ПОМИ ПРЕПРИНТ — 2/2023

Светлой памяти Сергея Николаевича Набоко

ОПЕРАТОРНЫЕ ОЦЕНКИ ПРИ УСРЕДНЕНИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. А. Слоущ, Т. А. Суслина

Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., д. 7/9,
Санкт-Петербург, 199034, Россия

В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ изучается сильно эллиптический самосопряженный дифференциальный оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$ порядка $2p$ с периодическими коэффициентами, зависящими от $\mathbf{x}/\varepsilon$. Получена аппроксимация резольвенты $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$:

$$(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} = (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} + \sum_{j=1}^{2p-1} \varepsilon^j \mathcal{K}_{j,\varepsilon} + O(\varepsilon^{2p}).$$

Здесь $\mathcal{A}^0$ — эффективный оператор с постоянными коэффициентами, а операторы $\mathcal{K}_{j,\varepsilon}$, $j = 1, \dots, 2p-1$, — подходящие корректоры.

Ключевые слова: периодические дифференциальные операторы, теория усреднения, операторные оценки погрешности, эффективный оператор, корректоры.

Исследование выполнено при поддержке РНФ (проект 22-11-00092).

Введение

Работа относится к теории усреднения (гомогенизации) периодических дифференциальных операторов (ДО). Задачам усреднения посвящена обширная литература; в первую очередь укажем монографии [BeLP, BaPan, ZhKO].

0.1. **Операторные оценки погрешности в теории усреднения.** Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ — некоторая решетка, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — элементарная ячейка этой решетки. Пусть $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Для всякой измеримой Γ-периодической функции $F(\mathbf{x})$ используем обозначение $F^\varepsilon(\mathbf{x}) := F(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$.

В серии работ Бирмана и Суслиной [BSu1, BSu2, BSu3, BSu4] был предложен и развит *теоретико-операторный* (*спектральный*) *подход* к задачам усреднения. В упомянутых работах изучался широкий класс самосопряженных матричных ДО второго порядка, действующих в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и заданных в факторизованном виде

$$A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \quad \mathbf{D} = -i\nabla. \tag{0.1}$$

Здесь $g(\mathbf{x})$ — ограниченная и равномерно положительно определенная Γ-периодическая $(m \times m)$-матрица-функция в $\mathbb{R}^d$; $b(\mathbf{D}) = \sum_{j=1}^d b_j D_j$ — $(m \times n)$-матричный ДО первого порядка. Предполагается, что $m \geqslant n$ и символ $b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^d b_j \xi_j$ имеет ранг n при всех $0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$. Простейший пример оператора (0.1) — скалярный эллиптический оператор $-\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla$ (оператор акустики); оператор теории упругости также допускает запись в виде (0.1).

В [BSu1] было показано, что при $\varepsilon \to 0$ резольвента $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ сходится по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ к резольвенте *эффективного оператора* $A^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$, где g^0 — постоянная положительная *эффективная матрица*. Была получена оценка

$$\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.2}$$

В [BSu2, BSu3] была найдена более точная аппроксимация резольвенты $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$:

$$\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0 + I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon^2. \tag{0.3}$$

В [BSu4] была получена аппроксимация резольвенты $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в пространство Соболева $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, с оценкой

$$\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0 + I)^{-1} - \varepsilon K_1(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.4}$$

Операторы $K_1(\varepsilon)$ и $K(\varepsilon)$ — так называемые корректоры. Корректор $K_1(\varepsilon)$ задается выражением $[\Theta^\varepsilon] b(\mathbf{D})(A^0 + I)^{-1}\Pi_\varepsilon$ и содержит осциллирующий множитель Θ^ε, где $\Theta(\mathbf{x})$ — периодическое решение вспомогательной задачи на ячейке Ω. Кроме того, он содержит вспомогательный сглаживающий оператор Π_ε (см. (5.9)). При этом $\|K_1(\varepsilon)\|_{L_2 \to H^1} = O(\varepsilon^{-1})$. Корректор $K(\varepsilon)$ имеет более сложную структуру: $K(\varepsilon) = K_1(\varepsilon) + K_1(\varepsilon)^* + K_3$, где K_3 не зависит от ε. При этом $\|K(\varepsilon)\|_{L_2 \to L_2} = O(1)$.

Оценки (0.2)–(0.4) точны по порядку; постоянные контролируются в терминах данных задачи. Подобные результаты получили название *операторных оценок погрешности* в теории усреднения. Метод исследования в [BSu1, BSu2, BSu3, BSu4] основан на масштабном преобразовании, разложении оператора $A = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$ в прямой интеграл (с помощью преобразования Гельфанда) и аналитической теории возмущений. При этом было выяснено, что резольвенту оператора A_ε можно аппроксимировать в терминах спектральных характеристик оператора A на краю спектра. Тем самым усреднение — это проявление *спектрального порогового эффекта.*

Теоретико-операторный подход применялся к усреднению параболических уравнений второго порядка в работах [Su2, Su3, V, Su5]; были получены аналоги оценок (0.2)–(0.4) для полугруппы $e^{-A_\varepsilon \tau}$, $\tau > 0$. Еще более точные аппроксимации резольвенты и полугруппы оператора (0.1) (при учете первого и второго корректоров) были найдены в [VSu1, VSu2]. В дальнейшем с помощью теоретико-операторного подхода были получены операторные оценки при усреднении нестационарных уравнений типа Шрёдингера и гиперболического типа в $\mathbb{R}^d$ (см. [BSu5, M, Su9, D, Su16, DSu1, DSu2]), при усреднении стационарной и нестационарной системы Максвелла в $\mathbb{R}^3$ (см. [Su1, Su4, DSu3]), а также многие другие результаты. Недавно этот подход был адаптирован и к изучению усреднения нелокальных операторов [PiSlSuZ].

Другой подход к получению операторных оценок (так называемый метод сдвига) был предложен Жиковым [Zh] и развит в дальнейших работах Жикова и Пастуховой; в [ZhPas1], [ZhPas2] этот метод применялся к усреднению эллиптических и параболических уравнений второго порядка. См. также обзор [ZhPas3] и цитированную там литературу. Метод сдвига основан на анализе первого приближения к решению и введении в задачу дополнительного параметра (сдвига на вектор из Ω).

Отдельный интерес представляет задача усреднения для периодических эллиптических ДО высокого четного порядка. К матричным эллиптическим операторам порядка $2p$ (где $p \geqslant 2$) теоретико-операторный подход применялся в работах Вениаминова [Ve] и Кукушкина и Суслиной [KuSu]. В первой работе изучался оператор вида $(\mathbf{D}^p)^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D}^p$, где $g(\mathbf{x})$ — тензор-функция порядка $2p$, ограниченная, положительно определенная и периодическая; такой оператор при $p = 2$ возникает в теории упругих пластин (см. [ZhKO]). В [Ve] был получен старший член приближения резольвенты по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$ и установлен аналог оценки (0.2). В работе [KuSu] изучались более общие матричные операторы порядка $2p$ вида

$$\mathcal{A}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \quad b(\mathbf{D}) = \sum_{|\beta|=p} b_\beta \mathbf{D}^\beta. \tag{0.5}$$

Здесь $g(\mathbf{x})$ — ограниченная и равномерно положительно определенная Γ-периодическая $(m\times m)$-матрица-функция в $\mathbb{R}^d$; $b(\mathbf{D})$ — $(m\times n)$-матричный ДО порядка p. Предполагается, что $m \geqslant n$ и символ $b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{|\beta|=p}^d b_\beta \boldsymbol{\xi}^\beta$ имеет ранг n при всех $0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$. В [KuSu] было показано, что при $\varepsilon \to 0$ резольвента $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ сходится по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ к резольвенте эффективного оператора $\mathcal{A}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$, где g^0 — положительная эффективная матрица. Была получена оценка

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.6}$$

Кроме того, в [KuSu] была найдена аппроксимация резольвенты $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ по "энергетической" норме, то есть по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Установлен аналог оценки (0.4):

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon^p \mathfrak{K}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.7}$$

Корректор $\mathfrak{K}(\varepsilon)$ имеет структуру, аналогичную случаю оператора второго порядка: $\mathfrak{K}(\varepsilon) = [\Theta^\varepsilon] b(\mathbf{D})(A^0 + I)^{-1}\Pi_\varepsilon$; при этом $\|\mathfrak{K}(\varepsilon)\|_{L_2\to H^p} = O(\varepsilon^{-p})$.

Также теоретико-операторный подход применялся к усреднению параболических уравнений высокого порядка: аналоги оценок (0.6), (0.7) для полугруппы $e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}$, $\tau > 0$, были найдены в [MilSu]. Усреднение уравнений типа Шрёдингера и гиперболического типа с оператором $\mathcal{A}_\varepsilon$ высокого порядка изучалось в [Su14] и [Su15].

Метод сдвига применялся к усреднению операторов высокого порядка в работах Пастуховой [Pas1, Pas2], где были получены оценки вида (0.6), (0.7).

Операторные оценки изучались не только для задачи об усреднении эллиптического оператора A_ε в $\mathbb{R}^d$, но и для краевых задач в ограниченной области. В [Zh, ZhPas1] для операторов второго порядка при условиях Дирихле или Неймана были установлены операторные оценки погрешности порядка $O(\varepsilon^{1/2})$ по $L_2 \to L_2$ и $L_2 \to H^1$ нормам; оценки ухудшаются из-за влияния границы области. Близкие результаты были получены

Гризо [Gr1, Gr2] с помощью анфолдинг-метода для скалярного эллиптического оператора в ограниченной области при условиях Дирихле или Неймана; в [Gr2] впервые была доказана точная по порядку оценка погрешности (порядка $O(\varepsilon)$) при аппроксимации резольвенты по операторной норме в L_2. Аналогичные результаты для эллиптических систем были независимо получены в работах [KeLiS] и [PaSu, Su6, Su7]. Операторные оценки при усреднении начально-краевых задач для параболических уравнений изучались в работах [MSu, GeS]. Для стационарной системы Максвелла в ограниченной области при краевых условиях идеальной проводимости такие оценки найдены в [Su10, Su12], а для операторов высокого порядка в ограниченной области — в работах [Su8, Su11, Su13].

В последние годы операторные оценки погрешности в различных задачах гомогенизации для дифференциальных операторов привлекают внимание все большего числа исследователей; получено много содержательных результатов. Такие оценки изучались для системы Стокса [Gu], для операторов с локально периодическими коэффициентами [Bo, PasT1, PasT2, Se1, Se2, Se3], в задачах с высоким контрастом [ChCo, ChEKiN, ChEKi], в задачах с быстро осциллирующей границей или с частой сменой типа граничных условий [BoCFPe, BoSh, BoCDu], и во многих других задачах. Здесь мы не претендуем на полноту обзора.

0.2. **Основные результаты.** В настоящей работе мы продолжаем изучение операторов порядка $2p$ вида (0.5) при $p \geqslant 2$. Основной результат (теорема 5.1): найдена аппроксимация резольвенты $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ с учетом корректоров различных порядков и оценкой погрешности порядка $O(\varepsilon^{2p})$:

$$\Big\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} - \sum_{s=1}^{2p-1} \varepsilon^s \mathcal{K}_{s,\varepsilon}\Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon^{2p}. \tag{0.8}$$

Эффективный оператор и корректоры описываются в терминах периодических решений некоторых вспомогательных задач на ячейке Ω. Корректоры равномерно ограничены (по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$) и выражаются через резольвенту эффективного оператора и некоторые дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, отдельные члены корректоров содержат быстро осциллирующие множители, а также вспомогательный сглаживающий оператор Π_ε. При этом первые несколько корректоров (а именно, $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_{p-1}$) не зависят от ε. Отметим, что оценка (0.8) дает предельную точность, которой можно добиться, используя аналитическую теорию возмущений вблизи края спектра (см. замечание 1.13).

Мы выписываем также "промежуточные" приближения с учетом корректоров $\mathcal{K}_{s,\varepsilon}$ с $s = 1, \dots, J$ и погрешностью $O(\varepsilon^{J+1})$ (где $J \leqslant 2p-1$).

При некоторых условиях сглаживающий оператор Π_ε в выражениях для корректоров можно "устранить" (заменить тождественным оператором), см. теорему 5.4. Это всегда возможно, если $d \leqslant 2p+2$.

Для операторов высокого порядка наблюдается интересный эффект: в "скалярном вещественном" случае (когда $n = 1$ и коэффициенты оператора вещественны) первый корректор обращается в ноль, а потому выполняется оценка

$$\big\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1}\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon^2. \tag{0.9}$$

См. предложение 5.10. Аналоги этого явления имеют место и при аппроксимации полугруппы $e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}$, $\tau > 0$ (см. [MilSu]), а также при усреднении уравнений типа Шрёдингера и гиперболического типа с оператором $\mathcal{A}_\varepsilon$ (см. [Su14, Su15]). Для оператора второго порядка такого эффекта нет.

Результаты работы в случае операторов четвертого порядка (то есть при $p = 2$) были анонсированы в заметках [SlSu1, SlSu2].

Отметим, что близкие результаты были недавно получены Пастуховой [Pas3, Pas4, Pas5] с помощью метода сдвига. В [Pas3, Pas4] установлена аппроксимация резольвенты оператора порядка $2p$ по $(L_2 \to L_2)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon^2)$; была отмечена оценка (0.9) в "скалярном вещественном" случае. В [Pas5] для оператора четвертого порядка в "скалярном вещественном" случае получена аппроксимация резольвенты с погрешностью $O(\varepsilon^3)$, то есть $O(\varepsilon^{2p-1})$ (что на порядок слабее, чем в (0.8)). Кроме того, в [Pas5] найдена аппроксимация резольвенты в энергетической норме (т. е. $(L_2 \to H^2)$-норме) с погрешностью $O(\varepsilon^2)$.

0.3. **Метод.** Мы опираемся на теоретико-операторный подход. С помощью масштабного преобразования выясняется, что имеет место унитарная эквивалентность:

$$(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} \sim \varepsilon^{2p}(\mathcal{A} + \varepsilon^{2p} I)^{-1},$$

где $\mathcal{A} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$. Поэтому вопрос об аппроксимации резольвенты $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ с погрешностью $O(\varepsilon^{2p})$ сводится к задаче приближения резольвенты $(\mathcal{A} + \varepsilon^{2p} I)^{-1}$ с погрешностью $O(1)$. Уже отсюда ясна "пороговая" природа задачи: точка $\lambda = -\varepsilon^{2p}$ близка к нижнему краю спектра $\lambda_0 = 0$ оператора $\mathcal{A}$. Поэтому приближение к резольвенте $(\mathcal{A} + \varepsilon^{2p} I)^{-1}$ удается построить в "пороговых" терминах: важны только спектральные характеристики оператора $\mathcal{A}$ на краю спектра.

Далее, с помощью унитарного преобразования Гельфанда оператор $\mathcal{A}$ раскладывается в прямой интеграл по операторам $\mathcal{A}(\mathbf{k})$, действующим в пространстве $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ и зависящим от d-мерного параметра $\mathbf{k}$ (квазиимпульса). Оператор $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ задается выражением $b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D} + \mathbf{k})$ с периодическими граничными условиями. Следуя [BSu1], мы выделяем одномерный параметр $t = |\mathbf{k}|$, относительно которого семейство $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ представляет собой полиномиальный операторный пучок степени $2p$. Удобно временно абстрагироваться от зависимости от параметра $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ и изучать возникающий полиномиальный пучок $A(t)$ в рамках абстрактной теоретико-операторной схемы, опираясь на аналитическую теорию возмущений [Ka].

Нужная абстрактная схема была развита в работах [Ve, KuSu], а в недавней статье авторов [SlSu3] полностью подготовлен абстрактный теоретико-операторный материал, на который опирается настоящая работа.

0.4. **План статьи.** Работа содержит 6 параграфов. В §1 кратко приводится необходимый абстрактный материал. В §2 вводится изучаемый класс операторов $\mathcal{A}$ порядка $2p$, действующих в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, и описывается разложение оператора $\mathcal{A}$ в прямой интеграл по семейству операторов $\mathcal{A}(\mathbf{k})$, действующих в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$. В §3 семейство операторов $\mathcal{A}(\mathbf{k}) = A(t, \boldsymbol{\theta})$ включается в абстрактную схему и на основе абстрактных результатов из §1 получается аппроксимация резольвенты $(A(t, \boldsymbol{\theta}) + \varepsilon^{2p} I)^{-1}$ при $t \leqslant t^0$. Отсюда в §4 выводится аппроксимация резольвенты $(\mathcal{A} + \varepsilon^{2p} I)^{-1}$ (теорема 4.6). В §5 с помощью масштабного преобразования из теоремы 4.6 выводится основной результат работы (теорема 5.1) — аппроксимация резольвенты $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ с погрешностью $O(\varepsilon^{2p})$. Обсуждаются условия, при которых можно избавиться от сглаживающего оператора в корректорах (теорема 5.4), а также рассматриваются специальные случаи. Заключительный §6 посвящен случаю операторов четвертого порядка, который наиболее важен для приложений.

0.5. **Обозначения.** Пусть $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Символы $(\cdot, \cdot)_{\mathfrak{H}}$ и $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$ означают соответственно скалярное произведение и норму в $\mathfrak{H}$; символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*}$ означает норму линейного ограниченного оператора из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}_*$. Иногда мы опускаем индексы. Пространство линейных ограниченных операторов из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}_*$ обозначается через $\mathcal{B}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_*)$; при $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_*$ пишем просто $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$. Если X — линейный оператор из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}_*$, то $\operatorname{Dom} X$ — его область определения, $\operatorname{Ker} X$ — его ядро. Для замкнутого линейного оператора A в $\mathfrak{H}$ через $\sigma(A)$ обозначим его спектр. Если A_i, $i = 1, \dots, k$, — линейные операторы в $\mathfrak{H}$, то символом $\prod_{i=1}^k A_i$ обозначается их произведение в порядке возрастания индекса, т. е. $\prod_{i=1}^k A_i := A_1 A_2 \cdots A_k$. Аналогичное обозначение используется для произведения матриц.

Если $\mathfrak{N}$ — подпространство в $\mathfrak{H}$, то символ $\mathfrak{N}^\perp$ означает его ортогональное дополнение. Если P — ортопроектор пространства $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}$, то $P^\perp = I - P$ — ортопроектор на $\mathfrak{N}^\perp$.

Скалярное произведение и норма в $\mathbb{C}^n$ обозначаются через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $|\cdot|$ соответственно, $\mathbf{1}_n$ — единичная матрица. Через $\mathrm{M}^{m,n}(\mathbb{C})$ обозначим множество матриц из m строк и n столбцов с комплексными элементами. Если $a \in \mathrm{M}^{m,n}(\mathbb{C})$, то $|a|$ означает норму матрицы a как линейного оператора из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^m$.

Классы L_q, $q \in [1,\infty]$, вектор-функций в области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ со значениями в $\mathbb{C}^n$ обозначим через $L_q(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Классы Соболева $\mathbb{C}^n$-значных функций в области $\mathcal{O}$ порядка $\sigma > 0$ обозначаются через $H^\sigma(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Аналогичный смысл имеют обозначения $L_q(\mathcal{O};\mathrm{M}^{m,n}(\mathbb{C}))$ и $H^\sigma(\mathcal{O};\mathrm{M}^{m,n}(\mathbb{C}))$ для классов матричнозначных функций. Мы часто пользуемся упрощенными обозначениями $L_q(\mathcal{O})$, $H^\sigma(\mathcal{O})$ (если это не приводит к недоразумениям). Если $f(\mathbf{x})$ — измеримая матрица-функция в $\mathbb{R}^d$, то символ $[f]$ означает оператор умножения на эту функцию.

Используем обозначения $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_d) \in \mathbb{R}^d$, $iD_j = \partial_j = \partial/\partial x_j$, $j = 1,\dots,d$; $\mathbf{D} = -i\nabla = (D_1,\dots,D_d)$. Далее, если $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ — мультииндекс и $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$, то $|\alpha| = \sum_{j=1}^d \alpha_j$, $\mathbf{k}^\alpha = k_1^{\alpha_1}\cdots k_d^{\alpha_d}$, $\mathbf{D}^\alpha = D_1^{\alpha_1}\cdots D_d^{\alpha_d}$. Для мультииндексов α,β запись $\beta \leqslant \alpha$ означает, что $\beta_j \leqslant \alpha_j$, $j = 1,\dots,d$; для числа сочетаний используем обозначение $C_\alpha^\beta = C_{\alpha_1}^{\beta_1}\cdots C_{\alpha_d}^{\beta_d}$. Положим $\mathcal{B}(r) := \left\{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{k}| \leqslant r\right\}$, $r > 0$.

Через $C, c, \mathcal{C}, \mathfrak{C}$ (возможно, с индексами и значками) обозначаются различные постоянные в оценках.

0.6. **Благодарности.** Авторы признательны А. И. Назарову за полезные обсуждения.

§ 1. Теоретико-операторная схема

В этом параграфе мы кратко излагаем результаты абстрактной теоретико-операторной схемы, развитой в [Ve, §3,4], [KuSu, §1–3] и в недавней работе авторов [SlSu3].

1.1. **Полиномиальные неотрицательные пучки.** Пусть $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Задано семейство операторов

$$X(t) = \sum_{j=0}^{p} X_j t^j, \quad t \in \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{N}, \quad p \geqslant 2.$$

Операторы $X(t)$, X_j действуют из пространства $\mathfrak{H}$ в пространство $\mathfrak{H}_*$. Предполагается, что оператор X_0 плотно определен и замкнут, оператор X_p определен на всем пространстве $\mathfrak{H}$ и ограничен. Дополнительно накладываются следующие условия.

Условие 1.1. *Справедливы соотношения*

$$\operatorname{Dom} X(t) = \operatorname{Dom} X_0 \subset \operatorname{Dom} X_j \subset \operatorname{Dom} X_p = \mathfrak{H}, \quad j = 0,\dots,p, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Условие 1.2. *Справедливы оценки*

$$\|X_j u\|_{\mathfrak{H}_*} \leqslant C_0 \|X_0 u\|_{\mathfrak{H}_*}, \quad u \in \operatorname{Dom} X_0, \quad j = 0,\dots,p-1, \tag{1.1}$$

где постоянная $C_0 \geqslant 1$ не зависит от j и u.

При сделанных предположениях оператор $X(t)$ заведомо замкнут, если выполнено неравенство $|t| \leqslant (2(p-1)C_0)^{-1}$. Из условия (1.1) вытекают включения

$$\operatorname{Ker} X_0 \subset \operatorname{Ker} X_j, \quad j = 1,\dots,p-1. \tag{1.2}$$

Основным объектом абстрактной схемы является семейство неотрицательных самосопряженных операторов в $\mathfrak{H}$ (полиномиальный неотрицательный пучок)

$$A(t) = X(t)^* X(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad |t| \leqslant (2(p-1)C_0)^{-1}.$$

Обозначим $A(0) = X_0^* X_0 =: A_0$ и положим $\mathfrak{N} := \operatorname{Ker} A_0 = \operatorname{Ker} X_0$. Через P обозначим ортопроектор пространства $\mathfrak{H}$ на подпространство $\mathfrak{N}$.

Условие 1.3. *Предполагается, что точка* $\lambda_0 = 0$ — *изолированная точка спектра оператора* A_0*, причем* $n := \dim \mathfrak{N} < \infty$.

