbf{x})$, $p(\mathbf{x}) = D_l\Lambda(\mathbf{x})$. Обозначим $\widetilde{C}_a^2 := \sum_{l=1}^d \|a_l\|^2_{L_\rho(\Omega)}$. Тогда

$$\begin{aligned}\big|\mathcal{J}_\varepsilon^{(4)}[\boldsymbol{\eta}]\big| &\leqslant 2C'\widetilde{C}_a\varepsilon\|\mathbf{D}\Lambda\|_{L_2(\Omega)}\|b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})}\\ &+ C''\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{D}\Lambda\|_{L_2(\Omega)}\|b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^{1/2}_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}^d)}\Big(\sum_{l=1}^d \|(a_l^\varepsilon)^*\boldsymbol{\eta}\|^2_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)}\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

Отсюда и из (1.5), (1.25), (3.19), (3.20) вытекает, что

$$\begin{aligned}\big|\mathcal{J}_\varepsilon^{(4)}[\boldsymbol{\eta}]\big| &\leqslant \gamma_5^{(4)}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})}\\ &+ \gamma_6^{(1)}\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\Big(\sum_{l=1}^d \|(a_l^\varepsilon)^*\boldsymbol{\eta}\|^2_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)}\Big)^{1/2}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1,\end{aligned} \tag{5.64}$$

где $\gamma_5^{(4)} = 2C'\widetilde{C}_a|\Omega|^{1/2}M_2\alpha_1^{1/2}C_9$, $\gamma_6^{(1)} = C''|\Omega|^{1/2}M_2\alpha_1^{1/2}(C_8C_9)^{1/2}$.

Остается рассмотреть член (5.54). Из (1.30) и (1.35) вытекает представление $W = -\sum_{l=1}^d \overline{a_l(D_l\widetilde{\Lambda})}$. Поэтому член (5.54) можно записать в виде

$$\mathcal{J}_\varepsilon^{(5)}[\boldsymbol{\eta}] = \sum_{l=1}^d \big((a_l^\varepsilon(D_l\widetilde{\Lambda})^\varepsilon - \overline{a_l(D_l\widetilde{\Lambda})})S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0, \boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Применим лемму 4.4(1°) при $a(\mathbf{x}) = a_l(\mathbf{x})$, $p(\mathbf{x}) = D_l\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$. Тогда

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{J}_\varepsilon^{(5)}[\boldsymbol{\eta}]\right| &\leqslant 2C'\widetilde{C}_a\varepsilon\|\mathbf{D}\widetilde{\Lambda}\|_{L_2(\Omega)}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})}\\ &+ C''\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{D}\widetilde{\Lambda}\|_{L_2(\Omega)}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^{1/2}_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}^d)}\left(\sum_{l=1}^d\|(a_l^\varepsilon)^*\boldsymbol{\eta}\|^2_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)}\right)^{1/2}, \quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1.\end{aligned}$$

Вместе с (1.33), (3.18), (3.19) и ограничением $|\zeta|\geqslant 1$ это влечет

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{J}_\varepsilon^{(5)}[\boldsymbol{\eta}]\right| &\leqslant \gamma_5^{(5)}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})}\\ &+ \gamma_6^{(2)}\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\left(\sum_{l=1}^d\|(a_l^\varepsilon)^*\boldsymbol{\eta}\|^2_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)}\right)^{1/2}, \quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1,\end{aligned}\tag{5.65}$$

где $\gamma_5^{(5)} = 2|\Omega|^{1/2}C'\widetilde{C}_a\widetilde{M}_2C_8$, $\gamma_6^{(2)} = |\Omega|^{1/2}C''\widetilde{M}_2(C_7C_8)^{1/2}$.

В итоге, сопоставляя (5.49), (5.59), (5.62)–(5.65), приходим к искомой оценке (5.48) с постоянными $\gamma_5 = \gamma_5^{(1)}+\gamma_5^{(2)}+\gamma_5^{(3)}+\gamma_5^{(4)}+\gamma_5^{(5)}$, $\gamma_6 = \gamma_6^{(1)}+\gamma_6^{(2)}$. □

Лемма 5.4. *Пусть* $\operatorname{Re}\zeta\leqslant 0$ *и* $|\zeta|\geqslant 1$. *Пусть число* ε_1 *выбрано согласно условию* 3.1. *При* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *функционал* (5.5) *подчинен оценке*

$$\left|\mathcal{I}_\varepsilon^{(4)}[\boldsymbol{\eta}]\right| \leqslant \gamma_7\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})} + \gamma_8\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\||Q^\varepsilon|^{1/2}\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)}.\tag{5.66}$$

Постоянные γ_7, γ_8 *зависят лишь от данных задачи* (2.35).

Доказательство. В силу (3.11), (3.12) функционал (5.5) можно представить в виде

$$\mathcal{I}_\varepsilon^{(4)}[\boldsymbol{\eta}] = \Sigma_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\eta}] + \Sigma_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}] + \Sigma_\varepsilon^{(3)}[\boldsymbol{\eta}],\tag{5.67}$$

$$\Sigma_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\eta}] := \big((Q^\varepsilon-\overline{Q})(I-S_\varepsilon)\widetilde{\mathbf{u}}_0,\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})},\tag{5.68}$$

$$\Sigma_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}] := \varepsilon\big(Q^\varepsilon(\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0),\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})},\tag{5.69}$$

$$\Sigma_\varepsilon^{(3)}[\boldsymbol{\eta}] := \big((Q^\varepsilon-\overline{Q})S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0,\boldsymbol{\eta}\big)_{L_2(\mathcal{O})}.\tag{5.70}$$

Аналогично (3.32),

$$\big\||Q^\varepsilon-\overline{Q}|^{1/2}\boldsymbol{\eta}\big\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant 2C_{12}\|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\eta}\in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n).\tag{5.71}$$

Член (5.68) оценим с помощью предложения 1.1 и (3.20), (5.71):

$$\begin{aligned}\left|\Sigma_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\eta}]\right| &\leqslant \||Q^\varepsilon-\overline{Q}|^{1/2}(I-S_\varepsilon)\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}\||Q^\varepsilon-\overline{Q}|^{1/2}\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})}\\ &\leqslant 4C_{12}^2\|(I-S_\varepsilon)\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \gamma_7^{(1)}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})},\end{aligned}\tag{5.72}$$

где $\gamma_7^{(1)} = 4C_9C_{12}^2r_1$.

Рассмотрим теперь член (5.69). В силу неравенства Гёльдера и теоремы вложения с учетом (1.24), (1.25), (1.32) и (1.33) имеем

$$\begin{aligned}\||Q|^{1/2}\Lambda\|_{L_2(\Omega)} &\leqslant C(\check{q};\Omega)\|Q\|^{1/2}_{L_s(\Omega)}\|\Lambda\|_{H^1(\Omega)}\\ &\leqslant C(\check{q};\Omega)\|Q\|^{1/2}_{L_s(\Omega)}(M_1+M_2)|\Omega|^{1/2} =: C_{23}|\Omega|^{1/2},\end{aligned}\tag{5.73}$$

$$\begin{aligned}\||Q|^{1/2}\widetilde{\Lambda}\|_{L_2(\Omega)} &\leqslant C(\check{q};\Omega)\|Q\|^{1/2}_{L_s(\Omega)}\|\widetilde{\Lambda}\|_{H^1(\Omega)}\\ &\leqslant C(\check{q};\Omega)\|Q\|^{1/2}_{L_s(\Omega)}(\widetilde{M}_1+\widetilde{M}_2)|\Omega|^{1/2} =: C_{24}|\Omega|^{1/2}.\end{aligned}\tag{5.74}$$

Используя предложение 1.2 и (1.5), (3.18), (3.19), (3.32), (5.73), (5.74), с учетом $|\zeta| \geqslant 1$ получаем

$$\begin{aligned} \left|\Sigma_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}]\right| &\leqslant \varepsilon\big(\||Q^\varepsilon|^{1/2}(\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_0)\|_{L_2(\mathcal{O})}\||Q^\varepsilon|^{1/2}\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \varepsilon\big(C_{23}\|b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C_{24}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\big)C_{12}\|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \gamma_7^{(2)}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})}, \end{aligned} \tag{5.75}$$

где $\gamma_7^{(2)} = (C_8 C_{23}\alpha_1^{1/2} + C_7 C_{24})C_{12}$.

Наконец, для оценки члена (5.70) применим лемму 4.4(1°) при $a(\mathbf{x}) = |Q(\mathbf{x})|^{1/2}$, $p(\mathbf{x}) = |Q(\mathbf{x})|^{1/2}V(\mathbf{x})$ (подразумевается, что $Q(\mathbf{x}) = |Q(\mathbf{x})|V(\mathbf{x})$ — полярное разложение матрицы $Q(\mathbf{x})$) и $\rho = 2s$. Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ выполнена оценка

$$\begin{aligned} \left|\Sigma_\varepsilon^{(3)}[\boldsymbol{\eta}]\right| \leqslant\; & 2C'\varepsilon\|Q\|^{1/2}_{L_s(\Omega)}\|Q\|^{1/2}_{L_1(\Omega)}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})} \\ &+ C''\varepsilon^{1/2}\|Q\|^{1/2}_{L_1(\Omega)}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^{1/2}_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}^d)}\||Q^\varepsilon|^{1/2}\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Вместе с (3.18), (3.19) с учетом ограничения $|\zeta| \geqslant 1$ это приводит к оценке

$$\left|\Sigma_\varepsilon^{(3)}[\boldsymbol{\eta}]\right| \leqslant \gamma_7^{(3)}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})} + \gamma_8\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\||Q^\varepsilon|^{1/2}\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)} \tag{5.76}$$

при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$, где $\gamma_7^{(3)} = 2C'C_8\|Q\|^{1/2}_{L_s(\Omega)}\|Q\|^{1/2}_{L_1(\Omega)}$, $\gamma_8 = C''(C_7C_8)^{1/2}\|Q\|^{1/2}_{L_1(\Omega)}$.

В итоге, сопоставляя (5.67), (5.72), (5.75) и (5.76), приходим к искомой оценке (5.66) с постоянной $\gamma_7 = \gamma_7^{(1)} + \gamma_7^{(2)} + \gamma_7^{(3)}$. $\square$

Лемма 5.5. *Пусть* $\operatorname{Re}\zeta \leqslant 0$ *и* $|\zeta| \geqslant 1$. *Пусть число* ε_1 *выбрано согласно условию* 3.1. *При* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *функционал* (5.6) *подчинен оценке*

$$\left|\mathcal{I}_\varepsilon^{(5)}[\boldsymbol{\eta}]\right| \leqslant \gamma_9\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})} + \gamma_{10}\varepsilon|\zeta|^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.77}$$

Постоянные γ_9, γ_{10} *зависят лишь от данных задачи* (2.35).

Доказательство. В силу леммы 4.4(3°) при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ справедлива оценка

$$\left|\mathcal{I}_\varepsilon^{(5)}[\boldsymbol{\eta}]\right| \leqslant |\lambda - \zeta|\widetilde{C}'''\|Q_0\|_{L_\infty}\varepsilon\big(\|\mathbf{u}_0\|_{H^1(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})}\big).$$

Вместе с оценками (2.40) и (2.41) это влечет искомое неравенство (5.77) с постоянными $\gamma_9 = \lambda\widetilde{C}'''\|Q_0\|_{L_\infty}(\mathcal{C}_1 + \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}) + \widetilde{C}'''\|Q_0\|_{L_\infty}\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}$, $\gamma_{10} = \widetilde{C}'''\|Q_0\|_{L_\infty}\mathcal{C}_1$. $\square$

Подведем итоги. Из (5.1), (5.7), (5.23), (5.48), (5.66) и (5.77) вытекает, что при $\operatorname{Re}\zeta \leqslant 0$, $|\zeta| \geqslant 1$, и $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ выполнена оценка

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}]| &\leqslant \gamma_0'\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})} + \gamma_{10}\varepsilon|\zeta|^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &+ \gamma_0''\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\left(\|\mathbf{D}\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)} + \left(\sum_{l=1}^d \|(a_l^\varepsilon)^*\boldsymbol{\eta}\|^2_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)}\right)^{1/2} + \||Q^\varepsilon|^{1/2}\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)}\right), \end{aligned} \tag{5.78}$$

с постоянными $\gamma_0' = \gamma_1 + \gamma_3 + \gamma_5 + \gamma_7 + \gamma_9$, $\gamma_0'' = \max\{\gamma_2 + \gamma_4, \gamma_6, \gamma_8\}$. Оценка (5.78) понадобится нам в следующем параграфе для доказательства теоремы 3.2. А для доказательства оценки (3.14) достаточно более грубой оценки

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}]| \leqslant\; & \gamma_0\big(\varepsilon + \varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}\big)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})} \\ &+ \gamma_{10}\varepsilon|\zeta|^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \end{aligned} \tag{5.79}$$

Оценка (5.79) вытекает из (5.78), очевидных оценок $\|\mathbf{D}\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)} \leqslant \|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})}$, $\|(a_l^\varepsilon)^*\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)} \leqslant \|(a_l^\varepsilon)^*\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})}$, $\||Q^\varepsilon|^{1/2}\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)} \leqslant \||Q^\varepsilon|^{1/2}\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})}$ и (3.31), (3.32). Постоянная $\gamma_0 = \max\{\gamma_0', \gamma_0''(1 + C_{11} + C_{12})\}$ зависит лишь от данных задачи (2.35).

5.2. **Завершение доказательства оценки** (3.14) **при** $\operatorname{Re}\zeta \leqslant 0$.

Лемма 5.6. *Пусть* $\operatorname{Re}\zeta \leqslant 0$ *и* $|\zeta| \geqslant 1$. *Пусть* $\mathbf{w}_\varepsilon \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *удовлетворяет тождеству* (3.29). *Пусть число* ε_1 *выбрано согласно условию* 3.1. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *выполнена оценка*

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_{10}\left(\varepsilon + \varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.80}$$

Постоянная $\mathcal{C}_{10}$ *зависит лишь от данных задачи* (2.35).

Доказательство. В тождество (3.29) подставим $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{w}_\varepsilon$ и возьмем мнимую часть от полученного неравенства. С учетом (5.79) при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ получаем

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im}\zeta|(Q_0^\varepsilon \mathbf{w}_\varepsilon, \mathbf{w}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \gamma_0 &\left(\varepsilon + \varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \\ &+ \gamma_{10}\varepsilon|\zeta|^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \tag{5.81}$$

Теперь возьмем вещественную часть от полученного равенства и, учитывая ограничение $\operatorname{Re}\zeta \leqslant 0$, при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ получаем

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re}\zeta|(Q_0^\varepsilon \mathbf{w}_\varepsilon, \mathbf{w}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \gamma_0 &\left(\varepsilon + \varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \\ &+ \gamma_{10}\varepsilon|\zeta|^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \tag{5.82}$$

Сложим (5.81) и (5.82):

$$\begin{aligned} |\zeta|(Q_0^\varepsilon \mathbf{w}_\varepsilon, \mathbf{w}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant 2\gamma_0 &\left(\varepsilon + \varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \\ &+2\gamma_{10}\varepsilon|\zeta|^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

Отсюда выводим оценку

$$\begin{aligned} (Q_0^\varepsilon \mathbf{w}_\varepsilon, \mathbf{w}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant 4\gamma_0|\zeta|^{-1} &\left(\varepsilon + \varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \\ &+ 4\gamma_{10}^2\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}|\zeta|^{-1}\varepsilon^2\|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \end{aligned} \tag{5.83}$$

С учетом $\operatorname{Re}\zeta \leqslant 0$ из (3.29) с $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{w}_\varepsilon$, (5.79) и (5.83) вытекает, что

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\mathbf{w}_\varepsilon, \mathbf{w}_\varepsilon] \leqslant 2\gamma_0 &\left(\varepsilon + \varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \\ &+2\gamma_{10}^2\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}\varepsilon^2\|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \end{aligned} \tag{5.84}$$

Вместе с (2.17) это влечет искомую оценку (5.80) при $\mathcal{C}_{10}^2 = 4\gamma_0^2 c_4^{-2} + 4\gamma_{10}^2\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}c_4^{-1}$. $\square$

Завершение доказательства оценки (3.14) **при** $\operatorname{Re}\zeta \leqslant 0$. Неравенства (3.42) и (5.80) приводят к оценке вида (3.13) в случае $\operatorname{Re}\zeta \leqslant 0$, $|\zeta| \geqslant 1$:

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \left(\mathcal{C}_{10}\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + (\mathcal{C}_8 + \mathcal{C}_{10})\varepsilon\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1.$$

В операторных терминах установлено неравенство

$$\begin{aligned} &\left\|(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_N(\varepsilon;\zeta)\right\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \mathcal{C}_{10}\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + (\mathcal{C}_8 + \mathcal{C}_{10})\varepsilon, \quad \operatorname{Re}\zeta \leqslant 0,\ |\zeta| \geqslant 1;\ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \end{aligned} \tag{5.85}$$

§ 6. Оценка поправки $\mathbf{w}_\varepsilon$ в $L_2(\mathcal{O})$. Доказательство теоремы 3.2 при $\operatorname{Re}\zeta \leqslant 0$

6.1. **Оценка поправки $\mathbf{w}_\varepsilon$ в $L_2(\mathcal{O})$.**

Лемма 6.1. *Пусть* $\operatorname{Re}\zeta \leqslant 0$ *и* $|\zeta| \geqslant 1$. *Пусть* $\mathbf{w}_\varepsilon \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *удовлетворяет тождеству* (3.29). *Пусть число* ε_1 *выбрано согласно условию* 3.1. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *выполнена оценка*

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_{11}\left(\varepsilon|\zeta|^{-1/2} + \varepsilon^2\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{6.1}$$

Постоянная $\mathcal{C}_{11}$ *зависит лишь от данных задачи* (2.35).

Доказательство. Рассмотрим тождество (3.29) и в качестве пробной функции $\boldsymbol{\eta}$ подставим $\boldsymbol{\eta}_\varepsilon = (B_{N,\varepsilon} - \zeta^* Q_0^\varepsilon)^{-1}\mathbf{\Phi}$, где $\mathbf{\Phi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Тогда левая часть (3.29) совпадает с $(\mathbf{w}_\varepsilon, \mathbf{\Phi})_{L_2(\mathcal{O})}$ и тождество приобретает вид

$$(\mathbf{w}_\varepsilon, \mathbf{\Phi})_{L_2(\mathcal{O})} = \mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}_\varepsilon]. \tag{6.2}$$

Для аппроксимации функции $\boldsymbol{\eta}_\varepsilon$ применим уже доказанное неравенство (5.85). Положим $\boldsymbol{\eta}_0 = (B_N^0 - \zeta^*\overline{Q_0})^{-1}\mathbf{\Phi}$, $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 = P_\mathcal{O}\boldsymbol{\eta}_0$. Приближением функции $\boldsymbol{\eta}_\varepsilon$ служит функция $\boldsymbol{\rho}_\varepsilon := \boldsymbol{\eta}_0 + \boldsymbol{\upsilon}_\varepsilon$, где $\boldsymbol{\upsilon}_\varepsilon := \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 + \varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$. Из (5.85) следует оценка

$$\|\boldsymbol{\eta}_\varepsilon - \boldsymbol{\rho}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \big(\mathcal{C}_{10}\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + (\mathcal{C}_8 + \mathcal{C}_{10})\varepsilon\big)\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \tag{6.3}$$

Нам понадобится также следующая оценка, вытекающая из (2.23), (2.40) и (3.7):

$$\|\boldsymbol{\eta}_\varepsilon - \boldsymbol{\rho}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \big(2\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}|\zeta|^{-1} + C_K'\varepsilon|\zeta|^{-1/2}\big)\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1. \tag{6.4}$$

Перепишем тождество (6.2) в виде

$$(\mathbf{w}_\varepsilon, \mathbf{\Phi})_{L_2(\mathcal{O})} = \mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}_\varepsilon - \boldsymbol{\rho}_\varepsilon] + \mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}_0] + \mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{\upsilon}_\varepsilon]. \tag{6.5}$$

В силу (5.79), (6.3) и (6.4) при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ выполнена оценка

$$\begin{aligned}
|\mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}_\varepsilon - \boldsymbol{\rho}_\varepsilon]| &\leqslant \gamma_0\big(\varepsilon + \varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}\big)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\eta}_\varepsilon - \boldsymbol{\rho}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \\
&+ \gamma_{10}\varepsilon|\zeta|^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\eta}_\varepsilon - \boldsymbol{\rho}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\leqslant \gamma_0\big(\varepsilon + \varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}\big)\big(\mathcal{C}_{10}\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + (\mathcal{C}_8 + \mathcal{C}_{10})\varepsilon\big)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&+ \gamma_{10}\big(2\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}\varepsilon|\zeta|^{-1/2} + C_K'\varepsilon^2\big)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\leqslant \mathcal{C}_{11}^{(1)}\left(\varepsilon|\zeta|^{-1/2} + \varepsilon^2\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})},
\end{aligned} \tag{6.6}$$

где $\mathcal{C}_{11}^{(1)} = 2\gamma_0(\mathcal{C}_8 + \mathcal{C}_{10}) + \gamma_{10}\max\{2\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}; C_K'\}$.