Обозначим через d^0 расстояние от точки $\lambda_0 = 0$ до $\sigma(A_0) \setminus \{\lambda_0\}$. Через $F(t,h)$ обозначим спектральный проектор оператора $A(t)$, отвечающий отрезку $[0,h]$. Зафиксируем положительное число $\delta \leqslant \min\{d^0/36, 1/4\}$ и выберем число $t^0 > 0$, удовлетворяющее условию

$$t^0 \leqslant \delta^{1/2} C_1^{-1}, \text{ где } C_1 = \max\{(p-1)C_0, \|X_p\|\}. \tag{1.3}$$

Отметим, что $t^0 \leqslant 1/2$. Оператор $X(t)$ автоматически замкнут при $|t| \leqslant t^0$, поскольку $t^0 \leqslant (2(p-1)C_0)^{-1}$. В работе [Ve, предложение 3.10] показано, что при $|t| \leqslant t^0$ выполнено

$$F(t,\delta) = F(t, 3\delta), \quad \operatorname{rank} F(t,\delta) = n.$$

Это означает, что при $|t| \leqslant t^0$ на промежутке $[0,\delta]$ оператор $A(t)$ имеет ровно n собственных значений (с учетом кратностей), а промежуток $(\delta, 3\delta)$ свободен от спектра. Для удобства будем использовать сокращенное обозначение $F(t) := F(t,\delta)$. Через $\mathbf{D}_\delta$ обозначим гильбертово пространство $\operatorname{Dom} X_0$ с (гильбертовой) нормой $\|\cdot\|_\delta^2 := \|X_0 \cdot\|_{\mathfrak{H}_*}^2 + \delta \|\cdot\|_{\mathfrak{H}}^2$.

1.2. **Аналитические ветви собственных значений и собственных векторов оператора $A(t)$ в окрестности нуля.** Согласно аналитической теории возмущений (см. [Ka], а также [Ve] и [KuSu]) при $|t| \leqslant t^0$ существуют вещественно-аналитические функции $\lambda_j(t)$ (ветви собственных значений) и вещественно-аналитические $\mathfrak{H}$-значные функции $\varphi_j(t)$ (ветви собственных векторов) такие, что

$$A(t)\varphi_j(t) = \lambda_j(t)\varphi_j(t), \quad j = 1, \dots, n, \quad |t| \leqslant t^0, \tag{1.4}$$

и набор $\{\varphi_j(t)\}_{j=1}^n$ образует ортонормированный базис в подпространстве $F(t)\mathfrak{H}$ при $|t| \leqslant t^0$. Для достаточно малого $t_* \in (0, t^0]$ имеют место абсолютно сходящиеся степенные разложения

$$\lambda_j(t) = \sum_{s=0}^\infty \lambda_j^{(s)} t^s, \quad j = 1, \dots, n, \quad |t| \leqslant t_*; \tag{1.5}$$

$$\varphi_j(t) = \sum_{s=0}^\infty \varphi_j^{(s)} t^s, \quad j = 1, \dots, n, \quad |t| \leqslant t_*. \tag{1.6}$$

Последний ряд сходится по норме в $\mathfrak{H}$. Следующее утверждение проверено в [SlSu3, предложение 1.4].

Предложение 1.4 ([SlSu3])**.** *Пусть выполнены условия* 1.1, 1.2 *и* 1.3, *и* $t_* \in (0, t^0]$ *достаточно мало. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $\varphi_j^{(s)} \in \operatorname{Dom} X_0$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, \dots, n$; *ряд* (1.6) *абсолютно сходится в* $\mathbf{D}_\delta$ *при* $|t| \leqslant t_*$.
2) $\lambda_j^{(s)} = 0$, $s = 0, \dots, 2p-1$; $\lambda_j^{(2p)} \geqslant 0$, $j = 1, \dots, n$.
3) $\varphi_j^{(s)} \in \mathfrak{N}$, $s = 0, \dots, p-1$, $j = 1, \dots, n$.

1.3. **Разложение в степенной ряд оператор-функций $F(t)$ и $A(t)F(t)$ в окрестности нуля.** С учетом (1.4) справедливы представления

$$F(t) = \sum_{j=1}^n (\cdot, \varphi_j(t))_{\mathfrak{H}} \varphi_j(t), \quad |t| \leqslant t^0; \tag{1.7}$$

$$A(t)F(t) = \sum_{j=1}^n \lambda_j(t) (\cdot, \varphi_j(t))_{\mathfrak{H}} \varphi_j(t), \quad |t| \leqslant t^0. \tag{1.8}$$

Подставляя в (1.7) и (1.8) разложения (1.5), (1.6) и учитывая предложение 1.4, получаем

$$F(t) = \sum_{s=0}^{\infty} F_s t^s, \quad |t| \leqslant t_*; \tag{1.9}$$

$$A(t)F(t) = \sum_{s=2p}^{\infty} G_s t^s, \quad |t| \leqslant t_*. \tag{1.10}$$

Ряды (1.9), (1.10) абсолютно сходятся по норме в $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$; кроме того, $\operatorname{Ran} F_s \subset \operatorname{Dom} X_0$, $s \in \mathbb{Z}_+$, и ряд (1.9) абсолютно сходится по норме в $\mathcal{B}(\mathfrak{H}, \mathbf{D}_\delta)$.

Следующее утверждение установлено в [SlSu3, предложение 1.5].

Предложение 1.5 ([SlSu3]). *Пусть выполнены условия* 1.1, 1.2 *и* 1.3. *Тогда для коэффициентов ряда* (1.9) *справедливы следующие утверждения*:

$$F_0 = P, \quad F_k = F_k^*, \quad k \in \mathbb{Z}_+; \tag{1.11}$$

$$F_k = 0, \quad k = 1, \dots, p-1; \tag{1.12}$$

$$F_k = PF_kP^\perp + P^\perp F_k P, \quad k = p, \dots, 2p-1;$$

$$F_k = PF_kP^\perp + P^\perp F_k P - \sum_{s=p}^{k-p} PF_sP^\perp F_{k-s}P + \sum_{s=p}^{k-p} P^\perp F_s P F_{k-s} P^\perp, \quad k = 2p, \dots, 3p-1.$$

1.4. **Разрешающие операторы для вспомогательных задач.** Коэффициенты F_s при $s = p, \dots, 3p-1$ и G_s при $s = 2p, \dots, 4p-1$, вычисляются в терминах разрешающих операторов некоторых вспомогательных задач. Пусть $\mathcal{D} = \operatorname{Dom} X_0 \cap \mathfrak{N}^\perp$, и пусть $u \in \mathfrak{H}_*$. При каждом $i = 0, 1, \dots, p$ найдем элемент $v_i \in \mathcal{D}$ такой, что выполнено тождество

$$(X_0 v_i, X_0 \zeta)_{\mathfrak{H}_*} = (u, X_i \zeta)_{\mathfrak{H}_*} \ \text{ при всех } \ \zeta \in \mathcal{D}. \tag{1.13}$$

Очевидно, $\mathcal{D}$ со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{D}} := (X_0\cdot, X_0\cdot)_{\mathfrak{H}_*}$ является гильбертовым пространством; соответствующую норму на $\mathcal{D}$ обозначим $\|\cdot\|_{\mathcal{D}}$. Отметим, что нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{D}}$ и $\|\cdot\|_\delta$ эквивалентны на $\mathcal{D}$. В [SlSu3, предложение 2.1] проверено следующее утверждение.

Предложение 1.6 ([SlSu3]). *При каждом $i = 0, 1, \dots, p$ и $u \in \mathfrak{H}_*$ задача* (1.13) *имеет единственное решение $v_i \in \mathcal{D}$. Оператор $M_i : u \mapsto v_i$ является линейным ограниченным оператором из $\mathfrak{H}_*$ в $\mathcal{D}$, причем справедливы оценки*

$$\|M_i\|_{\mathfrak{H}_* \to \mathcal{D}} \leqslant C_2, \quad \|M_i\|_{\mathfrak{H}_* \to \mathfrak{H}} \leqslant 6^{-1}\delta^{-1/2} C_2, \quad i = 0, 1, \dots, p,$$

где $C_2 := \max\{C_0, 6^{-1}\delta^{-1/2}\|X_p\|\}$.

Ниже *договоримся считать, что $X_k = 0$, $M_k = 0$ при $k \geqslant p+1$.*

1.5. **Вычисление операторов F_s.** Введем обозначения

$$\mathscr{A}(r) := -M_r X_p, \quad r \in \mathbb{Z}_+; \tag{1.14}$$

$$\mathscr{B}(r) := -\sum_{i=0}^{r} M_i X_{r-i}\big|_{\mathcal{D}}, \quad r \in \mathbb{N}. \tag{1.15}$$

Отметим включения $\mathscr{A}(r) \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}, \mathcal{D})$ и $\mathscr{B}(r) \in \mathcal{B}(\mathcal{D})$.

Далее, при $r = 1, \dots, 2p-1$ определим операторы $\mathscr{C}(r) \in \mathcal{B}(\mathcal{D})$ соотношениями

$$\begin{gathered} \mathscr{C}(r) := \sum_{s=1}^{r} \sum_{J \in \mathbb{N}^s : |J| = r} \mathscr{B}_J, \quad \text{где} \quad J = (j_1, \dots, j_s) \in \mathbb{N}^s, \quad |J| = j_1 + \dots + j_s, \\ \mathscr{B}_J := \mathscr{B}(j_1) \cdot \ldots \cdot \mathscr{B}(j_s). \end{gathered} \tag{1.16}$$

Из (1.15) и (1.16) вытекает удобное представление

$$\mathscr{C}(r)=\sum_{s=1}^{r}(-1)^s \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^s:\\ |\alpha|=r}} \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{Z}_+^s:\\ \beta\leqslant\alpha}} M_{\beta_1}X_{\alpha_1-\beta_1}\cdots M_{\beta_s}X_{\alpha_s-\beta_s}\big|_{\mathcal{D}},\quad r=1,\dots,2p-1. \tag{1.17}$$

Наконец, введем операторы $\mathscr{D}(r)\in\mathcal{B}(\mathfrak{H},\mathcal{D})$, $r=0,\dots,2p-1$, соотношениями

$$\mathscr{D}(0)=\mathscr{A}(0),\quad \mathscr{D}(r)=\sum_{i=0}^{r}\mathscr{C}(i)\mathscr{A}(r-i),\quad r=1,\dots,2p-1\quad (\text{считая }\ \mathscr{C}(0)=I). \tag{1.18}$$

Из (1.14), (1.17) и (1.18) следуют равенства

$$\begin{gathered}\mathscr{D}(0)=-M_0X_p,\quad \mathscr{D}(r)=-M_rX_p+\\ +\sum_{i=1}^{r}\sum_{s=1}^{i}(-1)^{s+1}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^s:\\ |\alpha|=i}}\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{Z}_+^s:\\ \beta\leqslant\alpha}} M_{\beta_1}X_{\alpha_1-\beta_1}\cdots M_{\beta_s}X_{\alpha_s-\beta_s}M_{r-i}X_p,\\ r=1,\dots,2p-1.\end{gathered} \tag{1.19}$$

Следующее утверждение установлено в [SlSu3, теорема 2.7].

Теорема 1.7 ([SlSu3]). *Пусть выполнены условия* 1.1, 1.2 *и* 1.3. *Пусть операторы* $\mathscr{D}(r)\in\mathcal{B}(\mathfrak{H},\mathcal{D})$, $r=0,\dots,2p-1$, *определены равенствами* (1.19). *Тогда для коэффициентов ряда* (1.9) *справедливы соотношения*

$$P^\perp F_kP=P^\perp\mathscr{D}(k-p)P,\quad k=p,\dots,3p-1.$$

Из предложения 1.5 и теоремы 1.7 вытекает следствие (ср. [SlSu3, следствие 2.8]).

Следствие 1.8 ([SlSu3]). *Пусть выполнены условия* 1.1, 1.2 *и* 1.3. *Тогда для коэффициентов ряда* (1.9) *справедливы равенства*

$$\begin{gathered}F_0=P;\quad F_k=0,\quad k=1,\dots,p-1;\\ F_k=P^\perp\mathscr{D}(k-p)P+\big(P^\perp\mathscr{D}(k-p)P\big)^*,\quad k=p,\dots,2p-1;\\ F_k=P^\perp\mathscr{D}(k-p)P+\big(P^\perp\mathscr{D}(k-p)P\big)^*-\sum_{s=p}^{k-p}\big(P^\perp\mathscr{D}(s-p)P\big)^*P^\perp\mathscr{D}(k-s-p)P+\\ +\sum_{s=p}^{k-p}P^\perp\mathscr{D}(s-p)P\big(P^\perp\mathscr{D}(k-s-p)P\big)^*,\quad k=2p,\dots,3p-1.\end{gathered} \tag{1.20}$$

Здесь операторы $\mathscr{D}(r)\in\mathcal{B}(\mathfrak{H},\mathcal{D})$, $r=0,\dots,2p-1$, *определены равенствами* (1.19); *под сопряжением понимается сопряжение ограниченного оператора из* $\mathfrak{H}$ *в* $\mathfrak{H}$.

1.6. **Вычисление операторов G_s.** Ряд (1.9) абсолютно сходится по норме в $\mathcal{B}(\mathfrak{H},\mathbf{D}_\delta)$ при малых t, а потому ряд

$$X(t)F(t)=\sum_{q=0}^{\infty}H_qt^q \tag{1.21}$$

при малых t абсолютно сходится по норме в $\mathcal{B}(\mathfrak{H},\mathfrak{H}_*)$. Из соотношений (1.2), (1.11), (1.12) вытекают равенства

$$H_q=0,\ \ q=0,\dots,p-1;\ \ H_p=X_pP+X_0F_p;\ \ H_q=\sum_{r=0}^{q-p}X_rF_{q-r},\ \ q=p+1,\dots,3p-1. \tag{1.22}$$

Наконец, из равенства $A(t)F(t)=(X(t)F(t))^*(X(t)F(t))$ и из (1.21), (1.22) следует представление для коэффициентов ряда (1.10); ср. [SlSu3, предложение 2.9].

Предложение 1.9 ([SlSu3]). *Пусть выполнены условия* 1.1, 1.2 *и* 1.3. *Тогда справедливы равенства*

$$G_s = \sum_{q=p}^{s-p} H_q^* H_{s-q}, \quad s = 2p, \dots, 4p-1. \tag{1.23}$$

Здесь операторы H_q, $q = p, \dots, 3p-1$, *определены в* (1.22).

Следующие свойства операторов G_s отмечены в [SlSu3, замечание 2.10].

Замечание 1.10. 1°. *Выполнены соотношения* $G_s = PG_sP$, $s = 2p, \dots, 3p-1$, *т. е. операторы* $G_{2p}, \dots, G_{3p-1}$ *нетривиально действуют только в подпространстве* $\mathfrak{N}$.
2°. *Справедливо равенство* $X_0^* H_p = 0$. *Поэтому при вычислении оператора* $H_q^* H_p = \left(\sum_{r=0}^{q-p} X_r F_{q-r}\right)^* H_p$, $q = p+1, \dots, 3p-1$, *можно отбросить слагаемое с* $r = 0$.
3°. *Рассмотрим оператор* $G_{2p} = H_p^* H_p$ *и обозначим* $S := G_{2p}|_{\mathfrak{N}}$. *Оператор* S *является самосопряженным оператором в* n*-мерном пространстве* $\mathfrak{N}$ *и называется спектральным ростком операторного семейства* $A(t)$ *при* $t = 0$. (*См.* [Ve, §3], [KuSu, §1].) *В терминах коэффициентов степенных разложений* (1.5), (1.6) *оператор* G_{2p} *имеет вид*

$$G_{2p} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{(2p)} (\cdot, \varphi_j^{(0)})_{\mathfrak{H}} \varphi_j^{(0)}. \tag{1.24}$$

Коэффициенты $\lambda_j^{(2p)}$ *и* $\varphi_j^{(0)}$ *являются собственными значениями и собственными векторами спектрального ростка*: $S\varphi_j^{(0)} = \lambda_j^{(2p)} \varphi_j^{(0)}$, $j = 1, \dots, n$.

Из (1.20) и (1.22) нетрудно вывести равенства

$$H_p P = X_p P + X_0 \mathscr{D}(0) P, \quad H_q P = \sum_{r=0}^{q-p} X_r \mathscr{D}(q-p-r) P, \quad q = p+1, \dots, 3p-1. \tag{1.25}$$

1.7. **Аппроксимация резольвенты оператора** $A(t)$**.** В этом пункте мы описываем приближение для резольвенты $(A(t) + \varepsilon^{2p} I)^{-1}$ при малом ε, полученное в [SlSu3, §4]. Наложим дополнительное условие на оператор $A(t)$; ср. [Ve], [KuSu] и [SlSu3, условие 4.1].

Условие 1.11. *При* $|t| \leqslant t^0$ *справедливо неравенство*

$$A(t) \geqslant c_* t^{2p} I. \tag{1.26}$$

Всюду ниже предполагаются выполненными условия 1.1, 1.2, 1.3 *и* 1.11.

Условие 1.11 равносильно тому, что

$$\lambda_j(t) \geqslant c_* t^{2p}, \quad j = 1, \dots, n, \quad |t| \leqslant t^0.$$

Следовательно, $\lambda_j^{(2p)} \geqslant c_*$, $j = 1, \dots, n$. С учетом (1.24) это означает, что

$$G_{2p} \geqslant c_* P. \tag{1.27}$$

Из (1.26) вытекает оценка

$$\|(A(t) + \varepsilon^{2p} I)^{-1}\| \leqslant (c_* t^{2p} + \varepsilon^{2p})^{-1}, \quad |t| \leqslant t^0, \quad \varepsilon > 0.$$

Здесь и далее мы опускаем индекс в обозначении операторной нормы в $\mathfrak{H}$.

Обозначим для краткости

$$\hat{R}_0(t, \varepsilon) := (t^{2p} G_{2p} + \varepsilon^{2p} I)^{-1} P, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0. \tag{1.28}$$

Оценка (1.27) вместе с соображением, что оператор G_{2p} самосопряжен и нетривиально действует только в подпространстве $\mathfrak{N}$ (см. замечание 1.10), приводят к неравенству

$$\|\hat{R}_0(t, \varepsilon)\| \leqslant (c_* t^{2p} + \varepsilon^{2p})^{-1}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0.$$

Перейдем к описанию *корректоров* $\mathcal{K}_s(t,\varepsilon)$, $s=1,\dots,2p-1$; см. [SlSu3, (4.40), (4.43), (4.80), (4.84)–(4.86)]. Положим

$$\tilde{\mathbb{N}}_M := \{2p+1,\dots,2p+1+M\}, \quad M\in\mathbb{Z}_+, \tag{1.29}$$

и

$$\begin{gathered}\Delta_\gamma(t,\varepsilon) := \hat{R}_0(t,\varepsilon)\prod_{i=1}^{k}\bigl(G_{\gamma_i}\hat{R}_0(t,\varepsilon)\bigr) = \hat{R}_0 G_{\gamma_1}\hat{R}_0\cdots G_{\gamma_k}\hat{R}_0,\\ \gamma\in\mathbb{Z}_+^k,\ \ 2p+1\leqslant\gamma_i\leqslant 4p-1,\ \ i=1,\dots,k,\ \ k\in\mathbb{N};\ \ t\in\mathbb{R},\ \ \varepsilon>0.\end{gathered} \tag{1.30}$$

Для краткости здесь и ниже пишем $\hat{R}_0$ вместо $\hat{R}_0(t,\varepsilon)$.

При $s=1,\dots,p-1$ корректоры задаются выражениями

$$\mathcal{K}_s(t,\varepsilon) := \sum_{k=1}^{s}(-1)^k t^{2pk+s}\sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{s-k})^k:\\ |\gamma|=2pk+s}}\Delta_\gamma(t,\varepsilon), \quad s=1,\dots,p-1. \tag{1.31}$$

Корректор $\mathcal{K}_p(t,\varepsilon)$ задан выражением

$$\mathcal{K}_p(t,\varepsilon) := t^p(F_p\hat{R}_0+\hat{R}_0F_p) + \sum_{k=1}^{p}(-1)^k t^{2pk+p}\sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{p-k})^k:\\ |\gamma|=2pk+p}}\Delta_\gamma(t,\varepsilon). \tag{1.32}$$

При $s=p+1,\dots,2p-1$ определим корректоры

$$\mathcal{K}_s(t,\varepsilon) := t^s\left(F_s\hat{R}_0+\hat{R}_0F_s\right) - t^{2p+s}\hat{R}_0G_{2p+s}\hat{R}_0 + \mathcal{K}_s'(t,\varepsilon)+\mathcal{K}_s''(t,\varepsilon)+\mathcal{K}_s'''(t,\varepsilon). \tag{1.33}$$

Здесь

$$\mathcal{K}_s'(t,\varepsilon) := \sum_{k=2}^{s-p+1}(-1)^k t^{2pk+s}\sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{p-2})^k:\\ |\gamma|=2pk+s}}\Delta_\gamma(t,\varepsilon) + \sum_{k=s-p+2}^{s}(-1)^k t^{2pk+s}\sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{s-k})^k:\\ |\gamma|=2pk+s}}\Delta_\gamma(t,\varepsilon), \tag{1.34}$$

$$\mathcal{K}_s''(t,\varepsilon) := \sum_{k=1}^{s-p}(-1)^k t^{2pk+s}\sum_{l=p}^{s-k}\sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{s-p-k})^k:\\ l+|\gamma|=2pk+s}}\left(F_l\Delta_\gamma(t,\varepsilon)+\Delta_\gamma(t,\varepsilon)F_l\right), \tag{1.35}$$

$$\mathcal{K}_s'''(t,\varepsilon) := \sum_{k=2}^{s-p+1}(-1)^k t^{2pk+s}\sum_{i=3p}^{2p+1+s-k}\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{p-2})^{k-1}:\\ i+|\gamma|=2pk+s}}\Xi_{i,j,\gamma}^{(k)}(t,\varepsilon). \tag{1.36}$$

Операторы $\Xi_{i,j,\gamma}^{(k)}(t,\varepsilon)$ заданы соотношениями

$$\begin{aligned}&\Xi_{i,0,\gamma}^{(k)}(t,\varepsilon) := \Delta_{\eta_1}(t,\varepsilon), \quad \eta_1=\eta_1(i,\gamma)=(i,\gamma_1,\dots,\gamma_{k-1}), \quad k\geqslant 2,\\ &\Xi_{i,k-1,\gamma}^{(k)}(t,\varepsilon) := \Delta_{\eta_2}(t,\varepsilon), \quad \eta_2=\eta_2(i,\gamma)=(\gamma_1,\dots,\gamma_{k-1},i), \quad k\geqslant 2,\\ &\Xi_{i,j,\gamma}^{(k)}(t,\varepsilon) := \Delta_{\eta_3}(t,\varepsilon), \quad \eta_3=\eta_3(i,j,\gamma)=(\gamma_1,\dots,\gamma_j,i,\gamma_{j+1},\dots,\gamma_{k-1}),\\ &\qquad k\geqslant 3,\ j=1,\dots,k-2.\end{aligned} \tag{1.37}$$

Основной абстрактный результат — следующая теорема, установленная в [SlSu3, теорема 4.13].

Теорема 1.12 ([SlSu3]). *Пусть операторный пучок* $A(t)$ *определен в пункте* 1.1, *причем выполнены условия* 1.1, 1.2, 1.3 *и* 1.11. *Тогда при* $|t| \leqslant t^0$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедливы представления*

$$(A(t) + \varepsilon^{2p} I)^{-1} = \hat{R}_0(t, \varepsilon) + Z^{(0)}(t, \varepsilon),$$

$$(A(t) + \varepsilon^{2p} I)^{-1} = \hat{R}_0(t, \varepsilon) + \sum_{s=1}^{J} \mathcal{K}_s(t, \varepsilon) + Z^{(J)}(t, \varepsilon), \quad J = 1, \dots, 2p-1. \tag{1.38}$$

Оператор $\hat{R}_0(t, \varepsilon)$ *определен в* (1.28). *Корректоры* $\mathcal{K}_s(t, \varepsilon)$ *при* $s = 1, \dots, p$, *определены в* (1.31) *и* (1.32), *а при* $s = p+1, \dots, 2p-1$ *корректоры* $\mathcal{K}_s(t, \varepsilon)$ *определены согласно* (1.33)–(1.37). *Выполнены оценки*

$$\|\mathcal{K}_s(t, \varepsilon)\| \leqslant C(p) c_*^{-s/2p} (1 + c_*^{-1})^s C_T^{(2p+1)s} \varepsilon^{-(2p-s)}, \quad s = 1, \dots, 2p-1, \quad t \in \mathbb{R}, \ \varepsilon > 0.$$

Остаточные члены подчинены оценкам

$$\|Z^{(J)}(t, \varepsilon)\| \leqslant C^{(J)} \varepsilon^{-(2p-J-1)}, \quad |t| \leqslant t^0, \ \varepsilon > 0, \quad J = 0, 1, \dots, 2p-1,$$

$$C^{(0)} = (3\delta)^{-1/2p} + C(p) c_*^{-1/2p} (1 + c_*^{-1}) C_T^{2p+1},$$

$$C^{(J)} = (3\delta)^{-(J+1)/2p} + C(p) c_*^{-(J+1)/2p} (1 + c_*^{-1})^{J+1} C_T^{(p+1+J/2)^2}, \quad J = 1, \dots, 2p-1.$$

Число t^0 *подчинено условию* (1.3), *постоянная* C_T *задана соотношением*

$$C_T := p C_0^2 + \|X_p\|^2 \delta^{-1},$$

c_* — *постоянная из условия* 1.11, $C(p)$ — *некоторая постоянная, зависящая только от* p.

Замечание 1.13. 1°. *Отметим, что аппроксимации резольвенты из теоремы* 1.12 *имеют самосопряженный вид, поскольку* $\hat{R}_0(t, \varepsilon)^* = \hat{R}_0(t, \varepsilon)$ *и* $\mathcal{K}_s(t, \varepsilon)^* = \mathcal{K}_s(t, \varepsilon)$, $s = 1, \dots, 2p-1$.
2°. *При* $J = 2p-1$ *аппроксимация* (1.38) *наиболее точная, погрешность имеет порядок* $O(1)$. *Это предельная точность, которую можно получить с помощью аналитической теории возмущений вблизи края спектра. Доказательство теоремы* 1.12 *опирается на то, что* $\|(A(t) + \varepsilon^{2p} I)^{-1} F(t)^\perp\| = O(1)$, *а потому достаточно приблизить оператор* $\hat{R}(t, \varepsilon) = (A(t) + \varepsilon^{2p} I)^{-1} F(t)$.

§ 2. Периодические дифференциальные операторы в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Разложение в прямой интеграл

2.1. **Факторизованные операторы порядка** $2p$ **в** $\mathbb{R}^d$**.** В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ рассматриваются дифференциальные операторы, формально заданные выражением

$$\mathcal{A} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}).$$

Здесь $g(\mathbf{x})$ — равномерно положительно определенная и ограниченная измеримая матрица-функция размера $m \times m$ (в общем случае $g(\mathbf{x})$ — эрмитова матрица с комплексными элементами):

$$c' \mathbf{1}_m \leqslant g(\mathbf{x}) \leqslant c'' \mathbf{1}_m, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d; \quad 0 < c' \leqslant c'' < \infty. \tag{2.1}$$

Оператор $b(\mathbf{D})$ имеет вид

$$b(\mathbf{D}) = \sum_{|\beta|=p} b_\beta \mathbf{D}^\beta, \tag{2.2}$$

где b_β — $(m \times n)$-матрицы с постоянными элементами, вообще говоря, комплексными. Считаем, что $m \geqslant n$, а символ

$$b(\boldsymbol{\xi}) := \sum_{|\beta|=p} b_\beta \boldsymbol{\xi}^\beta, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d, \tag{2.3}$$

оператора $b(\mathbf{D})$ имеет максимальный ранг, то есть

$$\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi}) = n, \quad 0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d.$$

Последнее условие равносильно оценкам

$$\alpha_0 \mathbf{1}_n \leqslant b(\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta}) \leqslant \alpha_1 \mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}; \quad 0 < \alpha_0 \leqslant \alpha_1 < \infty, \tag{2.4}$$

с некоторыми положительными константами α_0, α_1. Без ограничения общности можно считать нормы матриц b_β ограниченными константой $\sqrt{\alpha_1}$:

$$|b_\beta| \leqslant \sqrt{\alpha_1}, \quad |\beta| = p. \tag{2.5}$$

Строгое определение оператора $\mathcal{A}$ дается через квадратичную форму. Из условий (2.1) следует, что матрицу $g(\mathbf{x})$ можно представить в факторизованном виде

$$g(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})^* h(\mathbf{x}),$$

причем h, $h^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$. Например, можно положить $h(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})^{1/2}$.

Рассмотрим оператор $\mathcal{X} : L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \to L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$, действующий по правилу

$$(\mathcal{X}\mathbf{u})(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad \operatorname{Dom} \mathcal{X} = H^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n),$$

и квадратичную форму

$$a[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \|\mathcal{X}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \langle g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{u}(\mathbf{x}), b(\mathbf{D}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \rangle \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n). \tag{2.6}$$

Проверим следующие неравенства

$$c_0 \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}^p \mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant a[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leqslant c_1 \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}^p \mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n), \tag{2.7}$$

где $|\mathbf{D}^p \mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 := \sum\limits_{|\beta|=p} |\mathbf{D}^\beta \mathbf{u}(\mathbf{x})|^2$. Во-первых, в силу равенства Парсеваля

$$\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |b(\boldsymbol{\xi}) \widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi} \leqslant a[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leqslant \|g\|_{L_\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |b(\boldsymbol{\xi}) \widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi}, \quad \mathbf{u} \in H^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n),$$

где $\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})$ — Фурье-образ функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Отсюда и из (2.4) следует, что

$$\alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\boldsymbol{\xi}|^{2p} |\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi} \leqslant a[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leqslant \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\boldsymbol{\xi}|^{2p} |\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi}, \quad \mathbf{u} \in H^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n). \tag{2.8}$$

Наконец, при помощи элементарных неравенств

$$c'_p \sum_{|\beta|=p} |\boldsymbol{\xi}^\beta|^2 \leqslant |\boldsymbol{\xi}|^{2p} \leqslant c''_p \sum_{|\beta|=p} |\boldsymbol{\xi}^\beta|^2, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d, \tag{2.9}$$

где постоянные c'_p и c''_p зависят только от d и p, приходим к искомым соотношениям (2.7) с постоянными

$$c_0 = c'_p \alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}, \quad c_1 = c''_p \alpha_1 \|g\|_{L_\infty}. \tag{2.10}$$

Следовательно, форма (2.6) замкнута и неотрицательна. По определению, $\mathcal{A}$ есть самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, отвечающий форме (2.6).

2.2. **Решетки Γ и $\widetilde{\Gamma}$.** В дальнейшем матрицы-функции g и h предполагаются периодическими относительно некоторой решетки $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$. Пусть $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d$ — базис в $\mathbb{R}^d$, порождающий решетку Γ, то есть,

$$\Gamma = \Big\{ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{a} = \sum_{j=1}^{d} \nu_j \mathbf{a}_j, \ \nu_j \in \mathbb{Z} \Big\},$$

и пусть Ω — элементарная ячейка решетки Γ:

$$\Omega = \Big\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \ \mathbf{x} = \sum_{j=1}^{d} \kappa_j \mathbf{a}_j, \ 0 < \kappa_j < 1 \Big\}.$$

Базис $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d$ в $\mathbb{R}^d$, двойственный к $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d$, определяется соотношениями $\langle \mathbf{b}_j, \mathbf{a}_l \rangle = 2\pi \delta_{jl}$. Порожденная им решетка

$$\widetilde{\Gamma} = \Big\{ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{b} = \sum_{j=1}^{d} \zeta_j \mathbf{b}_j, \ \zeta_j \in \mathbb{Z} \Big\}$$

называется *двойственной* к решетке Γ. Рассмотрим центральную зону Бриллюэна двойственной решетки:

$$\widetilde{\Omega} := \Big\{ \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{k}| < |\mathbf{k} - \mathbf{b}|, \ 0 \neq \mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma} \Big\}. \tag{2.11}$$

Область $\widetilde{\Omega}$ является фундаментальной областью решетки $\widetilde{\Gamma}$. Обозначим $|\Omega| = \operatorname{mes} \Omega$, $|\widetilde{\Omega}| = \operatorname{mes} \widetilde{\Omega}$ и заметим, что $|\Omega||\widetilde{\Omega}| = (2\pi)^d$. Обозначим через r_0 радиус наибольшего шара, содержащегося в $\operatorname{clos} \widetilde{\Omega}$. Отметим, что

$$\begin{aligned} &2r_0 = \min |\mathbf{b}|, \quad 0 \neq \mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma}, \\ &|\mathbf{k} + \mathbf{b}| \geqslant r_0, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos} \widetilde{\Omega}, \quad 0 \neq \mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Под $\widetilde{H}^\sigma(\Omega; \mathbb{C}^n)$, $\sigma > 0$, понимается подпространство функций из $H^\sigma(\Omega; \mathbb{C}^n)$, Γ-периодическое продолжение которых на $\mathbb{R}^d$ принадлежит $H^\sigma_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$.

С решеткой Γ связано дискретное преобразование Фурье $\{\widehat{\mathbf{v}}_\mathbf{b}\}_{\mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma}} \mapsto \mathbf{v}$:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = |\Omega|^{-1/2} \sum_{\mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma}} \widehat{\mathbf{v}}_\mathbf{b} e^{i \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle}, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

которое унитарно отображает $l_2(\widetilde{\Gamma}; \mathbb{C}^n)$ на $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$:

$$\int_\Omega |\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma}} |\widehat{\mathbf{v}}_\mathbf{b}|^2.$$

2.3. **Преобразование Гельфанда.** Первоначально *преобразование Гельфанда* $\mathcal{U}$ определяется на функциях из класса Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ формулой

$$\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = (\mathcal{U}\mathbf{v})(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = |\widetilde{\Omega}|^{-1/2} \sum_{\mathbf{a} \in \Gamma} e^{-i \langle \mathbf{k}, \mathbf{x} + \mathbf{a} \rangle} \mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{a}), \quad \mathbf{v} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n), \quad \mathbf{x}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d,$$

а затем $\mathcal{U}$ распространяется по непрерывности до унитарного отображения:

$$\mathcal{U} : L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \to \int_{\widetilde{\Omega}} \oplus L_2(\Omega; \mathbb{C}^n) \, d\mathbf{k} =: \mathcal{H}. \tag{2.13}$$

Соотношение $\mathbf{v} \in H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ эквивалентно тому, что $\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\cdot) \in \widetilde{H}^p(\Omega;\mathbb{C}^n)$ при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и

$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}} \int\limits_{\Omega} \left(|\,(\mathbf{D}+\mathbf{k})^p\, \widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\mathbf{x})|^2 + |\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\mathbf{x})|^2 \right)\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{k} < \infty.$$

Оператор умножения на ограниченную Γ-периодическую функцию в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ под действием преобразования Гельфанда переходит в оператор умножения на ту же функцию в слоях прямого интеграла $\mathcal{H}$ из (2.13). Действие оператора $b(\mathbf{D})$ на $\mathbf{v} \in H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ переходит в послойное действие оператора $b(\mathbf{D}+\mathbf{k})$ на $\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\cdot) \in \widetilde{H}^p(\Omega;\mathbb{C}^n)$.

2.4. **Формы $a(\mathbf{k})$ и операторы $\mathcal{A}(\mathbf{k})$.** Положим $\mathfrak{H} = L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$, $\mathfrak{H}_* = L_2(\Omega;\mathbb{C}^m)$. Рассмотрим оператор $\mathcal{X}(\mathbf{k}) : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$, определенный соотношениями

$$(\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u})(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad \operatorname{Dom} \mathcal{X}(\mathbf{k}) = \widetilde{H}^p(\Omega;\mathbb{C}^n). \tag{2.14}$$

Рассмотрим квадратичную форму

$$a(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \langle g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathbf{u}(\mathbf{x}), b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathbf{u}(\mathbf{x})\rangle\, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in \widetilde{H}^p(\Omega;\mathbb{C}^n). \tag{2.15}$$

С помощью дискретного преобразования Фурье и соотношений (2.1) и (2.4) легко проверить, что при всех $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$ выполнены оценки

$$\alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} a_*(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant a(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} a_*(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}], \quad \mathbf{u} \in \widetilde{H}^p(\Omega;\mathbb{C}^n), \tag{2.16}$$

где

$$a_*(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \sum_{\mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma}} |\mathbf{b}+\mathbf{k}|^{2p} |\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{b}}|^2, \quad \mathbf{u} \in \widetilde{H}^p(\Omega;\mathbb{C}^n). \tag{2.17}$$

Отсюда с учетом (2.9) получаем

$$c_0 \int\limits_{\Omega} |(\mathbf{D}+\mathbf{k})^p \mathbf{u}|^2\, d\mathbf{x} \leqslant a(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant c_1 \int\limits_{\Omega} |(\mathbf{D}+\mathbf{k})^p \mathbf{u}|^2\, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in \widetilde{H}^p(\Omega;\mathbb{C}^n),$$

где постоянные c_0, c_1 определены в (2.10). Следовательно, оператор $\mathcal{X}(\mathbf{k})$ замкнут, а форма (2.15) замкнута и неотрицательна. Самосопряженный оператор в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$, отвечающий форме $a(\mathbf{k})$, обозначим через $\mathcal{A}(\mathbf{k})$. Формально можно записать

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}) = b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}+\mathbf{k}).$$

2.5. **Прямой интеграл для оператора $\mathcal{A}$.** Операторы $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ позволяют нам частично диагонализовать оператор $\mathcal{A}$ в прямом интеграле $\mathcal{H}$ (см. (2.13)). Пусть $\widetilde{\mathbf{u}} = \mathcal{U}\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \in \operatorname{Dom} a$. Тогда

$$\widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k},\cdot) \in \operatorname{Dom} a(\mathbf{k}) = \widetilde{H}^p(\Omega;\mathbb{C}^n) \text{ при почти всех } \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}, \tag{2.18}$$

$$a[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} a(\mathbf{k})[\widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k},\cdot), \widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k},\cdot)]\, d\mathbf{k}. \tag{2.19}$$

Наоборот, если $\widetilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{H}$ удовлетворяет (2.18) и интеграл в (2.19) сходится, то $\mathbf{u} \in \operatorname{Dom} a$ и (2.19) выполнено. Таким образом, под действием преобразования Гельфанда оператор $\mathcal{A}$ превращается в прямом интеграле $\mathcal{H}$ в умножение на операторнозначную функцию $\mathcal{A}(\mathbf{k})$, $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$. Всё это можно кратко выразить формулой

$$\mathcal{U}\mathcal{A}\mathcal{U}^{-1} = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \oplus \mathcal{A}(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}. \tag{2.20}$$

§ 3. Применение результатов абстрактной схемы к семейству операторов $\mathcal{A}(\mathbf{k})$

3.1. Включение операторов $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ в абстрактную схему. Для $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$ положим

$$\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}, \quad t = |\mathbf{k}|, \quad \boldsymbol{\theta} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|},$$

и будем считать t основным (одномерным) параметром. В то же время все построения будут зависеть от параметра $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$ и мы должны заботиться о равномерности оценок по этому параметру.

Применяя метод, описанный в §1, положим $\mathfrak{H} = L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ и $\mathfrak{H}_* = L_2(\Omega; \mathbb{C}^m)$. Согласно (2.2) и (2.14), имеем:

$$\mathcal{X}(\mathbf{k}) = h \sum_{|\beta|=p} b_\beta (\mathbf{D}+\mathbf{k})^\beta = h \sum_{|\beta|=p} b_\beta \sum_{\gamma \leqslant \beta} C_\beta^\gamma \mathbf{k}^{\beta-\gamma} \mathbf{D}^\gamma =$$
$$= h \sum_{|\beta|=p} b_\beta \sum_{\gamma \leqslant \beta} C_\beta^\gamma t^{|\beta-\gamma|} \boldsymbol{\theta}^{\beta-\gamma} \mathbf{D}^\gamma.$$

Следовательно, оператор $\mathcal{X}(\mathbf{k})$ допускает запись в виде

$$\mathcal{X}(\mathbf{k}) = X(t, \boldsymbol{\theta}) = X_0 + \sum_{j=1}^{p} t^j X_j(\boldsymbol{\theta}).$$

Здесь оператор

$$X_0 = h \sum_{|\beta|=p} b_\beta \mathbf{D}^\beta = hb(\mathbf{D})$$

замкнут на области определения $\operatorname{Dom} X_0 = \widetilde{H}^p(\Omega; \mathbb{C}^n)$, “промежуточные” операторы $X_j(\boldsymbol{\theta})$, $j = 1, \dots, p-1$, заданы соотношениями

$$X_j(\boldsymbol{\theta}) = h \sum_{|\beta|=p} b_\beta \sum_{\gamma \leqslant \beta,\ |\gamma|=p-j} C_\beta^\gamma \boldsymbol{\theta}^{\beta-\gamma} \mathbf{D}^\gamma$$

на областях определения $\operatorname{Dom} X_j(\boldsymbol{\theta}) = \widetilde{H}^{p-j}(\Omega; \mathbb{C}^n)$, а оператор

$$X_p(\boldsymbol{\theta}) = h \sum_{|\beta|=p} b_\beta \boldsymbol{\theta}^\beta = hb(\boldsymbol{\theta})$$

ограничен из $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^m)$. Положим (в соответствии с абстрактной схемой) $X_j(\boldsymbol{\theta}) = 0$, $j \geqslant p+1$.

Аналогично можно выписать разложение

$$b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) = \sum_{j=0}^{p} B_j(\mathbf{k}, \mathbf{D}), \quad B_0(\mathbf{k}, \mathbf{D}) = b(\mathbf{D}),$$
$$B_j(\mathbf{k}, \mathbf{D}) = \sum_{|\beta|=p} b_\beta \sum_{\gamma \leqslant \beta,\ |\gamma|=p-j} C_\beta^\gamma \mathbf{k}^{\beta-\gamma} \mathbf{D}^\gamma, \quad j = 1, \dots, p-1,$$
$$B_p(\mathbf{k}, \mathbf{D}) = b(\mathbf{k}). \tag{3.1}$$

Нам будет удобно считать $B_j(\mathbf{k}, \mathbf{D}) = 0$, $j \geqslant p+1$. Также нам понадобится представление

$$B_j(\mathbf{k}, \mathbf{D}) = \sum_{|\nu|=j} \mathbf{k}^\nu \sum_{\beta \geqslant \nu, |\beta|=p} b_\beta C_\beta^\nu \mathbf{D}^{\beta-\nu} = \sum_{|\nu|=j} \mathbf{k}^\nu \widehat{B}_\nu(\mathbf{D}), \quad j = 0, \dots, p. \tag{3.2}$$

Равенство $B_j(\mathbf{k}, \mathbf{D}) = \sum_{|\nu|=j} \mathbf{k}^\nu \widehat{B}_\nu(\mathbf{D})$ можно считать выполненным и при $j \geqslant p+1$, полагая $\widehat{B}_\nu(\mathbf{D}) = 0$ при $|\nu| \geqslant p+1$.

Разумеется, $B_j(\mathbf{k},\mathbf{D})$, $\widehat{B}_\nu(\mathbf{D})$, $|\nu| = j$, $j = 0,\dots,p$, — дифференциальные операторы порядка $p-j$ с постоянными коэффициентами; справедливы равенства

$$X_j(\boldsymbol{\theta}) = hB_j(\boldsymbol{\theta},\mathbf{D}),\quad B_j(t\boldsymbol{\theta},\mathbf{D}) = t^j B_j(\boldsymbol{\theta},\mathbf{D}),\quad \boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1},\quad t>0,\quad j\in\mathbb{Z}_+.$$

Видно, что условие 1.1 выполнено:

$$\operatorname{Dom} X_0 \subset \operatorname{Dom} X_j(\boldsymbol{\theta}) \subset \operatorname{Dom} X_p(\boldsymbol{\theta}) = L_2(\Omega;\mathbb{C}^n),\quad j=1,\dots,p-1.$$

В силу (2.4) справедлива оценка

$$\|X_p(\boldsymbol{\theta})\| \leqslant \alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}. \tag{3.3}$$

Согласно [KuSu, предложение 5.1] ядро оператора X_0 имеет вид

$$\mathfrak{N} := \operatorname{Ker} X_0 = \{\mathbf{u}\in L_2(\Omega;\mathbb{C}^n) : \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\in\mathbb{C}^n\}, \tag{3.4}$$

а потому $\dim\mathfrak{N} = n$. Из [KuSu, предложение 5.2] вытекает выполнение условия 1.2, а именно: при $j=1,\dots,p-1$ справедливы оценки

$$\|X_j(\boldsymbol{\theta})\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \widetilde{C}_j\|X_0\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)},\quad \mathbf{u}\in\widetilde{H}^p(\Omega;\mathbb{C}^n), \tag{3.5}$$

где

$$\widetilde{C}_j = \alpha_1^{1/2}\alpha_0^{-1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}(2r_0)^{-j}\Big(\sum_{|\beta|=p}\ \sum_{\gamma\leqslant\beta,\ |\gamma|=p-j} C_\beta^\gamma\Big). \tag{3.6}$$

Отметим, что постоянные $\widetilde{C}_j$ не зависят от параметра $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$, а зависят лишь от d, p, j, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, α_0, α_1 и r_0. Неравенства (3.5) позволяют в качестве постоянной C_0 из (1.1) принять

$$C_0 = \max\{1,\widetilde{C}_1,\dots,\widetilde{C}_{p-1}\}, \tag{3.7}$$

где константы $\widetilde{C}_j$ определены в (3.6). Постоянная C_0 зависит лишь от d, p, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, α_0, α_1 и r_0.

В силу компактности вложения $\operatorname{Dom} a(0) = \widetilde{H}^p(\Omega;\mathbb{C}^n)$ в пространство $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ спектр оператора $\mathcal{A}(0)$ дискретен. Точка $\lambda_0 = 0$ является изолированным собственным значением оператора $\mathcal{A}(0)$ кратности n, соответствующее собственное подпространство $\mathfrak{N}$ описано в (3.4). Тем самым, выполнено условие 1.3.