Очевидно,

$$\mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}_0] = \mathcal{I}_\varepsilon[S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0] + \mathcal{I}_\varepsilon[(I - S_\varepsilon)\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0]. \tag{6.7}$$

В силу предложения 1.1 и оценки (3.20) (для $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$) имеем

$$\|(I - S_\varepsilon)\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon r_1\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_9 r_1\varepsilon\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{6.8}$$

Второе слагаемое в (6.7) оценим на основании (1.2), (3.18) (для $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$), (5.79) и (6.8):

$$\begin{aligned}
|\mathcal{I}_\varepsilon[(I - S_\varepsilon)\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0]| &\leqslant \gamma_0\big(\varepsilon + \varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}\big)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|(I - S_\varepsilon)\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \\
&+ 2\gamma_{10}\varepsilon|\zeta|^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\
&\leqslant C_9 r_1\gamma_0\varepsilon\big(\varepsilon + \varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}\big)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&+ 2C_7\gamma_{10}\varepsilon|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\leqslant \mathcal{C}_{11}^{(2)}\big(\varepsilon|\zeta|^{-1/2} + \varepsilon^2\big)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})},
\end{aligned} \tag{6.9}$$

где $\mathcal{C}_{11}^{(2)} = 2C_9 r_1\gamma_0 + 2C_7\gamma_{10}$. Для оценки первого слагаемого в (6.7) при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ применим оценку (5.78):

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{I}_\varepsilon[S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0]| \leqslant \gamma_0'\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^1(\mathcal{O})} + \gamma_{10}\varepsilon|\zeta|^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&+ \gamma_0''\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{D}S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)} \\
&+ \gamma_0''\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\left(\left(\sum_{l=1}^d \|(a_l^\varepsilon)^* S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|^2_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)}\right)^{1/2} + \||Q^\varepsilon|^{1/2}S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)}\right).
\end{aligned} \tag{6.10}$$

В силу (1.2) и оценок (3.18), (3.19) (для $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$) имеем

$$\|S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_7|\zeta|^{-1}\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{6.11}$$

$$\|S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \|S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_8|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{6.12}$$

Применяя лемму 4.1, (1.2) и оценки (3.19), (3.20) (для $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$), при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ получаем

$$\begin{aligned}\|\mathbf{D}S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)} &\leqslant \beta^{1/2}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{D}S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|^{1/2}_{H^1(\mathcal{O})}\|\mathbf{D}S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|^{1/2}_{L_2(\mathcal{O})}\\ &\leqslant \beta^{1/2}\varepsilon^{1/2}\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|^{1/2}_{H^2(\mathbb{R}^d)}\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|^{1/2}_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{25}\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})},\end{aligned} \tag{6.13}$$

где $C_{25}=(\beta C_8C_9)^{1/2}$. Далее, в силу леммы 4.2 и оценок (3.18), (3.19) (для $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$) с учетом ограничения $|\zeta|\geqslant 1$ при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}\left(\sum_{l=1}^d\|(a_l^\varepsilon)^*S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|^2_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)}\right)^{1/2} &\leqslant \beta_*^{1/2}\varepsilon^{1/2}|\Omega|^{-1/2}C_a\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|^{1/2}_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant C_{26}\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})},\end{aligned} \tag{6.14}$$

где $C_{26}=(\beta_*C_7C_8)^{1/2}|\Omega|^{-1/2}C_a$. Аналогично, при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ выполнено

$$\begin{aligned}\||Q^\varepsilon|^{1/2}S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)} &\leqslant \beta_*^{1/2}\varepsilon^{1/2}|\Omega|^{-1/2}\|Q\|^{1/2}_{L_1(\Omega)}\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|^{1/2}_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant C_{27}\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})},\end{aligned} \tag{6.15}$$

где $C_{27}=(\beta_*C_7C_8)^{1/2}|\Omega|^{-1/2}\|Q\|^{1/2}_{L_1(\Omega)}$.

В итоге, из (6.10)–(6.15) следует, что при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ справедливо неравенство

$$|\mathcal{I}_\varepsilon[S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0]| \leqslant \mathcal{C}_{11}^{(3)}\varepsilon|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})} \tag{6.16}$$

с постоянной $\mathcal{C}_{11}^{(3)}=\gamma_0'C_8+\gamma_{10}C_7+\gamma_0''(C_{25}+C_{26}+C_{27})$.

Остается оценить третье слагаемое в (6.5). В силу (5.78) при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ выполнено

$$\begin{aligned}&|\mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{v}_\varepsilon]| \leqslant \gamma_0'\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}+\gamma_{10}\varepsilon|\zeta|^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{v}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}\\ &+\gamma_0''\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{D}\boldsymbol{v}_\varepsilon\|_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)}\\ &+\gamma_0''\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\left(\left(\sum_{l=1}^d\|(a_l^\varepsilon)^*\boldsymbol{v}_\varepsilon\|^2_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)}\right)^{1/2}+\||Q^\varepsilon|^{1/2}\boldsymbol{v}_\varepsilon\|_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)}\right).\end{aligned} \tag{6.17}$$

Применяя лемму 3.3, оценим функцию $\boldsymbol{v}_\varepsilon=\varepsilon K_N(\varepsilon;\zeta)\mathbf{\Phi}$:

$$\|\boldsymbol{v}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_K'\varepsilon|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{6.18}$$

$$\|\boldsymbol{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant (C_K'+C_K'')\varepsilon\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}+C_K''|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{6.19}$$

Далее, в силу (3.10) имеем

$$\begin{aligned}\|D_l\boldsymbol{v}_\varepsilon\|_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)} &\leqslant \varepsilon\|\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})D_l\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\varepsilon\|\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon D_l\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &+\|(D_l\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)}+\|(D_l\widetilde{\Lambda})^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)}.\end{aligned}$$

Отсюда, используя предложение 1.2 и лемму 4.2, а также (1.5), (1.24), (1.25), (1.32), (1.33) и оценки (3.18)–(3.20) (для $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$), с учетом $|\zeta|\geqslant 1$ при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ получаем

$$\begin{aligned}\|\mathbf{D}\boldsymbol{v}_\varepsilon\|_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)} &\leqslant \varepsilon M_1\alpha_1^{1/2}\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}+\varepsilon\widetilde{M}_1\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\\ &+\varepsilon^{1/2}\beta_*^{1/2}M_2\alpha_1^{1/2}\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|^{1/2}_{H^2(\mathbb{R}^d)}\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|^{1/2}_{H^1(\mathbb{R}^d)}+\varepsilon^{1/2}\beta_*^{1/2}\widetilde{M}_2\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|^{1/2}_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant C_{28}\varepsilon\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}+C_{29}\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{6.20}$$

Здесь $C_{28}=M_1\alpha_1^{1/2}C_9+\widetilde{M}_1C_8$, $C_{29}=\beta_*^{1/2}\bigl(M_2\alpha_1^{1/2}(C_8C_9)^{1/2}+\widetilde{M}_2(C_7C_8)^{1/2}\bigr)$.

Очевидно,

$$\|(a_l^\varepsilon)^*\boldsymbol{v}_\varepsilon\|_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)}\leqslant\varepsilon\|(a_l^\varepsilon)^*\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\varepsilon\|(a_l^\varepsilon)^*\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Применяя предложение 1.2, соотношения (1.5), (5.28), (5.29) и оценки (3.18), (3.19) (для $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$), с учетом $|\zeta|\geqslant1$ получаем

$$\begin{aligned}\Bigl(\sum_{l=1}^d\|(a_l^\varepsilon)^*\boldsymbol{v}_\varepsilon\|^2_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)}\Bigr)^{1/2}&\leqslant\varepsilon\Bigl(\sum_{l=1}^d C_{17,l}^2\Bigr)^{1/2}\alpha_1^{1/2}\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}+\varepsilon\Bigl(\sum_{l=1}^d C_{18,l}^2\Bigr)^{1/2}\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\&\leqslant C_{30}\varepsilon\|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})},\end{aligned}\tag{6.21}$$

где $C_{30}=\bigl(\sum_{l=1}^d C_{17,l}^2\bigr)^{1/2}\alpha_1^{1/2}C_8+\bigl(\sum_{l=1}^d C_{18,l}^2\bigr)^{1/2}C_7$. Аналогично, с учетом (5.73) и (5.74)

$$\begin{aligned}\bigl\||Q^\varepsilon|^{1/2}\boldsymbol{v}_\varepsilon\bigr\|_{L_2(\Upsilon_\varepsilon)}&\leqslant\varepsilon\bigl\||Q^\varepsilon|^{1/2}\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\varepsilon\bigl\||Q^\varepsilon|^{1/2}\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\&\leqslant C_{23}\alpha_1^{1/2}\varepsilon\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}+C_{24}\varepsilon\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant C_{31}\varepsilon\|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})},\end{aligned}\tag{6.22}$$

где $C_{31}=C_{23}\alpha_1^{1/2}C_8+C_{24}C_7$.

В итоге, из (6.17)–(6.22) вытекает оценка

$$|\mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{v}_\varepsilon]|\leqslant\mathcal{C}_{11}^{(4)}\left(\varepsilon|\zeta|^{-1/2}+\varepsilon^2\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})},\quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1,\tag{6.23}$$

с постоянной $\mathcal{C}_{11}^{(4)}=\gamma_0'(C_K'+C_K'')+\gamma_{10}C_K'+\gamma_0''(C_{28}+C_{29}+C_{30}+C_{31})$.

Теперь соотношения (6.5)–(6.7), (6.9), (6.16) и (6.23) влекут оценку

$$\bigl|(\mathbf{w}_\varepsilon,\boldsymbol{\Phi})_{L_2(\mathcal{O})}\bigr|\leqslant\mathcal{C}_{11}\left(\varepsilon|\zeta|^{-1/2}+\varepsilon^2\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})},\quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1,$$

при любом $\boldsymbol{\Phi}\in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Здесь $\mathcal{C}_{11}=\mathcal{C}_{11}^{(1)}+\mathcal{C}_{11}^{(2)}+\mathcal{C}_{11}^{(3)}+\mathcal{C}_{11}^{(4)}$. Это равносильно искомой оценке (6.1). $\square$

6.2. **Завершение доказательства теоремы 3.2 при** $\operatorname{Re}\zeta\leqslant0$**.** При $\operatorname{Re}\zeta\leqslant0$, $|\zeta|\geqslant1$, из (3.43) и (6.1) вытекает оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon-\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant(\mathcal{C}_9+\mathcal{C}_{11})\left(\varepsilon|\zeta|^{-1/2}+\varepsilon^2\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},\quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1.$$

При $|\zeta|\leqslant\varepsilon^{-2}$ выполнено $\varepsilon|\zeta|^{-1/2}+\varepsilon^2\leqslant2\varepsilon|\zeta|^{-1/2}$. При $|\zeta|>\varepsilon^{-2}$ воспользуемся оценками (2.23) и (2.40) и заметим, что $|\zeta|^{-1}<\varepsilon|\zeta|^{-1/2}$. Тогда

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon-\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant2\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}|\zeta|^{-1}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant2\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}\varepsilon|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

В результате приходим к оценке вида (3.1) с постоянной $\mathcal{C}_3'=\max\{2(\mathcal{C}_9+\mathcal{C}_{11});2\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}\}$. Итак, в операторной форме установлена оценка

$$\bigl\|(B_{N,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-(B_N^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\bigr\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant\mathcal{C}_3'\varepsilon|\zeta|^{-1/2},\quad\operatorname{Re}\zeta\leqslant0,\ |\zeta|\geqslant1;\ 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1.\tag{6.24}$$

§ 7. Завершение доказательства теорем 3.2 и 3.4

7.1. **Случай** $\operatorname{Re}\zeta>0$**. Завершение доказательства теоремы 3.2.** Пусть теперь $\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $\operatorname{Re}\zeta>0$, $|\zeta|\geqslant1$. Положим $\widehat{\zeta}=-\operatorname{Re}\zeta+i\operatorname{Im}\zeta$. Тогда $|\widehat{\zeta}|=|\zeta|$. Запишем уже доказанную оценку (6.24) в точке $\widehat{\zeta}$:

$$\bigl\|(B_{N,\varepsilon}-\widehat{\zeta}Q_0^\varepsilon)^{-1}-(B_N^0-\widehat{\zeta}\overline{Q_0})^{-1}\bigr\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant\mathcal{C}_3'\varepsilon|\zeta|^{-1/2},\quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1.\tag{7.1}$$

Легко проверить тождество

$$
\begin{aligned}
&(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_N^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \\
&\quad = (B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} (B_{N,\varepsilon} - \widehat{\zeta} Q_0^\varepsilon) \Big((B_{N,\varepsilon} - \widehat{\zeta} Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_N^0 - \widehat{\zeta}\overline{Q_0})^{-1} \Big) (B_N^0 - \widehat{\zeta}\overline{Q_0})(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} \\
&\quad + (\zeta - \widehat{\zeta})(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}(Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})(B_N^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}.
\end{aligned}
\tag{7.2}
$$

Обозначим слагаемые в правой части (7.2) через $\mathfrak{T}_1(\varepsilon;\zeta)$ и $\mathfrak{T}_2(\varepsilon;\zeta)$. В силу (2.21)

$$
\begin{aligned}
&\big\| (B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} (B_{N,\varepsilon} - \widehat{\zeta} Q_0^\varepsilon) \big\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} = \big\| f^\varepsilon (\widetilde{B}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} (\widetilde{B}_{N,\varepsilon} - \widehat{\zeta} I)(f^\varepsilon)^{-1} \big\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \\
&\leqslant \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty} \big\| (\widetilde{B}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} (\widetilde{B}_{N,\varepsilon} - \widehat{\zeta} I) \big\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty} \sup_{x \geqslant 0} \frac{|x - \widehat{\zeta}|}{|x - \zeta|}.
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$

Аналогично, с учетом (2.37) и (2.38)

$$
\big\| (B_N^0 - \widehat{\zeta}\overline{Q_0})(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} \big\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty} \sup_{x \geqslant 0} \frac{|x - \widehat{\zeta}|}{|x - \zeta|}. \tag{7.4}
$$

Вычисление показывает, что

$$
\sup_{x \geqslant 0} \frac{|x - \widehat{\zeta}|}{|x - \zeta|} \leqslant 2c(\phi). \tag{7.5}
$$

Из (7.1) и (7.3)–(7.5) вытекает оценка

$$
\|\mathfrak{T}_1(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_3^{(1)} c(\phi)^2 \varepsilon |\zeta|^{-1/2}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{7.6}
$$

где $\mathcal{C}_3^{(1)} = 4\mathcal{C}_3' \|f\|_{L_\infty}^2 \|f^{-1}\|_{L_\infty}^2$.

Рассмотрим теперь второе слагаемое в правой части (7.2). Пусть $\mathbf{\Phi}_1, \mathbf{\Phi}_2 \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. В силу леммы 4.4(3°) при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ справедлива оценка

$$
\begin{aligned}
&\Big| \big((Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} \mathbf{\Phi}_1, (B_{N,\varepsilon} - \zeta^* Q_0^\varepsilon)^{-1} \mathbf{\Phi}_2 \big)_{L_2(\mathcal{O})} \Big| \\
&\leqslant \widetilde{C}''' \varepsilon \|Q_0\|_{L_\infty} \big(\big\| (B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} \mathbf{\Phi}_1 \big\|_{H^1(\mathcal{O})} \big\| (B_{N,\varepsilon} - \zeta^* Q_0^\varepsilon)^{-1} \mathbf{\Phi}_2 \big\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&+ \big\| (B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} \mathbf{\Phi}_1 \big\|_{L_2(\mathcal{O})} \big\| (B_{N,\varepsilon} - \zeta^* Q_0^\varepsilon)^{-1} \mathbf{\Phi}_2 \big\|_{H^1(\mathcal{O})} \big).
\end{aligned}
$$

Вместе с (2.23), (2.24), (2.40), (2.41) с учетом равенства $\zeta - \widehat{\zeta} = 2\operatorname{Re}\zeta$ это приводит к оценке

$$
\|\mathfrak{T}_2(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_3^{(2)} c(\phi)^2 \varepsilon |\zeta|^{-1/2}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{7.7}
$$

где $\mathcal{C}_3^{(2)} = 4\widetilde{C}''' \mathcal{C}_1 \|Q_0\|_{L_\infty} \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}$.

В результате из (7.2), (7.6) и (7.7) вытекает искомая оценка (3.2) с постоянной $\mathcal{C}_3 = \mathcal{C}_3^{(1)} + \mathcal{C}_3^{(2)}$ в случае $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $\operatorname{Re}\zeta > 0$, $|\zeta| \geqslant 1$. С учетом уже установленной оценки (6.24) это завершает доказательство теоремы 3.2.

7.2. **Случай** $\operatorname{Re}\zeta > 0$**. Доказательство оценки** (3.14)**.** Запишем уже доказанную оценку (5.85) в точке $\widehat{\zeta}$:

$$
\begin{aligned}
&\big\| (B_{N,\varepsilon} - \widehat{\zeta} Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_N^0 - \widehat{\zeta}\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_N(\varepsilon;\widehat{\zeta}) \big\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \\
&\leqslant \mathcal{C}_{10} \varepsilon^{1/2} |\zeta|^{-1/4} + (\mathcal{C}_8 + \mathcal{C}_{10})\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1.
\end{aligned}
\tag{7.8}
$$

С помощью (7.2) и очевидного равенства $K_N(\varepsilon;\zeta) = K_N(\varepsilon;\widehat{\zeta})(B_N^0 - \widehat{\zeta}\overline{Q_0})(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}$ легко проверить тождество

$$\begin{aligned}
&(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_N(\varepsilon;\zeta) \\
&= \Big((B_{N,\varepsilon} - \widehat{\zeta} Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_N^0 - \widehat{\zeta}\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_N(\varepsilon;\widehat{\zeta})\Big)(B_N^0 - \widehat{\zeta}\overline{Q_0})(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} \\
&+ (\zeta - \widehat{\zeta})(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} Q_0^\varepsilon \Big((B_{N,\varepsilon} - \widehat{\zeta} Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_N^0 - \widehat{\zeta}\overline{Q_0})^{-1}\Big)(B_N^0 - \widehat{\zeta}\overline{Q_0})(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} \\
&+ (\zeta - \widehat{\zeta})(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}(Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}.
\end{aligned} \tag{7.9}$$

Обозначим последовательные слагаемые в правой части (7.9) через $\mathfrak{L}_1(\varepsilon;\zeta)$, $\mathfrak{L}_2(\varepsilon;\zeta)$ и $\mathfrak{L}_3(\varepsilon;\zeta)$. Заметим, что $\mathfrak{L}_3(\varepsilon;\zeta) = \mathfrak{T}_2(\varepsilon;\zeta)$.

Из (7.4), (7.5) и (7.8) вытекает оценка

$$\|\mathfrak{L}_1(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_4 c(\phi)\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + \mathcal{C}_5^{(1)} c(\phi)\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{7.10}$$

где $\mathcal{C}_4 = 2\mathcal{C}_{10}\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, $\mathcal{C}_5^{(1)} = 2(\mathcal{C}_8 + \mathcal{C}_{10})\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}$.

Оценим второе слагаемое в правой части (7.9):

$$\begin{aligned}
&\|\mathfrak{L}_2(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant 2(\operatorname{Re}\zeta)\big\|(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\|Q_0\|_{L_\infty} \\
&\times \big\|(B_{N,\varepsilon} - \widehat{\zeta} Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_N^0 - \widehat{\zeta}\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\big\|(B_N^0 - \widehat{\zeta}\overline{Q_0})(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}.
\end{aligned}$$

Комбинируя это неравенство и (2.24), (7.1), (7.4) и (7.5), получаем

$$\|\mathcal{L}_2(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_5^{(2)} c(\phi)^2\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{7.11}$$

где $\mathcal{C}_5^{(2)} = 4\mathcal{C}_3'\mathcal{C}_1\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|^3_{L_\infty}$.