Используя вариационные соображения, с помощью нижней оценки (2.16) и (2.17) легко оценить расстояние d^0 от точки $\lambda_0 = 0$ до остального спектра оператора $\mathcal{A}(0)$ (см. [KuSu, (5.17)]):

$$d^0 \geqslant \alpha_0\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1}(2r_0)^{2p}. \tag{3.8}$$

Следуя абстрактной схеме, зафиксируем положительное число $\delta\leqslant\min\left\{\frac{d^0}{36},\frac{1}{4}\right\}$. С учетом (3.8) положим

$$\delta = \min\left\{\frac{\alpha_0 r_0^{2p}}{4\|g^{-1}\|_{L_\infty}},\frac{1}{4}\right\}. \tag{3.9}$$

Постоянная $C_1(\boldsymbol{\theta}) = \max\{(p-1)C_0,\|X_p(\boldsymbol{\theta})\|\}$ (см. (1.3)) сейчас зависит от $\boldsymbol{\theta}$. С учетом (3.3) (завышая константу) примем значение

$$C_1 = \max\left\{(p-1)C_0,\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\right\},$$

не зависящее от $\boldsymbol{\theta}$. В соответствии с (1.3), положим

$$t^0 = \delta^{1/2}C_1^{-1} = \frac{\delta^{1/2}}{\max\left\{(p-1)C_0,\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\right\}}. \tag{3.10}$$

Отметим, что $t^0\leqslant 1$, поскольку $(p-1)C_0\geqslant 1$ и $\delta\leqslant 1$. Следовательно,

$$t^0\leqslant (t^0)^{1/p}\leqslant \delta^{1/2p}\alpha_1^{-1/2p}\|g\|_{L_\infty}^{-1/2p}\leqslant 4^{-1/2p}\alpha_0^{1/2p}\alpha_1^{-1/2p}\|g\|_{L_\infty}^{-1/2p}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1/2p}r_0 < r_0.$$

В последнем переходе использованы очевидные неравенства $\alpha_0 \leqslant \alpha_1$ и $\|g\|_{L_\infty}\|g^{-1}\|_{L_\infty} \geqslant 1$. Таким образом, шар $\mathcal{B}(t^0)$ находится внутри шара $\mathcal{B}(r_0)$ и тем самым целиком содержится в $\widetilde{\Omega}$.

3.2. **Невырожденность спектрального ростка.** Из нижней оценки (2.16) и (2.17) с учетом (2.11) вытекает неравенство

$$a(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geqslant \alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} |\mathbf{k}|^{2p} \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad \mathbf{u} \in \widetilde{H}^p(\Omega;\mathbb{C}^n), \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}.$$

Тем самым,

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}) \geqslant c_* |\mathbf{k}|^{2p} I, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}, \tag{3.11}$$

где

$$c_* = \alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}. \tag{3.12}$$

Этим проверено выполнение условия 1.11.

Таким образом, мы убедились, что операторное семейство $\mathcal{A}(\mathbf{k}) =: A(t,\boldsymbol{\theta})$ удовлетворяет всем предположениям абстрактной схемы. Существенно, что δ, t^0 и c_* не зависят от $\boldsymbol{\theta}$ (см. (3.9), (3.10), (3.12)).

Сейчас аналитические (по t) ветви собственных значений $\lambda_j(t,\boldsymbol{\theta})$ и аналитические ветви собственных функций $\varphi_j(t,\boldsymbol{\theta})$, $j = 1,\dots,n$, $|t| \leqslant t^0$, операторного семейства $A(t,\boldsymbol{\theta})$ (см. пункт 1.2) зависят от $\boldsymbol{\theta}$. Из (3.11) следуют неравенства

$$\lambda_j(t,\boldsymbol{\theta}) \geqslant c_* t^{2p}, \quad j = 1,\dots,n, \quad t = |\mathbf{k}| \leqslant t^0. \tag{3.13}$$

Разложения (1.5), (1.6) принимают вид

$$\lambda_j(t,\boldsymbol{\theta}) = \sum_{s=2p}^{\infty} \lambda_j^{(s)}(\boldsymbol{\theta}) t^s, \quad j = 1,\dots,n, \quad |\boldsymbol{\theta}| \leqslant t_*(\boldsymbol{\theta}), \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}, \tag{3.14}$$

$$\varphi_j(t,\boldsymbol{\theta}) = \sum_{s=0}^{\infty} \varphi_j^{(s)}(\boldsymbol{\theta}) t^s, \quad j = 1,\dots,n, \quad |\boldsymbol{\theta}| \leqslant t_*(\boldsymbol{\theta}), \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

Пусть $F(t,\boldsymbol{\theta})$ — спектральный проектор оператора $A(t,\boldsymbol{\theta})$, отвечающий интервалу $[0,\delta]$. Разложения (1.9), (1.10) принимают вид

$$F(t,\boldsymbol{\theta}) = \sum_{s=0}^{\infty} F_s(\boldsymbol{\theta}) t^s, \quad |\boldsymbol{\theta}| \leqslant t_*(\boldsymbol{\theta}), \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}, \tag{3.15}$$

$$A(t,\boldsymbol{\theta})F(t,\boldsymbol{\theta}) = \sum_{s=2p}^{\infty} G_s(\boldsymbol{\theta}) t^s, \quad |\boldsymbol{\theta}| \leqslant t_*(\boldsymbol{\theta}), \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}. \tag{3.16}$$

Из (3.13) и (3.14) следует, что $\lambda_j^{(2p)}(\boldsymbol{\theta}) \geqslant c_*$, $j = 1,\dots,n$. Отсюда вытекает (см. (1.24), (1.27)), что росток $S(\boldsymbol{\theta}) = G_{2p}(\boldsymbol{\theta})|_{\mathfrak{N}}$ семейства $A(t,\boldsymbol{\theta})$ невырожден при всех $\boldsymbol{\theta}$ и выполнена оценка

$$S(\boldsymbol{\theta}) \geqslant c_* I_{\mathfrak{N}}, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}. \tag{3.17}$$

3.3. **Вспомогательные задачи на ячейке.** Поскольку ядро оператора X_0 состоит из констант, задача

$$\begin{cases} b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \Lambda_j(\mathbf{k},\mathbf{x}) = \left(P^\perp B_j(\mathbf{k},\mathbf{D})^* g\right)(\mathbf{x}), \\ \int_\Omega \Lambda_j(\mathbf{k},\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0 \end{cases} \tag{3.18}$$

имеет единственное (слабое) решение $\Lambda_j(\mathbf{k},\cdot) \in \widetilde{H}^p(\Omega;\mathrm{M}^{n,m}(\mathbb{C}))$ при любых $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$, $j \in \mathbb{Z}_+$. Отметим равенства

$$\Lambda_j = 0, \quad j \geqslant p+1; \quad \Lambda_j(\mathbf{k},\mathbf{x}) = \sum_{|\nu|=j} \mathbf{k}^\nu \widehat{\Lambda}_\nu(\mathbf{x}), \quad \widehat{\Lambda}_\nu(\cdot) \in \widetilde{H}^p(\Omega;\mathrm{M}^{n,m}(\mathbb{C})).$$

Мы учли (3.2). В частности, $\Lambda_0(\mathbf{k},\mathbf{x})=\widehat{\Lambda}_0(\mathbf{x})$ не зависит от $\mathbf{k}$.

Операторы M_j, в абстрактных терминах определенные в п. 1.4, сейчас зависят от $\boldsymbol{\theta}$.

Предложение 3.1. *Справедливы соотношения*

$$M_j(\boldsymbol{\theta})X_p(\boldsymbol{\theta})P=[\Lambda_j(\boldsymbol{\theta},\cdot)]b(\boldsymbol{\theta})P,\quad \boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1},\quad j\in\mathbb{Z}_+. \tag{3.19}$$

Доказательство. При $j\geqslant p+1$ равенство (3.19) очевидно. При $j=0,\dots,p$ обозначим столбцы матрицы $\Lambda_j(\boldsymbol{\theta},\mathbf{x})$ через $v_j^1(\boldsymbol{\theta},\mathbf{x}),\dots,v_j^m(\boldsymbol{\theta},\mathbf{x})$, и столбцы матрицы $h(\mathbf{x})$ через $h^1(\mathbf{x}),\dots,h^m(\mathbf{x})$. Сравнивая (1.13) и (3.18), получаем равенства

$$v_j^l(\boldsymbol{\theta},\cdot)=M_j(\boldsymbol{\theta})h^l,\quad l=1,\dots,m.$$

Далее, при любом $\mathbf{u}\in L_2(\Omega,\mathbb{C}^n)$ вектор-функция $\mathbf{w}(\boldsymbol{\theta})=b(\boldsymbol{\theta})P\mathbf{u}=(w_1(\boldsymbol{\theta}),\dots,w_m(\boldsymbol{\theta}))^t$ — постоянный вектор из $\mathbb{C}^m$. Следовательно, справедливы соотношения

$$M_j(\boldsymbol{\theta})X_p(\boldsymbol{\theta})P\mathbf{u}=M_j(\boldsymbol{\theta})hb(\boldsymbol{\theta})P\mathbf{u}=M_j(\boldsymbol{\theta})\sum_{l=1}^m w_l(\boldsymbol{\theta})h^l=\sum_{l=1}^m w_l(\boldsymbol{\theta})v_j^l(\boldsymbol{\theta},\cdot)=\Lambda_j(\boldsymbol{\theta},\cdot)b(\boldsymbol{\theta})P\mathbf{u}.$$

$\square$

Аналогично, для любой матрицы-функции $\Lambda\in\widetilde{H}^p(\Omega;\mathrm{M}^{n,m}(\mathbb{C}))$ и произвольных $\mathbf{k}\in\mathbb{R}^d$, $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+$ существует единственное (слабое) решение задачи

$$\begin{cases} b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x})b(\mathbf{D})\Sigma(\alpha,\beta,\Lambda;\mathbf{k},\mathbf{x})=\left(P^\perp B_\alpha(\mathbf{k},\mathbf{D})^*gB_\beta(\mathbf{k},\mathbf{D})\Lambda\right)(\mathbf{x}),\\ \int\limits_\Omega \Sigma(\alpha,\beta,\Lambda;\mathbf{k},\mathbf{x})\,d\mathbf{x}=0,\quad \Sigma(\alpha,\beta,\Lambda;\mathbf{k},\cdot)\in\widetilde{H}^p(\Omega;\mathrm{M}^{n,m}(\mathbb{C})).\end{cases} \tag{3.20}$$

Отметим, что если $\alpha\geqslant p+1$ или $\beta\geqslant p+1$ или $\Lambda=0$, то $\Sigma(\alpha,\beta,\Lambda;\mathbf{k},\cdot)=0$.

Аналогично предложению 3.1 проверяется следующее утверждение.

Предложение 3.2. *Для любой матрицы-функции $\Lambda\in\widetilde{H}^p(\Omega;\mathrm{M}^{n,m}(\mathbb{C}))$ и произвольных $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+$, $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$ имеет место равенство*

$$M_\alpha(\boldsymbol{\theta})X_\beta(\boldsymbol{\theta})[\Lambda]b(\boldsymbol{\theta})P=[\Sigma(\alpha,\beta,\Lambda;\boldsymbol{\theta},\cdot)]b(\boldsymbol{\theta})P. \tag{3.21}$$

Теперь для произвольных $j\in\mathbb{Z}_+$, $s\in\mathbb{N}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^s$ определим матрицу-функцию

$$\Lambda_{\alpha,\beta,j}(\mathbf{k},\cdot)\in\widetilde{H}^p(\Omega;\mathrm{M}^{n,m}(\mathbb{C}))$$

следующим образом:

а) при $s=1$ положим $\Lambda_{\alpha,\beta,j}(\mathbf{k},\cdot)=\Sigma(\alpha,\beta,\Lambda_j;\mathbf{k},\cdot)$, $j,\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+$, $\mathbf{k}\in\mathbb{R}^d$;

б) если при некотором $s\in\mathbb{N}$ определены $\Lambda_{\hat\alpha,\hat\beta,j}(\mathbf{k},\cdot)$, $j\in\mathbb{Z}_+$, $\hat\alpha,\hat\beta\in\mathbb{Z}_+^s$, $\mathbf{k}\in\mathbb{R}^d$, то

$$\Lambda_{\binom{\alpha_1}{\hat\alpha},\binom{\beta_1}{\hat\beta},j}(\mathbf{k},\cdot):=\Sigma(\alpha_1,\beta_1,\Lambda_{\hat\alpha,\hat\beta,j};\mathbf{k},\cdot),\quad j,\alpha_1,\beta_1\in\mathbb{Z}_+,\quad \mathbf{k}\in\mathbb{R}^d.$$

Отметим соотношения

$$\Lambda_{\alpha,\beta,j}=0,\quad\text{если}\quad j\geqslant p+1\quad\text{или}\quad \alpha\in\mathbb{Z}_+^s\setminus\{0,\dots,p\}^s\quad\text{или}\quad \beta\in\mathbb{Z}_+^s\setminus\{0,\dots,p\}^s;$$

$$\Lambda_{\alpha,\beta,j}(\mathbf{k},\mathbf{x})=\sum_{|\nu|=|\alpha|+|\beta|+j}\mathbf{k}^\nu\widehat{\Lambda}_{\alpha,\beta,j,\nu}(\mathbf{x}),\quad \widehat{\Lambda}_{\alpha,\beta,j,\nu}(\cdot)\in\widetilde{H}^p(\Omega;\mathrm{M}^{n,m}(\mathbb{C})).$$

Проитерировав равенство (3.21), приходим к следующему утверждению.

Предложение 3.3. *Для любых $j\in\mathbb{Z}_+$, $s\in\mathbb{N}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^s$, $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$ справедливо равенство*

$$M_{\alpha_1}(\boldsymbol{\theta})X_{\beta_1}(\boldsymbol{\theta})\cdots M_{\alpha_s}(\boldsymbol{\theta})X_{\beta_s}(\boldsymbol{\theta})M_j(\boldsymbol{\theta})X_p(\boldsymbol{\theta})P=[\Lambda_{\alpha,\beta,j}(\boldsymbol{\theta},\cdot)]b(\boldsymbol{\theta})P. \tag{3.22}$$

Операторы $\mathscr{D}(r)$, в абстрактных терминах определенные в (1.19), сейчас зависят от $\boldsymbol{\theta}$. Сравнивая (1.19) и (3.19), (3.22), приходим к следующему утверждению.

Предложение 3.4. *При всех $r = 0, \dots, 2p-1$ справедливы равенства*

$$\mathscr{D}(r,\boldsymbol{\theta})P = P^{\perp}\mathscr{D}(r,\boldsymbol{\theta})P = [\Theta(r;\boldsymbol{\theta},\mathbf{x})]b(\boldsymbol{\theta})P, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}, \tag{3.23}$$

где

$$\Theta(0;\mathbf{k},\mathbf{x}) = -\Lambda_0(\mathbf{k},\mathbf{x}) = -\widehat{\Lambda}_0(\mathbf{x}), \quad \Theta(r;\mathbf{k},\mathbf{x}) = -\Lambda_r(\mathbf{k},\mathbf{x}) + \\ + \sum_{i=1}^{r}\sum_{s=1}^{i}(-1)^{s+1} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^s: \\ |\alpha| = i}} \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{Z}_+^s: \\ \beta \leqslant \alpha}} \Lambda_{\beta,\alpha-\beta,r-i}(\mathbf{k},\mathbf{x}), \\ \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad r = 1, \dots, 2p-1. \tag{3.24}$$

Отметим соотношения

$$\Theta(r;\mathbf{k},\mathbf{x}) = \sum_{|\nu|=r} \mathbf{k}^{\nu}\widehat{\Theta}_{\nu}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad r = 0, \dots, 2p-1; \\ \widehat{\Theta}_{\nu} \in \widetilde{H}^p(\Omega; \mathrm{M}^{n,m}(\mathbb{C})), \quad \int_{\Omega} \widehat{\Theta}_{\nu}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0, \quad |\nu| = r, \quad r = 0, \dots, 2p-1. \tag{3.25}$$

В соответствии с результатами §1, интересующие нас коэффициенты $F_s(\boldsymbol{\theta})$, $s = 0, \dots, 2p-1$, и $PG_s(\boldsymbol{\theta})P$, $s = 2p, \dots, 4p-1$, выражаются в терминах матриц-функций $\Theta(r;\boldsymbol{\theta},\cdot)$, $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$, $r = 0, \dots, 2p-1$. Отметим, что вычисление матриц $\Theta(r;\mathbf{k},\mathbf{x})$ при помощи равенств (3.24) весьма неудобно, так как требует знания большого количества матриц $\Lambda_{\beta,\alpha-\beta,r-i}(\mathbf{k},\mathbf{x})$. Следующее утверждение дает удобную рекуррентную формулу для матриц $\Theta(r;\mathbf{k},\mathbf{x})$.

Предложение 3.5. *Матрица-функция $\Theta(0;\mathbf{k},\mathbf{x})$ является единственным решением из класса $\widetilde{H}^p(\Omega;\mathrm{M}^{n,m}(\mathbb{C}))$ задачи*

$$b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x})b(\mathbf{D})\Theta(0;\mathbf{k},\mathbf{x}) = -b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x}), \quad \int_{\Omega} \Theta(0;\mathbf{k},\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0. \tag{3.26}$$

При всяком $r = 1, \dots, 2p-1$ матрица-функция $\Theta(r;\mathbf{k},\mathbf{x})$ является единственным решением из класса $\widetilde{H}^p(\Omega;\mathrm{M}^{n,m}(\mathbb{C}))$ задачи

$$\begin{cases} b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x})b(\mathbf{D})\Theta(r;\mathbf{k},\mathbf{x}) = -\left(P^{\perp}B_r(\mathbf{k},\mathbf{D})^*g\right)(\mathbf{x}) - \sum\limits_{j=1}^{r}\left(P^{\perp}E_j(\mathbf{k},\cdot,\mathbf{D})\Theta(r-j;\mathbf{k},\cdot)\right)(\mathbf{x}), \\ \int\limits_{\Omega} \Theta(r;\mathbf{k},\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0. \end{cases} \tag{3.27}$$

Здесь $E_j(\mathbf{k},\mathbf{x},\mathbf{D}) = \sum\limits_{l=0}^{j} B_l(\mathbf{k},\mathbf{D})^*g(\mathbf{x})B_{j-l}(\mathbf{k},\mathbf{D}), \quad j = 1, \dots, 2p-1.$

Доказательство. Первое утверждение прямо следует из равенства $\Theta(0;\mathbf{k},\mathbf{x}) = -\Lambda_0(\mathbf{k},\mathbf{x})$ и задачи (3.18) при $j = 0$.

Для любого $r = 1, \dots, 2p-1$ в равенстве (3.24) выделим в отдельную группу слагаемые с мультииндексами α, β длины $s = 1$:

$$\Theta(r;\mathbf{k},\mathbf{x}) = -\Lambda_r(\mathbf{k},\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{\beta=0}^{i}\Lambda_{\beta,i-\beta,r-i}(\mathbf{k},\mathbf{x}) + \\ + \sum_{i=2}^{r}\sum_{s=2}^{i}(-1)^{s+1} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^s: \\ |\alpha| = i}} \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{Z}_+^s: \\ \beta \leqslant \alpha}} \Lambda_{\beta,\alpha-\beta,r-i}(\mathbf{k},\mathbf{x}).$$

В последней группе слагаемых выделим суммирование по первым компонентам мультииндексов α и β:

$$\Theta(r;\mathbf{k},\mathbf{x}) = -\Lambda_r(\mathbf{k},\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{\beta=0}^{i}\Lambda_{\beta,i-\beta,r-i}(\mathbf{k},\mathbf{x}) +$$
$$+\sum_{i=2}^{r}\sum_{s=2}^{i}(-1)^{s+1}\sum_{\alpha_1=1}^{i-s+1}\sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1}\sum_{\substack{\hat{\alpha}\in\mathbb{N}^{s-1}:\\ |\hat{\alpha}|=i-\alpha_1}}\sum_{\substack{\hat{\beta}\in\mathbb{Z}_+^{s-1}:\\ \hat{\beta}\leqslant\hat{\alpha}}}\Lambda_{\binom{\beta_1}{\hat{\beta}},\binom{\alpha_1-\beta_1}{\hat{\alpha}-\hat{\beta}},r-i}(\mathbf{k},\mathbf{x}).$$

Меняя порядок суммирования в последней группе слагаемых, получаем:

$$\Theta(r;\mathbf{k},\mathbf{x}) = -\Lambda_r(\mathbf{k},\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{\beta=0}^{i}\Lambda_{\beta,i-\beta,r-i}(\mathbf{k},\mathbf{x}) +$$
$$+\sum_{\alpha_1=1}^{r-1}\sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1}\sum_{i=\alpha_1+1}^{r}\sum_{s=2}^{i-\alpha_1+1}(-1)^{s+1}\sum_{\substack{\hat{\alpha}\in\mathbb{N}^{s-1}:\\ |\hat{\alpha}|=i-\alpha_1}}\sum_{\substack{\hat{\beta}\in\mathbb{Z}_+^{s-1}:\\ \hat{\beta}\leqslant\hat{\alpha}}}\Lambda_{\binom{\beta_1}{\hat{\beta}},\binom{\alpha_1-\beta_1}{\hat{\alpha}-\hat{\beta}},r-i}(\mathbf{k},\mathbf{x}). \qquad (3.28)$$

Вычисляя выражение $b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x})b(\mathbf{D})\Theta(r;\mathbf{k},\mathbf{x})$ с помощью (3.28) и учитывая (3.18), (3.20), (3.24) и определение матриц-функций $\Lambda_{\alpha,\beta,j}$, получаем требуемое утверждение. $\square$

Для оценок решений вспомогательных задач нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 3.6. *Пусть* $\mathbf{f}\in L_2(\Omega;\mathbb{C}^m)$ *— произвольная функция,* $\sigma\in\mathbb{Z}_+^d$, *и* $\mathbf{v}\in\widetilde{H}^p(\Omega;\mathbb{C}^n)$ *— слабое решение задачи*

$$\begin{cases} b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x})b(\mathbf{D})\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \left(P^\perp\widehat{B}_\sigma(\mathbf{D})^*\mathbf{f}\right)(\mathbf{x}),\\ \int\limits_\Omega \mathbf{v}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0.\end{cases} \qquad (3.29)$$

Здесь оператор $\widehat{B}_\sigma(\mathbf{D})$ *при* $|\sigma|\leqslant p$ *определен в* (3.2), *а при* $|\sigma|\geqslant p+1$ *полагаем* $\widehat{B}_\sigma(\mathbf{D})=0$. *Справедливы оценки*

$$\|\mathbf{v}\|_{H^p(\Omega)}\leqslant C(p,d,\sigma,r_0)\alpha_0^{-1}\alpha_1^{1/2}\|g^{-1}\|_{L_\infty}\|\mathbf{f}\|_{L_2(\Omega)}, \qquad (3.30)$$

$$\|\widehat{B}_\mu(\mathbf{D})P^\perp\mathbf{v}\|_{L_2(\Omega)}\leqslant C(p,d,\sigma,\mu,r_0)\alpha_0^{-1}\alpha_1\|g^{-1}\|_{L_\infty}\|\mathbf{f}\|_{L_2(\Omega)},\quad \mu\in\mathbb{Z}_+^d. \qquad (3.31)$$

Доказательство. В силу неравенств (2.5) справедлива оценка

$$\|\widehat{B}_\nu(\mathbf{D})P^\perp\mathbf{v}\|_{L_2(\Omega)}\leqslant C(p,\nu,d)\alpha_1^{1/2}\|\mathbf{v}\|_{H^p(\Omega)},\quad \nu\in\mathbb{Z}_+^d. \qquad (3.32)$$

Интегральное тождество для задачи (3.29) имеет вид

$$a(\mathbf{0})[\mathbf{v},\mathbf{w}] = \int_\Omega\langle\mathbf{f}(\mathbf{x}),\widehat{B}_\sigma(\mathbf{D})P^\perp\mathbf{w}(\mathbf{x})\rangle\,d\mathbf{x},\quad \mathbf{w}\in\widetilde{H}^p(\Omega;\mathbb{C}^n).$$

Следовательно, справедлива оценка

$$a(\mathbf{0})[\mathbf{v},\mathbf{v}]\leqslant\|\mathbf{f}\|_{L_2(\Omega)}\|\widehat{B}_\sigma(\mathbf{D})P^\perp\mathbf{v}\|_{L_2(\Omega)}.$$

С учетом (3.32) отсюда следует, что

$$a(\mathbf{0})[\mathbf{v},\mathbf{v}]\leqslant C(p,\sigma,d)\alpha_1^{1/2}\|\mathbf{f}\|_{L_2(\Omega)}\|\mathbf{v}\|_{H^p(\Omega)}. \qquad (3.33)$$

Из (2.16), (2.17) и (3.33) вытекает неравенство

$$\sum_{\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}}|\mathbf{b}|^{2p}|\widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}}|^2\leqslant C(p,\sigma,d)\alpha_0^{-1}\alpha_1^{1/2}\|g^{-1}\|_{L_\infty}\|\mathbf{f}\|_{L_2(\Omega)}\|\mathbf{v}\|_{H^p(\Omega)}. \qquad (3.34)$$

Остается заметить, что при условии $\int_\Omega \mathbf{v}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0$ справедливо (см., например, [KuSu], следствие 5.8) неравенство

$$\|\mathbf{v}\|^2_{H^p(\Omega)} \leqslant C(p,d,r_0) \sum_{\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}} |\mathbf{b}|^{2p} |\widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}}|^2. \tag{3.35}$$

Из (3.34), (3.35) вытекает (3.30); оценка (3.31) следует из (3.30) и (3.32). $\square$

Из леммы 3.6 и предложения 3.5 вытекает следующее утверждение.