Перейдем к рассмотрению члена $\mathfrak{L}_3(\varepsilon;\zeta)$. Из (2.17), (2.20) и (2.21) следует, что

$$\begin{aligned}
&\|\mathfrak{L}_3(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant c_4^{-1/2}\big\|B_{N,\varepsilon}^{1/2}\mathfrak{L}_3(\varepsilon;\zeta)\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \\
&= c_4^{-1/2}\big\|\widetilde{B}_{N,\varepsilon}^{1/2}(f^\varepsilon)^{-1}\mathfrak{L}_3(\varepsilon;\zeta)\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \\
&= 2c_4^{-1/2}(\operatorname{Re}\zeta)\big\|\widetilde{B}_{N,\varepsilon}^{1/2}(\widetilde{B}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}(f^\varepsilon)^*(Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}.
\end{aligned} \tag{7.12}$$

Пусть $\mathbf{\Phi}_1, \mathbf{\Phi}_2 \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. В силу леммы 4.4(3°) при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}
&\Big|\big((Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\mathbf{\Phi}_1, f^\varepsilon\widetilde{B}_{N,\varepsilon}^{1/2}(\widetilde{B}_{N,\varepsilon} - \zeta^* I)^{-1}\mathbf{\Phi}_2\big)_{L_2(\mathcal{O})}\Big| \\
&\leqslant \widetilde{C}'''\varepsilon\|Q_0\|_{L_\infty}\big(\big\|(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\mathbf{\Phi}_1\big\|_{H^1(\mathcal{O})}\big\|f^\varepsilon\widetilde{B}_{N,\varepsilon}^{1/2}(\widetilde{B}_{N,\varepsilon} - \zeta^* I)^{-1}\mathbf{\Phi}_2\big\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&+ \big\|(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\mathbf{\Phi}_1\big\|_{L_2(\mathcal{O})}\big\|f^\varepsilon\widetilde{B}_{N,\varepsilon}^{1/2}(\widetilde{B}_{N,\varepsilon} - \zeta^* I)^{-1}\mathbf{\Phi}_2\big\|_{H^1(\mathcal{O})}\big).
\end{aligned} \tag{7.13}$$

Очевидно,

$$\big\|f^\varepsilon\widetilde{B}_{N,\varepsilon}^{1/2}(\widetilde{B}_{N,\varepsilon} - \zeta^* I)^{-1}\mathbf{\Phi}_2\big\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|f\|_{L_\infty}\sup_{x\geqslant 0}\frac{x^{1/2}}{|x - \zeta^*|}\|\mathbf{\Phi}_2\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|f\|_{L_\infty} c(\phi)|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{\Phi}_2\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{7.14}$$

Согласно (2.17) и (2.20),

$$\begin{aligned}
&\big\|f^\varepsilon\widetilde{B}_{N,\varepsilon}^{1/2}(\widetilde{B}_{N,\varepsilon} - \zeta^* I)^{-1}\mathbf{\Phi}_2\big\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant c_4^{-1/2}\big\|B_{N,\varepsilon}^{1/2} f^\varepsilon\widetilde{B}_{N,\varepsilon}^{1/2}(\widetilde{B}_{N,\varepsilon} - \zeta^* I)^{-1}\mathbf{\Phi}_2\big\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&= c_4^{-1/2}\big\|\widetilde{B}_{N,\varepsilon}(\widetilde{B}_{N,\varepsilon} - \zeta^* I)^{-1}\mathbf{\Phi}_2\big\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant c_4^{-1/2}\sup_{x\geqslant 0} x|x - \zeta^*|^{-1}\|\mathbf{\Phi}_2\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\leqslant c_4^{-1/2} c(\phi)\|\mathbf{\Phi}_2\|_{L_2(\mathcal{O})}.
\end{aligned} \tag{7.15}$$

Соотношения (2.40), (2.41) и (7.12)–(7.15) приводят к оценке

$$\|\mathfrak{L}_3(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_5^{(3)} c(\phi)^2 \varepsilon, \quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1, \tag{7.16}$$

где $\mathcal{C}_5^{(3)} = 2c_4^{-1/2}\widetilde{C}'''\|Q_0\|_{L_\infty}\big(\mathcal{C}_1\|f\|_{L_\infty} + c_4^{-1/2}\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}\big)$.

В итоге, из (7.9)–(7.11) и (7.16) вытекает оценка (3.14) с постоянной $\mathcal{C}_5 = \mathcal{C}_5^{(1)} + \mathcal{C}_5^{(2)} + \mathcal{C}_5^{(3)}$ в случае $\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $\operatorname{Re}\zeta>0$, $|\zeta|\geqslant 1$. С учетом (5.85) оценка (3.14) полностью доказана.

7.3. **Доказательство оценки** (3.15)**.** Из (3.13) с учетом (1.3) и (1.6) следует, что при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ выполнено

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|g\|_{L_\infty}(d\alpha_1)^{1/2}\Big(\mathcal{C}_4 c(\phi)\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + \mathcal{C}_5 c(\phi)^2\varepsilon\Big)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{7.17}$$

В силу (3.11), (3.12) имеем

$$\begin{aligned} g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon &= g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0 + g^\varepsilon (b(\mathbf{D})\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 + g^\varepsilon (b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda})^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_0 \\ &\quad + \varepsilon\sum_{l=1}^d g^\varepsilon b_l(\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})D_l\widetilde{\mathbf{u}}_0 + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon D_l\widetilde{\mathbf{u}}_0). \end{aligned} \tag{7.18}$$

Четвертое слагаемое в правой части (7.18) оценим с помощью предложения 1.2 и соотношений (1.5), (1.6), (1.24), (1.32), (3.19), (3.20):

$$\begin{aligned} &\Big\|\varepsilon\sum_{l=1}^d g^\varepsilon b_l(\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})D_l\widetilde{\mathbf{u}}_0 + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon D_l\widetilde{\mathbf{u}}_0)\Big\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \varepsilon(d\alpha_1)^{1/2}\|g\|_{L_\infty}(M_1\alpha_1^{1/2}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} + \widetilde{M}_1\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}) \leqslant C_{32}c(\phi)\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \end{aligned} \tag{7.19}$$

где $C_{32} = (d\alpha_1)^{1/2}\|g\|_{L_\infty}(M_1\alpha_1^{1/2}C_9 + \widetilde{M}_1 C_8)$.

Далее, в силу предложения 1.1 и соотношений (1.5), (3.20) выполнено

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(I-S_\varepsilon)\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant r_1\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}\varepsilon\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{33}c(\phi)\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{7.20}$$

где $C_{33} = r_1\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}C_9$.

В итоге, сопоставляя (1.22) и (7.17)–(7.20), приходим к искомой оценке (3.15) с постоянными $\widetilde{\mathcal{C}}_4 = \mathcal{C}_4\|g\|_{L_\infty}(d\alpha_1)^{1/2}$, $\widetilde{\mathcal{C}}_5 = \mathcal{C}_5\|g\|_{L_\infty}(d\alpha_1)^{1/2} + C_{32} + C_{33}$.

Теорема 3.4 полностью доказана.

7.4. **Доказательство следствия 3.5.** В силу (1.3), (1.6), (2.24) и (3.9) и справедлива оценка

$$\begin{aligned} &\big\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G_N(\varepsilon;\zeta)\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \|g\|_{L_\infty}(d\alpha_1)^{1/2}\big\|(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} + \|G_N(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{34}c(\phi)|\zeta|^{-1/2}, \end{aligned}$$

где $C_{34} = \|g\|_{L_\infty}(d\alpha_1)^{1/2}\mathcal{C}_1 + C_G$. Отсюда и из (3.16) вытекает, что при $\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta|\geqslant 1$, и $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ выполнено

$$\begin{aligned} &\big\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G_N(\varepsilon;\zeta)\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \min\{C_{34}c(\phi)|\zeta|^{-1/2}; \widetilde{\mathcal{C}}_4 c(\phi)\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + \widetilde{\mathcal{C}}_5 c(\phi)^2\varepsilon\} \\ &\leqslant \widetilde{\mathcal{C}}_4 c(\phi)\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + \min\{C_{34}c(\phi)|\zeta|^{-1/2}; \widetilde{\mathcal{C}}_5 c(\phi)^2\varepsilon\} \\ &\leqslant \widetilde{\mathcal{C}}_4 c(\phi)\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + (C_{34}\widetilde{\mathcal{C}}_5)^{1/2}c(\phi)^{3/2}\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}. \end{aligned}$$

Это влечет искомую оценку (3.17) с постоянной $\widetilde{\mathcal{C}}_4' = \widetilde{\mathcal{C}}_4 + (C_{34}\widetilde{\mathcal{C}}_5)^{1/2}$.

§ 8. Устранение сглаживающего оператора. Специальные случаи. Оценки в строго внутренней подобласти

8.1. **Устранение оператора S_ε в корректоре.** Покажем, что при некоторых дополнительных предположениях о решениях вспомогательных задач сглаживающий оператор S_ε в корректоре может быть устранен (заменен тождественным оператором с сохранением порядка погрешности).

Условие 8.1. *Предположим, что* Γ-*периодическое решение* $\Lambda(\mathbf{x})$ *задачи* (1.20) *ограничено, т. е.* $\Lambda \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$.

Условие 8.2. *Предположим, что* Γ-*периодическое решение* $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ *задачи* (1.30) *таково, что*

$$\widetilde{\Lambda} \in L_p(\Omega), \quad p = 2 \text{ при } d = 1, \quad p > 2 \text{ при } d = 2, \quad p = d \text{ при } d \geqslant 3.$$

Некоторые случаи, когда условия 8.1 и 8.2 выполнены автоматически, были выделены в [BSu3, лемма 8.7] и [Su4, предложение 8.11] соответственно.

Предложение 8.3 ([BSu3])**.** *Условие* 8.1 *заведомо выполнено, если справедливо хотя бы одно из следующих предположений*:
1°) $d \leqslant 2$;
2°) *размерность* d *произвольна, а оператор* A_ε *имеет вид* $A_\varepsilon = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D}$, *где* $g(\mathbf{x})$ — *симметричная матрица с вещественными элементами*;
3°) *размерность* d *произвольна, и* $g^0 = \underline{g}$, *т. е. справедливы соотношения* (1.29).

Предложение 8.4 ([Su4])**.** *Условие* 8.2 *заведомо выполнено, если справедливо хотя бы одно из следующих предположений*:
1°) $d \leqslant 4$;
2°) *размерность* d *произвольна, а оператор* A_ε *имеет вид* $A_\varepsilon = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D}$, *где* $g(\mathbf{x})$ — *симметричная матрица с вещественными элементами.*

Замечание 8.5. *Если* $A_\varepsilon = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D}$, *где* $g(\mathbf{x})$ — *симметричная матрица с вещественными элементами, то из* [LaU, глава III, теорема 13.1] *следует, что* $\Lambda \in L_\infty$ *и* $\widetilde{\Lambda} \in L_\infty$. *Тогда условия* 8.1 *и* 8.2 *выполнены автоматически. При этом норма* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ *не превосходит величины, зависящей от* d, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ *и* Ω, *а норма* $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_\infty}$ *оценивается в терминах* d, ρ, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}$, $j = 1, \dots, d$, *и* Ω.

Положим

$$K_N^0(\varepsilon;\zeta) := \left(\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon\right)(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}, \tag{8.1}$$

$$G_N^0(\varepsilon;\zeta) := \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} + g^\varepsilon\big(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\big)^\varepsilon(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}. \tag{8.2}$$

Если выполнены условия 8.1 и 8.2, то оператор (8.1) непрерывен из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, а оператор (8.2) непрерывен из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^m)$. Это легко проверить, используя леммы 4.5, 4.6 и 4.7.

Наша цель в этом пункте — доказать следующую теорему.

Теорема 8.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.4. *Кроме того, пусть выполнены условия* 8.1 *и* 8.2. *Пусть операторы* $K_N^0(\varepsilon;\zeta)$ *и* $G_N^0(\varepsilon;\zeta)$ *определены в* (8.1) *и* (8.2). *Тогда при* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\big\|(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_N^0(\varepsilon;\zeta)\big\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_4 c(\phi)\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + \mathcal{C}_{12} c(\phi)^2\varepsilon, \tag{8.3}$$

$$\big\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G_N^0(\varepsilon;\zeta)\big\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}_4 c(\phi)\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + \widetilde{\mathcal{C}}_{12} c(\phi)^2\varepsilon. \tag{8.4}$$

Постоянные $\mathcal{C}_4$ *и* $\widetilde{\mathcal{C}}_4$ — *те же, что в теореме* 3.4. *Постоянные* $\mathcal{C}_{12}$ *и* $\widetilde{\mathcal{C}}_{12}$ *зависят лишь от исходных данных* (2.35), *а также от норм* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ *и* $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$.

Для доказательства теоремы 8.6 нам потребуются следующие утверждения; см. [MSu4, леммы 7.7 и 7.8].

Лемма 8.7. *Пусть выполнено условие* 8.1. *Пусть* S_ε — *оператор сглаживания по Стеклову* (1.1). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *выполнено*

$$\|\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(S_\varepsilon - I)\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_\Lambda.$$

Постоянная $\mathfrak{C}_\Lambda$ *зависит только от* m, d, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, *от параметров решетки* Γ *и нормы* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$.

Лемма 8.8. *Пусть выполнено условие* 8.2. *Пусть* S_ε — *оператор сглаживания по Стеклову* (1.1). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|\widetilde{\Lambda}^\varepsilon(S_\varepsilon - I)\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_{\widetilde{\Lambda}}.$$

Постоянная $\mathfrak{C}_{\widetilde{\Lambda}}$ *зависит только от* n, d, α_0, α_1, ρ, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, *от норм* $\|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}$, $j = 1, \dots, d$, *от* p, $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$ *и от параметров решетки* Γ.

Лемму 8.7 легко проверить, используя лемму 4.5, а для проверки леммы 8.8 нужны леммы 4.6 и 4.7.

8.2. **Доказательство теоремы 8.6.** Из (2.42), (3.4) и леммы 8.7 вытекает, что при условии 8.1 справедлива оценка

$$\varepsilon\big\|\Lambda^\varepsilon(S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})P_{\mathcal{O}}(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_\Lambda C_{\mathcal{O}}^{(2)}\mathcal{C}_2 c(\phi)\varepsilon. \tag{8.5}$$

Аналогично, с помощью (2.42), (3.4) и леммы 8.8 находим, что при условии 8.2 выполнено

$$\varepsilon\big\|\widetilde{\Lambda}^\varepsilon(S_\varepsilon - I)P_{\mathcal{O}}(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_{\widetilde{\Lambda}} C_{\mathcal{O}}^{(2)}\mathcal{C}_2 c(\phi)\varepsilon. \tag{8.6}$$

Соотношения (3.14), (8.5) и (8.6) влекут оценку (8.3) с постоянной $\mathcal{C}_{12} = \mathcal{C}_5 + (\mathfrak{C}_\Lambda + \mathfrak{C}_{\widetilde{\Lambda}})C_{\mathcal{O}}^{(2)}\mathcal{C}_2$.

Остается проверить (8.4). Из (8.3) с учетом (1.3) и (1.6) следует оценка

$$\begin{aligned}
&\big\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - g^\varepsilon b(\mathbf{D})\big(I + \varepsilon(\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon)\big)(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \\
&\quad\leqslant (d\alpha_1)^{1/2}\|g\|_{L_\infty}\big(\mathcal{C}_4 c(\phi)\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + \mathcal{C}_{12}c(\phi)^2\varepsilon\big)
\end{aligned} \tag{8.7}$$

при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$. Имеем

$$\begin{aligned}
&\varepsilon g^\varepsilon b(\mathbf{D})\big(\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon\big)(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} \\
&\quad= g^\varepsilon\big(b(\mathbf{D})\Lambda\big)^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} + g^\varepsilon\big(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\big)^\varepsilon(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} \\
&\quad+ \varepsilon\sum_{l=1}^d g^\varepsilon b_l\big(\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon\big)D_l(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}.
\end{aligned} \tag{8.8}$$

Используя условие 8.1, а также (1.3), (1.6) и (2.42), получаем

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\sum_{l=1}^d\big\|g^\varepsilon b_l\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})D_l(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \\
&\leqslant \varepsilon\alpha_1 d\|g\|_{L_\infty}\|\Lambda\|_{L_\infty}\big\|(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})} \leqslant C_{35}c(\phi)\varepsilon,
\end{aligned} \tag{8.9}$$

где $C_{35} = d\alpha_1\|g\|_{L_\infty}\|\Lambda\|_{L_\infty}\mathcal{C}_2$.

Далее, в силу (1.6), (2.42), (3.4), условия 8.2 и леммы 4.6 выполнено

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon \sum_{l=1}^{d} \left\| g^\varepsilon b_l \widetilde{\Lambda}^\varepsilon D_l (B_N^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \right\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \\
&\quad \leqslant \varepsilon \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty} \sum_{l=1}^{d} \left\| \widetilde{\Lambda}^\varepsilon P_{\mathcal{O}} D_l (B_N^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \right\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \\
&\quad \leqslant \varepsilon \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty} C(\widehat{q};\Omega) \|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)} \sum_{l=1}^{d} \left\| P_{\mathcal{O}} D_l (B_N^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \right\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathbb{R}^d)} \\
&\quad \leqslant \varepsilon (d\alpha_1)^{1/2} \|g\|_{L_\infty} \|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)} C(\widehat{q};\Omega) C_{\mathcal{O}}^{(1)} \left\| (B_N^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \right\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^2(\mathcal{O})} \leqslant C_{36} c(\phi) \varepsilon,
\end{aligned}
\tag{8.10}
$$

где $C_{36} = (d\alpha_1)^{1/2} \|g\|_{L_\infty} \|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)} C(\widehat{q};\Omega) C_{\mathcal{O}}^{(1)} \mathcal{C}_2$.

В итоге соотношения (8.7)–(8.10) вместе с (1.22) и (8.2) приводят к искомой оценке (8.4) с постоянной $\widetilde{\mathcal{C}}_{12} = (d\alpha_1)^{1/2} \|g\|_{L_\infty} \mathcal{C}_{12} + C_{35} + C_{36}$. $\square$

Замечание 8.9. *Если выполнено только условие* 8.1 (*соответственно, условие* 8.2), *то сглаживающий оператор* S_ε *можно устранить только в члене корректора, содержащем* Λ^ε (*соответственно,* $\widetilde{\Lambda}^\varepsilon$).

8.3. **Случай, когда корректор обращается в нуль.** Предположим, что $g^0 = \overline{g}$, т. е. справедливы соотношения (1.28). Тогда Γ-периодическое решение задачи (1.20) обращается в нуль: $\Lambda(\mathbf{x}) = 0$. Пусть кроме этого выполнено равенство

$$
\sum_{j=1}^{d} D_j a_j(\mathbf{x})^* = 0. \tag{8.11}
$$

Тогда Γ-периодическое решение задачи (1.30) также равно нулю: $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) = 0$. Поэтому в рассматриваемом случае оператор (3.5) обращается в нуль, формула (3.14) упрощается и из теоремы 3.4 вытекает следующий результат.

Предложение 8.10. *Пусть справедливы равенства* (1.28) *и* (8.11). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *верна оценка*

$$
\left\| (B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_N^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \right\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_4 c(\phi) \varepsilon^{1/2} |\zeta|^{-1/4} + \mathcal{C}_5 c(\phi)^2 \varepsilon.
$$

8.4. **Специальный случай.** Предположим теперь, что $g^0 = \underline{g}$, т. е. справедливы представления (1.29). Тогда в силу предложения 8.3(3°) выполнено условие 8.1. При этом согласно [BSu2, замечание 3.5] матрица-функция (1.22) постоянна и совпадает с g^0, т. е. $\widetilde{g}(\mathbf{x}) = g^0 = \underline{g}$. Предположим дополнительно, что справедливо равенство (8.11). Тогда $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) = 0$ и из теоремы 8.6 вытекает следующий результат.

Предложение 8.11. *Пусть имеют место соотношения* (1.29) *и* (8.11). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *верна оценка*

$$
\left\| g^\varepsilon b(\mathbf{D}) (B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - g^0 b(\mathbf{D}) (B_N^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \right\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}_4 c(\phi) \varepsilon^{1/2} |\zeta|^{-1/4} + \widetilde{\mathcal{C}}_{12} c(\phi)^2 \varepsilon.
$$

8.5. **Оценки в строго внутренней подобласти.** Пусть $\mathcal{O}'$ — строго внутренняя подобласть области $\mathcal{O}$. Используя теорему 3.2 и результаты для задачи усреднения в $\mathbb{R}^d$, нетрудно получить аппроксимацию обобщенной резольвенты $(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$ по $(L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O}'))$-норме с оценкой погрешности точного порядка $O(\varepsilon)$.

Теорема 8.12. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.4. *Пусть* $\mathcal{O}'$ *— строго внутренняя подобласть области* $\mathcal{O}$. *Введем обозначение* $\delta := \operatorname{dist}\{\mathcal{O}'; \partial\mathcal{O}\}$. *Тогда при* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\left\|(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_N(\varepsilon;\zeta)\right\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O}')} \leqslant (\mathcal{C}_{13}c(\phi)|\zeta|^{-1/2}\delta^{-1} + \mathcal{C}_{14}c(\phi)^2)\varepsilon, \tag{8.12}$$

$$\left\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G_N(\varepsilon;\zeta)\right\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O}')} \leqslant (\widetilde{\mathcal{C}}_{13}c(\phi)|\zeta|^{-1/2}\delta^{-1} + \widetilde{\mathcal{C}}_{14}c(\phi)^2)\varepsilon. \tag{8.13}$$

Постоянные $\mathcal{C}_{13}$, $\mathcal{C}_{14}$, $\widetilde{\mathcal{C}}_{13}$ *и* $\widetilde{\mathcal{C}}_{14}$ *зависят только от исходных данных* (2.35).

Доказательство. Начнем со случая, когда $\operatorname{Re}\zeta \leqslant 0$, $|\zeta| \geqslant 1$.

Фиксируем гладкую срезку $\chi(\mathbf{x})$ такую, что

$$\chi \in C_0^\infty(\mathcal{O});\quad 0 \leqslant \chi(\mathbf{x}) \leqslant 1;\quad \chi(\mathbf{x}) = 1 \text{ при } \mathbf{x} \in \mathcal{O}';\quad |\nabla\chi(\mathbf{x})| \leqslant \varkappa\delta^{-1}. \tag{8.14}$$

Постоянная $\varkappa$ зависит только от размерности d и области $\mathcal{O}$.

Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon = (B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\mathbf{F}$ и $\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon = (B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\widetilde{\mathbf{F}}$. Тогда

$$\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}] - \zeta(Q_0^\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon), \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} = 0,\quad \boldsymbol{\eta} \in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{8.15}$$

Подставим $\boldsymbol{\eta} = \chi^2(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)$ в (8.15) и обозначим

$$\mathfrak{U}(\varepsilon) = \mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon), \chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)].$$

Соответствующее тождество запишется в виде

$$\begin{aligned} &\mathfrak{U}(\varepsilon) - \zeta(Q_0^\varepsilon\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon), \chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon))_{L_2(\mathcal{O})} \\ &= 2i\operatorname{Im}(g^\varepsilon\mathbf{z}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon))_{L_2(\mathcal{O})} + (g^\varepsilon\mathbf{z}_\varepsilon, \mathbf{z}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \\ &+ 2i\operatorname{Im}\sum_{j=1}^d((D_j\chi)(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon), (a_j^\varepsilon)^*\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon))_{L_2(\mathcal{O})}, \end{aligned} \tag{8.16}$$

где $\mathbf{z}_\varepsilon := \sum_{l=1}^d b_l(D_l\chi)(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)$. С учетом (1.6) и (8.14) имеем

$$\|\mathbf{z}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant (d\alpha_1)^{1/2}\varkappa\delta^{-1}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{8.17}$$

Возьмем вещественную часть равенства (8.16):

$$\mathfrak{U}(\varepsilon) - (\operatorname{Re}\zeta)(Q_0^\varepsilon\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon), \chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon))_{L_2(\mathcal{O})} = (g^\varepsilon\mathbf{z}_\varepsilon, \mathbf{z}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Поскольку $\operatorname{Re}\zeta \leqslant 0$, то оба слагаемых слева неотрицательны, а потому

$$\mathfrak{U}(\varepsilon) \leqslant (g^\varepsilon\mathbf{z}_\varepsilon, \mathbf{z}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|g\|_{L_\infty}\|\mathbf{z}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|g\|_{L_\infty}d\alpha_1\varkappa^2\delta^{-2}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{8.18}$$

Мы учли (8.17).

Далее, функцию $\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)$ продолжим нулем на $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{O}$ и заметим, что $\mathfrak{U}(\varepsilon) = \mathfrak{b}_\varepsilon[\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon), \chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)]$. Тогда из (1.17) и (8.18) вытекает оценка

$$\|\mathbf{D}\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{37}\delta^{-1}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{8.19}$$

где $C_{37} = c_*^{-1/2}(d\alpha_1)^{1/2}\varkappa\|g\|^{1/2}_{L_\infty}$.

Оценки (3.1) и (3.24) показывают, что

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_{14}^{(1)}\varepsilon|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},\quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{8.20}$$

где $\mathcal{C}_{14}^{(1)} = \mathcal{C}_3 + C_1C_{10}$. Из (8.19) и (8.20) вытекает оценка

$$\|\mathbf{D}\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}'_{13}\delta^{-1}\varepsilon|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},\quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{8.21}$$

где $\mathcal{C}'_{13} = C_{37}\mathcal{C}_{14}^{(1)}$. В силу (8.20) и (8.21) справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}')} \leqslant (\mathcal{C}'_{13}\delta^{-1} + \mathcal{C}_{14}^{(1)})\varepsilon|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},\quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \tag{8.22}$$

С учетом (3.28) выполнено

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}')} \leqslant \|\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_{14}^{(2)}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{8.23}$$

где $\mathcal{C}_{14}^{(2)} = (C_2 + C_3)C_{10}$. В результате, из (8.22) и (8.23) следует оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}')} \leqslant \big(\mathcal{C}'_{13}|\zeta|^{-1/2}\delta^{-1} + \mathcal{C}'_{14}\big)\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \operatorname{Re}\zeta \leqslant 0,\ |\zeta| \geqslant 1;\ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{8.24}$$

где $\mathcal{C}'_{14} = \mathcal{C}_{14}^{(1)} + \mathcal{C}_{14}^{(2)}$.

Рассмотрим теперь значения $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $\operatorname{Re}\zeta > 0$, $|\zeta| \geqslant 1$. Пусть $\widehat{\zeta} = -\operatorname{Re}\zeta + i\operatorname{Im}\zeta$. Воспользуемся тождеством (7.9). Для второго и третьего слагаемых в правой части (7.9) применим прежние оценки (7.11) и (7.16). Оценим первое слагаемое в правой части (7.9):

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{L}_1(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O}')} \leqslant \big\|(B_{N,\varepsilon} - \widehat{\zeta}Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_N^0 - \widehat{\zeta}\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_N(\varepsilon;\widehat{\zeta})\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O}')} \\ \times \big\|(B_N^0 - \widehat{\zeta}\overline{Q_0})(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \tag{8.25}$$

Из уже доказанной оценки (8.24) в точке $\widehat{\zeta}$ следует оценка первого сомножителя справа:

$$\big\|(B_{N,\varepsilon} - \widehat{\zeta}Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_N^0 - \widehat{\zeta}\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_N(\varepsilon;\widehat{\zeta})\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O}')} \leqslant \big(\mathcal{C}'_{13}|\zeta|^{-1/2}\delta^{-1} + \mathcal{C}'_{14}\big)\varepsilon \tag{8.26}$$

при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$. Комбинируя (7.4), (7.5), (8.25) и (8.26), приходим к оценке

$$\|\mathfrak{L}_1(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O}')} \leqslant 2c(\phi)\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}\big(\mathcal{C}'_{13}|\zeta|^{-1/2}\delta^{-1} + \mathcal{C}'_{14}\big)\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \tag{8.27}$$

Теперь из (7.9), (7.11), (7.16) и (8.27) вытекает искомая оценка (8.12) с постоянными $\mathcal{C}_{13} = 2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}\mathcal{C}'_{13}$ и $\mathcal{C}_{14} = 2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}\mathcal{C}'_{14} + \mathcal{C}_5^{(2)} + \mathcal{C}_5^{(3)}$.

Неравенство (8.13) выводится из (8.12) с помощью (7.18)–(7.20). □

При дополнительных предположениях о решениях вспомогательных задач сглаживатель S_ε в корректоре удается устранить.

Теорема 8.13. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.12. *Кроме того, пусть выполнены условия* 8.1 *и* 8.2. *Пусть операторы $K_N^0(\varepsilon;\zeta)$ и $G_N^0(\varepsilon;\zeta)$ определены в* (8.1), (8.2). *Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ и $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, справедливы оценки*

$$\big\|(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_N^0(\varepsilon;\zeta)\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O}')} \leqslant (\mathcal{C}_{13}c(\phi)|\zeta|^{-1/2}\delta^{-1} + \mathcal{C}_{15}c(\phi)^2)\varepsilon, \tag{8.28}$$

$$\big\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G_N^0(\varepsilon;\zeta)\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O}')} \leqslant (\widetilde{\mathcal{C}}_{13}c(\phi)|\zeta|^{-1/2}\delta^{-1} + \widetilde{\mathcal{C}}_{15}c(\phi)^2)\varepsilon. \tag{8.29}$$

Постоянные $\mathcal{C}_{13}$ и $\widetilde{\mathcal{C}}_{13}$ — те же, что в теореме 8.12. *Постоянные $\mathcal{C}_{15}$ и $\widetilde{\mathcal{C}}_{15}$ зависят от исходных данных* (2.35), *а также от норм $\|\Lambda\|_{L_\infty}$, $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$.*

Доказательство. Неравенство (8.28) получается на основании (8.5), (8.6) и (8.12).

Из (8.28) вытекает, что

$$\begin{aligned} &\big\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - g^\varepsilon b(\mathbf{D})(I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon)(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O}')} \\ &\leqslant (d\alpha_1)^{1/2}\|g\|_{L_\infty}(\mathcal{C}_{13}c(\phi)|\zeta|^{-1/2}\delta^{-1} + \mathcal{C}_{15}c(\phi)^2)\varepsilon. \end{aligned}$$

Вместе с (8.8)–(8.10) это влечет оценку (8.29). □

§ 9. „Другая" аппроксимация обобщенной резольвенты

В теоремах из §3 и §8 предполагалось, что $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ и $|\zeta| \geqslant 1$. В настоящем параграфе устанавливаются результаты, справедливые в более широкой области изменения спектрального параметра. Материал этого параграфа аналогичен §9 из [MSu4].

9.1. **Общий случай.**

Теорема 9.1. *Пусть* $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ *— ограниченная область с границей класса* $C^{1,1}$. *Пусть* $c_\flat \geqslant 0$ *— общая нижняя грань операторов* $\widetilde{B}_{N,\varepsilon} = (f^\varepsilon)^* B_{N,\varepsilon} f^\varepsilon$ *и* $\widetilde{B}_N^0 = f_0 B_N^0 f_0$. *Пусть* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_\flat, \infty)$. *Положим* $\psi = \arg(\zeta - c_\flat)$, $0 < \psi < 2\pi$. *Введем обозначение*

$$\rho_\flat(\zeta) = \begin{cases} c(\psi)^2 |\zeta - c_\flat|^{-2}, & |\zeta - c_\flat| < 1, \\ c(\psi)^2, & |\zeta - c_\flat| \geqslant 1. \end{cases} \tag{9.1}$$

Здесь $c(\psi)$ *определено в* (1.40). *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon = (B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\mathbf{F}$ *и* $\mathbf{u}_0 = (B_N^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\mathbf{F}$, *где* $\mathbf{F} \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. *Пусть* $\mathbf{v}_\varepsilon$ *определено в* (3.11), (3.12). *Пусть* $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$. *Пусть операторы* $K_N(\varepsilon;\zeta)$ *и* $G_N(\varepsilon;\zeta)$ *определены в* (3.5) *и* (3.6). *Пусть число* ε_1 *подчинено условию* 3.1. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_1 \varepsilon \rho_\flat(\zeta) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{9.2}$$

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \bigl(\mathfrak{C}_2 \varepsilon^{1/2} \rho_\flat(\zeta)^{1/2} + \mathfrak{C}_3 \varepsilon |1+\zeta|^{1/2} \rho_\flat(\zeta)\bigr) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{9.3}$$

$$\bigl\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 - g^\varepsilon \bigl(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\bigr)^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_0\bigr\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \bigl(\widetilde{\mathfrak{C}}_2 \varepsilon^{1/2} \rho_\flat(\zeta)^{1/2} + \widetilde{\mathfrak{C}}_3 \varepsilon |1+\zeta|^{1/2} \rho_\flat(\zeta)\bigr) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{9.4}$$

В операторных терминах,

$$\bigl\|(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_N^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\bigr\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_1 \varepsilon \rho_\flat(\zeta), \tag{9.5}$$

$$\begin{aligned} &\bigl\|(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_N^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_N(\varepsilon;\zeta)\bigr\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \\ &\quad \leqslant \mathfrak{C}_2 \varepsilon^{1/2} \rho_\flat(\zeta)^{1/2} + \mathfrak{C}_3 \varepsilon |1+\zeta|^{1/2} \rho_\flat(\zeta), \end{aligned} \tag{9.6}$$

$$\bigl\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G_N(\varepsilon;\zeta)\bigr\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{\mathfrak{C}}_2 \varepsilon^{1/2} \rho_\flat(\zeta)^{1/2} + \widetilde{\mathfrak{C}}_3 \varepsilon |1+\zeta|^{1/2} \rho_\flat(\zeta). \tag{9.7}$$

Постоянные $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$, $\widetilde{\mathfrak{C}}_2$ *и* $\widetilde{\mathfrak{C}}_3$ *зависят только от исходных данных* (2.35).

Замечание 9.2. 1) *Величина* $c(\psi)^2|\zeta - c_\flat|^{-2}$ *в* (9.1) *обратна к квадрату расстояния от точки* ζ *до* $[c_\flat, \infty)$. 2) *В силу* (2.17), (2.19), (2.32) *и* (2.37) *в качестве* $c_\flat$ *можно выбрать постоянную* $c_4 \|f^{-1}\|_{L_\infty}^{-2} = \frac{1}{2} k_1 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1} \|Q_0\|_{L_\infty}^{-1}$. 3) *Легко оценить* $c_\flat$ *сверху. Из вариационных соображений и оценок* (2.18) *и* (2.33) *следует, что* $c_\flat \leqslant \min\{c_5, c_6\} \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}$. *Поэтому число* $c_\flat$ *контролируется через данные задачи* (2.35).

Замечание 9.3. *Оценки* (9.2)–(9.7) *выгодно применять при ограниченных значениях* $|\zeta|$ *и малом* $\varepsilon \rho_\flat(\zeta)$. *В этом случае величина* $\varepsilon^{1/2}\rho_\flat(\zeta)^{1/2} + \varepsilon|1+\zeta|^{1/2}\rho_\flat(\zeta)$ *контролируется через* $\varepsilon^{1/2}\rho_\flat(\zeta)^{1/2}$. *При больших значениях* $|\zeta|$ *оценки из теорем* 3.2 *и* 3.4 *предпочтительнее.*

Начнем со следующих двух лемм, аналогичных леммам 9.4 и 9.5 из [MSu4].

Лемма 9.4. *В предположениях теоремы* 9.1 *при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *и* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_\flat, \infty)$ *справедливы оценки*

$$\bigl\|(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\bigr\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|f\|_{L_\infty}^2 c(\psi) |\zeta - c_\flat|^{-1}, \tag{9.8}$$

$$\bigl\|(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\bigr\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_4 (1+|\zeta|)^{-1/2} \rho_\flat(\zeta)^{1/2}, \tag{9.9}$$

$$\bigl\|(B_N^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\bigr\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|f\|_{L_\infty}^2 c(\psi) |\zeta - c_\flat|^{-1}, \tag{9.10}$$

$$\bigl\|(B_N^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\bigr\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_4 (1+|\zeta|)^{-1/2} \rho_\flat(\zeta)^{1/2}, \tag{9.11}$$

$$\bigl\|(B_N^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\bigr\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_5 \rho_\flat(\zeta)^{1/2}. \tag{9.12}$$

Постоянные $\mathfrak{C}_4$ *и* $\mathfrak{C}_5$ *зависят лишь от исходных данных* (2.35).

Доказательство. При наших предположениях спектр оператора $\widetilde{B}_{N,\varepsilon}$ содержится в $[c_\flat,\infty)$, а потому $\|(\widetilde{B}_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant c(\psi)|\zeta-c_\flat|^{-1}$. Вместе с (2.21) это влечет (9.8).

Далее, из (2.20) и (2.21) следует, что

$$\big\|B_{N,\varepsilon}^{1/2}(B_{N,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\big\|_{L_2\to L_2}=\big\|\widetilde{B}_{N,\varepsilon}^{1/2}(\widetilde{B}_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}(f^\varepsilon)^*\big\|_{L_2\to L_2}\leqslant\|f\|_{L_\infty}\sup_{x\geqslant c_\flat}\frac{x^{1/2}}{|x-\zeta|}.$$

Вычисление показывает, что

$$\sup_{x\geqslant c_\flat}\frac{x}{|x-\zeta|^2}\leqslant\begin{cases}(c_\flat+1)c(\psi)^2|\zeta-c_\flat|^{-2}, & |\zeta-c_\flat|<1,\\ (c_\flat+1)c(\psi)^2|\zeta-c_\flat|^{-1}, & |\zeta-c_\flat|\geqslant 1.\end{cases}$$

Заметим, что $|\zeta|+1\leqslant 2+c_\flat$ при $|\zeta-c_\flat|<1$ и $(|\zeta|+1)|\zeta-c_\flat|^{-1}\leqslant 2+c_\flat$ при $|\zeta-c_\flat|\geqslant 1$. Следовательно,

$$(|\zeta|+1)^{1/2}\big\|B_{N,\varepsilon}^{1/2}(B_{N,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant\|f\|_{L_\infty}(c_\flat+1)^{1/2}(c_\flat+2)^{1/2}\rho_\flat(\zeta)^{1/2}.$$

Вместе с (2.17) это доказывает оценку (9.9) при $\mathfrak{C}_4=c_4^{-1/2}\|f\|_{L_\infty}(c_\flat+1)^{1/2}(c_\flat+2)^{1/2}$.

Оценки (9.10) и (9.11) проверяются аналогично выводу оценок (9.8) и (9.9) с использованием (2.32), (2.37) и (2.38).

Остается проверить (9.12). В силу (2.36)–(2.38) имеем

$$\begin{aligned}&\big\|(B_N^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})}\leqslant\big\|(B_N^0)^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})}\big\|B_N^0(B_N^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\\&\leqslant\widehat{c}\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}\sup_{x\geqslant c_\flat}x|x-\zeta|^{-1}\leqslant\widehat{c}\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}\sup_{x\geqslant c_\flat}(x+1)|x-\zeta|^{-1}.\end{aligned}\tag{9.13}$$

Вычисление показывает, что

$$\sup_{x\geqslant c_\flat}\frac{(x+1)^2}{|x-\zeta|^2}\leqslant(c_\flat+2)^2\rho_\flat(\zeta),\quad \zeta\in\mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty).\tag{9.14}$$

Соотношения (9.13) и (9.14) влекут (9.12) с постоянной $\mathfrak{C}_5=\widehat{c}\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}(c_\flat+2)$. $\square$

Лемма 9.5. *В предположениях теоремы* 9.1 *при* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *и* $\zeta\in\mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty)$ *справедливы оценки*

$$\|K_N(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant\mathfrak{C}_6(1+|\zeta|)^{-1/2}\rho_\flat(\zeta)^{1/2},\tag{9.15}$$

$$\varepsilon\|K_N(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\leqslant\mathfrak{C}_7\big(\varepsilon+(1+|\zeta|)^{-1/2}\big)\rho_\flat(\zeta)^{1/2}.\tag{9.16}$$

Постоянные $\mathfrak{C}_6$ *и* $\mathfrak{C}_7$ *зависят лишь от исходных данных* (2.35).

Доказательство. Комбинируя предложение 1.2 и соотношения (1.5), (1.24), (1.32), (3.4), (3.5), получаем

$$\begin{aligned}\|K_N(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}&\leqslant\big\|\big(\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})+\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon\big)P_{\mathcal{O}}(B_N^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\&\leqslant M_1\alpha_1^{1/2}C_{\mathcal{O}}^{(1)}\big\|(B_N^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}+\widetilde{M}_1C_{\mathcal{O}}^{(0)}\big\|(B_N^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned}$$

Отсюда и из (9.11) вытекает оценка (9.15) с постоянной $\mathfrak{C}_6=\big(M_1\alpha_1^{1/2}C_{\mathcal{O}}^{(1)}+\widetilde{M}_1C_{\mathcal{O}}^{(0)}\big)\mathfrak{C}_4$.

Далее, в силу (3.5)

$$\begin{aligned}\varepsilon\|\mathbf{D}K_N(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}&\leqslant\big\|\big((\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})+(\mathbf{D}\widetilde{\Lambda})^\varepsilon S_\varepsilon\big)P_{\mathcal{O}}(B_N^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\&+\varepsilon\big\|\big(\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})+\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon\big)\mathbf{D}P_{\mathcal{O}}(B_N^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Применяя предложение 1.2 и соотношения (1.5), (1.24), (1.25), (1.32), (1.33), (3.4), получаем

$$\begin{aligned}\varepsilon\|\mathbf{D}K_N(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}&\leqslant\big(M_2\alpha_1^{1/2}+\widetilde{M}_2+\varepsilon\widetilde{M}_1\big)C_{\mathcal{O}}^{(1)}\big\|(B_N^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\&+\varepsilon M_1\alpha_1^{1/2}C_{\mathcal{O}}^{(2)}\big\|(B_N^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})}.\end{aligned}$$

Вместе с (9.11), (9.12) это влечет
$$\varepsilon\|\mathbf{D}K_N(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_7'(1+|\zeta|)^{-1/2}\rho_\flat(\zeta)^{1/2} + \mathfrak{C}_7''\varepsilon\rho_\flat(\zeta)^{1/2}, \tag{9.17}$$
где $\mathfrak{C}_7' = \bigl(M_2\alpha_1^{1/2} + \widetilde{M}_2 + \widetilde{M}_1\bigr)C_{\mathcal{O}}^{(1)}\mathfrak{C}_4$ и $\mathfrak{C}_7'' = M_1\alpha_1^{1/2}C_{\mathcal{O}}^{(2)}\mathfrak{C}_5$.

В итоге из оценок (9.15) и (9.17) вытекает искомое неравенство (9.16) с постоянной $\mathfrak{C}_7 = \max\{\mathfrak{C}_7'; \mathfrak{C}_6 + \mathfrak{C}_7''\}$. $\square$

9.2. **Доказательство теоремы 9.1.** Начнем с доказательства оценки (9.5). Запишем неравенство (6.24) в точке $\zeta = -1$:
$$\bigl\|(B_{N,\varepsilon} + Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_N^0 + \overline{Q_0})^{-1}\bigr\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_3'\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \tag{9.18}$$
Аналогично (7.2), справедливо тождество
$$\begin{aligned}
&(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\\
&= (B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}(B_{N,\varepsilon} + Q_0^\varepsilon)\left((B_{N,\varepsilon} + Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_N^0 + \overline{Q_0})^{-1}\right)(B_N^0 + \overline{Q_0})(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\\
&+ (1+\zeta)(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}(Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}.
\end{aligned} \tag{9.19}$$
Обозначим слагаемые в правой части (9.19) через $\mathfrak{J}_1(\varepsilon;\zeta)$ и $\mathfrak{J}_2(\varepsilon;\zeta)$. Аналогично (7.3) и (7.4) имеем
$$\bigl\|(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}(B_{N,\varepsilon} + Q_0^\varepsilon)\bigr\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}\sup_{x\geqslant c_\flat}\frac{(x+1)}{|x-\zeta|}, \tag{9.20}$$
$$\bigl\|(B_N^0 + \overline{Q_0})(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\bigr\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}\sup_{x\geqslant c_\flat}\frac{(x+1)}{|x-\zeta|}. \tag{9.21}$$
Теперь соотношения (9.14), (9.18), (9.20), (9.21) приводят к оценке
$$\|\mathfrak{J}_1(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_8\varepsilon\rho_\flat(\zeta), \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{9.22}$$
где $\mathfrak{C}_8 = \mathcal{C}_3'\|f\|^2_{L_\infty}\|f^{-1}\|^2_{L_\infty}(c_\flat + 2)^2$.

Оценим теперь норму оператора $\mathfrak{J}_2(\varepsilon;\zeta)$. Пусть $\mathbf{\Phi}_1, \mathbf{\Phi}_2 \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. В силу леммы 4.4(3°) при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ выполнено
$$\begin{aligned}
&\left|\bigl((Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\mathbf{\Phi}_1, (B_{N,\varepsilon} - \zeta^* Q_0^\varepsilon)^{-1}\mathbf{\Phi}_2\bigr)_{L_2(\mathcal{O})}\right|\\
&\leqslant 2\widetilde{C}'''\varepsilon\|Q_0\|_{L_\infty}\bigl\|(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\mathbf{\Phi}_1\bigr\|_{H^1(\mathcal{O})}\bigl\|(B_{N,\varepsilon} - \zeta^* Q_0^\varepsilon)^{-1}\mathbf{\Phi}_2\bigr\|_{H^1(\mathcal{O})}\\
&\leqslant 2\widetilde{C}'''\varepsilon\|Q_0\|_{L_\infty}\mathfrak{C}_4^2(1+|\zeta|)^{-1}\rho_\flat(\zeta)\|\mathbf{\Phi}_1\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{\Phi}_2\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{\Phi}_1, \mathbf{\Phi}_2 \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n).
\end{aligned}$$
Мы учли оценки (9.9) и (9.11). Следовательно,
$$\|\mathfrak{J}_2(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_9\varepsilon\rho_\flat(\zeta), \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{9.23}$$
где $\mathfrak{C}_9 = 2\widetilde{C}'''\|Q_0\|_{L_\infty}\mathfrak{C}_4^2$.

В итоге, соотношения (9.19), (9.22) и (9.23) влекут (9.5) с постоянной $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_8 + \mathfrak{C}_9$.

Установим теперь оценку (9.6). Запишем оценку (5.85) в точке $\zeta = -1$:
$$\bigl\|(B_{N,\varepsilon}+Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_N^0+\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_N(\varepsilon;-1)\bigr\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant (2\mathcal{C}_{10}+\mathcal{C}_8)\varepsilon^{1/2}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \tag{9.24}$$

Аналогично (7.9), справедливо тождество
$$\begin{aligned}
&(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_N(\varepsilon;\zeta)\\
&= \left((B_{N,\varepsilon} + Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_N^0 + \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_N(\varepsilon;-1)\right)(B_N^0 + \overline{Q_0})(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\\
&+ (1+\zeta)(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}Q_0^\varepsilon\left((B_{N,\varepsilon} + Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_N^0 + \overline{Q_0})^{-1}\right)(B_N^0 + \overline{Q_0})(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\\
&+ (1+\zeta)(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}(Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}.
\end{aligned} \tag{9.25}$$

Обозначим последовательные слагаемые в правой части (9.25) через $\mathcal{L}_1(\varepsilon;\zeta)$, $\mathcal{L}_2(\varepsilon;\zeta)$ и $\mathcal{L}_3(\varepsilon;\zeta)$. Заметим, что $\mathcal{L}_3(\varepsilon;\zeta)=\mathfrak{J}_2(\varepsilon;\zeta)$.

Очевидно,

$$\|\mathcal{L}_1(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\leqslant \big\|B_{N,\varepsilon}+Q_0^\varepsilon)^{-1}-(B_N^0+\overline{Q_0})^{-1}-\varepsilon K_N(\varepsilon;-1)\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}$$
$$\times\big\|(B_N^0+\overline{Q_0})(B_N^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}.$$

Вместе с (9.14), (9.21) и (9.24) это влечет

$$\|\mathcal{L}_1(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\leqslant \mathfrak{C}_{10}\varepsilon^{1/2}\rho_\flat(\zeta)^{1/2},\quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1, \tag{9.26}$$

где $\mathfrak{C}_{10}=\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}(c_\flat+2)(2\mathcal{C}_{10}+\mathcal{C}_8)$.

Оценим второй член в правой части (9.25):

$$\|\mathcal{L}_2(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\leqslant|1+\zeta|\,\big\|(B_{N,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\|Q_0\|_{L_\infty}$$
$$\times\big\|(B_{N,\varepsilon}+Q_0^\varepsilon)^{-1}-(B_N^0+\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\big\|(B_N^0+\overline{Q_0})(B_N^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}.$$

Комбинируя это неравенство и (9.9), (9.14), (9.18) и (9.21), получаем

$$\|\mathcal{L}_2(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\leqslant\mathfrak{C}_{11}\varepsilon|1+\zeta|^{1/2}\rho_\flat(\zeta),\quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1, \tag{9.27}$$

где $\mathfrak{C}_{11}=\mathcal{C}_3'\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|^3_{L_\infty}(c_\flat+2)\mathfrak{C}_4$.

Остается оценить $\mathcal{L}_3(\varepsilon;\zeta)$. Аналогично (7.12)

$$\begin{aligned}\|\mathcal{L}_3(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}&\leqslant c_4^{-1/2}\big\|\widetilde{B}_{N,\varepsilon}^{1/2}(f^\varepsilon)^{-1}\mathcal{L}_3(\varepsilon;\zeta)\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\\&=c_4^{-1/2}|1+\zeta|\big\|\widetilde{B}_{N,\varepsilon}^{1/2}(\widetilde{B}_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}(f^\varepsilon)^*(Q_0^\varepsilon-\overline{Q_0})(B_N^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned}\tag{9.28}$$

Пусть $\mathbf{\Phi}_1,\mathbf{\Phi}_2\in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. В силу леммы 4.4($3^\circ$) при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}&\Big|\big((Q_0^\varepsilon-\overline{Q_0})(B_N^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\mathbf{\Phi}_1,f^\varepsilon\widetilde{B}_{N,\varepsilon}^{1/2}(\widetilde{B}_{N,\varepsilon}-\zeta^*I)^{-1}\mathbf{\Phi}_2\big)_{L_2(\mathcal{O})}\Big|\\&\leqslant 2\widetilde{C}'''\varepsilon\|Q_0\|_{L_\infty}\big\|(B_N^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\mathbf{\Phi}_1\big\|_{H^1(\mathcal{O})}\big\|f^\varepsilon\widetilde{B}_{N,\varepsilon}^{1/2}(\widetilde{B}_{N,\varepsilon}-\zeta^*I)^{-1}\mathbf{\Phi}_2\big\|_{H^1(\mathcal{O})}.\end{aligned}\tag{9.29}$$

Аналогично (7.15), учитывая (9.14), получаем

$$\begin{aligned}\big\|f^\varepsilon\widetilde{B}_{N,\varepsilon}^{1/2}(\widetilde{B}_{N,\varepsilon}-\zeta^*I)^{-1}\mathbf{\Phi}_2\big\|_{H^1(\mathcal{O})}&\leqslant c_4^{-1/2}\sup_{x\geqslant c_\flat}x|x-\zeta^*|^{-1}\|\mathbf{\Phi}_2\|_{L_2(\mathcal{O})}\\&\leqslant c_4^{-1/2}(c_\flat+2)\rho_\flat(\zeta)^{1/2}\|\mathbf{\Phi}_2\|_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned}$$

Вместе с (9.11) и (9.29) это влечет

$$\begin{aligned}&\Big|\big((Q_0^\varepsilon-\overline{Q_0})(B_N^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\mathbf{\Phi}_1,f^\varepsilon\widetilde{B}_{N,\varepsilon}^{1/2}(\widetilde{B}_{N,\varepsilon}-\zeta^*I)^{-1}\mathbf{\Phi}_2\big)_{L_2(\mathcal{O})}\Big|\\&\leqslant\widetilde{\mathfrak{C}}_{12}\varepsilon(1+|\zeta|)^{-1/2}\rho_\flat(\zeta)\|\mathbf{\Phi}_1\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{\Phi}_2\|_{L_2(\mathcal{O})},\quad\mathbf{\Phi}_1,\mathbf{\Phi}_2\in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n).\end{aligned}$$

где $\widetilde{\mathfrak{C}}_{12}=2\widetilde{C}'''c_4^{-1/2}(c_\flat+2)\|Q_0\|_{L_\infty}\mathfrak{C}_4$. Отсюда и из (9.28) следует оценка

$$\|\mathcal{L}_3(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\leqslant\mathfrak{C}_{12}\varepsilon|1+\zeta|^{1/2}\rho_\flat(\zeta),\quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1;\quad\mathfrak{C}_{12}=c_4^{-1/2}\widetilde{\mathfrak{C}}_{12}. \tag{9.30}$$

Сопоставляя (9.25)–(9.27) и (9.30), приходим к искомой оценке (9.6) с постоянными $\mathfrak{C}_2=\mathfrak{C}_{10}$, $\mathfrak{C}_3=\mathfrak{C}_{11}+\mathfrak{C}_{12}$.

Остается проверить (9.4). Из (9.3) с учетом (1.3) и (1.6) следует, что при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ справедлива оценка

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon-g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant(d\alpha_1)^{1/2}\|g\|_{L_\infty}\big(\mathfrak{C}_2\varepsilon^{1/2}\rho_\flat(\zeta)^{1/2}+\mathfrak{C}_3\varepsilon|1+\zeta|^{1/2}\rho_\flat(\zeta)\big)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{9.31}$$

Далее, по аналогии с (7.18)–(7.20) с учетом (9.11) и (9.12) получаем

$$\big\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon-\widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0-g^\varepsilon\big(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\big)^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0\big\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant\mathfrak{C}_{13}\varepsilon\rho_\flat(\zeta)^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{9.32}$$

где $\mathfrak{C}_{13}$ зависит только от данных задачи (2.35). Из (9.31) и (9.32) вытекает оценка (9.4). $\square$

Следствие 9.6. *В условиях теоремы* 9.1 *при* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_\flat, \infty)$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_{14}\varepsilon^{1/2}\rho_\flat(\zeta)^{3/4}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{9.33}$$

$$\big\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 - g^\varepsilon (b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda})^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_0\big\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{\mathfrak{C}}_{14}\varepsilon^{1/2}\rho_\flat(\zeta)^{3/4}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{9.34}$$

Постоянные $\mathfrak{C}_{14}$ *и* $\widetilde{\mathfrak{C}}_{14}$ *зависят лишь от исходных данных* (2.35).

Доказательство. В силу (9.9), (9.11) и (9.16) справедлива оценка

$$\begin{aligned}&\big\|(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_N(\varepsilon;\zeta)\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\ &\leqslant \mathfrak{C}_{15}\big(\varepsilon + (1+|\zeta|)^{-1/2}\big)\rho_\flat(\zeta)^{1/2}, \quad 0<\varepsilon\leqslant 1,\end{aligned} \tag{9.35}$$

где $\mathfrak{C}_{15} = 2\mathfrak{C}_4 + \mathfrak{C}_7$. При $|1+\zeta|^{1/2}\rho_\flat(\zeta)^{1/4} \leqslant \varepsilon^{-1/2}$ используем (9.6) и заметим, что $\varepsilon|1+\zeta|^{1/2}\rho_\flat(\zeta) \leqslant \varepsilon^{1/2}\rho_\flat(\zeta)^{3/4}$. При $|1+\zeta|^{1/2}\rho_\flat(\zeta)^{1/4} > \varepsilon^{-1/2}$ применим (9.35) и заметим, что $(1+|\zeta|)^{-1/2}\rho_\flat(\zeta)^{1/2} < \varepsilon^{1/2}\rho_\flat(\zeta)^{3/4}$. В результате получаем оценку (9.33) с постоянной $\mathfrak{C}_{14} = \max\{\mathfrak{C}_2 + \mathfrak{C}_3; 2\mathfrak{C}_{15}\}$.

Соотношения (9.32) и (9.33) с учетом (1.3) и (1.6) приводят к оценке (9.34) с постоянной $\widetilde{\mathfrak{C}}_{14} = (d\alpha_1)^{1/2}\|g\|_{L_\infty}\mathfrak{C}_{14} + \mathfrak{C}_{13}$. □

9.3. **Устранение сглаживающего оператора.**

Теорема 9.7. *Пусть выполнены условия теоремы* 9.1*. Кроме того, пусть выполнены условия* 8.1 *и* 8.2*. Пусть операторы* $K_N^0(\varepsilon;\zeta)$ *и* $G_N^0(\varepsilon;\zeta)$ *определены в* (8.1), (8.2)*. Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *и* $\zeta \in \mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty)$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned}&\big\|(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_N^0(\varepsilon;\zeta)\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\ &\leqslant \mathfrak{C}_2\varepsilon^{1/2}\rho_\flat(\zeta)^{1/2} + \mathfrak{C}_{16}\varepsilon|1+\zeta|^{1/2}\rho_\flat(\zeta),\end{aligned} \tag{9.36}$$

$$\big\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G_N^0(\varepsilon;\zeta)\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{\mathfrak{C}}_2\varepsilon^{1/2}\rho_\flat(\zeta)^{1/2} + \widetilde{\mathfrak{C}}_{16}\varepsilon|1+\zeta|^{1/2}\rho_\flat(\zeta). \tag{9.37}$$

Здесь постоянные $\mathfrak{C}_2$ *и* $\widetilde{\mathfrak{C}}_2$ — *те же, что в теореме* 9.1*. Постоянные* $\mathfrak{C}_{16}$ *и* $\widetilde{\mathfrak{C}}_{16}$ *зависят только от исходных данных* (2.35) *и от норм* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$, $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$.

Доказательство. Неравенство (9.36) следует из (9.6) с помощью лемм 8.7 и 8.8 и соотношений (3.4), (9.12).

Оценка (9.37) выводится из (9.36) по аналогии с (8.7)–(8.10) при учете (9.12). □

9.4. **Специальные случаи.** Следующие утверждения проверяются аналогично предложениям 8.10 и 8.11.

Предложение 9.8. *Пусть выполнены условия теоремы* 9.1*. Кроме того, пусть выполнены соотношения* (1.28) *и* (8.11)*. Тогда при* $\zeta \in \mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty)$ *и* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *справедлива оценка*

$$\big\|(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_2\varepsilon^{1/2}\rho_\flat(\zeta)^{1/2} + \mathfrak{C}_3\varepsilon|1+\zeta|^{1/2}\rho_\flat(\zeta).$$

Предложение 9.9. *Пусть выполнены условия теоремы* 9.1*. Кроме того, пусть выполнены соотношения* (1.29) *и* (8.11)*. Тогда при* $\zeta \in \mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty)$ *и* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *справедлива оценка*

$$\begin{aligned}&\big\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - g^0 b(\mathbf{D})(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\\ &\leqslant \widetilde{\mathfrak{C}}_2\varepsilon^{1/2}\rho_\flat(\zeta)^{1/2} + \widetilde{\mathfrak{C}}_{16}\varepsilon|1+\zeta|^{1/2}\rho_\flat(\zeta).\end{aligned}$$

9.5. **Оценки в строго внутренней подобласти.**

Теорема 9.10. *Пусть выполнены условия теоремы* 9.1. *Пусть* $\mathcal{O}'$ — *строго внутренняя подобласть области* $\mathcal{O}$. *Положим* $\delta := \operatorname{dist}\{\mathcal{O}'; \partial\mathcal{O}\}$. *Тогда при* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_\flat, \infty)$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned} &\big\|(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_N^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_N(\varepsilon;\zeta)\big\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O}')} \\ &\quad \leqslant \varepsilon\big(\mathfrak{C}_{17}\delta^{-1}\rho_\flat(\zeta)^{1/2} + \mathfrak{C}_{18}|1+\zeta|^{1/2}\rho_\flat(\zeta)\big), \end{aligned} \tag{9.38}$$

$$\big\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G_N(\varepsilon;\zeta)\big\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O}')} \leqslant \varepsilon\big(\widetilde{\mathfrak{C}}_{17}\delta^{-1}\rho_\flat(\zeta)^{1/2} + \widetilde{\mathfrak{C}}_{18}|1+\zeta|^{1/2}\rho_\flat(\zeta)\big). \tag{9.39}$$

Постоянные $\mathfrak{C}_{17}$, $\mathfrak{C}_{18}$, $\widetilde{\mathfrak{C}}_{17}$, $\widetilde{\mathfrak{C}}_{18}$ *зависят только от исходных данных* (2.35).

Доказательство. Запишем неравенство (8.12) в точке $\zeta = -1$:

$$\big\|(B_{N,\varepsilon} + Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_N^0 + \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_N(\varepsilon;-1)\big\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O}')} \leqslant \big(\mathcal{C}_{13}\delta^{-1} + \mathcal{C}_{14}\big)\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \tag{9.40}$$

Применим тождество (9.25). Первое слагаемое справа допускает оценку

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_1(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O}')} &\leqslant \big\|(B_{N,\varepsilon} + Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_N^0 + \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_N(\varepsilon;-1)\big\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O}')} \\ &\times \big\|(B_N^0 + \overline{Q_0})(B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

Вместе с (9.14), (9.21) и (9.40) это влечет

$$\|\mathcal{L}_1(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O}')} \leqslant \big(\mathfrak{C}_{17}\delta^{-1} + \mathfrak{C}'_{18}\big)\varepsilon\rho_\flat(\zeta)^{1/2}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{9.41}$$

где $\mathfrak{C}_{17} = \mathcal{C}_{13}\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}(c_\flat + 2)$, $\mathfrak{C}'_{18} = \mathcal{C}_{14}\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}(c_\flat + 2)$. Для второго и третьего членов в правой части (9.25) используем неравенства (9.27) и (9.30). В результате приходим к оценке (9.38) с постоянной $\mathfrak{C}_{18} = \mathfrak{C}_3 + \mathfrak{C}'_{18}$.

Неравенство (9.39) выводится из (9.38) по аналогии с (7.17)–(7.20) при учете (9.12). $\square$

При дополнительных предположениях о решениях вспомогательных задач справедливо следующее утверждение.

Теорема 9.11. *Пусть выполнены условия теоремы* 9.10. *Кроме того, пусть выполнены условия* 8.1 *и* 8.2. *Пусть операторы* $K_N^0(\varepsilon;\zeta)$ *и* $G_N^0(\varepsilon;\zeta)$ *определены в* (8.1), (8.2). *Тогда при* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_\flat, \infty)$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned} &\big\|(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_N^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_N^0(\varepsilon;\zeta)\big\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O}')} \\ &\quad \leqslant \varepsilon\big(\mathfrak{C}_{17}\delta^{-1}\rho_\flat(\zeta)^{1/2} + \mathfrak{C}_{19}|1+\zeta|^{1/2}\rho_\flat(\zeta)\big), \end{aligned} \tag{9.42}$$

$$\big\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G_N^0(\varepsilon;\zeta)\big\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O}')} \leqslant \varepsilon\big(\widetilde{\mathfrak{C}}_{17}\delta^{-1}\rho_\flat(\zeta)^{1/2} + \widetilde{\mathfrak{C}}_{19}|1+\zeta|^{1/2}\rho_\flat(\zeta)\big). \tag{9.43}$$

Постоянные $\mathfrak{C}_{17}$ *и* $\widetilde{\mathfrak{C}}_{17}$ — *те же, что в теореме* 9.10. *Постоянные* $\mathfrak{C}_{19}$ *и* $\widetilde{\mathfrak{C}}_{19}$ *зависят от исходных данных* (2.35), *а также от норм* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$, $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$.

Доказательство. Комбинируя (9.38), леммы 8.7 и 8.8 и соотношения (3.4), (9.12), получаем оценку (9.42).

Неравенство (9.43) выводится из (9.42) по аналогии с (8.7)–(8.10) при учете (9.12). $\square$

§ 10. Усреднение решений второй начально-краевой задачи для параболических уравнений

В этом параграфе мы изучаем усреднение решений второй начально-краевой задачи для параболического уравнения (то есть, задачи с условием Неймана). Результаты выводятся из аппроксимаций обобщенной резольвенты с двухпараметрическими оценками погрешности методом интегрирования резольвенты по контуру. Доказательства основных результатов этого параграфа полностью аналогичны доказательствам из статьи [MSu3], где рассматривалась первая начально-краевая задача (с условием Дирихле). Поэтому мы ограничимся формулировками и краткими комментариями, опуская детали.

10.1. **Постановка задачи.** Рассмотрим (слабое) решение $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t)$ задачи

$$\begin{cases} Q_0^\varepsilon(\mathbf{x})\frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t)}{\partial t} = -(B_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x},t), & \mathbf{x}\in\mathcal{O},\ t>0; \\ Q_0^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), & \mathbf{x}\in\mathcal{O}; \end{cases} \tag{10.1}$$

при естественном условии (условии Неймана) на $\partial\mathcal{O}\times\mathbb{R}_+$. Здесь B_ε — дифференциальное выражение (1.19), коэффициенты которого подчинены предположениям §1. Предполагается, что $\boldsymbol{\varphi}\in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Используя (2.19), несложно убедиться, что справедливо представление

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) = f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{N,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^*\boldsymbol{\varphi}.$$

Нас интересует поведение решения $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t)$ при малом ε, т.е. нас интересует поведение окаймленной операторной экспоненты $f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{N,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^*$.

Соответствующая эффективная задача имеет вид

$$\begin{cases} \overline{Q_0}\frac{\partial \mathbf{u}_0(\mathbf{x},t)}{\partial t} = -(B^0 \mathbf{u}_0)(\mathbf{x},t), & \mathbf{x}\in\mathcal{O},\ t>0; \\ \overline{Q_0}\mathbf{u}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), & \mathbf{x}\in\mathcal{O}; \end{cases} \tag{10.2}$$

при условии Неймана на $\partial\mathcal{O}\times\mathbb{R}_+$. Решение эффективной задачи представляется в виде

$$\mathbf{u}_0(\cdot,t) = f_0 e^{-\widetilde{B}_N^0 t} f_0\boldsymbol{\varphi}.$$

Как в §9, пусть $c_\flat>0$ — общая нижняя грань операторов $\widetilde{B}_{N,\varepsilon}=(f^\varepsilon)^*B_{N,\varepsilon}f^\varepsilon$ и $\widetilde{B}_N^0 = f_0B_N^0f_0$. Согласно замечанию 9.2 можно фиксировать выбор $c_\flat$ следующим образом:

$$c_\flat = c_4\|f^{-1}\|^{-2}_{L_\infty} = \frac{1}{2}k_1\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}\|Q_0\|^{-1}_{L_\infty}. \tag{10.3}$$

Следующее простое утверждение проверяется так же, как лемма 2.1 из [MSu3].