Следствие 3.7. *Пусть* $\widehat{\Theta}_\nu(\mathbf{x})$ *— матрицы-функции из представления* (3.25). *При всех* $\nu \in \mathbb{Z}^d_+$, $|\nu| \leqslant 2p-1$, $\mu \in \mathbb{Z}^d_+$, *справедливы оценки*

$$\|\widehat{\Theta}_\nu\|_{H^p(\Omega)} \leqslant C(p,d,\nu,\alpha_0,\alpha_1,\|g\|_{L_\infty},\|g^{-1}\|_{L_\infty},r_0,|\Omega|),$$
$$\|\widehat{B}_\mu(\mathbf{D})\widehat{\Theta}_\nu\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C(p,d,\nu,\mu,\alpha_0,\alpha_1,\|g\|_{L_\infty},\|g^{-1}\|_{L_\infty},r_0,|\Omega|),$$
$$\|\Theta(r;\mathbf{k},\cdot)\|_{H^p(\Omega)} \leqslant \mathfrak{C}_r |\mathbf{k}|^r, \quad r=0,\dots,2p-1, \quad \mathbf{k}\in\mathbb{R}^d. \tag{3.36}$$

Постоянная $\mathfrak{C}_r$ *зависит от* p, d, r, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0, $|\Omega|$.

3.4. **Вычисление коэффициентов $F_s(\boldsymbol{\theta})P$ и $PG_s(\boldsymbol{\theta})P$.** В силу (1.20) и (3.23) справедливы равенства

$$F_s(\boldsymbol{\theta})P = [\Theta(s-p;\boldsymbol{\theta},\mathbf{x})]b(\boldsymbol{\theta})P, \quad \boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}, \quad s=p,\dots,2p-1. \tag{3.37}$$

Из (1.25) и (3.23) вытекает представление

$$H_q(\boldsymbol{\theta})P = [h(\mathbf{x})\Upsilon_q(\boldsymbol{\theta},\mathbf{x})]b(\boldsymbol{\theta})P, \quad \boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}, \quad q=p,\dots,3p-1, \tag{3.38}$$

где матрицы-функции $\Upsilon_q(\mathbf{k},\mathbf{x})$ определяются равенствами

$$\Upsilon_p(\mathbf{k},\mathbf{x}) := \mathbf{1}_m + b(\mathbf{D})\Theta(0;\mathbf{k},\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\Omega, \quad \mathbf{k}\in\mathbb{R}^d, \tag{3.39}$$

$$\Upsilon_q(\mathbf{k},\mathbf{x}) := \sum_{r=0}^{q-p} B_r(\mathbf{k},\mathbf{D})\Theta(q-p-r;\mathbf{k},\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\Omega, \quad \mathbf{k}\in\mathbb{R}^d, \quad q=p+1,\dots,3p-1. \tag{3.40}$$

Отметим свойство

$$\Upsilon_q(\mathbf{k},\mathbf{x}) = \sum_{|\nu|=q-p} \mathbf{k}^\nu \widehat{\Upsilon}_\nu(\mathbf{x}), \quad \widehat{\Upsilon}_\nu \in L_2(\Omega;\mathrm{M}^{m,m}(\mathbb{C})), \quad |\nu|=q-p, \quad q=p,\dots,3p-1. \tag{3.41}$$

В частности, $\Upsilon_p(\mathbf{k},\mathbf{x}) = \widehat{\Upsilon}_0(\mathbf{x})$ не зависит от $\mathbf{k}$. В силу следствия 3.7 справедливы оценки

$$\|\widehat{\Upsilon}_\nu\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C(p,d,\nu,\alpha_0,\alpha_1,\|g\|_{L_\infty},\|g^{-1}\|_{L_\infty},r_0,|\Omega|), \quad |\nu|=0,\dots,2p-1. \tag{3.42}$$

Сравнивая (3.38) и (1.23), получаем представление для коэффициентов $PG_s(\boldsymbol{\theta})P$:

$$PG_s(\boldsymbol{\theta})P = b(\boldsymbol{\theta})^* g_s(\boldsymbol{\theta}) b(\boldsymbol{\theta})P, \quad s=2p,\dots,4p-1, \quad \boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}. \tag{3.43}$$

Здесь матрицы $g_s(\mathbf{k})$, $\mathbf{k}\in\mathbb{R}^d$, заданы равенствами

$$g_s(\mathbf{k}) = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \sum_{q=p}^{s-p} \Upsilon_q(\mathbf{k},\mathbf{x})^* g(\mathbf{x}) \Upsilon_{s-q}(\mathbf{k},\mathbf{x})\,d\mathbf{x}, \quad s=2p,\dots,4p-1, \quad \mathbf{k}\in\mathbb{R}^d. \tag{3.44}$$

Из (3.41) вытекает равенство

$$g_s(\mathbf{k}) = \sum_{|\nu|=s-2p} \widehat{g}_\nu \mathbf{k}^\nu, \quad \widehat{g}_\nu := \sum_{\varkappa\leqslant\nu} |\Omega|^{-1} \int_\Omega \widehat{\Upsilon}_\varkappa(\mathbf{x})^* g(\mathbf{x}) \widehat{\Upsilon}_{\nu-\varkappa}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x},$$
$$|\nu| = s-2p, \quad s=2p,\dots,4p-1, \quad \mathbf{k}\in\mathbb{R}^d. \tag{3.45}$$

В частности, матрица $g_{2p}(\mathbf{k}) = \widehat{g}_0$ не зависит от $\mathbf{k}$. Это так называемая *эффективная матрица* для оператора $\mathcal{A}$. В пункте 4.1 мы обсудим свойства эффективной матрицы подробнее; сразу отметим, что она положительно определена. Из (3.42) и (3.45) вытекают оценки

$$|\widehat{g}_\nu| \leqslant C(p,d,\nu,\alpha_0,\alpha_1,\|g\|_{L_\infty},\|g^{-1}\|_{L_\infty},r_0,|\Omega|), \quad |\nu| = 0,\dots,2p-1,$$
$$|g_s(\mathbf{k})| \leqslant \check{C}_s|\mathbf{k}|^{s-2p}, \quad s = 2p,\dots,4p-1, \quad \mathbf{k}\in\mathbb{R}^d. \tag{3.46}$$

Постоянная $\check{C}_s$ зависит от p, d, s, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0, $|\Omega|$.

Замечание 3.8. *При вычислении матриц* (3.44) *с* $s \geqslant 2p+1$ *полезно учитывать следующее. Выделим слагаемые в* (3.44) *с* $q=p$ *и* $q=s-p$. *Положим*

$$f_s(\mathbf{k}) := |\Omega|^{-1}\int_\Omega \left(\Upsilon_p(\mathbf{k},\mathbf{x})^* g(\mathbf{x})\Upsilon_{s-p}(\mathbf{k},\mathbf{x}) + \Upsilon_{s-p}(\mathbf{k},\mathbf{x})^* g(\mathbf{x})\Upsilon_p(\mathbf{k},\mathbf{x})\right) d\mathbf{x}.$$

В этом выражении можно заменить $\Upsilon_{s-p}(\mathbf{k},\mathbf{x})$ *на*

$$\check{\Upsilon}_{s-p}(\mathbf{k},\mathbf{x}) := \sum_{r=1}^{s-2p} B_r(\mathbf{k},\mathbf{D})\Theta(s-2p-r;\mathbf{k},\mathbf{x}), \tag{3.47}$$

поскольку

$$\int_\Omega \left(\Upsilon_p(\mathbf{k},\mathbf{x})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\Theta(s-2p;\mathbf{k},\mathbf{x}) + (b(\mathbf{D})\Theta(s-2p;\mathbf{k},\mathbf{x}))^* g(\mathbf{x})\Upsilon_p(\mathbf{k},\mathbf{x})\right) d\mathbf{x} = 0$$

в силу уравнения (3.26) *на* $\Theta(0;\mathbf{k},\mathbf{x})$ *и равенства* (3.39). *Таким образом,*

$$f_s(\mathbf{k}) = |\Omega|^{-1}\int_\Omega \left(\Upsilon_p(\mathbf{k},\mathbf{x})^* g(\mathbf{x})\check{\Upsilon}_{s-p}(\mathbf{k},\mathbf{x}) + \check{\Upsilon}_{s-p}(\mathbf{k},\mathbf{x})^* g(\mathbf{x})\Upsilon_p(\mathbf{k},\mathbf{x})\right) d\mathbf{x}.$$

Тем самым, для вычисления матрицы $g_s(\mathbf{k})$ *при* $s \geqslant 2p+1$ *необходимо знать матрицы-функции* $\Theta(j;\mathbf{k},\mathbf{x})$ *при* $j=0,\dots,s-2p-1$, *а знания матрицы* $\Theta(s-2p;\mathbf{k},\mathbf{x})$ *не требуется.*

Мы доказали следующее утверждение.

Теорема 3.9. *Пусть выполнены условия* (2.1), (2.4) *и матрицы-функции* $g(\mathbf{x})$ *и* $h(\mathbf{x})$ *периодичны с решеткой периодов* Γ. *Пусть* $A(t,\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{A}(\mathbf{k})$ — *самосопряженный оператор в* $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$, *порожденный квадратичной формой* (2.15). *Пусть* $F(t,\boldsymbol{\theta})$ — *спектральный проектор оператора* $A(t,\boldsymbol{\theta})$, *отвечающий отрезку* $[0,\delta]$. *Пусть* $F_s(\boldsymbol{\theta})$ *и* $G_s(\boldsymbol{\theta})$ — *коэффициенты разложений* (3.15), (3.16). *Тогда операторы* $F_s(\boldsymbol{\theta})P$, $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$, $s=p,\dots,2p-1$, *и* $PG_s(\boldsymbol{\theta})P$, $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$, $s=2p,\dots,4p-1$, *даются равенствами* (3.37) *и* (3.43). *При этом коэффициенты* $g_s(\boldsymbol{\theta})$ *определяются равенствами* (3.44), *матрицы-функции* $\Upsilon_q(\boldsymbol{\theta},\mathbf{x})$ *даются выражениями* (3.39) *и* (3.40) *в терминах периодических матриц-функций* $\Theta(r;\mathbf{k},\mathbf{x})$, *являющихся решениями вспомогательных задач* (3.26), (3.27).

3.5. **Аппроксимация резольвенты оператора** $A(t,\boldsymbol{\theta})$**.** В соответствии с теоремой 1.12 при $t\in[0,t^0]$, $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$ и $\varepsilon>0$ справедливы представления

$$(A(t,\boldsymbol{\theta})+\varepsilon^{2p}I)^{-1} = \hat{R}_0(t,\boldsymbol{\theta},\varepsilon) + Z^{(0)}(t,\boldsymbol{\theta},\varepsilon), \tag{3.48}$$

$$(A(t,\boldsymbol{\theta})+\varepsilon^{2p}I)^{-1} = \hat{R}_0(t,\boldsymbol{\theta},\varepsilon) + \sum_{s=1}^{J}\mathcal{K}_s(t,\boldsymbol{\theta},\varepsilon) + Z^{(J)}(t,\boldsymbol{\theta},\varepsilon), \quad J=1,\dots,2p-1. \tag{3.49}$$

Корректоры и остаточные члены подчинены оценкам

$$\|\mathcal{K}_s(t,\boldsymbol{\theta},\varepsilon)\| \leqslant C_{(s)}\varepsilon^{-(2p-s)}, \quad t\geqslant 0, \quad \boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}, \quad \varepsilon>0, \quad s=1,\dots,2p-1; \tag{3.50}$$

$$\|Z^{(J)}(t,\boldsymbol{\theta},\varepsilon)\| \leqslant C^{(J)}\varepsilon^{-(2p-J-1)}, \quad t\in[0,t^0], \quad \boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}, \ \varepsilon>0, \quad J=0,1,\dots,2p-1. \tag{3.51}$$

Константы $C_{(s)}$ и $C^{(J)}$ зависят от p, s, J, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, α_0, α_1, r_0 и не зависят от t, $\boldsymbol{\theta}$, ε. Мы учитываем, что в выражениях для констант из теоремы 1.12 сейчас параметры δ, c_* и C_0 не зависят от $\boldsymbol{\theta}$ (см. (3.6), (3.7), (3.9), (3.12)), а норму $\|X_p(\boldsymbol{\theta})\|$ можно заменить на $\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}$, используя (3.3).

В соответствии с (1.28) справедливо равенство

$$\hat{R}_0(t,\boldsymbol{\theta},\varepsilon) = (t^{2p}G_{2p}(\boldsymbol{\theta}) + \varepsilon^{2p}I)^{-1}P, \quad t \geqslant 0, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad \varepsilon > 0. \tag{3.52}$$

Учитывая, что оператор $G_{2p}(\boldsymbol{\theta})$ нетривиально действует только в пространстве $\mathfrak{N}$, а также равенство (3.43), получим представление

$$\hat{R}_0(t,\boldsymbol{\theta},\varepsilon) = (\mathcal{A}^0(\mathbf{k}) + \varepsilon^{2p}I)^{-1}P, \quad \mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}, \quad t \geqslant 0, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad \varepsilon > 0, \tag{3.53}$$

где

$$\mathcal{A}^0(\mathbf{k}) = b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^*\, g_{2p}\, b(\mathbf{D}+\mathbf{k}), \quad \operatorname{Dom}\mathcal{A}^0(\mathbf{k}) = \widetilde{H}^{2p}(\Omega;\mathbb{C}^n), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d. \tag{3.54}$$

Аналогично, из (3.43) следует равенство

$$t^s P G_s(\boldsymbol{\theta}) P = b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^*\, g_s(\mathbf{D}+\mathbf{k})\, b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) P, \quad \mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}, \quad t \geqslant 0, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}. \tag{3.55}$$

Здесь

$$g_s(\mathbf{D}+\mathbf{k}) := \sum_{|\nu|=s-2p} \widehat{g}_\nu (\mathbf{D}+\mathbf{k})^\nu, \quad \operatorname{Dom} g_s(\mathbf{D}+\mathbf{k}) = \widetilde{H}^{s-2p}(\Omega;\mathbb{C}^n), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d,$$

где $\widehat{g}_\nu$ — матрицы из представления (3.45).

Операторы (1.30) сейчас принимают вид

$$\begin{gathered}\Delta_\gamma(t,\boldsymbol{\theta},\varepsilon) = \hat{R}_0(t,\boldsymbol{\theta},\varepsilon) \prod_{i=1}^{k} \bigl(G_{\gamma_i}(\boldsymbol{\theta}) \hat{R}_0(t,\boldsymbol{\theta},\varepsilon)\bigr), \\ \gamma \in \mathbb{Z}_+^k, \;\; 2p+1 \leqslant \gamma_i \leqslant 4p-1, \;\; i = 1,\dots,k, \;\; k \in \mathbb{N}; \;\; t \geqslant 0, \;\; \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}, \;\; \varepsilon > 0.\end{gathered} \tag{3.56}$$

Из (3.53), (3.55), (3.56) вытекают соотношения

$$\begin{gathered}t^{|\gamma|}\Delta_\gamma(t,\boldsymbol{\theta},\varepsilon) = \Delta_\gamma(\mathbf{D}+\mathbf{k},\varepsilon)P, \\ \gamma \in \mathbb{Z}_+^k, \quad 2p+1 \leqslant \gamma_i \leqslant 4p-1, \quad i = 1,\dots,k, \quad k \in \mathbb{N}; \quad \mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}, \quad t \geqslant 0, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}.\end{gathered} \tag{3.57}$$

Здесь $\Delta_\gamma(\mathbf{D}+\mathbf{k},\varepsilon)$ — ПДО порядка $|\gamma| - 2p(k+1)$, заданный равенством

$$\begin{gathered}\Delta_\gamma(\mathbf{D}+\mathbf{k},\varepsilon) = (\mathcal{A}^0(\mathbf{k}) + \varepsilon^{2p}I)^{-1} \prod_{i=1}^{k} \left(b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^*\, g_{\gamma_i}(\mathbf{D}+\mathbf{k})\, b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) (\mathcal{A}^0(\mathbf{k}) + \varepsilon^{2p}I)^{-1} \right), \\ \gamma \in \mathbb{Z}_+^k, \quad 2p+1 \leqslant \gamma_i \leqslant 4p-1, \quad i = 1,\dots,k, \quad k \in \mathbb{N}; \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d.\end{gathered} \tag{3.58}$$

Напомним, что множество $\tilde{\mathbb{N}}_M$ определено в (1.29). В соответствии с (1.31) и (3.57) при $s = 1,\dots,p-1$ корректоры $\mathcal{K}_s(t,\boldsymbol{\theta},\varepsilon)$ даются равенствами

$$\mathcal{K}_s(t,\boldsymbol{\theta},\varepsilon) = \sum_{k=1}^{s} (-1)^k \sum_{\substack{\gamma \in (\tilde{\mathbb{N}}_{s-k})^k: \\ |\gamma| = 2pk+s}} \Delta_\gamma(\mathbf{D}+\mathbf{k},\varepsilon)P, \quad \mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}, \;\; t \geqslant 0, \;\; \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}, \;\; s = 1,\dots,p-1. \tag{3.59}$$

Далее, определим ДО

$$\Theta(r;\mathbf{D}+\mathbf{k},\mathbf{x}) := \sum_{|\nu|=r} \widehat{\Theta}_\nu(\mathbf{x}) (\mathbf{D}+\mathbf{k})^\nu, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad r = 0,\dots,2p-1,$$

где $\widehat{\Theta}_\nu(\mathbf{x})$ — коэффициенты из (3.25). Из (3.37) и (3.53) следует равенство

$$t^s F_s(\boldsymbol{\theta}) \hat{R}_0(t,\boldsymbol{\theta},\varepsilon) = \Phi_s(\mathbf{k},\varepsilon)P, \quad \mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}, \;\; t \geqslant 0, \;\; \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}, \;\; s = p,\dots,2p-1. \tag{3.60}$$

Здесь $\Phi_s(\mathbf{k},\varepsilon)$ — ПДО порядка $s-2p$, заданный выражением

$$\begin{gathered}\Phi_s(\mathbf{x},\mathbf{D}+\mathbf{k},\varepsilon) := \Theta(s-p;\mathbf{D}+\mathbf{k},\mathbf{x}) b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) (\mathcal{A}^0(\mathbf{k}) + \varepsilon^{2p}I)^{-1}, \\ \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad s = p,\dots,2p-1.\end{gathered} \tag{3.61}$$

Введем также ДО $\Psi_s(\mathbf{k})$ порядка s, заданный выражением

$$\Psi_s(\mathbf{x},\mathbf{D}+\mathbf{k}) := \Theta(s-p;\mathbf{D}+\mathbf{k},\mathbf{x})b(\mathbf{D}+\mathbf{k}), \quad \operatorname{Dom}\Psi_s(\mathbf{k}) = \widetilde{H}^s(\Omega;\mathbb{C}^n),$$
$$\mathbf{k}\in\mathbb{R}^d, \quad \mathbf{x}\in\Omega, \quad s=p,\dots,2p-1. \tag{3.62}$$

Из (1.32), (3.57) и (3.60) вытекает представление

$$\mathcal{K}_p(t,\boldsymbol{\theta},\varepsilon) = \Phi_p(\mathbf{k},\varepsilon)P + (\Phi_p(\mathbf{k},\varepsilon)P)^* + \sum_{k=1}^{p}(-1)^k \sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{p-k})^k:\\ |\gamma|=2pk+p}} \Delta_\gamma(\mathbf{D}+\mathbf{k},\varepsilon)P,$$
$$\mathbf{k}=t\boldsymbol{\theta}, \quad t\geqslant 0, \quad \boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}. \tag{3.63}$$

В соответствии с (1.33)–(1.37) при $s=p+1,\dots,2p-1$ корректоры $\mathcal{K}_s(t,\boldsymbol{\theta},\varepsilon)$ даются равенствами

$$\mathcal{K}_s(t,\boldsymbol{\theta},\varepsilon) = \Phi_s(\mathbf{k},\varepsilon)P + (\Phi_s(\mathbf{k},\varepsilon)P)^* - \Delta_{2p+s}(\mathbf{D}+\mathbf{k},\varepsilon)P + \mathcal{K}'_s(t,\boldsymbol{\theta},\varepsilon)+$$
$$+\mathcal{K}''_s(t,\boldsymbol{\theta},\varepsilon) + \mathcal{K}'''_s(t,\boldsymbol{\theta},\varepsilon), \quad \mathbf{k}=t\boldsymbol{\theta}, \quad t\geqslant 0, \quad \boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}. \tag{3.64}$$

Здесь

$$\mathcal{K}'_s(t,\boldsymbol{\theta},\varepsilon) = \sum_{k=2}^{s-p+1}(-1)^k \sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{p-2})^k:\\ |\gamma|=2pk+s}} \Delta_\gamma(\mathbf{D}+\mathbf{k},\varepsilon)P + \sum_{k=s-p+2}^{s}(-1)^k \sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{s-k})^k:\\ |\gamma|=2pk+s}} \Delta_\gamma(\mathbf{D}+\mathbf{k},\varepsilon)P, \tag{3.65}$$

$$\mathcal{K}''_s(t,\boldsymbol{\theta},\varepsilon) = \sum_{k=1}^{s-p}(-1)^k \sum_{l=p}^{s-k} \sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{s-p-k})^k:\\ l+|\gamma|=2pk+s}} \left(\Psi_l(\mathbf{k})\Delta_\gamma(\mathbf{D}+\mathbf{k},\varepsilon)P + (\Psi_l(\mathbf{k})\Delta_\gamma(\mathbf{D}+\mathbf{k},\varepsilon)P)^*\right), \tag{3.66}$$

$$\mathcal{K}'''_s(t,\boldsymbol{\theta},\varepsilon) = \sum_{k=2}^{s-p+1}(-1)^k \sum_{i=3p}^{2p+1+s-k} \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{p-2})^{k-1}:\\ i+|\gamma|=2pk+s}} \Xi^{(k)}_{i,j,\gamma}(t,\boldsymbol{\theta},\varepsilon)P. \tag{3.67}$$

Операторы $\Xi^{(k)}_{i,j,\gamma}(t,\boldsymbol{\theta},\varepsilon)$ заданы соотношениями

$$\begin{aligned}
&\Xi^{(k)}_{i,0,\gamma}(t,\boldsymbol{\theta},\varepsilon) := \Delta_{\eta_1}(\mathbf{D}+\mathbf{k},\varepsilon), \quad \eta_1=\eta_1(i,\gamma)=(i,\gamma_1,\dots,\gamma_{k-1}), \quad k\geqslant 2,\\
&\Xi^{(k)}_{i,k-1,\gamma}(t,\boldsymbol{\theta},\varepsilon) := \Delta_{\eta_2}(\mathbf{D}+\mathbf{k},\varepsilon), \quad \eta_2=\eta_2(i,\gamma)=(\gamma_1,\dots,\gamma_{k-1},i), \quad k\geqslant 2,\\
&\Xi^{(k)}_{i,j,\gamma}(t,\boldsymbol{\theta},\varepsilon) := \Delta_{\eta_3}(\mathbf{D}+\mathbf{k},\varepsilon), \quad \eta_3=\eta_3(i,j,\gamma)=(\gamma_1,\dots,\gamma_j,i,\gamma_{j+1},\dots,\gamma_{k-1}),\\
&\qquad k\geqslant 3, \ j=1,\dots,k-2.
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Мы получили следующий результат.