Лемма 10.1. *При $0<\varepsilon\leqslant 1$ справедливы оценки*

$$\begin{gathered} \bigl\|e^{-\widetilde{B}_{N,\varepsilon}t}\bigr\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant e^{-c_\flat t}, \quad t\geqslant 0, \\ \bigl\|f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{N,\varepsilon}t}\bigr\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant c_4^{-1/2}t^{-1/2}e^{-c_\flat t/2}, \quad t>0, \end{gathered} \tag{10.4}$$

$$\begin{gathered} \bigl\|e^{-\widetilde{B}_N^0 t}\bigr\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant e^{-c_\flat t}, \quad t\geqslant 0, \\ \bigl\|f_0 e^{-\widetilde{B}_N^0 t}\bigr\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant c_4^{-1/2}t^{-1/2}e^{-c_\flat t/2}, \quad t>0, \end{gathered} \tag{10.5}$$

$$\bigl\|f_0 e^{-\widetilde{B}_N^0 t}\bigr\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{c}\|f^{-1}\|_{L_\infty}t^{-1}e^{-c_\flat t/2}, \quad t>0. \tag{10.6}$$

Здесь постоянные c_4, $\widehat{c}$ и $c_\flat$ — те же, что в (2.17), (2.36) и (10.3) соответственно.

10.2. **Аппроксимация решения в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$.** Следующий результат выводится из теорем 3.2 и 9.1 по аналогии с доказательством теоремы 2.2 из [MSu3].

Теорема 10.2. *Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t)$ — решение задачи* (10.1) *с условием Неймана на $\partial\mathcal{O}\times\mathbb{R}_+$. Пусть $\mathbf{u}_0(\mathbf{x},t)$ — решение задачи* (10.2) *с условием Неймана на $\partial\mathcal{O}\times\mathbb{R}_+$. Пусть число ε_1 подчинено условию* 3.1*. При $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)-\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant \mathrm{C}_1\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})},\quad t\geqslant 0.$$

В операторных терминах,

$$\bigl\|f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{N,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^*-f_0e^{-\widetilde{B}_N^0t}f_0\bigr\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant \mathrm{C}_1\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2}e^{-c_\flat t/2},\quad t\geqslant 0. \tag{10.7}$$

Здесь $c_\flat$ — постоянная (10.3)*. Постоянная C_1 зависит только от исходных данных* (2.35)*.*

Доказательство. Справедливо тождество (см., например, [Ka, гл. IX, §1.6])

$$e^{-\widetilde{B}_{N,\varepsilon}t}=-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-\zeta t}(\widetilde{B}_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}\,d\zeta,\quad t>0. \tag{10.8}$$

Здесь $\gamma\subset\mathbb{C}$ — контур, обходящий спектр оператора $\widetilde{B}_{N,\varepsilon}$ в положительном направлении. Для экспоненты от оператора $\widetilde{B}_N^0$ справедливо аналогичное представление. Так как постоянная (10.3) — общая нижняя грань операторов $\widetilde{B}_{N,\varepsilon}$ и $\widetilde{B}_N^0$, в качестве контура интегрирования удобно выбрать

$$\begin{aligned}\gamma=\{\zeta\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}\zeta\geqslant 0,\ \operatorname{Re}\zeta=\operatorname{Im}\zeta+c_\flat/2\}\\ \cup\{\zeta\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}\zeta\leqslant 0,\ \operatorname{Re}\zeta=-\operatorname{Im}\zeta+c_\flat/2\}.\end{aligned}$$

Умножая (10.8) на f^ε слева и на $(f^\varepsilon)^*$ справа и учитывая тождество (2.21), получаем представление

$$f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{N,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^*=-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-\zeta t}(B_{N,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\,d\zeta,\quad t>0.$$

Аналогично,

$$f_0e^{-\widetilde{B}_N^0t}f_0=-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-\zeta t}(B_N^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\,d\zeta,\quad t>0.$$

Следовательно,

$$f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{N,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^*-f_0e^{-\widetilde{B}_N^0t}f_0=-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-\zeta t}\left((B_{N,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-(B_N^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\right)d\zeta. \tag{10.9}$$

Обозначим $\check{c}:=\max\{1;\sqrt{5}c_\flat/2\}$. Применяя теорему 9.1 при $\zeta\in\gamma$, $|\zeta|\leqslant\check{c}$, и теорему 3.2 при $\zeta\in\gamma$, $|\zeta|>\check{c}$, легко проверить оценку

$$\bigl\|(B_{N,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-(B_N^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\bigr\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant \mathrm{C}_1'|\zeta|^{-1/2}\varepsilon,\quad \zeta\in\gamma, \tag{10.10}$$

где постоянная C_1' зависит только от исходных данных (2.35). Из (10.9) и (10.10) вытекает оценка

$$\bigl\|f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{N,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^*-f_0e^{-\widetilde{B}_N^0t}f_0\bigr\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant \mathrm{C}_1''\varepsilon t^{-1/2}e^{-c_\flat t/2},\quad \mathrm{C}_1''=2\pi^{-1/2}\mathrm{C}_1'. \tag{10.11}$$

Используя (10.11) при $t\geqslant\varepsilon^2$ и элементарную оценку

$$\bigl\|f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{N,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^*-f_0e^{-\widetilde{B}_N^0t}f_0\bigr\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant 2\|f\|^2_{L_\infty}e^{-c_\flat t}$$

при $0\leqslant t<\varepsilon^2$, легко вывести искомое неравенство (10.7). $\square$

10.3. **Аппроксимация решения в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$.** Введем *корректор*

$$\mathcal{K}_N(t;\varepsilon) := R_{\mathcal{O}}\left([\Lambda^\varepsilon]S_\varepsilon b(\mathbf{D}) + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]S_\varepsilon\right) P_{\mathcal{O}} f_0 e^{-\widetilde{B}_N^0 t} f_0. \tag{10.12}$$

Нам понадобится также оператор

$$\mathcal{G}_N(t;\varepsilon) := \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_{\mathcal{O}} f_0 e^{-\widetilde{B}_N^0 t} f_0 + g^\varepsilon \big(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\big)^\varepsilon S_\varepsilon P_{\mathcal{O}} f_0 e^{-\widetilde{B}_N^0 t} f_0. \tag{10.13}$$

При $t>0$ оператор (10.12) непрерывно переводит $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Действительно, согласно (10.6) при $t>0$ оператор $f_0 e^{-\widetilde{B}_N^0 t} f_0$ непрерывен из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Следовательно, оператор $b(\mathbf{D}) P_{\mathcal{O}} f_0 e^{-\widetilde{B}_N^0 t} f_0$ непрерывно переводит $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$, а оператор $P_{\mathcal{O}} f_0 e^{-\widetilde{B}_N^0 t} f_0$ заведомо непрерывен из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Остается учесть непрерывность операторов $[\Lambda^\varepsilon]S_\varepsilon : H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m) \to H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и $[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]S_\varepsilon : H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \to H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, вытекающую из предложения 1.2 и включений $\Lambda, \widetilde{\Lambda} \in \widetilde{H}^1(\Omega)$. Аналогично проверяется непрерывность оператора (10.13) из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^m)$.

Положим $\widetilde{\mathbf{u}}_0(\,\cdot\,,t) := P_{\mathcal{O}}\mathbf{u}_0(\,\cdot\,,t)$. Через $\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},t)$ обозначим первое приближение к решению $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t)$ задачи (10.1):

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon(\,\cdot\,,t) = \widetilde{\mathbf{u}}_0(\,\cdot\,,t) + \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0(\,\cdot\,,t) + \varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_0(\,\cdot\,,t),\\ \mathbf{v}_\varepsilon(\,\cdot\,,t) := \widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon(\,\cdot\,,t)|_{\mathcal{O}}. \end{aligned} \tag{10.14}$$

То есть, $\mathbf{v}_\varepsilon(\,\cdot\,,t) = f_0 e^{-\widetilde{B}_N^0 t} f_0 \boldsymbol{\varphi}(\,\cdot\,) + \varepsilon\mathcal{K}_N(t;\varepsilon)\boldsymbol{\varphi}(\,\cdot\,)$.

Теорема 10.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 10.2. *Пусть функция* $\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},t)$ *определена в* (10.14). *Положим* $\mathbf{p}_\varepsilon(\mathbf{x},t) := g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t)$. *Пусть операторы* $\mathcal{K}_N(t;\varepsilon)$ *и* $\mathcal{G}_N(t;\varepsilon)$ *определены в* (10.12) *и* (10.13) *соответственно. Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *и* $t>0$ *выполнено*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\,\cdot\,,t) - \mathbf{v}_\varepsilon(\,\cdot\,,t)\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathrm{C}_2(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1}) e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$
$$\big\|\mathbf{p}_\varepsilon(\,\cdot\,,t) - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0(\,\cdot\,,t) - g^\varepsilon\big(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\big)^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0(\,\cdot\,,t)\big\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{\mathrm{C}}_2\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

В операторных терминах,

$$\big\|f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{N,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\widetilde{B}_N^0 t} f_0 - \varepsilon\mathcal{K}_N(t;\varepsilon)\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathrm{C}_2(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1})e^{-c_\flat t/2}, \tag{10.15}$$

$$\big\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{N,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^* - \mathcal{G}_N(t;\varepsilon)\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{\mathrm{C}}_2\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-c_\flat t/2}. \tag{10.16}$$

Постоянные C_2 *и* $\widetilde{\mathrm{C}}_2$ *зависят только от исходных данных* (2.35).

Доказательство. Аналогично (10.9) справедливы представления

$$\begin{aligned} &f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{N,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\widetilde{B}_N^0 t} f_0 - \varepsilon\mathcal{K}_N(t;\varepsilon)\\ &\quad = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-\zeta t}\left((B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_N(\varepsilon;\zeta)\right)d\zeta, \end{aligned} \tag{10.17}$$

$$g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{N,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^* - \mathcal{G}_N(t;\varepsilon) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-\zeta t}\big(g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G_N(\varepsilon;\zeta)\big)\,d\zeta. \tag{10.18}$$

Здесь $K_N(\varepsilon;\zeta)$ и $G_N(\varepsilon;\zeta)$ — операторы (3.5) и (3.6) соответственно.

С помощью тождества (10.17), применяя теорему 9.1 при $\zeta\in\gamma$, $|\zeta|\leqslant\check{c}$, и теорему 3.4 при $\zeta\in\gamma$, $|\zeta|>\check{c}$, легко вывести оценку (10.15). Аналогично, на основании тождества (10.18), используя (9.7) при $\zeta\in\gamma$, $|\zeta|\leqslant\check{c}$, и (3.17) при $\zeta\in\gamma$, $|\zeta|>\check{c}$, приходим к (10.16). $\square$

Замечание 10.4. *Пусть* λ_1^0 *— первое собственное значение оператора* B_N^0 *и пусть* $\sigma>0$ *— сколь угодно малое число. Очевидно, число* $\lambda_1^0\|Q_0\|_{L_\infty}^{-1}$ *является нижней гранью оператора* $\widetilde{B}_N^0$. *В силу резольвентной сходимости* $B_{N,\varepsilon}$ *к* B_N^0 *при достаточно малом*

$\varepsilon_\circ$ число $\lambda_1^0\|Q_0\|^{-1}_{L_\infty} - \sigma/2$ является общей нижней гранью операторов $\widetilde{B}_{N,\varepsilon}$ при всех $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_\circ$. Поэтому можно сдвинуть контур интегрирования γ так, чтобы он пересекал вещественную ось в точке $\mathfrak{c}_\circ := \lambda_1^0\|Q_0\|^{-1}_{L_\infty} - \sigma$ вместо $c_\flat/2$. На этом пути получаются оценки вида (10.7), (10.15), (10.16) с заменой $e^{-c_\flat t/2}$ на $e^{-\mathfrak{c}_\circ t}$ в правых частях. При этом постоянные в оценках станут зависеть от σ.

10.4. **Устранение сглаживателя S_ε в корректоре.** Сглаживающий оператор в корректоре удается устранить, если решения вспомогательных задач подчинены дополнительным условиям. Следующий результат проверяется аналогично теореме 10.3 с помощью теорем 8.6 и 9.7.

Теорема 10.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 10.3. *Кроме того, пусть выполнены условия* 8.1 *и* 8.2. *Положим*

$$\mathcal{K}_N^0(t;\varepsilon) := (\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon) f_0 e^{-\widetilde{B}_N^0 t} f_0, \tag{10.19}$$

$$\mathcal{G}_N^0(t;\varepsilon) := \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) f_0 e^{-\widetilde{B}_N^0 t} f_0 + g^\varepsilon \big(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\big)^\varepsilon f_0 e^{-\widetilde{B}_N^0 t} f_0. \tag{10.20}$$

Тогда при $t > 0$ и $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ справедливы оценки

$$\big\| f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{N,\varepsilon} t} (f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\widetilde{B}_N^0 t} f_0 - \varepsilon \mathcal{K}_N^0(t;\varepsilon) \big\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathrm{C}_3 \left(\varepsilon^{1/2} t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1}\right) e^{-c_\flat t/2},$$

$$\big\| g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{N,\varepsilon} t} (f^\varepsilon)^* - \mathcal{G}_N^0(t;\varepsilon) \big\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{\mathrm{C}}_3 \left(\varepsilon^{1/2} t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1}\right) e^{-c_\flat t/2}.$$

Постоянные C_3 и $\widetilde{\mathrm{C}}_3$ зависят от исходных данных (2.35), *от p и от норм $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ и $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$.*

Замечание 10.6. *Если выполнено только условие* 8.1 (*соответственно, условие* 8.2), *то сглаживающий оператор S_ε может быть устранен в члене корректора, содержащем Λ^ε* (*соответственно, $\widetilde{\Lambda}^\varepsilon$*).

Устранить сглаживатель S_ε в корректоре возможно также за счет усиления предположения о гладкости границы. Рассмотрим случай $d \geqslant 3$, поскольку при $d \leqslant 2$ применима теорема 10.5 (см. предложения 8.3 и 8.4).

Теорема 10.7. *Пусть выполнены условия теоремы* 10.2, *причем $d \geqslant 3$. Пусть область $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса $C^{d/2,1}$ если d — четное, и класса $C^{(d+1)/2,1}$, если d — нечетное. Пусть операторы $\mathcal{K}_N^0(t;\varepsilon)$ и $\mathcal{G}_N^0(t;\varepsilon)$ определены в* (10.19) *и* (10.20) *соответственно. Тогда при $t > 0$ и $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ справедливы оценки*

$$\big\| f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{N,\varepsilon} t} (f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\widetilde{B}_N^0 t} f_0 - \varepsilon \mathcal{K}_N^0(t;\varepsilon) \big\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathrm{C}_4(d) (\varepsilon^{1/2} t^{-3/4} + \varepsilon t^{-d/4-1/2}) e^{-c_\flat t/2},$$

$$\big\| g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{N,\varepsilon} t} (f^\varepsilon)^* - \mathcal{G}_N^0(t;\varepsilon) \big\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{\mathrm{C}}_4(d) (\varepsilon^{1/2} t^{-3/4} + \varepsilon t^{-d/4-1/2}) e^{-c_\flat t/2}.$$

Постоянные $\mathrm{C}_4(d)$ и $\widetilde{\mathrm{C}}_4(d)$ зависят только от исходных данных (2.35).

Теорема 10.7 опирается на следующую лемму, аналогичную лемме 2.8 из [MSu3].

Лемма 10.8. *Пусть $k \geqslant 2$ — целое число. Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей $\partial\mathcal{O}$ класса $C^{k-1,1}$. Тогда при $t > 0$ оператор $e^{-\widetilde{B}_N^0 t}$ непрерывно переводит $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^q(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, $0 \leqslant q \leqslant k$, и выполнена оценка*

$$\big\| e^{-\widetilde{B}_N^0 t} \big\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^q(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}_q t^{-q/2} e^{-c_\flat t/2}, \quad t > 0.$$

Постоянная $\widehat{\mathrm{C}}_q$ зависит только от q и исходных данных (2.35).

Доказательство леммы 10.8 и теоремы 10.7 полностью аналогично случаю первой начально-краевой задачи, рассмотренному в [MSu3]; см. пункт 2.7 и §7 из [MSu3]. Ясно, что теорему 10.7 удобно применять при t отделенном от нуля. При малых значениях t

порядок множителя $(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4} + \varepsilon t^{-d/4-1/2})$ растет с ростом размерности. Это компенсация за устранение сглаживателя.

10.5. **Специальные случаи.** Выделим специальные случаи. Предположим, что $g^0 = \overline{g}$, т. е. выполнены соотношения (1.28). Кроме того, пусть справедливо условие (8.11). Тогда Г-периодические решения задач (1.20) и (1.30) равны нулю: $\Lambda(\mathbf{x}) = 0$ и $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) = 0$. Теорема 10.3 приводит к следующему результату.

Предложение 10.9. *Пусть справедливы соотношения* (1.28) *и* (8.11). *Тогда в условиях теоремы* 10.2 *при* $t > 0$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедлива оценка*

$$\left\| f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{N,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\widetilde{B}^0_N t} f_0 \right\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathrm{C}_2(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1})e^{-c_\flat t/2}.$$

Предположим теперь, что $g^0 = \underline{g}$, т. е. справедливы представления (1.29). Тогда в силу предложения 8.3(3°) выполнено условие 8.1. При этом $\widetilde{g}(\mathbf{x}) = g^0 = \underline{g}$. Предположим дополнительно, что справедливо равенство (8.11). Тогда $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) = 0$ и из теоремы 10.3 с помощью предложения 1.1 несложно вывести следующий результат. (Ср. доказательство предложения 2.13 из [MSu3].)

Предложение 10.10. *Пусть имеют место соотношения* (1.29) *и* (8.11). *Тогда в условиях теоремы* 10.2 *при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $t > 0$ *верна оценка*

$$\left\| g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{N,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^* - g^0 b(\mathbf{D}) f_0 e^{-\widetilde{B}^0_N t} f_0 \right\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{\mathrm{C}}'_3 \varepsilon^{1/2} t^{-3/4} e^{-c_\flat t/2}.$$

Постоянная $\widetilde{\mathrm{C}}'_3$ *зависит только от исходных данных* (2.35).

10.6. **Оценки в строго внутренней подобласти.** Следующий результат легко вывести, применяя теоремы 8.12, 9.10 и тождества (10.17), (10.18).

Теорема 10.11. *Пусть выполнены условия теоремы* 10.3. *Пусть* $\mathcal{O}'$ *— строго внутренняя подобласть области* $\mathcal{O}$ *и* $\delta = \operatorname{dist}\{\mathcal{O}'; \partial\mathcal{O}\}$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $t > 0$ *выполнены оценки*

$$\left\| f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{N,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\widetilde{B}^0_N t} f_0 - \varepsilon \mathcal{K}_N(t;\varepsilon) \right\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O}')} \leqslant \varepsilon(\mathrm{C}_5 t^{-1/2}\delta^{-1} + \mathrm{C}_6 t^{-1})e^{-c_\flat t/2},$$

$$\left\| g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{N,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^* - \mathcal{G}_N(t;\varepsilon) \right\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O}')} \leqslant \varepsilon(\widetilde{\mathrm{C}}_5 t^{-1/2}\delta^{-1} + \widetilde{\mathrm{C}}_6 t^{-1})e^{-c_\flat t/2}.$$

Постоянные C_5, C_6, $\widetilde{\mathrm{C}}_5$ *и* $\widetilde{\mathrm{C}}_6$ *зависят только от исходных данных* (2.35).

Следующий результат проверяется на основании теорем 8.13, 9.11 и тождеств (10.17), (10.18).

Теорема 10.12. *Пусть выполнены условия теоремы* 10.11. *Кроме того, пусть выполнены условия* 8.1 *и* 8.2. *Пусть операторы* $\mathcal{K}^0_N(t;\varepsilon)$ *и* $\mathcal{G}^0_N(t;\varepsilon)$ *определены в* (10.19) *и* (10.20) *соответственно. Тогда при* $t > 0$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\left\| f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{N,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\widetilde{B}^0_N t} f_0 - \varepsilon \mathcal{K}^0_N(t;\varepsilon) \right\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O}')} \leqslant \varepsilon(\mathrm{C}_5 t^{-1/2}\delta^{-1} + \mathrm{C}_7 t^{-1})e^{-c_\flat t/2},$$

$$\left\| g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{N,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^* - \mathcal{G}^0_N(t;\varepsilon) \right\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O}')} \leqslant \varepsilon(\widetilde{\mathrm{C}}_5 t^{-1/2}\delta^{-1} + \widetilde{\mathrm{C}}_7 t^{-1})e^{-c_\flat t/2}.$$

Постоянные C_5 *и* $\widetilde{\mathrm{C}}_5$ *— те же, что в теореме* 10.11. *Постоянные* C_7 *и* $\widetilde{\mathrm{C}}_7$ *зависят от исходных данных* (2.35), *от* p *и от норм* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$, $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$.