Теорема 3.10. *Пусть выполнены условия* (2.1), (2.4) *и матрицы-функции* $g(\mathbf{x})$ *и* $h(\mathbf{x})$ *периодичны с решеткой периодов* Γ. *Пусть* $A(t,\boldsymbol{\theta})=\mathcal{A}(\mathbf{k})$ — *самосопряженный оператор в* $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$, *порожденный квадратичной формой* (2.15). *Тогда при* $t\in[0,t^0]$ (t^0 *определено в* (3.10)), $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$ *и* $\varepsilon>0$ *справедливы представления* (3.48) *и* (3.49). *Оператор* $\hat{R}_0(t,\boldsymbol{\theta},\varepsilon)$ *определен в* (3.53). *Корректоры* $\mathcal{K}_s(t,\boldsymbol{\theta},\varepsilon)$ *при* $s=1,\dots,p$, *определены в* (3.59) *и* (3.63), *а при* $s=p+1,\dots,2p-1$ *корректоры* $\mathcal{K}_s(t,\boldsymbol{\theta},\varepsilon)$ *определены согласно* (3.64)–(3.68). *Корректоры и остаточные члены подчинены оценкам* (3.50), (3.51). *Константы* $C_{(s)}$ *и* $C^{(J)}$ *зависят от* p, s, J, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, α_0, α_1, r_0 *и не зависят от* t, $\boldsymbol{\theta}$, ε.

§ 4. Аппроксимация резольвенты оператора $\mathcal{A}$

4.1. **Эффективная матрица.** В соответствии с (3.26) $(n \times m)$-матрица-функция $\Theta(\mathbf{x}) := \Theta(0; \mathbf{k}, \mathbf{x})$ не зависит от $\mathbf{k}$ и является (слабым) Г-периодическим решением задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) \left(b(\mathbf{D}) \Theta(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m \right) = 0, \quad \int_\Omega \Theta(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0. \tag{4.1}$$

Как уже отмечалось, $(m \times m)$-матрица (3.44) при $s = 2p$ не зависит от $\mathbf{k}$; обозначим эту матрицу через g^0. Из (3.39) и (3.44) вытекает равенство

$$g^0 := g_{2p} = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \left(b(\mathbf{D}) \Theta(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m \right)^* g(\mathbf{x}) \left(b(\mathbf{D}) \Theta(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m \right) \, d\mathbf{x}. \tag{4.2}$$

Матрица (4.2) называется *эффективной матрицей* для оператора $\mathcal{A}$. С учетом (4.1) справедливо также представление

$$g^0 = |\Omega|^{-1} \int_\Omega g(\mathbf{x}) \left(b(\mathbf{D}) \Theta(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m \right) \, d\mathbf{x}.$$

Отметим некоторые свойства эффективной матрицы; см. [KuSu, предложения 5.3, 5.4, 5.5].

Предложение 4.1 ([KuSu]). *Обозначим*

$$\overline{g} := |\Omega|^{-1} \int_\Omega g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad \underline{g} := \left(|\Omega|^{-1} \int_\Omega g(\mathbf{x})^{-1} \, d\mathbf{x} \right)^{-1}.$$

Эффективная матрица g^0 удовлетворяет неравенствам

$$\underline{g} \leqslant g^0 \leqslant \overline{g}. \tag{4.3}$$

В случае, когда $m = n$, имеет место равенство $g^0 = \underline{g}$.

Оценки вида (4.3) известны в теории усреднения для конкретных ДО как вилка Фойгта–Рейсса. Из них вытекают оценки нормы эффективной матрицы и обратной к ней:

$$|g^0| \leqslant \|g\|_{L_\infty}, \quad |(g^0)^{-1}| \leqslant \|g^{-1}\|_{L_\infty}.$$

Выделим теперь случаи, когда в (4.3) какое-либо из неравенств превращается в равенство.

Предложение 4.2 ([KuSu]). *Пусть $\mathbf{g}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \ldots, m$, — столбцы матрицы $g(\mathbf{x})$. Равенство $g^0 = \overline{g}$ равносильно соотношениям*

$$b(\mathbf{D})^* \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{4.4}$$

Предложение 4.3 ([KuSu]). *Пусть $\mathbf{l}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \ldots, m$, — столбцы матрицы $g(\mathbf{x})^{-1}$. Равенство $g^0 = \underline{g}$ равносильно представлениям*

$$\mathbf{l}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{l}_k^0 + b(\mathbf{D}) \mathbf{v}_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{l}_k^0 \in \mathbb{C}^m, \quad \mathbf{v}_k \in \widetilde{H}^p(\Omega; \mathbb{C}^n); \quad k = 1, \ldots, m. \tag{4.5}$$

Замечание 4.4. *При условии (4.5) выполнено соотношение $g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Theta(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) = g^0 = \underline{g}$.*

4.2. **Эффективный оператор.** Согласно (3.43) с $s = 2p$ спектральный росток $S(\boldsymbol{\theta}) = G_{2p}(\boldsymbol{\theta})|_{\mathfrak{N}}$ задается матрицей

$$S(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta}), \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

Положим

$$S(\mathbf{k}) := t^{2p} S(\boldsymbol{\theta}) = b(\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d. \tag{4.6}$$

Это символ дифференциального оператора

$$\mathcal{A}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) \tag{4.7}$$

с постоянными коэффициентами, действующего в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ на области определения $H^{2p}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и называемого *эффективным оператором* для оператора $\mathcal{A}$. Из (3.17) и (4.6) вытекает оценка для символа эффективного оператора:

$$b(\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{k}) \geqslant c_* |\mathbf{k}|^{2p} \mathbf{1}_n, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d. \tag{4.8}$$

По аналогии с (2.20) оператор $\mathcal{A}^0$ раскладывается в прямой интеграл:

$$\mathcal{U}\mathcal{A}^0\mathcal{U}^{-1} = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \oplus \mathcal{A}^0(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}.$$

Здесь $\mathcal{A}^0(\mathbf{k})$ — оператор в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$, заданный выражением (3.54) с периодическими граничными условиями. То есть,

$$\mathcal{A}^0(\mathbf{k}) = b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{D}+\mathbf{k}), \quad \operatorname{Dom} \mathcal{A}^0(\mathbf{k}) = \widetilde{H}^{2p}(\Omega;\mathbb{C}^n). \tag{4.9}$$

4.3. **Аппроксимация резольвенты $(\mathcal{A}(\mathbf{k})+\varepsilon^{2p}I)^{-1}$ при $|\mathbf{k}| \leqslant t^0$.** В силу теоремы 3.10 при $t = |\mathbf{k}| \leqslant t^0$ для резольвенты $(\mathcal{A}(\mathbf{k})+\varepsilon^{2p}I)^{-1}$ справедливы представления (3.48) и (3.49) с оценками (3.50), (3.51). Покажем, что в пределах допустимой погрешности можно заменить старший член аппроксимации $\hat{R}_0(t,\boldsymbol{\theta},\varepsilon) = (\mathcal{A}^0(\mathbf{k})+\varepsilon^{2p}I)^{-1}P$ на $(\mathcal{A}^0(\mathbf{k})+\varepsilon^{2p}I)^{-1}$. Используя дискретное преобразование Фурье и оценку (4.8), убеждаемся, что

$$\begin{aligned} \left\|(\mathcal{A}^0(\mathbf{k})+\varepsilon^{2p}I)^{-1}P^\perp\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} &= \sup_{0\neq \mathbf{q}\in\widetilde{\Gamma}} \left|\left(b(\mathbf{q}+\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{q}+\mathbf{k}) + \varepsilon^{2p}\mathbf{1}_n\right)^{-1}\right| \\ &\leqslant \sup_{0\neq \mathbf{q}\in\widetilde{\Gamma}} \left(c_*|\mathbf{q}+\mathbf{k}|^{2p}+\varepsilon^{2p}\right)^{-1} \leqslant \left(c_* r_0^{2p}+\varepsilon^{2p}\right)^{-1}, \quad \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}. \end{aligned}$$

Мы учли (2.12). Следовательно, при всех $J = 0,1,\dots,2p-1$ справедливы оценки

$$\left\|(\mathcal{A}^0(\mathbf{k})+\varepsilon^{2p}I)^{-1}P^\perp\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant c_*^{-(J+1)/2p} r_0^{-(J+1)} \varepsilon^{-(2p-J-1)}, \quad \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega},\ J=0,1,\dots,2p-1. \tag{4.10}$$

Аналогичным образом можно “устранить” проектор P в тех членах корректоров, которые представляют собой ПДО с постоянными коэффициентами. Рассмотрим символ оператора (3.58):

$$\begin{aligned} \Delta_\gamma(\mathbf{q}+\mathbf{k},\varepsilon) &= \left(b(\mathbf{q}+\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{q}+\mathbf{k}) + \varepsilon^{2p}\mathbf{1}_n\right)^{-1} \times \\ &\times \prod_{i=1}^{k} \left(b(\mathbf{q}+\mathbf{k})^* g_{\gamma_i}(\mathbf{q}+\mathbf{k}) b(\mathbf{q}+\mathbf{k}) \left(b(\mathbf{q}+\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{q}+\mathbf{k}) + \varepsilon^{2p}\mathbf{1}_n\right)^{-1}\right), \quad \mathbf{q}\in\widetilde{\Gamma},\ \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}. \end{aligned}$$

Здесь $\gamma\in\mathbb{Z}_+^k$, $2p+1\leqslant\gamma_i\leqslant 4p-1$. С учетом (2.4), (3.46) и (4.8) выполнена оценка

$$|\Delta_\gamma(\mathbf{q}+\mathbf{k},\varepsilon)| \leqslant C_\gamma |\mathbf{q}+\mathbf{k}|^{|\gamma|} \left(c_*|\mathbf{q}+\mathbf{k}|^{2p}+\varepsilon^{2p}\right)^{-(k+1)}, \quad \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}, \quad \mathbf{q}\in\widetilde{\Gamma}, \tag{4.11}$$

где $C_\gamma = \alpha_1^k \check{C}_{\gamma_1}\cdots\check{C}_{\gamma_k}$.

Покажем, что корректоры $\mathcal{K}_s(\mathbf{k},\varepsilon) = \mathcal{K}_s(t,\boldsymbol{\theta},\varepsilon)$ при $s=1,\dots,p-1$ можно заменить на операторы

$$\mathring{\mathcal{K}}_s(\mathbf{k},\varepsilon) := \sum_{k=1}^{s}(-1)^k \sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{s-k})^k:\\ |\gamma|=2pk+s}} \Delta_\gamma(\mathbf{D}+\mathbf{k},\varepsilon), \quad \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}, \quad s=1,\dots,p-1. \tag{4.12}$$

Для этого оценим норму оператора $\Delta_\gamma(\mathbf{D}+\mathbf{k},\varepsilon)P^\perp$ при $|\gamma| = 2pk+s$. С учетом (4.11) имеем:

$$\left\|\Delta_\gamma(\mathbf{D}+\mathbf{k},\varepsilon)P^\perp\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} = \sup_{0\neq\mathbf{q}\in\widetilde{\Gamma}} |\Delta_\gamma(\mathbf{q}+\mathbf{k},\varepsilon)|$$

$$\leqslant \sup_{0\neq\mathbf{q}\in\widetilde{\Gamma}} C_\gamma|\mathbf{q}+\mathbf{k}|^{2pk+s}\left(c_*|\mathbf{q}+\mathbf{k}|^{2p}+\varepsilon^{2p}\right)^{-(k+1)}$$

$$\leqslant C_\gamma c_*^{-k-s/2p}(c_* r_0^{2p}+\varepsilon^{2p})^{-1+s/2p} \leqslant C_\gamma c_*^{-k-(J+1)/2p} r_0^{-(J+1-s)}\varepsilon^{-(2p-J-1)},$$

$\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{s-k})^k : |\gamma| = 2pk+s,\ \ k = 1,\dots,s,\ \ s = 1,\dots,\min\{p-1,J\},\ \ J = 1,\dots,2p-1,\ \ \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}.$

Теперь из (3.59) и (4.12) вытекает, что

$$\begin{gathered}\|\mathcal{K}_s(\mathbf{k},\varepsilon)-\mathring{\mathcal{K}}_s(\mathbf{k},\varepsilon)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C(s,J)\varepsilon^{-(2p-J-1)},\\ s = 1,\dots,\min\{p-1,J\},\quad J = 1,\dots,2p-1,\quad \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}.\end{gathered} \tag{4.13}$$

Здесь

$$C(s,J) = \sum_{k=1}^{s}\ \sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{s-k})^k:\\ |\gamma|=2pk+s}} C_\gamma c_*^{-k-(J+1)/2p} r_0^{-(J+1-s)}. \tag{4.14}$$

Аналогичным образом можно показать, что корректор $\mathcal{K}_p(\mathbf{k},\varepsilon) = \mathcal{K}_p(t,\boldsymbol{\theta},\varepsilon)$ можно заменить на оператор

$$\mathring{\mathcal{K}}_p(\mathbf{k},\varepsilon) := \Phi_p(\mathbf{k},\varepsilon)P + (\Phi_p(\mathbf{k},\varepsilon)P)^* + \sum_{k=1}^{p}(-1)^k \sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{p-k})^k:\\ |\gamma|=2pk+p}} \Delta_\gamma(\mathbf{D}+\mathbf{k},\varepsilon),\quad \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}, \tag{4.15}$$

а корректоры $\mathcal{K}_s(\mathbf{k},\varepsilon) = \mathcal{K}_s(t,\boldsymbol{\theta},\varepsilon)$ при $s = p+1,\dots,2p-1$ можно заменить на операторы

$$\begin{aligned}\mathring{\mathcal{K}}_s(\mathbf{k},\varepsilon) := \Phi_s(\mathbf{k},\varepsilon)P + (\Phi_s(\mathbf{k},\varepsilon)P)^* - \Delta_{2p+s}(\mathbf{D}+\mathbf{k},\varepsilon) + \mathring{\mathcal{K}}'_s(\mathbf{k},\varepsilon)+\\ + \mathcal{K}''_s(\mathbf{k},\varepsilon) + \mathring{\mathcal{K}}'''_s(\mathbf{k},\varepsilon),\quad s = p+1,\dots,2p-1,\quad \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}.\end{aligned} \tag{4.16}$$

Здесь

$$\mathring{\mathcal{K}}'_s(\mathbf{k},\varepsilon) := \sum_{k=2}^{s-p+1}(-1)^k \sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{p-2})^k:\\ |\gamma|=2pk+s}} \Delta_\gamma(\mathbf{D}+\mathbf{k},\varepsilon) + \sum_{k=s-p+2}^{s}(-1)^k \sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{s-k})^k:\\ |\gamma|=2pk+s}} \Delta_\gamma(\mathbf{D}+\mathbf{k},\varepsilon), \tag{4.17}$$

$$\mathring{\mathcal{K}}'''_s(\mathbf{k},\varepsilon) := \sum_{k=2}^{s-p+1}(-1)^k \sum_{i=3p}^{2p+1+s-k}\ \sum_{j=0}^{k-1}\ \sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{p-2})^{k-1}:\\ i+|\gamma|=2pk+s}} \Xi^{(k)}_{i,j,\gamma}(\mathbf{k},\varepsilon). \tag{4.18}$$

Операторы $\mathcal{K}''_s(\mathbf{k},\varepsilon) = \mathcal{K}''_s(t,\boldsymbol{\theta},\varepsilon)$ и $\Xi^{(k)}_{i,j,\gamma}(\mathbf{k},\varepsilon) = \Xi^{(k)}_{i,j,\gamma}(t,\boldsymbol{\theta},\varepsilon)$ заданы соотношениями (3.66) и (3.68) соответственно.

По аналогии с (4.13), используя (3.63)–(3.68), (4.15)–(4.18) и учитывая (4.11), получаем

$$\begin{gathered}\left\|\mathcal{K}_s(\mathbf{k},\varepsilon)-\mathring{\mathcal{K}}_s(\mathbf{k},\varepsilon)\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C(s,J)\varepsilon^{-(2p-J-1)},\\ s = p,\dots,J;\ \ J = p,\dots,2p-1;\ \ \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}.\end{gathered} \tag{4.19}$$

Постоянная $C(p,J)$ определена согласно (4.14) при $s = p$; постоянные $C(s,J)$ при $s = p+1,\dots,2p-1$ имеют аналогичный вид и представляют собой сумму слагаемых вида $C_{2p+s}c_*^{-1-(J+1)/2p}r_0^{-(J+1-s)}$, $C_\gamma c_*^{-k-(J+1)/2p}r_0^{-(J+1-s)}$, где $|\gamma| = 2pk+s$ (значки k и γ пробегают множества из суммы (4.17)), и $C_\eta c_*^{-k-(J+1)/2p}r_0^{-(J+1-s)}$, где $|\eta| = i+|\gamma| = 2pk+s$ (значки k,i,j,γ пробегают множества из суммы (4.18), а $\eta = \eta_1,\eta_2,\eta_3$; см. (3.68)). Ясно, что постоянные $C(s,J)$ при всех $s = 1,\dots,J$, $J = 1,\dots,2p-1$, зависят только от p, d, s, J, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, α_0, α_1, r_0, $|\Omega|$.

Теперь из теоремы 3.10 и оценок (4.10), (4.13), (4.19) при $|\mathbf{k}| \leqslant t^0$ получаем представления

$$(\mathcal{A}(\mathbf{k}) + \varepsilon^{2p} I)^{-1} = (\mathcal{A}^0(\mathbf{k}) + \varepsilon^{2p} I)^{-1} + \mathring{Z}^{(0)}(\mathbf{k},\varepsilon), \tag{4.20}$$

$$(\mathcal{A}(\mathbf{k}) + \varepsilon^{2p} I)^{-1} = (\mathcal{A}^0(\mathbf{k}) + \varepsilon^{2p} I)^{-1} + \sum_{s=1}^{J} \mathring{\mathcal{K}}_s(\mathbf{k},\varepsilon) + \mathring{Z}^{(J)}(\mathbf{k},\varepsilon), \quad J = 1,\dots,2p-1. \tag{4.21}$$

Остаточные члены подчинены оценкам

$$\big\|\mathring{Z}^{(J)}(\mathbf{k},\varepsilon)\big\| \leqslant \mathring{C}^{(J)} \varepsilon^{-(2p-J-1)}, \;\; |\mathbf{k}| \leqslant t^0, \;\; \varepsilon > 0, \quad J = 0,1,\dots,2p-1. \tag{4.22}$$

Постоянные $\mathring{C}^{(J)}$ зависят только от p, d, J, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, α_0, α_1, r_0, $|\Omega|$. Используя оценки (3.50), (4.11) и выражения для корректоров $\mathcal{K}_s(\mathbf{k},\varepsilon)$ и $\mathring{\mathcal{K}}_s(\mathbf{k},\varepsilon)$, легко проверить оценки

$$\big\|\mathring{\mathcal{K}}_s(\mathbf{k},\varepsilon)\big\| \leqslant \tilde{\mathcal{C}}_s \varepsilon^{-(2p-s)}, \;\; \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}, \;\; \varepsilon > 0, \quad s = 1,\dots,2p-1. \tag{4.23}$$

Константы $\tilde{\mathcal{C}}_s$ зависят только от p, d, s, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, α_0, α_1, r_0, $|\Omega|$.

4.4. **Аппроксимация резольвенты** $(\mathcal{A}(\mathbf{k}) + \varepsilon^{2p} I)^{-1}$ **при всех** $\mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}$**.** Распространим теперь результаты на все значения $\mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}$. При $\mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega} \setminus \mathcal{B}(t^0)$ оценки тривиальны: каждый член оценивается по-отдельности. С учетом (3.11) справедлива оценка

$$\begin{aligned} &\big\|(\mathcal{A}(\mathbf{k}) + \varepsilon^{2p} I)^{-1}\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \big(c_*|\mathbf{k}|^{2p} + \varepsilon^{2p}\big)^{-1} \leqslant \big(c_*(t^0)^{2p} + \varepsilon^{2p}\big)^{-1} \\ &\leqslant c_*^{-(J+1)/2p} (t^0)^{-J-1} \varepsilon^{-(2p-J-1)}, \quad J = 0,1,\dots,2p-1, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega} \setminus \mathcal{B}(t^0). \end{aligned} \tag{4.24}$$

Используя дискретное преобразование Фурье и оценку (4.8), с учетом (2.11) получим аналогичное неравенство для эффективного оператора:

$$\begin{aligned} &\big\|(\mathcal{A}^0(\mathbf{k}) + \varepsilon^{2p} I)^{-1}\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} = \sup_{\mathbf{q}\in\widetilde{\Gamma}} \Big|\big(b(\mathbf{q}+\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{q}+\mathbf{k}) + \varepsilon^{2p}\mathbf{1}_n\big)^{-1}\Big| \\ &\leqslant \sup_{\mathbf{q}\in\widetilde{\Gamma}} \big(c_*|\mathbf{q}+\mathbf{k}|^{2p} + \varepsilon^{2p}\big)^{-1} \leqslant \big(c_*|\mathbf{k}|^{2p} + \varepsilon^{2p}\big)^{-1} \leqslant \big(c_*(t^0)^{2p} + \varepsilon^{2p}\big)^{-1} \\ &\leqslant c_*^{-(J+1)/2p} (t^0)^{-J-1} \varepsilon^{-(2p-J-1)}, \quad J = 0,1,\dots,2p-1, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega} \setminus \mathcal{B}(t^0). \end{aligned} \tag{4.25}$$

Для оценки корректоров нам понадобится следующее неравенство, вытекающее из (4.11):

$$\begin{aligned} &\big\|\Delta_\gamma(\mathbf{D}+\mathbf{k},\varepsilon)\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} = \sup_{\mathbf{q}\in\widetilde{\Gamma}} |\Delta_\gamma(\mathbf{q}+\mathbf{k},\varepsilon)| \leqslant C_\gamma \sup_{\mathbf{q}\in\widetilde{\Gamma}} |\mathbf{q}+\mathbf{k}|^{2pk+s} (c_*|\mathbf{q}+\mathbf{k}|^{2p} + \varepsilon^{2p})^{-(k+1)} \\ &\leqslant C_\gamma c_*^{-k-s/2p} (c_*|\mathbf{k}|^{2p} + \varepsilon^{2p})^{-(1-s/2p)} \leqslant C_\gamma c_*^{-k-s/2p} (c_*(t^0)^{2p} + \varepsilon^{2p})^{-(1-s/2p)} \\ &\leqslant C_\gamma c_*^{-k-(J+1)/2p} (t^0)^{-(J+1-s)} \varepsilon^{-(2p-J-1)}, \\ &\gamma \in \mathbb{Z}_+^k, \quad |\gamma| = 2pk+s, \quad s = 1,\dots,J, \quad J = 1,\dots,2p-1, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega} \setminus \mathcal{B}(t^0). \end{aligned} \tag{4.26}$$

Отсюда и из (4.12) непосредственно следует оценка для корректоров при $s = 1,\dots,p-1$:

$$\begin{aligned} &\big\|\mathring{\mathcal{K}}_s(\mathbf{k},\varepsilon)\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \tilde{C}(s,J) \varepsilon^{-(2p-J-1)}, \\ &s = 1,\dots,\min\{p-1,J\}, \quad J = 0,1,\dots,2p-1, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega} \setminus \mathcal{B}(t^0). \end{aligned} \tag{4.27}$$

Здесь

$$\tilde{C}(s,J) = \sum_{k=1}^{s} \sum_{\substack{\gamma \in (\tilde{\mathbb{N}}_{s-k})^k: \\ |\gamma| = 2pk+s}} C_\gamma c_*^{-k-(J+1)/2p} (t^0)^{-(J+1-s)}.$$

Далее, оценим норму оператора $\Phi_s(\mathbf{k},\varepsilon)P$ при $s = p,\dots,2p-1$ (одного из членов, входящих в $\mathring{\mathcal{K}}_s(\mathbf{k},\varepsilon)$). Пусть $u \in L_2(\Omega)$. Тогда согласно (3.61)

$$\Phi_s(\mathbf{k},\varepsilon)Pu = \Phi_s(\mathbf{k},\varepsilon)Pu = \Theta(s-p;\mathbf{k},\mathbf{x})b(\mathbf{k})(b(\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{k}) + \varepsilon^{2p})^{-1}Pu.$$

Отсюда с учетом (2.4), (3.36) и (4.8) получаем

$$\begin{aligned}
&\big\|\Phi_s(\mathbf{k},\varepsilon)Pu\big\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \alpha_1^{1/2}|\mathbf{k}|^p(c_*|\mathbf{k}|^{2p}+\varepsilon^{2p})^{-1}|Pu|\Big(\int_\Omega |\Theta(s-p,\mathbf{k},\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x}\Big)^{1/2} \\
&\leqslant \alpha_1^{1/2}|\Omega|^{-1/2}|\mathbf{k}|^p(c_*|\mathbf{k}|^{2p}+\varepsilon^{2p})^{-1}\mathfrak{C}_{s-p}|\mathbf{k}|^{s-p}\|u\|_{L_2(\Omega)}.
\end{aligned}\tag{4.28}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\big\|\Phi_s(\mathbf{k},\varepsilon)P\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathfrak{C}_{s-p}\alpha_1^{1/2}|\Omega|^{-1/2}|\mathbf{k}|^s(c_*|\mathbf{k}|^{2p}+\varepsilon^{2p})^{-1} \\
&\leqslant \mathfrak{C}_{s-p}\alpha_1^{1/2}|\Omega|^{-1/2}c_*^{-s/2p}(c_*(t^0)^{2p}+\varepsilon^{2p})^{-(1-s/2p)} \\
&\leqslant \mathfrak{C}_{s-p}\alpha_1^{1/2}|\Omega|^{-1/2}c_*^{-(J+1)/2p}(t^0)^{-(J+1-s)}\varepsilon^{-(2p-J-1)}, \\
&s = p,\dots,J, \quad J = p,\dots,2p-1, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}\setminus\mathcal{B}(t^0).
\end{aligned}\tag{4.29}$$

Разумеется, норма сопряженного оператора $(\Phi_s(\mathbf{k},\varepsilon)P)^*$ допускает такую же оценку.

Оценим теперь норму оператора $\Psi_l(\mathbf{k})\Delta_\gamma(\mathbf{D}+\mathbf{k},\varepsilon)P$ при $s = p+1,\dots,2p-1$, $l+|\gamma| = 2pk+s$ (такие члены входят в $\mathcal{K}_s''(\mathbf{k},\varepsilon)$, см. (3.66)). Пусть $u \in L_2(\Omega)$. С учетом (3.62) имеем

$$\Psi_l(\mathbf{k})\Delta_\gamma(\mathbf{D}+\mathbf{k},\varepsilon)Pu = \Theta(l-p;\mathbf{k},\mathbf{x})b(\mathbf{k})\Delta_\gamma(\mathbf{k},\varepsilon)Pu.$$

По аналогии с (4.28), (4.29) с учетом (2.4), (3.36) и (4.11) имеем

$$\begin{aligned}
&\big\|\Psi_l(\mathbf{k})\Delta_\gamma(\mathbf{D}+\mathbf{k},\varepsilon)P\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathfrak{C}_{l-p}\alpha_1^{1/2}|\Omega|^{-1/2}C_\gamma|\mathbf{k}|^{2pk+s}(c_*|\mathbf{k}|^{2p}+\varepsilon^{2p})^{-(k+1)} \\
&\leqslant \mathfrak{C}_{l-p}\alpha_1^{1/2}|\Omega|^{-1/2}C_\gamma c_*^{-k-s/2p}(c_*(t^0)^{2p}+\varepsilon^{2p})^{-(1-s/2p)} \\
&\leqslant \mathfrak{C}_{l-p}\alpha_1^{1/2}|\Omega|^{-1/2}C_\gamma c_*^{-k-(J+1)/2p}(t^0)^{-(J+1-s)}\varepsilon^{-(2p-J-1)}, \\
&\gamma \in \mathbb{Z}_+^k, \;\; l = p,\dots,s-k, \;\; k = 1,\dots,s-p, \;\; l+|\gamma| = 2pk+s, \\
&s = p+1,\dots,J, \quad J = p+1,\dots,2p-1, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}\setminus\mathcal{B}(t^0).
\end{aligned}\tag{4.30}$$

Разумеется, норма сопряженного оператора $(\Psi_l(\mathbf{k})\Delta_\gamma(\mathbf{D}+\mathbf{k},\varepsilon)P)^*$ допускает такую же оценку.

Комбинируя (4.26), (4.29), (4.30) и определение корректоров $\mathring{\mathcal{K}}_s(\mathbf{k},\varepsilon)$ при $s = p,\dots,2p-1$, получаем

$$\begin{aligned}
&\big\|\mathring{\mathcal{K}}_s(\mathbf{k},\varepsilon)\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \tilde{C}(s,J)\varepsilon^{-(2p-J-1)}, \\
&s = p,\dots,J, \quad J = p,\dots,2p-1, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}\setminus\mathcal{B}(t^0).
\end{aligned}\tag{4.31}$$

Отметим, что постоянные $\tilde{C}(s,J)$ в (4.27) и (4.31) зависят только от p, d, J, s, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, α_0, α_1, r_0, $|\Omega|$.

В итоге, из (4.24), (4.25), (4.27) и (4.31) вытекает справедливость представлений вида (4.20), (4.21) при $\mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}\setminus\mathcal{B}(t^0)$ с оценками остаточных членов

$$\big\|\mathring{Z}^{(0)}(\mathbf{k},\varepsilon)\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant 2c_*^{-1/2p}(t^0)^{-1}\varepsilon^{-(2p-1)}, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}\setminus\mathcal{B}(t^0),$$

$$\big\|\mathring{Z}^{(J)}(\mathbf{k},\varepsilon)\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \Big(2c_*^{-(J+1)/2p}(t^0)^{-(J+1)} + \sum_{s=1}^{J}\tilde{C}(s,J)\Big)\varepsilon^{-(2p-J-1)},$$

$$J = 1,\dots,2p-1, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}\setminus\mathcal{B}(t^0).$$

Отсюда и из (4.20)–(4.23) получаем следующий результат.

Теорема 4.5. *Пусть выполнены условия* (2.1), (2.4) *и матрицы-функции* $g(\mathbf{x})$ *и* $h(\mathbf{x})$ *периодичны с решеткой периодов* Γ. *Пусть* $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ — *оператор в* $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$, *порожденный квадратичной формой* (2.15). *Пусть* $\mathcal{A}^0(\mathbf{k})$ — *оператор* (4.9). *Пусть корректоры* $\mathring{\mathcal{K}}_s(\mathbf{k},\varepsilon)$, $s=1,\dots,2p-1$, *определены согласно* (4.12), (4.15)–(4.18), (3.66) *и* (3.68). *Тогда при всех* $\mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}$ *и* $\varepsilon>0$ *справедливы представления*

$$(\mathcal{A}(\mathbf{k})+\varepsilon^{2p}I)^{-1}=(\mathcal{A}^0(\mathbf{k})+\varepsilon^{2p}I)^{-1}+\mathring{Z}^{(0)}(\mathbf{k},\varepsilon),$$

$$(\mathcal{A}(\mathbf{k})+\varepsilon^{2p}I)^{-1}=(\mathcal{A}^0(\mathbf{k})+\varepsilon^{2p}I)^{-1}+\sum_{s=1}^{J}\mathring{\mathcal{K}}_s(\mathbf{k},\varepsilon)+\mathring{Z}^{(J)}(\mathbf{k},\varepsilon),\quad J=1,\dots,2p-1.$$

Остаточные члены подчинены оценкам

$$\left\|\mathring{Z}^{(J)}(\mathbf{k},\varepsilon)\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant\mathcal{C}_J\varepsilon^{-(2p-J-1)},\quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega},\quad J=0,1,\dots,2p-1.$$

Постоянные $\mathcal{C}_J$ *зависят только от* p, d, J, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, α_0, α_1, r_0, $|\Omega|$. *Корректоры подчинены оценкам* (4.23).

4.5. **Приближение резольвенты** $(\mathcal{A}+\varepsilon^{2p}I)^{-1}$**.** Вернемся к оператору $\mathcal{A}$, действующему в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. В силу разложения (2.20) выполнено

$$(\mathcal{A}+\varepsilon^{2p}I)^{-1}=\mathcal{U}^{-1}\Big(\int_{\widetilde{\Omega}}\oplus(\mathcal{A}(\mathbf{k})+\varepsilon^{2p}I)^{-1}\,d\mathbf{k}\Big)\mathcal{U}.\tag{4.32}$$

Аналогичное разложение имеет место и для оператора $(\mathcal{A}^0+\varepsilon^{2p}I)^{-1}$.

Введем теперь *корректоры* $\mathcal{K}_s(\varepsilon)$, $s=1,\dots,2p-1$, — ограниченные операторы в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. При $s=1,\dots,p-1$ корректоры заданы соотношениями

$$\mathcal{K}_s(\varepsilon):=\sum_{k=1}^{s}(-1)^k\sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{s-k})^k:\\|\gamma|=2pk+s}}\Delta_\gamma(\mathbf{D},\varepsilon),\ \ s=1,\dots,p-1.\tag{4.33}$$

Здесь $\Delta_\gamma(\mathbf{D},\varepsilon)$ — ПДО в $\mathbb{R}^d$ порядка $|\gamma|-2p(k+1)$, заданный выражением

$$\Delta_\gamma(\mathbf{D},\varepsilon):=(\mathcal{A}^0+\varepsilon^{2p}I)^{-1}\prod_{i=1}^{k}\left(b(\mathbf{D})^*\,g_{\gamma_i}(\mathbf{D})\,b(\mathbf{D})(\mathcal{A}^0+\varepsilon^{2p}I)^{-1}\right),$$
$$\gamma\in\mathbb{Z}_+^k,\ \ 2p+1\leqslant\gamma_i\leqslant4p-1,\ \ i=1,\dots,k,\tag{4.34}$$

а $g_j(\mathbf{D})$ — ДО порядка $j-2p$ с символом $g_j(\mathbf{k})$ (см. (3.44)).

Пусть $\Phi_s(\varepsilon)$ — ПДО в $\mathbb{R}^d$ порядка $s-2p$, заданный выражением

$$\Phi_s(\mathbf{x},\mathbf{D},\varepsilon):=\Theta(s-p;\mathbf{D},\mathbf{x})b(\mathbf{D})(\mathcal{A}^0+\varepsilon^{2p}I)^{-1},\ \ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d,\ \ s=p,\dots,2p-1.\tag{4.35}$$

Здесь

$$\Theta(r;\mathbf{D},\mathbf{x})=\sum_{|\nu|=r}\widehat{\Theta}_\nu(\mathbf{x})\mathbf{D}^\nu,\tag{4.36}$$

коэффициенты $\widehat{\Theta}_\nu(\mathbf{x})$, изначально определенные на ячейке Ω, считаются периодически продолженными на $\mathbb{R}^d$ до элементов из $H^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d;\mathrm{M}^{n,m}(\mathbb{C}))$. Введем также ДО Ψ_s в $\mathbb{R}^d$ порядка s, заданный выражением

$$\Psi_s(\mathbf{x},\mathbf{D}):=\Theta(s-p;\mathbf{D},\mathbf{x})b(\mathbf{D}),\ \ \operatorname{Dom}\Psi_s=H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n),\ \ s=p,\dots,2p-1.\tag{4.37}$$

Нам потребуется также оператор $\Pi:=\mathcal{U}^{-1}[P]\mathcal{U}$, действующий в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Здесь $[P]$ — оператор в $\mathcal{H}$ (см. (2.13)), действующий послойно как оператор P. Легко видеть (см. [BSu3, (6.8)]), что Π есть ПДО с символом $\chi_{\widetilde{\Omega}}(\boldsymbol{\xi})$, где $\chi_{\widetilde{\Omega}}$ — характеристическая функция множества $\widetilde{\Omega}$, т. е.

$$(\Pi\mathbf{u})(\mathbf{x})=(2\pi)^{-d/2}\int_{\widetilde{\Omega}}e^{i\langle\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}\rangle}\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi}.$$

Отметим, что Π — сглаживающий оператор.

Далее, введем корректоры $\mathcal{K}_s(\varepsilon)$ при $s = p, \dots, 2p-1$:

$$\mathcal{K}_p(\varepsilon) := \Phi_p(\varepsilon)\Pi + (\Phi_p(\varepsilon)\Pi)^* + \sum_{k=1}^{p}(-1)^k \sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{p-k})^k:\\ |\gamma|=2pk+p}} \Delta_\gamma(\mathbf{D},\varepsilon), \tag{4.38}$$

$$\mathcal{K}_s(\varepsilon) := \Phi_s(\varepsilon)\Pi + (\Phi_s(\varepsilon)\Pi)^* - \Delta_{2p+s}(\mathbf{D},\varepsilon) + \mathcal{K}'_s(\varepsilon) + \mathcal{K}''_s(\varepsilon) + \mathcal{K}'''_s(\varepsilon), \quad s = p+1, \dots, 2p-1. \tag{4.39}$$

Здесь

$$\mathcal{K}'_s(\varepsilon) := \sum_{k=2}^{s-p+1}(-1)^k \sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{p-2})^k:\\ |\gamma|=2pk+s}} \Delta_\gamma(\mathbf{D},\varepsilon) + \sum_{k=s-p+2}^{s}(-1)^k \sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{s-k})^k:\\ |\gamma|=2pk+s}} \Delta_\gamma(\mathbf{D},\varepsilon), \tag{4.40}$$

$$\mathcal{K}''_s(\varepsilon) := \sum_{k=1}^{s-p}(-1)^k \sum_{l=p}^{s-k} \sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{s-p-k})^k:\\ l+|\gamma|=2pk+s}} \left(\Psi_l\Delta_\gamma(\mathbf{D},\varepsilon)\Pi + (\Psi_l\Delta_\gamma(\mathbf{D},\varepsilon)\Pi)^*\right), \tag{4.41}$$

$$\mathcal{K}'''_s(\varepsilon) := \sum_{k=2}^{s-p+1}(-1)^k \sum_{i=3p}^{2p+1+s-k} \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{p-2})^{k-1}:\\ i+|\gamma|=2pk+s}} \Xi^{(k)}_{i,j,\gamma}(\varepsilon). \tag{4.42}$$

Операторы $\Xi^{(k)}_{i,j,\gamma}(\varepsilon)$ заданы соотношениями

$$\begin{aligned}
&\Xi^{(k)}_{i,0,\gamma}(\varepsilon) := \Delta_{\eta_1}(\mathbf{D},\varepsilon), \quad \eta_1 = \eta_1(i,\gamma) = (i,\gamma_1,\dots,\gamma_{k-1}), \quad k \geqslant 2,\\
&\Xi^{(k)}_{i,k-1,\gamma}(\varepsilon) := \Delta_{\eta_2}(\mathbf{D},\varepsilon), \quad \eta_2 = \eta_2(i,\gamma) = (\gamma_1,\dots,\gamma_{k-1},i), \quad k \geqslant 2,\\
&\Xi^{(k)}_{i,j,\gamma}(\varepsilon) := \Delta_{\eta_3}(\mathbf{D},\varepsilon), \quad \eta_3 = \eta_3(i,j,\gamma) = (\gamma_1,\dots,\gamma_j,i,\gamma_{j+1},\dots,\gamma_{k-1}),\\
&\qquad k \geqslant 3,\ j = 1,\dots,k-2.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Ясно, что с помощью преобразования Гельфанда введенные корректоры $\mathcal{K}_s(\varepsilon)$ раскладываются в прямые интегралы по операторам $\mathring{\mathcal{K}}_s(\mathbf{k},\varepsilon)$:

$$\mathcal{K}_s(\varepsilon) = \mathcal{U}^{-1}\Big(\int_{\tilde{\Omega}} \oplus \mathring{\mathcal{K}}_s(\mathbf{k},\varepsilon)\,d\mathbf{k}\Big)\mathcal{U}, \quad s = 1,\dots 2p-1. \tag{4.44}$$

Теперь с помощью разложения (4.32), аналогичного разложения для резольвенты эффективного оператора и разложений (4.44) из теоремы 4.5 непосредственно вытекает следующий результат.

Теорема 4.6. *Пусть выполнены условия* (2.1), (2.4) *и матрицы-функции* $g(\mathbf{x})$ *и* $h(\mathbf{x})$ *периодичны с решеткой периодов* Γ. *Пусть* $\mathcal{A}$ — *оператор в* $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, *порожденный квадратичной формой* (2.6). *Пусть* $\mathcal{A}^0$ — *оператор* (4.7). *Пусть корректоры* $\mathcal{K}_s(\varepsilon)$, $s = 1,\dots,2p-1$, *определены согласно* (4.33), (4.34), (4.38)–(4.43). *Тогда при* $\varepsilon > 0$ *справедливы представления*

$$(\mathcal{A} + \varepsilon^{2p}I)^{-1} = (\mathcal{A}^0 + \varepsilon^{2p}I)^{-1} + Z^{(0)}(\varepsilon),$$

$$(\mathcal{A} + \varepsilon^{2p}I)^{-1} = (\mathcal{A}^0 + \varepsilon^{2p}I)^{-1} + \sum_{s=1}^{J}\mathcal{K}_s(\varepsilon) + Z^{(J)}(\varepsilon), \quad J = 1,\dots,2p-1.$$

Остаточные члены подчинены оценкам

$$\left\|Z^{(J)}(\varepsilon)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_J\varepsilon^{-(2p-J-1)}, \quad J = 0,1,\dots,2p-1.$$

Постоянные $\mathcal{C}_J$ *зависят только от* p, d, J, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, α_0, α_1, r_0, $|\Omega|$. *Корректоры подчинены оценкам*

$$\left\|\mathcal{K}_s(\varepsilon)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \tilde{\mathcal{C}}_s \varepsilon^{-(2p-s)}, \quad \varepsilon > 0, \quad s = 1, \dots, 2p-1.$$

Константы $\tilde{\mathcal{C}}_s$ *зависят только от* p, d, s, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, α_0, α_1, r_0, $|\Omega|$.

§ 5. Усреднение оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$

5.1. **Оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$. Масштабное преобразование.** Для всякой Γ-периодической измеримой функции $\varphi(\mathbf{x})$ в $\mathbb{R}^d$ используем обозначение

$$\varphi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \varphi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad \varepsilon > 0.$$

В $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, формально заданный дифференциальным выражением

$$\mathcal{A}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \quad \varepsilon > 0. \tag{5.1}$$

Как обычно, строгое определение оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ дается через соответствующую замкнутую квадратичную форму

$$a_\varepsilon[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \langle g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{u}(\mathbf{x}), b(\mathbf{D})\mathbf{u}(\mathbf{x})\rangle \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n). \tag{5.2}$$

Форма (5.2) подчинена оценкам, аналогичным (2.8):

$$\alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\boldsymbol{\xi}|^{2p} |\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi} \leqslant a_\varepsilon[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leqslant \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\boldsymbol{\xi}|^{2p} |\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi}, \quad \mathbf{u} \in H^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n).$$

При малом ε коэффициенты оператора (5.1) быстро осциллируют. Типичная задача усреднения для оператора (5.1) состоит в аппроксимации резольвенты при малом ε. Используя результаты §4 и масштабное преобразование, мы выводим теорему об аппроксимации резольвенты $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$.

Пусть T_ε — унитарный в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ оператор масштабного преобразования, заданный соотношением

$$(T_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x}) = \varepsilon^{d/2} \mathbf{u}(\varepsilon \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad \varepsilon > 0.$$

Легко проверить следующее тождество:

$$(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} = \varepsilon^{2p} T_\varepsilon^* (\mathcal{A} + \varepsilon^{2p} I)^{-1} T_\varepsilon. \tag{5.3}$$

Аналогичное тождество верно и для оператора $\mathcal{A}^0$:

$$(\mathcal{A}^0 + I)^{-1} = \varepsilon^{2p} T_\varepsilon^* (\mathcal{A}^0 + \varepsilon^{2p} I)^{-1} T_\varepsilon. \tag{5.4}$$

5.2. **Аппроксимация резольвенты $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$.** Введем теперь корректоры для приближения резольвенты $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$. Пусть $\Delta_\gamma(\mathbf{D})$ — ПДО в $\mathbb{R}^d$ порядка $|\gamma| - 2p(k+1)$, заданный выражением

$$\Delta_\gamma(\mathbf{D}) := (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} \prod_{i=1}^{k} \left(b(\mathbf{D})^* \, g_{\gamma_i}(\mathbf{D}) \, b(\mathbf{D}) (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} \right),$$

$$\gamma \in \mathbb{Z}_+^k, \quad 2p+1 \leqslant \gamma_i \leqslant 4p-1, \quad i = 1, \dots, k, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{5.5}$$

а $g_j(\mathbf{D})$ — ДО порядка $j - 2p$ с символом $g_j(\mathbf{k})$ (см. (3.44)). Напомним обозначение $\tilde{\mathbb{N}}_M$, см. (1.29).