Отметим, что устранить сглаживатель S_ε в корректоре в оценках из теоремы 10.11 возможно и без дополнительных условий на матрицы-функции Λ и $\widetilde{\Lambda}$. Рассмотрим случай $d \geqslant 3$ (иначе в силу предложений 8.3 и 8.4 применима теорема 10.12). При $t > 0$ оператор $e^{-\widetilde{B}^0_N t}$ непрерывен из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ и выполнена оценка (10.6). Кроме того, справедливо свойство “повышения гладкости” внутри области: при $t > 0$ оператор

$e^{-\widetilde{B}_N^0 t}$ непрерывен из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^l(\mathcal{O}';\mathbb{C}^n)$ при любом целом $l \geqslant 3$. При этом имеют место неравенства

$$\begin{aligned}\left\|e^{-\widetilde{B}_N^0 t}\right\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^l(\mathcal{O}')} \leqslant \mathrm{C}_l' t^{-1/2}(\delta^{-2}+t^{-1})^{(l-1)/2} e^{-c_\flat t/2},\\ t>0,\quad l\in\mathbb{N},\quad l\geqslant 3.\end{aligned} \tag{10.21}$$

Постоянная C_l' зависит от l и исходных данных (2.35). Ср. оценку (2.45) из [MSu3] и комментарии к ней.

Используя (10.21), а также свойства матриц-функций Λ, $\widetilde{\Lambda}$ и оператора S_ε, из теоремы 10.11 можно вывести следующий результат. Доказательство полностью аналогично случаю первой начально-краевой задачи (см. пункт 2.10 и §8 из [MSu3]).

Теорема 10.13. *Пусть выполнены условия теоремы* 10.11, *причем* $d \geqslant 3$. *Пусть операторы* $\mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon)$ *и* $\mathcal{G}_D^0(t;\varepsilon)$ *определены в* (10.19) *и* (10.20) *соответственно. Обозначим*

$$h_d(\delta;t) := t^{-1} + t^{-1/2}(\delta^{-2}+t^{-1})^{d/4}.$$

Пусть $2r_1 = \operatorname{diam}\Omega$. *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant \min\{\varepsilon_1;(4r_1)^{-1}\delta\}$ *и* $t>0$ *справедливы оценки*

$$\left\|f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{N,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\widetilde{B}_N^0 t} f_0 - \varepsilon\mathcal{K}_N^0(t;\varepsilon)\right\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O}')} \leqslant \varepsilon \mathrm{C}_8(d) h_d(\delta;t) e^{-c_\flat t/2},$$

$$\left\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{N,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^* - \mathcal{G}_N^0(t;\varepsilon)\right\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O}')} \leqslant \varepsilon \widetilde{\mathrm{C}}_8(d) h_d(\delta;t) e^{-c_\flat t/2}.$$

Здесь постоянные $\mathrm{C}_8(d)$ *и* $\widetilde{\mathrm{C}}_8(d)$ *зависят только от исходных данных* (2.35).

10.7. **Усреднение решений второй начально-краевой задачи для неоднородного уравнения.** Рассмотрим теперь решение $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t)$ задачи

$$\begin{cases} Q_0^\varepsilon(\mathbf{x})\frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t)}{\partial t} = -(B_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x},t) + \mathbf{F}(\mathbf{x},t), & \mathbf{x}\in\mathcal{O},\ 0<t<T;\\ Q_0^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), & \mathbf{x}\in\mathcal{O};\end{cases} \tag{10.22}$$

при условии Неймана на $\partial\mathcal{O}\times(0,T)$. Предполагается, что $0<T\leqslant\infty$, $\mathbf{F}\in\mathfrak{H}_r(T) := L_r((0,T);L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n))$ при некотором $1\leqslant r\leqslant\infty$; $\boldsymbol{\varphi}\in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Тогда

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) = f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{N,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^*\boldsymbol{\varphi} + \int_0^t f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{N,\varepsilon}(t-\widetilde{t})}(f^\varepsilon)^*\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{t})\,d\widetilde{t}. \tag{10.23}$$

Соответствующая эффективная задача имеет вид

$$\begin{cases} \overline{Q_0}\frac{\partial \mathbf{u}_0(\mathbf{x},t)}{\partial t} = -(B^0 \mathbf{u}_0)(\mathbf{x},t) + \mathbf{F}(\mathbf{x},t), & \mathbf{x}\in\mathcal{O},\ 0<t<T;\\ \overline{Q_0}\mathbf{u}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), & \mathbf{x}\in\mathcal{O};\end{cases} \tag{10.24}$$

при условии Неймана на $\partial\mathcal{O}\times(0,T)$. Решение эффективной задачи представляется в виде

$$\mathbf{u}_0(\cdot,t) = f_0 e^{-\widetilde{B}_N^0 t} f_0\boldsymbol{\varphi} + \int_0^t f_0 e^{-\widetilde{B}_N^0(t-\widetilde{t})} f_0\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{t})\,d\widetilde{t}. \tag{10.25}$$

Вычитая (10.25) из (10.23), на основании теоремы 10.2 убеждаемся в справедливости неравенства

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)-\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant \mathrm{C}_1\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}\\ &+ \mathrm{C}_1\varepsilon\int_0^t e^{-c_\flat(t-\widetilde{t})/2}(\varepsilon^2+t-\widetilde{t})^{-1/2}\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{t})\|_{L_2(\mathcal{O})}\,d\widetilde{t}.\end{aligned}$$

Оценивая интегральный член при $1<r\leqslant\infty$, получаем следующий результат. (Ср. доказательство теоремы 5.1 из [MSu2].)

Теорема 10.14. *Пусть* $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F} \in \mathfrak{H}_r(T)$ *при некотором* $1 < r \leqslant \infty$, *где* $0 < T \leqslant \infty$. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t)$ — *решение задачи* (10.22) *с условием Неймана на* $\partial\mathcal{O} \times (0,T)$. *Пусть* $\mathbf{u}_0(\mathbf{x},t)$ — *решение задачи* (10.24) *с условием Неймана на* $\partial\mathcal{O} \times (0,T)$. *Пусть число* ε_1 *подчинено условию* 3.1. *При* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $0 < t < T$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathrm{C}_1\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + c_r\vartheta(\varepsilon,r)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_r(t)}.$$

Здесь величина $\vartheta(\varepsilon,r)$ *задана соотношением*

$$\vartheta(\varepsilon,r) = \begin{cases} \varepsilon^{2-2/r}, & 1 < r < 2, \\ \varepsilon(|\ln\varepsilon|+1)^{1/2}, & r = 2, \\ \varepsilon, & 2 < r \leqslant \infty; \end{cases} \tag{10.26}$$

$c_\flat$ — *постоянная* (10.3). *Постоянная* C_1 *зависит только от исходных данных* (2.35), *а* c_r *зависит от* r *и данных* (2.35).

По аналогии с доказательством теоремы 5.2 из [MSu2], несложно вывести из теоремы 10.2 оценку нормы разности $\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0$ в классе $\mathfrak{H}_r(T)$.

Теорема 10.15. *Пусть* $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F} \in \mathfrak{H}_r(T)$ *при некотором* $1 \leqslant r < \infty$, *где* $0 < T \leqslant \infty$. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t)$ — *решение задачи* (10.22) *с условием Неймана на* $\partial\mathcal{O} \times (0,T)$. *Пусть* $\mathbf{u}_0(\mathbf{x},t)$ — *решение задачи* (10.24) *с условием Неймана на* $\partial\mathcal{O} \times (0,T)$. *Пусть число* ε_1 *подчинено условию* 3.1. *При* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{\mathfrak{H}_r(T)} \leqslant c_{r'}\vartheta(\varepsilon,r')\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \mathrm{C}_9\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_r(T)}.$$

Здесь $\vartheta(\varepsilon,\cdot)$ *определено в* (10.26), $r^{-1} + (r')^{-1} = 1$. *Постоянная* C_9 *зависит только от исходных данных* (2.35), *а* $c_{r'}$ *зависит от* r *и данных* (2.35).

Замечание 10.16. *В случае, когда* $\boldsymbol{\varphi} = 0$ *и* $\mathbf{F} \in \mathfrak{H}_\infty(T)$, *из теоремы* 10.14 *вытекает оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{\mathfrak{H}_\infty(T)} \leqslant c_\infty\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_\infty(T)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1.$$

Получим теперь аппроксимацию решения задачи (10.22) в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ с помощью теоремы 10.3. Трудности возникают при рассмотрении интегрального члена в (10.23) из-за сингулярности правой части оценки (10.15) при малом t. Считая, что $t \geqslant \varepsilon^2$, мы разбиваем промежуток интегрирования в (10.23) на две части: $(0, t-\varepsilon^2)$ и $(t-\varepsilon^2, t)$. На интервале $(0, t-\varepsilon^2)$ применяем (10.15), а на $(t-\varepsilon^2, t)$ используем оценку

$$\left\|f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{N,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\widetilde{B}_N^0 t}f_0\right\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant 2c_4^{-1/2}\|f\|_{L_\infty}t^{-1/2}e^{-c_\flat t/2}, \quad t > 0,$$

вытекающую из (10.4) и (10.5). Это приводит к следующему результату; ср. доказательство теоремы 5.4 из [MSu2].

Обозначим

$$\mathbf{u}_{0,\varepsilon}(\cdot,t) = f_0 e^{-\widetilde{B}_N^0 t}f_0\boldsymbol{\varphi} + \int_0^{t-\varepsilon^2} f_0 e^{-\widetilde{B}_N^0(t-\widetilde{t})}f_0\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{t})\,d\widetilde{t}.$$

Тогда $\mathbf{u}_{0,\varepsilon}(\cdot,t) = f_0 e^{-\widetilde{B}_N^0\varepsilon^2}f_0^{-1}\mathbf{u}_0(\cdot,t-\varepsilon^2)$. Положим $\widetilde{\mathbf{u}}_{0,\varepsilon}(\cdot,t) = P_\mathcal{O}\mathbf{u}_{0,\varepsilon}(\cdot,t)$, где $P_\mathcal{O}$ — оператор продолжения (3.3). В качестве первого приближения к решению задачи (10.22) возьмем

$$\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,t) = \mathbf{u}_0(\cdot,t) + \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_{0,\varepsilon}(\cdot,t) + \varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_{0,\varepsilon}(\cdot,t). \tag{10.27}$$

Приближением для потока $\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)$ служит функция

$$\mathbf{q}_\varepsilon(\cdot,t) = \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_{0,\varepsilon}(\cdot,t) + g^\varepsilon(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda})^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_{0,\varepsilon}(\cdot,t). \tag{10.28}$$

Теорема 10.17. *Пусть* $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F} \in \mathfrak{H}_r(T)$ *при некотором* $2 < r \leqslant \infty$, *где* $0 < T \leqslant \infty$. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t)$ — *решение задачи* (10.22) *с условием Неймана на* $\partial\mathcal{O} \times (0,T)$, $\mathbf{u}_0(\mathbf{x},t)$ — *решение задачи* (10.24) *с условием Неймана на* $\partial\mathcal{O} \times (0,T)$ *и* $\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) =$

$g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)$. *Пусть функции* $\mathbf{v}_\varepsilon$ *и* $\mathbf{q}_\varepsilon$ *определены в* (10.27), (10.28) *соответственно. Пусть число* ε_1 *подчинено условию* 3.1. *При* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *и* $\varepsilon^2\leqslant t<T$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)-\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O})}\leqslant 2\mathrm{C}_2\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}+\check{c}_r\omega(\varepsilon,r)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_r(t)},$$

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t)-\mathbf{q}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant \widetilde{\mathrm{C}}_2\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}+\widetilde{c}_r\omega(\varepsilon,r)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_r(t)}.$$

Здесь величина $\omega(\varepsilon,r)$ *задана соотношением*

$$\omega(\varepsilon,r)=\begin{cases}\varepsilon^{1-2/r}, & 2<r<4,\\ \varepsilon^{1/2}(|\ln\varepsilon|+1)^{3/4}, & r=4,\\ \varepsilon^{1/2}, & 4<r\leqslant\infty;\end{cases}$$

$c_\flat$ — *постоянная* (10.3). *Постоянные* C_2, $\widetilde{\mathrm{C}}_2$ *зависят только от исходных данных* (2.35), *а* $\check{c}_r$ *и* $\widetilde{c}_r$ *зависят от* r *и данных* (2.35).

Поскольку правая часть в оценке (10.16) имеет меньшую сингулярность при малом t, нежели правая часть в (10.15), при $r>4$ удается аппроксимировать поток $\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t)$ функцией

$$\mathbf{q}_\varepsilon^0(\cdot,t)=\widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot,t)+g^\varepsilon(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda})^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot,t). \tag{10.29}$$

Следующее утверждение проверяется аналогично доказательству предложения 3.5 из [MSu3].

Предложение 10.18. *Пусть* $\boldsymbol{\varphi}\in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F}\in\mathfrak{H}_r(T)$ *при некотором* $4<r\leqslant\infty$, *где* $0<T\leqslant\infty$. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t)$ — *решение задачи* (10.22) *с условием Неймана на* $\partial\mathcal{O}\times(0,T)$ *и* $\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t)=g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)$. *Пусть функция* $\mathbf{q}_\varepsilon^0$ *определена в* (10.29). *Пусть число* ε_1 *подчинено условию* 3.1. *При* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *и* $0<t<T$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t)-\mathbf{q}_\varepsilon^0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant \widetilde{\mathrm{C}}_2\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}+\hat{c}_r\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_r(t)}.$$

Здесь $c_\flat$ — *постоянная* (10.3). *Постоянная* $\widetilde{\mathrm{C}}_2$ *зависит только от исходных данных* (2.35), *а* $\hat{c}_r$ *зависит от* r *и данных* (2.35).

При дополнительных предположениях о решениях вспомогательных задач из теоремы 10.5 несложно вывести следующий результат.

Теорема 10.19. *Пусть выполнены условия теоремы* 10.17. *Кроме того, пусть выполнены условия* 8.1 *и* 8.2. *Обозначим*

$$\check{\mathbf{v}}_\varepsilon(\cdot,t)=\mathbf{u}_0(\cdot,t)+\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_{0,\varepsilon}(\cdot,t)+\varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_{0,\varepsilon}(\cdot,t). \tag{10.30}$$

$$\check{\mathbf{q}}_\varepsilon(\cdot,t)=\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_{0,\varepsilon}(\cdot,t)+g^\varepsilon(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda})^\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_{0,\varepsilon}(\cdot,t). \tag{10.31}$$

Тогда при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *и* $\varepsilon^2\leqslant t<T$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)-\check{\mathbf{v}}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O})}\leqslant 2\mathrm{C}_3\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}+c_r'\omega(\varepsilon,r)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_r(t)},$$

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t)-\check{\mathbf{q}}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant 2\widetilde{\mathrm{C}}_3\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}+c_r''\omega(\varepsilon,r)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_r(t)}.$$

Постоянные C_3, $\widetilde{\mathrm{C}}_3$ *зависят только от исходных данных* (2.35), *от* p *и от норм* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$, $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$, *а* c_r' *и* c_r'' *зависят от тех же параметров и от* r.

Из теоремы 10.11 легко вывести аппроксимации решения и потока в строго внутренней подобласти.

Теорема 10.20. *Пусть выполнены условия теоремы* 10.17. *Пусть* $\mathcal{O}'$ — *строго внутренняя подобласть области* $\mathcal{O}$. *Пусть* $\delta=\operatorname{dist}\{\mathcal{O}';\partial\mathcal{O}\}$. *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *и* $\varepsilon^2\leqslant t<T$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)-\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O}')}\leqslant\varepsilon\left(\mathrm{C}_5t^{-1/2}\delta^{-1}+\mathrm{C}_6t^{-1}\right)e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}+\mathfrak{c}_r\varpi(\varepsilon,\delta,r)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_r(t)},$$

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t)-\mathbf{q}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant\varepsilon\left(\widetilde{\mathrm{C}}_5t^{-1/2}\delta^{-1}+\widetilde{\mathrm{C}}_6t^{-1}\right)e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}+\widetilde{\mathfrak{c}}_r\varpi(\varepsilon,\delta,r)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_r(t)}.$$

Здесь

$$\varpi(\varepsilon,\delta,r) := \begin{cases} \varepsilon\delta^{-1} + \varepsilon^{1-2/r}, & 2 < r < \infty, \\ \varepsilon\delta^{-1} + \varepsilon(|\ln\varepsilon| + 1), & r = \infty. \end{cases}$$

Постоянные C_5, C_6, $\widetilde{\mathrm{C}}_5$, $\widetilde{\mathrm{C}}_6$ *зависят только от исходных данных* (2.35), *а* $\mathfrak{c}_r$ *и* $\widetilde{\mathfrak{c}}_r$ *зависят от тех же параметров и от* r.

Наконец, при дополнительных предположениях о решениях вспомогательных задач из теоремы 10.12 нетрудно извлечь следующий результат.

Теорема 10.21. *Пусть выполнены условия теоремы* 10.19. *Кроме того, пусть выполнены условия* 8.1 *и* 8.2. *Пусть функции* $\check{\mathbf{v}}_\varepsilon$ *и* $\check{\mathbf{q}}_\varepsilon$ *определены в* (10.30) *и* (10.31) *соответственно. Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $\varepsilon^2 \leqslant t < T$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O}')} \leqslant \varepsilon \left(\mathrm{C}_5 t^{-1/2}\delta^{-1} + \mathrm{C}_7 t^{-1}\right) e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \mathfrak{c}'_r \varpi(\varepsilon,\delta,r)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_r(t)},$$

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) - \check{\mathbf{q}}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \varepsilon \left(\widetilde{\mathrm{C}}_5 t^{-1/2}\delta^{-1} + \widetilde{\mathrm{C}}_7 t^{-1}\right) e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \mathfrak{c}''_r \varpi(\varepsilon,\delta,r)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_r(t)}$$

Постоянные C_5, C_7, $\widetilde{\mathrm{C}}_5$ *и* $\widetilde{\mathrm{C}}_7$ — *те же, что в теореме* 10.12. *Постоянные* $\mathfrak{c}'_r$ *и* $\mathfrak{c}''_r$ *зависят от исходных данных* (2.35), *от* p *и от норм* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$, $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$.

§ 11. Пример применения общих результатов

Для эллиптических систем во всем пространстве $\mathbb{R}^d$ рассматриваемый пример изучался в [Su4] и [MSu1]. Для эллиптических и параболических систем в ограниченной области при условии Дирихле пример рассматривался в [MSu4] и [MSu3] соответственно.

11.1. **Скалярный эллиптический оператор с сингулярным потенциалом порядка** ε^{-1}**.** Пусть $n = 1$, $m = d$, $b(\mathbf{D}) = \mathbf{D}$, а $g(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая симметричная $(d \times d)$-матрица-функция *с вещественными элементами*, причем $g(\mathbf{x}) > 0$ и $g, g^{-1} \in L_\infty$. Условие (1.5) справедливо при $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$. Очевидно, условие 2.1 выполнено, причем $k_1 = 1$, $k_2 = 0$. Имеем $b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla$.

Далее, пусть $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \operatorname{col}\{A_1(\mathbf{x}), \dots, A_d(\mathbf{x})\}$, где $A_j(\mathbf{x})$, $j = 1,\dots,d$, — Γ-периодические вещественные функции, причем

$$A_j \in L_\rho(\Omega), \quad \rho = 2 \text{ при } d = 1, \quad \rho > d \text{ при } d \geqslant 2; \quad j = 1,\dots,d.$$

Пусть $v(\mathbf{x})$ и $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ — вещественные Γ-периодические функции такие, что

$$v, \mathcal{V} \in L_s(\Omega), \quad \int_\Omega v(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0, \quad s = 1 \text{ при } d = 1, \quad s > d/2 \text{ при } d \geqslant 2.$$

В $L_2(\mathcal{O})$ рассмотрим оператор $\mathfrak{B}_{N,\varepsilon}$, формально заданный дифференциальным выражением

$$\mathfrak{B}_\varepsilon = (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x}))^* g^\varepsilon(\mathbf{x})(\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x})) + \varepsilon^{-1} v^\varepsilon(\mathbf{x}) + \mathcal{V}^\varepsilon(\mathbf{x}) \tag{11.1}$$

при естественном условии (условии Неймана) на $\partial\mathcal{O}$. Этот оператор можно интерпретировать как оператор Шрёдингера с быстро осциллирующими метрикой g^ε, магнитным потенциалом $\mathbf{A}^\varepsilon$ и электрическим потенциалом $\varepsilon^{-1}v^\varepsilon + \mathcal{V}^\varepsilon$, содержащим сингулярное слагаемое $\varepsilon^{-1}v^\varepsilon$. Точное определение оператора $\mathfrak{B}_{N,\varepsilon}$ дается через квадратичную форму

$$\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[u,u] = \int_\mathcal{O} \left(\langle g^\varepsilon(\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon)u, (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon)u\rangle + (\varepsilon^{-1}v^\varepsilon + \mathcal{V}^\varepsilon)|u|^2 \right) d\mathbf{x}, \quad u \in H^1(\mathcal{O}).$$

Легко видеть (см. [Su4, п. 13.1]), что выражение (11.1) можно переписать в виде

$$\mathfrak{B}_\varepsilon = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D} + \sum_{j=1}^d \left(a_j^\varepsilon(\mathbf{x}) D_j + D_j (a_j^\varepsilon(\mathbf{x}))^* \right) + Q^\varepsilon(\mathbf{x}).$$

Здесь вещественная функция $Q(\mathbf{x})$ определена равенством

$$Q(\mathbf{x}) = \mathcal{V}(\mathbf{x}) + \langle g(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x})\rangle. \tag{11.2}$$

Комплексные функции $a_j(\mathbf{x})$ заданы выражениями

$$a_j(\mathbf{x}) = -\eta_j(\mathbf{x}) + i\xi_j(\mathbf{x}), \quad j = 1, \dots, d. \tag{11.3}$$

Здесь $\eta_j(\mathbf{x})$ — компоненты вектор-функции $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x})$, а функции $\xi_j(\mathbf{x})$ имеют вид $\xi_j(\mathbf{x}) = -\partial_j\Phi(\mathbf{x})$, где $\Phi(\mathbf{x})$ — Γ-периодическое решение задачи $\Delta\Phi(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x})$, $\int_\Omega \Phi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0$. При этом выполнено

$$v(\mathbf{x}) = -\sum_{j=1}^{d} \partial_j\xi_j(\mathbf{x}). \tag{11.4}$$

Легко убедиться, что функции (11.3) удовлетворяют условию (1.9) с подходящим показателем ρ', зависящим от ρ и s, причем нормы $\|a_j\|_{L_{\rho'}(\Omega)}$ контролируются через $\|g\|_{L_\infty}$, $\|\mathbf{A}\|_{L_\rho(\Omega)}$, $\|v\|_{L_s(\Omega)}$ и параметры решетки Γ. Функция (11.2) удовлетворяет условию (1.10) с подходящим показателем $s' = \min\{s; \rho/2\}$.

Пусть $Q_0(\mathbf{x})$ — положительно определенная и ограниченная Γ-периодическая функция. Рассмотрим положительно определенный оператор $\mathcal{B}_{N,\varepsilon} := \mathfrak{B}_{N,\varepsilon} + \lambda Q_0^\varepsilon$. Здесь постоянная λ выбрана из условия (2.34) для оператора, коэффициенты g, a_j, $j = 1, \dots, d$, Q и Q_0 которого определены выше. Оператор $\mathcal{B}_{N,\varepsilon}$ можно записать в виде

$$\mathcal{B}_{N,\varepsilon} = (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x}))^* g^\varepsilon(\mathbf{x})(\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x})) + \varepsilon^{-1}v^\varepsilon(\mathbf{x}) + \mathcal{V}^\varepsilon(\mathbf{x}) + \lambda Q_0^\varepsilon(\mathbf{x}).$$

В рассматриваемом случае исходные данные (2.35) сводятся к набору

$$\begin{gathered} d, \rho, s; \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|\mathbf{A}\|_{L_\rho(\Omega)}, \|v\|_{L_s(\Omega)}, \|\mathcal{V}\|_{L_s(\Omega)}, \\ \|Q_0\|_{L_\infty}, \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}; \text{параметры решетки } \Gamma, \text{ область } \mathcal{O}. \end{gathered} \tag{11.5}$$

Опишем эффективный оператор. В рассматриваемом случае Γ-периодическое решение задачи (1.20) является матрицей-строкой: $\Lambda(\mathbf{x}) = i\Psi(\mathbf{x})$, $\Psi(\mathbf{x}) = (\psi_1(\mathbf{x}), \dots, \psi_d(\mathbf{x}))$, где $\psi_j \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ — решение задачи

$$\operatorname{div} g(\mathbf{x})(\nabla\psi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j) = 0, \quad \int_\Omega \psi_j(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0.$$

Здесь $\mathbf{e}_j$, $j = 1, \dots, d$, — стандартные орты в $\mathbb{R}^d$. Ясно, что функции $\psi_j(\mathbf{x})$ вещественнозначные, а элементы матрицы $\Lambda(\mathbf{x})$ чисто мнимые. Согласно (1.22) столбцы $(d \times d)$-матрицы-функции $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ — это $g(\mathbf{x})(\nabla\psi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j)$, $j = 1, \dots, d$. Эффективная матрица определена в соответствии с (1.21): $g^0 = |\Omega|^{-1}\int_\Omega \widetilde{g}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$. Ясно, что $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ и g^0 имеют вещественные элементы.

Согласно (11.3) и (11.4) периодическое решение задачи (1.30) представляется в виде $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) = \widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x}) + i\widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x})$, где вещественные Γ-периодические функции $\widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x})$ и $\widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x})$ являются решениями задач

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} g(\mathbf{x})\nabla\widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x}) + v(\mathbf{x}) = 0, \quad & \int_\Omega \widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0, \\ -\operatorname{div} g(\mathbf{x})\nabla\widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x}) + \operatorname{div} g(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}) = 0, \quad & \int_\Omega \widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0. \end{aligned}$$

Матрица-столбец V (см. (1.34)) имеет вид $V = V_1 + iV_2$, где V_1, V_2 — столбцы с вещественными элементами, определяемые равенствами

$$\begin{aligned} V_1 &= |\Omega|^{-1}\int_\Omega (\nabla\Psi(\mathbf{x}))^t g(\mathbf{x})\nabla\widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}, \\ V_2 &= -|\Omega|^{-1}\int_\Omega (\nabla\Psi(\mathbf{x}))^t g(\mathbf{x})\nabla\widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Согласно (1.35) постоянная W запишется в виде

$$W = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \Big(\langle g(\mathbf{x})\nabla\widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x}), \nabla\widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x})\rangle + \langle g(\mathbf{x})\nabla\widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x}), \nabla\widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x})\rangle \Big)\, d\mathbf{x}.$$

Эффективный оператор $\mathcal{B}_N^0$ для $\mathcal{B}_{N,\varepsilon}$ задан выражением

$$\mathcal{B}^0 u = -\operatorname{div} g^0 \nabla u + 2i\langle \nabla u, V_1 + \overline{\boldsymbol{\eta}}\rangle + (-W + \overline{Q} + \lambda\overline{Q_0})u$$

при краевом условии Неймана. Это выражение допускает запись в виде

$$\mathcal{B}^0 = (\mathbf{D} - \mathbf{A}^0)^* g^0 (\mathbf{D} - \mathbf{A}^0) + \mathcal{V}^0 + \lambda\overline{Q_0},$$

где $\mathbf{A}^0 = (g^0)^{-1}(V_1 + \overline{g\mathbf{A}})$ и $\mathcal{V}^0 = \overline{\mathcal{V}} + \overline{\langle g\mathbf{A}, \mathbf{A}\rangle} - \langle g^0\mathbf{A}^0, \mathbf{A}^0\rangle - W$.

11.2. **Эллиптические результаты.** Согласно замечанию 8.5 в рассматриваемом случае справедливы условия 8.1 и 8.2, причем нормы $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ и $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_\infty}$ оцениваются в терминах данных задачи (11.5). Поэтому можно использовать корректор (8.1), не содержащий сглаживающего оператора:

$$K_N^0(\varepsilon;\zeta) := \big(\Lambda^\varepsilon \mathbf{D} + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon\big)(\mathcal{B}_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} = \big(\Psi^\varepsilon\nabla + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon\big)(\mathcal{B}_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}.$$

Оператор (8.2) запишется в виде

$$G_N^0(\varepsilon;\zeta) = -i\big(\widetilde{g}^\varepsilon\nabla(\mathcal{B}_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} + g^\varepsilon(\nabla\widetilde{\Lambda})^\varepsilon(\mathcal{B}_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\big).$$

В соответствии с теоремами 3.2 и 8.6 справедлив следующий результат.

Предложение 11.1. *Пусть выполнены предположения пункта* 11.1. *Пусть* $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $\zeta = |\zeta|e^{i\phi}$, $0 < \phi < 2\pi$, $|\zeta| \geqslant 1$. *Пусть число* ε_1 *подчинено условию* 3.1. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\big\|(\mathcal{B}_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (\mathcal{B}_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_3 c(\phi)^2 \varepsilon|\zeta|^{-1/2},$$

$$\big\|(\mathcal{B}_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (\mathcal{B}_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon\big(\Psi^\varepsilon\nabla + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon\big)(\mathcal{B}_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}$$
$$\leqslant \mathcal{C}_4 c(\phi)\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + \mathcal{C}_{12}c(\phi)^2\varepsilon,$$

$$\big\|g^\varepsilon\nabla(\mathcal{B}_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - \big(\widetilde{g}^\varepsilon\nabla + g^\varepsilon(\nabla\widetilde{\Lambda})^\varepsilon\big)(\mathcal{B}_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}$$
$$\leqslant \widetilde{\mathcal{C}}_4 c(\phi)\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + \widetilde{\mathcal{C}}_{12}c(\phi)^2\varepsilon.$$

Здесь $c(\phi)$ — *величина* (1.40). *Постоянные* $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$, $\mathcal{C}_{12}$, $\widetilde{\mathcal{C}}_4$ *и* $\widetilde{\mathcal{C}}_{12}$ *зависят только от исходных данных* (11.5).

„Другая“ аппроксимация оператора $(\mathcal{B}_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$ получается на основании теорем 9.1 и 9.7.

Предложение 11.2. *Пусть выполнены предположения пункта* 11.1. *Пусть* $\zeta \in \mathbb{C}\setminus[c_\flat, \infty)$, *где* $c_\flat = \frac{1}{2}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1}\|Q_0\|_{L_\infty}^{-1}$. *Пусть* $\varrho_\flat(\zeta)$ — *величина* (9.1). *Пусть число* ε_1 *подчинено условию* 3.1. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *имеют место оценки*

$$\big\|(\mathcal{B}_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (\mathcal{B}_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_1\varrho_\flat(\zeta)\varepsilon,$$

$$\big\|(\mathcal{B}_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (\mathcal{B}_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon\big(\Psi^\varepsilon\nabla + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon\big)(\mathcal{B}_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}$$
$$\leqslant \mathfrak{C}_2\varepsilon^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{1/2} + \mathfrak{C}_{16}|\zeta+1|^{1/2}\varepsilon\varrho_\flat(\zeta),$$

$$\big\|g^\varepsilon\nabla(\mathcal{B}_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - \big(\widetilde{g}^\varepsilon\nabla + g^\varepsilon(\nabla\widetilde{\Lambda})^\varepsilon\big)(\mathcal{B}_N^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}$$
$$\leqslant \widetilde{\mathfrak{C}}_2\varepsilon^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{1/2} + \widetilde{\mathfrak{C}}_{16}|\zeta+1|^{1/2}\varepsilon\varrho_\flat(\zeta).$$

Постоянные $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_{16}$, $\widetilde{\mathfrak{C}}_2$ *и* $\widetilde{\mathfrak{C}}_{16}$ *зависят только от исходных данных* (11.5).

Применимы также теоремы 8.13 и 9.11 об аппроксимациях оператора $(\mathcal{B}_{N,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$ в строго внутренней подобласти.

11.3. **Параболические результаты.** Обсудим кратко параболическую задачу. Пусть $u_\varepsilon(\mathbf{x},t)$ — решение начально-краевой задачи

$$\begin{cases} Q_0^\varepsilon(\mathbf{x})\dfrac{\partial u_\varepsilon(\mathbf{x},t)}{\partial t} = -\,(\mathbf{D}-\mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x}))^* g^\varepsilon(\mathbf{x})(\mathbf{D}-\mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x}))u_\varepsilon(\mathbf{x},t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad -\big(\varepsilon^{-1}v^\varepsilon(\mathbf{x})+\mathcal{V}^\varepsilon(\mathbf{x})+\lambda Q_0^\varepsilon(\mathbf{x})\big)u_\varepsilon(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x}\in\mathcal{O},\ 0<t<T; \\ Q_0^\varepsilon(\mathbf{x})u_\varepsilon(\mathbf{x},0)=\varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathcal{O}; \end{cases} \tag{11.6}$$

с условием Неймана на $\partial\mathcal{O}\times\mathbb{R}_+$. Здесь $\varphi\in L_2(\mathcal{O})$. Усредненная задача принимает вид

$$\begin{cases} \overline{Q_0}\dfrac{\partial u_0(\mathbf{x},t)}{\partial t} = -\,(\mathbf{D}-\mathbf{A}^0)^* g^0(\mathbf{D}-\mathbf{A}^0))u_0(\mathbf{x},t)-\big(\mathcal{V}^0+\lambda\overline{Q_0}\big)u_0(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x}\in\mathcal{O},\ 0<t<T; \\ \overline{Q_0}u_0(\mathbf{x},0)=\varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathcal{O}. \end{cases} \tag{11.7}$$

Применяя теоремы 10.2 и 10.5, получаем следующее утверждение.

Предложение 11.3. *Пусть выполнены предположения пункта* 11.1. *Пусть* $u_\varepsilon(\mathbf{x},t)$ — *решение задачи* (11.6) *и* $u_0(\mathbf{x},t)$ — *решение усредненной задачи* (11.7). *Пусть число* ε_1 *подчинено условию* 3.1. *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *и* $t>0$ *справедливы оценки*

$$\|u_\varepsilon(\cdot,t)-u_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant \mathrm{C}_1\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2}e^{-c_\flat t/2}\|\varphi\|_{L_2(\mathcal{O})},$$

$$\big\|u_\varepsilon(\cdot,t)-u_0(\cdot,t)-\varepsilon\big(\Psi^\varepsilon\nabla+\widetilde{\Lambda}^\varepsilon\big)u_0(\cdot,t)\big\|_{H^1(\mathcal{O})}\leqslant \mathrm{C}_3\big(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}+\varepsilon t^{-1}\big)e^{-c_\flat t/2}\|\varphi\|_{L_2(\mathcal{O})},$$

$$\big\|g^\varepsilon\nabla u_\varepsilon(\cdot,t)-\big(\widetilde{g}^\varepsilon\nabla+g^\varepsilon(\nabla\widetilde{\Lambda})^\varepsilon\big)u_0(\cdot,t)\big\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant \widetilde{\mathrm{C}}_3\big(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}+\varepsilon t^{-1}\big)e^{-c_\flat t/2}\|\varphi\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Здесь $c_\flat=\frac12\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}\|Q_0\|^{-1}_{L_\infty}$. *Постоянные* C_1, C_3, $\widetilde{\mathrm{C}}_3$ *зависят только от исходных данных* (11.5).

Применима также теорема 10.12, дающая аппроксимацию решения $u_\varepsilon(\cdot,t)$ в $H^1(\mathcal{O}')$. Можно рассмотреть и начально-краевую задачу для неоднородного уравнения (аналог (11.6) с дополнительным слагаемым $F(\mathbf{x},t)$ в правой части уравнения) и применить теоремы 10.14, 10.15, 10.19 и 10.21.

Список литературы

[BaPa] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.

[BeLPap] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publishing Co., Amsterdam—New York, 1978.

[BSu1] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), вып. 5, 1–108.

[BSu2] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), вып. 6, 1–104.

[BSu3] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева* $H^1(\mathbb{R}^d)$, Алгебра и анализ **18** (2006), вып. 6, 1–130.

[Bo] Борисов Д. И., *Асимптотики решений эллиптических систем с быстро осциллирующими коэффициентами*, Алгебра и анализ **20** (2008), вып. 2, 19–42.

[GeS] Geng J., Shen Z., *Convergence rates in parabolic homogenization with time-dependent periodic coefficients*, J. Funct. Anal. **272** (2017), no. 5, 2092–2113.

[Gr1] Griso G., *Error estimate and unfolding for periodic homogenization*, Asymptot. Anal. **40** (2004), no. 3/4, 269–286.

[Gr2] Griso G., *Interior error estimate for periodic homogenization*, Anal. Appl. **4** (2006), no. 1, 61–79.

[ZhKO] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1993.

[Zh1] Жиков В. В., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Докл. РАН **403** (2005), вып. 3, 305–308.

[Zh2] Жиков В. В., *О некоторых оценках из теории усреднения*, Докл. РАН **406** (2006), вып. 5, 597–601.

[ZhPas1] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys. **12** (2005), no. 4, 515-524.

[ZhPas2] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients*, Russ. J. Math. Phys. **13** (2006), no. 2, 224–237.

[ZhPas3] Жиков В. В., Пастухова С. Е., *Об операторных оценках в теории усреднения*, УМН **71 (429)** (2016), вып. 3, 27–122.

[Ka] Като Т., *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

[KeLiS] Kenig C. E., Lin F., Shen Z., *Convergence rates in L^2 for elliptic homogenization problems*, Arch. Rat. Mech. Anal. **203** (2012), no. 3, 1009–1036.

[KoE] Кондратьев В. А., Эйдельман С. Д., *Об условиях на граничную поверхность в теории эллиптических граничных задач*, Докл. АН СССР **246** (1979), вып. 4, 812–815.

[LaU] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1964.

[MaSh] Мазья В. Г., Шапошникова Т. О., *Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций*, Изд. ЛГУ, Ленинград, 1986.

[McL] McLean W., *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000.

[M1] Мешкова Ю. М., *Усреднение задачи Коши для параболических систем с периодическими коэффициентами*, Алгебра и анализ **25** (2013), вып. 6, 125–177.

[M2] Meshkova Yu. M., *On homogenization of the first initial boundary value problem for periodic hyperbolic systems*, Appl. Anal. **99** (2020), no. 9, 1528–1563.

[MSu1] Meshkova Yu. M., Suslina T. A., *Two-parametric error estimates in homogenization of second order elliptic systems in $\mathbb{R}^d$*, Appl. Anal. **95** (2016), no. 7, 1413–1448.

[MSu2] Meshkova Yu. M., Suslina T. A., *Homogenization of initial boundary value problems for parabolic systems with periodic coefficients*, Appl. Anal. **95** (2016), no. 8, 1736–1775.

[MSu3] Мешкова Ю. М., Суслина Т. А., *Усреднение первой начально-краевой задачи для параболических систем: операторные оценки погрешности*, Алгебра и анализ **29** (2017), вып. 6, 99–158.

[MSu4] Meshkova Yu. M., Suslina T. A., *Homogenization of the Dirichlet problem for elliptic systems: Two-parametric error estimates*, 2017, arXiv: 1702.00550v4.

[MSu5] Мешкова Ю. М., Суслина Т. А., *Усреднение задачи Дирихле для эллиптических и параболических систем с периодическими коэффициентами*, Функц. анализ и его прил. **51** (2017), вып. 3, 87–93.

[MoV1] Moskow Sh., Vogelius M., *First-order corrections to the homogenised eigenvalues of a periodic composite medium. A convergence proof*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **127** (1997), no. 6, 1263–1299.

[MoV2] Moskow S., Vogelius M., *First order corrections to the homogenized eigenvalues of a periodic composite medium. The case of Neumann boundary conditions*, Preprint, Rutgers University, 1997.

[Ne] Necas J., *Direct methods in the theory of elliptic equations*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, Heidelberg, 2012.

[OlSh] Олейник О. А., Иосифьян, Г. А., Шамаев А. С., *Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред*, Моск. гос. ун-т, М., 1990.

[PSu] Пахнин М. А., Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности при усреднении эллиптической задачи Дирихле в ограниченной области*, Алгебра и анализ **24** (2012), вып. 6, 139–177.

[R] Rychkov V. S., *On restrictions and extensions of the Besov and Triebel–Lizorkin spaces with respect to Lipschitz domains*, J. London Math. Soc. **60** (1999), 237–257.

[Se] Senik N. N., *Homogenization for non-self-adjoint periodic elliptic operators on an infinite cylinder*, SIAM J. Math. Anal. **49** (2017), no. 2, 874-898.

[S] Shen Z., *Periodic homogenization of elliptic systems*, Birkhäuser, 2018.

[SZh] Shen Z., Zhuge J., *Convergence rates in periodic homogenization of systems of elasticity*, Proc. Amer. Math. Soc. **145** (2017), no. 3, 1187–1202.

[St] Стейн И. М., *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973.

[Su1] Суслина Т. А., *Об усреднении периодических параболических систем*, Функц. анализ и его прил., **38** (2004), вып. 4, 86–90.

[Su2] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem*, Amer. Math. Soc. Transl. (2), vol. 220, 2007, 201–233.

[Su3] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem in the Sobolev space $H^1(\mathbb{R}^d)$*, Math. Model. Nat. Phenom. **5**, no. 4 (2010), 390–447.

[Su4] Суслина Т. А., *Усреднение в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$ для периодических эллиптических дифференциальных операторов второго порядка при включении членов первого порядка*, Алгебра и анализ **22** (2010), вып. 1, 108–222.

[Su5] Suslina T. A., *Homogenization of the Dirichlet problem for elliptic systems: L_2-operator error estimates*, Mathematika **59** (2013), no. 2, 463-476.

[Su6] Suslina T. A., *Homogenization of the Neumann problem for elliptic systems with periodic coefficients*, SIAM J. Math. Anal. **45** (2013), no. 6, 3453-3493.

[Su7] Суслина Т. А., *Усреднение эллиптических систем с периодическими коэффициентами: операторные оценки погрешности в* $L_2(\mathbb{R}^d)$ *с учетом корректора*, Алгебра и анализ **26** (2014), вып. 4, 195–263.

[Su8] Суслина Т. А., *Усреднение эллиптических операторов с периодическими коэффициентами в зависимости от спектрального параметра*, Алгебра и анализ **27** (2015), вып. 4, 87–166.

[Xu1] Xu Q., *Uniform regularity estimates in homogenization theory of elliptic system with lower order terms*, J. Math. Anal. Appl. **438** (2016), no. 2, 1066–1107.

[Xu2] Xu Q., *Uniform regularity estimates in homogenization theory of elliptic systems with lower order terms on the Neumann boundary problem*, J. Diff. Equ. **261** (2016), no. 8, 4368—4423.

[Xu3] Xu Q., *Convergence rates for general elliptic homogenization problems in Lipschitz domains*, SIAM J. Math. Anal. **48** (2016), no. 6, 3742–3788.