Корректоры $\mathcal{K}_s$ при $s = 1, \dots, p-1$ не зависят от ε и задаются выражениями

$$\mathcal{K}_s := \sum_{k=1}^{s} (-1)^k \sum_{\substack{\gamma \in (\tilde{\mathbb{N}}_{s-k})^k: \\ |\gamma| = 2pk + s}} \Delta_\gamma(\mathbf{D}), \quad s = 1, \dots, p-1. \tag{5.6}$$

Пусть Φ_s^ε — ПДО в $\mathbb{R}^d$ порядка $s-2p$, заданный выражением

$$\Phi_s(\mathbf{x}/\varepsilon,\mathbf{D}) := \Theta(s-p;\mathbf{D},\mathbf{x}/\varepsilon)b(\mathbf{D})(\mathcal{A}^0+I)^{-1}, \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d, \quad s=p,\dots,2p-1. \tag{5.7}$$

Здесь

$$\Theta(r;\mathbf{D},\mathbf{x}/\varepsilon) = \sum_{|\nu|=r} \widehat{\Theta}_\nu(\mathbf{x}/\varepsilon)\mathbf{D}^\nu.$$

Введем также ДО Ψ_s^ε в $\mathbb{R}^d$ порядка s, заданный выражением

$$\Psi_s(\mathbf{x}/\varepsilon,\mathbf{D}) := \Theta(s-p;\mathbf{D},\mathbf{x}/\varepsilon)b(\mathbf{D}), \quad \operatorname{Dom}\Psi_s^\varepsilon = H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \quad s=p,\dots,2p-1. \tag{5.8}$$

Нам потребуется также оператор Π_ε — ПДО с символом $\chi_{\widetilde{\Omega}/\varepsilon}(\boldsymbol{\xi})$, где $\chi_{\widetilde{\Omega}/\varepsilon}$ — характеристическая функция множества $\widetilde{\Omega}/\varepsilon$, т. е.

$$(\Pi_\varepsilon\mathbf{u})(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d/2}\int_{\widetilde{\Omega}/\varepsilon} e^{i\langle\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}\rangle}\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi}. \tag{5.9}$$

Корректоры $\mathcal{K}_{s,\varepsilon}$ при $s=p,p+1,\dots,2p-1$ зависят от ε и задаются выражениями

$$\mathcal{K}_{p,\varepsilon} := \Phi_p^\varepsilon\Pi_\varepsilon + (\Phi_p^\varepsilon\Pi_\varepsilon)^* + \sum_{k=1}^{p}(-1)^k \sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{p-k})^k:\\ |\gamma|=2pk+p}} \Delta_\gamma(\mathbf{D}), \tag{5.10}$$

$$\mathcal{K}_{s,\varepsilon} := \Phi_s^\varepsilon\Pi_\varepsilon + (\Phi_s^\varepsilon\Pi_\varepsilon)^* - \Delta_{2p+s}(\mathbf{D}) + \mathcal{K}_s' + \mathcal{K}_{s,\varepsilon}'' + \mathcal{K}_s''', \quad s=p+1,\dots,2p-1. \tag{5.11}$$

Здесь

$$\mathcal{K}_s' := \sum_{k=2}^{s-p+1}(-1)^k \sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{p-2})^k:\\ |\gamma|=2pk+s}} \Delta_\gamma(\mathbf{D}) + \sum_{k=s-p+2}^{s}(-1)^k \sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{s-k})^k:\\ |\gamma|=2pk+s}} \Delta_\gamma(\mathbf{D}), \tag{5.12}$$

$$\mathcal{K}_{s,\varepsilon}'' := \sum_{k=1}^{s-p}(-1)^k \sum_{l=p}^{s-k} \sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{s-p-k})^k:\\ l+|\gamma|=2pk+s}} \left(\Psi_l^\varepsilon\Delta_\gamma(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon + (\Psi_l^\varepsilon\Delta_\gamma(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon)^*\right), \tag{5.13}$$

$$\mathcal{K}_s''' := \sum_{k=2}^{s-p+1}(-1)^k \sum_{i=3p}^{2p+1+s-k} \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{p-2})^{k-1}:\\ i+|\gamma|=2pk+s}} \Xi_{i,j,\gamma}^{(k)}. \tag{5.14}$$

Операторы $\Xi_{i,j,\gamma}^{(k)}$ заданы соотношениями

$$\begin{aligned}
&\Xi_{i,0,\gamma}^{(k)} := \Delta_{\eta_1}(\mathbf{D}), \quad \eta_1=\eta_1(i,\gamma)=(i,\gamma_1,\dots,\gamma_{k-1}), \quad k\geqslant 2,\\
&\Xi_{i,k-1,\gamma}^{(k)} := \Delta_{\eta_2}(\mathbf{D}), \quad \eta_2=\eta_2(i,\gamma)=(\gamma_1,\dots,\gamma_{k-1},i), \quad k\geqslant 2,\\
&\Xi_{i,j,\gamma}^{(k)} := \Delta_{\eta_3}(\mathbf{D}), \quad \eta_3=\eta_3(i,j,\gamma)=(\gamma_1,\dots,\gamma_j,i,\gamma_{j+1},\dots,\gamma_{k-1}),\\
&\qquad k\geqslant 3,\ j=1,\dots,k-2.
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Легко видеть, что оператор $\Delta_\gamma(\mathbf{D})$ связан масштабным преобразованием с оператором (4.34):

$$\Delta_\gamma(\mathbf{D}) = \varepsilon^{2p(k+1)-|\gamma|}T_\varepsilon^*\Delta_\gamma(\mathbf{D},\varepsilon)T_\varepsilon. \tag{5.16}$$

Отметим очевидные тождества

$$\Phi_s^\varepsilon = \varepsilon^{2p-s}T_\varepsilon^*\Phi_s(\varepsilon)T_\varepsilon, \tag{5.17}$$

$$\Psi_l^\varepsilon = \varepsilon^{-l}T_\varepsilon^*\Psi_l T_\varepsilon, \tag{5.18}$$

$$\Pi_\varepsilon = T_\varepsilon^*\Pi T_\varepsilon. \tag{5.19}$$

Из (5.16)–(5.19), выражений для корректоров (5.6), (5.10)–(5.15) и (4.33), (4.38)–(4.43) следует, что

$$\mathcal{K}_s = \varepsilon^{2p-s} T_\varepsilon^* \mathcal{K}_s(\varepsilon) T_\varepsilon, \quad s = 1, \dots, p-1, \tag{5.20}$$

$$\mathcal{K}_{s,\varepsilon} = \varepsilon^{2p-s} T_\varepsilon^* \mathcal{K}_s(\varepsilon) T_\varepsilon, \quad s = p, \dots, 2p-1. \tag{5.21}$$

Теперь, применяя соотношения (5.3), (5.4), (5.20), (5.21), из теоремы 4.6 выводим наш основной результат.

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия* (2.1), (2.4) *и матрицы-функции* $g(\mathbf{x})$ *и* $h(\mathbf{x})$ *периодичны с решеткой периодов* Γ. *Пусть* $\mathcal{A}_\varepsilon$ — *оператор в* $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, *порожденный квадратичной формой* (5.2). *Пусть* $\mathcal{A}^0$ — *оператор* (4.7). *Пусть корректоры* $\mathcal{K}_{s,\varepsilon} := \mathcal{K}_s$, $s = 1, \dots, p-1$, *и* $\mathcal{K}_{s,\varepsilon}$, $s = p, \dots, 2p-1$, *определены согласно* (5.6) *и* (5.10)–(5.15). *Тогда при* $\varepsilon > 0$ *справедливы представления*

$$(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} = (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} + Z_\varepsilon^{(0)},$$

$$(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} = (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} + \sum_{s=1}^{J} \varepsilon^s \mathcal{K}_{s,\varepsilon} + Z_\varepsilon^{(J)}, \quad J = 1, \dots, 2p-1. \tag{5.22}$$

Остаточные члены подчинены оценкам

$$\big\| Z_\varepsilon^{(J)} \big\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_J \varepsilon^{J+1}, \quad J = 0, 1, \dots, 2p-1. \tag{5.23}$$

Постоянные $\mathcal{C}_J$ *зависят только от* p, d, J, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, α_0, α_1, r_0, $|\Omega|$. *Корректоры подчинены оценкам*

$$\big\| \mathcal{K}_{s,\varepsilon} \big\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \tilde{\mathcal{C}}_s, \quad \varepsilon > 0, \quad s = 1, \dots, 2p-1.$$

Константы $\tilde{\mathcal{C}}_s$ *зависят только от* p, d, s, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, α_0, α_1, r_0, $|\Omega|$.

5.3. **О возможности “устранения” сглаживающего оператора в корректорах.** При $s = p, \dots, 2p-1$ некоторые члены корректоров $\mathcal{K}_{s,\varepsilon}$ содержат сглаживающий оператор Π_ε. Рассмотрим вопрос о возможности замены Π_ε тождественным оператором в выражениях для корректоров с сохранением тех же порядков погрешностей. Через $\mathfrak{M}(H^\sigma(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m); L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ обозначим пространство мультипликаторов из $H^\sigma(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$.

Лемма 5.2. *Пусть* $\widehat{\Theta}_\nu(\mathbf{x})$ — Γ-*периодические* $(n \times m)$-*матрицы-функции из представления* (3.25). *Предположим, что*

$$\widehat{\Theta}_\nu \in \mathfrak{M}(H^{2p-s}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m); L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)), \quad |\nu| = s - p,$$

при некотором $s \in \{p, \dots, 2p-1\}$. *Тогда справедлива оценка*

$$\varepsilon^s \big\| \Phi_s^\varepsilon (I - \Pi_\varepsilon) \big\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \check{\mathfrak{C}}_s \varepsilon^{2p}, \quad \varepsilon > 0, \tag{5.24}$$

а потому также выполнены оценки

$$\varepsilon^s \big\| \Phi_s^\varepsilon (I - \Pi_\varepsilon) \big\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \check{\mathfrak{C}}_s \varepsilon^{J+1}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1, \quad J = s, \dots, 2p-1. \tag{5.25}$$

Постоянная $\check{\mathfrak{C}}_s$ *зависит от* p, s, $\|g\|_{L_\infty}^{-1}$, α_0, α_1, r_0 *и от норм* $\big\| [\widehat{\Theta}_\nu] \big\|_{H^{2p-s}(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)}$ *при* $|\nu| = s - p$.

Доказательство. В силу (5.17) и (5.19) выполнено

$$\varepsilon^s \big\| \Phi_s^\varepsilon (I - \Pi_\varepsilon) \big\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} = \varepsilon^{2p} \big\| \Phi_s(\varepsilon)(I - \Pi) \big\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{5.26}$$

Согласно (4.35) и (4.36),

$$\Phi_s(\varepsilon) = \sum_{|\nu| = s-p} [\widehat{\Theta}_\nu] \mathbf{D}^\nu b(\mathbf{D}) (\mathcal{A}^0 + \varepsilon^{2p} I)^{-1}.$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
&\big\| \Phi_s(\varepsilon)(I-\Pi)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\
&\leqslant \sum_{|\nu|=s-p} \big\|[\widehat{\Theta}_\nu]\big\|_{H^{2p-s}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \big\| \mathbf{D}^\nu b(\mathbf{D})(\mathcal{A}^0+\varepsilon^{2p}I)^{-1}(I-\Pi)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^{2p-s}(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned} \tag{5.27}
$$

С учетом (2.4) и (4.8), используя преобразование Фурье, при $|\nu| = s-p$ получаем:

$$
\begin{aligned}
&\big\| \mathbf{D}^\nu b(\mathbf{D})(\mathcal{A}^0+\varepsilon^{2p}I)^{-1}(I-\Pi)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^{2p-s}(\mathbb{R}^d)} \\
&= \sup_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d\setminus\widetilde{\Omega}} (1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{(2p-s)/2} \left| \boldsymbol{\xi}^\nu b(\boldsymbol{\xi})(b(\boldsymbol{\xi})^* g^0 b(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^{2p}\mathbf{1}_n)^{-1}\right| \\
&\leqslant \alpha_1^{1/2} \sup_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d\setminus\widetilde{\Omega}} (1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{(2p-s)/2} |\boldsymbol{\xi}|^s (c_*|\boldsymbol{\xi}|^{2p}+\varepsilon^{2p})^{-1} \\
&\leqslant \alpha_1^{1/2} c_*^{-s/2p} \sup_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d\setminus\widetilde{\Omega}} (1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{(2p-s)/2} (c_*|\boldsymbol{\xi}|^{2p}+\varepsilon^{2p})^{-(2p-s)/2p} \\
&\leqslant \alpha_1^{1/2} c_*^{-1} (1+r_0^{-2})^{(2p-s)/2}.
\end{aligned}
$$

Мы учли, что $|\boldsymbol{\xi}| \geqslant r_0$ при $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d \setminus \widetilde{\Omega}$. Вместе с (5.26) и (5.27) это влечет оценку (5.24) с постоянной

$$
\check{\mathfrak{C}}_s = \alpha_1^{1/2} c_*^{-1} (1+r_0^{-2})^{(2p-s)/2} \Big(\sum_{|\nu|=s-p} \big\|[\widehat{\Theta}_\nu]\big\|_{H^{2p-s}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \Big).
$$

Оценки (5.25) при всех $J = s, \dots, 2p-1$ прямо следуют из (5.24), поскольку $\varepsilon^{2p} \leqslant \varepsilon^{J+1}$ при $0 < \varepsilon \leqslant 1$. $\square$

Лемма 5.3. *Пусть $s \in \{p+1,\dots,2p-1\}$, $k \in \{1,\dots,s-p\}$, $l \in \{p,\dots,s-k\}$, $\gamma \in (\tilde{\mathbb{N}}_{s-p-k})^k$ и $l+|\gamma| = 2pk+s$. Пусть $\widehat{\Theta}_\nu(\mathbf{x})$ — Γ-периодические $(n\times m)$-матрицы-функции из представления* (3.25)*. Предположим, что*

$$
\widehat{\Theta}_\nu \in \mathfrak{M}(H^{2p-s}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m); L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)), \quad |\nu| = l-p.
$$

Тогда справедлива оценка

$$
\varepsilon^s \big\| \Psi_l^\varepsilon \Delta_\gamma(\mathbf{D})(I-\Pi_\varepsilon)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}'_{s,l,\gamma}\varepsilon^{2p}, \quad \varepsilon > 0, \tag{5.28}
$$

а потому также выполнены оценки

$$
\varepsilon^s \big\| \Psi_l^\varepsilon \Delta_\gamma(\mathbf{D})(I-\Pi_\varepsilon)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}'_{s,l,\gamma}\varepsilon^{J+1}, \quad 0<\varepsilon\leqslant 1, \quad J = s,\dots,2p-1. \tag{5.29}
$$

Постоянная $\mathfrak{C}'_{s,l,\gamma}$ зависит от p, d, s, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g\|^{-1}_{L_\infty}$, α_0, α_1, r_0, $|\Omega|$ и от норм $\big\|[\widehat{\Theta}_\nu]\big\|_{H^{2p-s}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}$ при $|\nu| = l-p$.

Доказательство. В силу (5.16), (5.18) и (5.19) выполнено

$$
\varepsilon^s \big\| \Psi_l^\varepsilon \Delta_\gamma(\mathbf{D})(I-\Pi_\varepsilon)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = \varepsilon^{2p} \big\| \Psi_l \Delta_\gamma(\mathbf{D},\varepsilon)(I-\Pi)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{5.30}
$$

Согласно (4.36) и (4.37),

$$
\Psi_l \Delta_\gamma(\mathbf{D},\varepsilon) = \sum_{|\nu|=l-p} [\widehat{\Theta}_\nu] \mathbf{D}^\nu b(\mathbf{D}) \Delta_\gamma(\mathbf{D},\varepsilon).
$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
&\big\| \Psi_l \Delta_\gamma(\mathbf{D},\varepsilon)(I-\Pi)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\
&\leqslant \sum_{|\nu|=l-p} \big\|[\widehat{\Theta}_\nu]\big\|_{H^{2p-s}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \big\| \mathbf{D}^\nu b(\mathbf{D}) \Delta_\gamma(\mathbf{D},\varepsilon)(I-\Pi)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^{2p-s}(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned} \tag{5.31}
$$

С учетом (2.4) и (4.11), используя преобразование Фурье, при $|\nu| = l - p$ получаем:

$$\begin{aligned}
&\left\| \mathbf{D}^\nu b(\mathbf{D}) \Delta_\gamma(\mathbf{D}, \varepsilon)(I - \Pi) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to H^{2p-s}(\mathbb{R}^d)} \\
&= \sup_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d \setminus \widetilde{\Omega}} (1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^{(2p-s)/2} \left| \boldsymbol{\xi}^\nu b(\boldsymbol{\xi}) \Delta_\gamma(\boldsymbol{\xi}, \varepsilon) \right| \\
&\leqslant C_\gamma \alpha_1^{1/2} \sup_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d \setminus \widetilde{\Omega}} (1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^{(2p-s)/2} |\boldsymbol{\xi}|^{2pk+s} (c_* |\boldsymbol{\xi}|^{2p} + \varepsilon^{2p})^{-k-1} \\
&\leqslant C_\gamma \alpha_1^{1/2} c_*^{-k-s/2p} \sup_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d \setminus \widetilde{\Omega}} (1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^{(2p-s)/2} (c_* |\boldsymbol{\xi}|^{2p} + \varepsilon^{2p})^{-(2p-s)/2p} \\
&\leqslant C_\gamma \alpha_1^{1/2} c_*^{-k-1} (1 + r_0^{-2})^{(2p-s)/2}.
\end{aligned}$$

Вместе с (5.30) и (5.31) это влечет оценку (5.28) с постоянной

$$\mathfrak{C}'_{s,l,\gamma} = C_\gamma \alpha_1^{1/2} c_*^{-k-1} (1 + r_0^{-2})^{(2p-s)/2} \Big(\sum_{|\nu| = l-p} \left\| [\widehat{\Theta}_\nu] \right\|_{H^{2p-s}(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \Big).$$

Оценки (5.29) при всех $J = s, \dots, 2p-1$ прямо следуют из (5.28) с учетом ограничения $0 < \varepsilon \leqslant 1$. $\square$

Положим

$$\mathcal{K}^0_{p,\varepsilon} := \Phi^\varepsilon_p + (\Phi^\varepsilon_p)^* + \sum_{k=1}^{p} (-1)^k \sum_{\substack{\gamma \in (\tilde{\mathbb{N}}_{p-k})^k: \\ |\gamma| = 2pk+p}} \Delta_\gamma(\mathbf{D}), \tag{5.32}$$

$$\mathcal{K}^0_{s,\varepsilon} := \Phi^\varepsilon_s + (\Phi^\varepsilon_s)^* - \Delta_{2p+s}(\mathbf{D}) + \mathcal{K}'_s + \mathcal{K}''^0_{s,\varepsilon} + \mathcal{K}'''_s, \quad s = p+1, \dots, 2p-1, \tag{5.33}$$

где

$$\mathcal{K}''^0_{s,\varepsilon} := \sum_{k=1}^{s-p} (-1)^k \sum_{l=p}^{s-k} \sum_{\substack{\gamma \in (\tilde{\mathbb{N}}_{s-p-k})^k: \\ l + |\gamma| = 2pk+s}} \left(\Psi^\varepsilon_l \Delta_\gamma(\mathbf{D}) + (\Psi^\varepsilon_l \Delta_\gamma(\mathbf{D}))^* \right), \tag{5.34}$$

а операторы $\mathcal{K}'_s$ и $\mathcal{K}'''_s$ определены в (5.12) и (5.14) соответственно.

Комбинируя теорему 5.1 и леммы 5.2, 5.3, получаем следующий результат.

Теорема 5.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.1. *Пусть* $\widehat{\Theta}_\nu(\mathbf{x})$ — Γ-*периодические* $(n \times m)$-*матрицы-функции из представления* (3.25). *Предположим, что при некотором* $J \in \{p, \dots, 2p-1\}$ *выполнено условие*

$$\widehat{\Theta}_\nu \in \mathfrak{M}(H^{2p-J}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m); L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)), \quad |\nu| \leqslant J - p.$$

Пусть корректоры $\mathcal{K}^0_{s,\varepsilon}$, $s = p, \dots, J$, *определены согласно* (5.32)–(5.34). *Тогда справедливо представление*

$$(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} = (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} + \sum_{s=1}^{p-1} \varepsilon^s \mathcal{K}_s + \sum_{s=p}^{J} \varepsilon^s \mathcal{K}^0_{s,\varepsilon} + \widetilde{Z}^{(J)}_\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1, \tag{5.35}$$

и оценка

$$\left\| \widetilde{Z}^{(J)}_\varepsilon \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}^0_J \varepsilon^{J+1}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1. \tag{5.36}$$

Постоянная $\mathcal{C}^0_J$ *зависит от* p, d, J, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, α_0, α_1, r_0, $|\Omega|$ *и от норм* $\left\| [\widehat{\Theta}_\nu] \right\|_{H^{2p-J}(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)}$ *при* $|\nu| \leqslant J - p$.
Если $J < 2p-1$, *то справедливы также представления*

$$\begin{gathered}
(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} = (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} + \sum_{s=1}^{p-1} \varepsilon^s \mathcal{K}_s + \sum_{s=p}^{J} \varepsilon^s \mathcal{K}^0_{s,\varepsilon} + \sum_{s=J+1}^{\widehat{J}} \varepsilon^s \mathcal{K}_{s,\varepsilon} + \widetilde{Z}^{(J,\widehat{J})}_\varepsilon, \\
\widehat{J} = J+1, \dots, 2p-1, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1,
\end{gathered} \tag{5.37}$$

и оценки

$$\big\|\widetilde{Z}_\varepsilon^{(J,\widehat{J})}\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}^0_{J,\widehat{J}}\varepsilon^{\widehat{J}+1}, \quad \widehat{J}=J+1,\dots,2p-1, \quad 0<\varepsilon\leqslant 1. \tag{5.38}$$

Постоянные $\mathcal{C}^0_{J,\widehat{J}}$ *зависят от* p, d, J, $\widehat{J}$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, α_0, α_1, r_0, $|\Omega|$ *и от норм* $\big\|[\widehat{\Theta}_\nu]\big\|_{H^{2p-J}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}$ *при* $|\nu|\leqslant J-p$. *Корректоры подчинены оценкам*

$$\big\|\mathcal{K}^0_{s,\varepsilon}\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \tilde{\mathcal{C}}^0_s, \quad \varepsilon>0, \quad s=p,\dots,J. \tag{5.39}$$

Константы $\tilde{\mathcal{C}}^0_s$ *зависят от* p, d, s, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, α_0, α_1, r_0, $|\Omega|$ *и от норм* $\big\|[\widehat{\Theta}_\nu]\big\|_{H^{2p-J}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}$ *при* $|\nu|\leqslant J-p$.

Выделим некоторые случаи, когда условия теоремы 5.4 заведомо выполняются. Следующая лемма является аналогом леммы 6.7 из [BSu3]; доказательство леммы легко следует из теорем вложения.

Лемма 5.5. *Пусть* $\sigma>0$ *и* $\Xi(\mathbf{x})$ — Γ*-периодическая* $(n\times m)$*-матрица-функция в* $\mathbb{R}^d$, *причем*

$$\Xi\in L_q(\Omega;\mathrm{M}^{m,n}(\mathbb{C})), \quad q=2 \text{ при } d<2\sigma, \quad q>2 \text{ при } d=2\sigma, \quad q=\frac{d}{\sigma} \text{ при } d>2\sigma.$$

Тогда матрица-функция $\Xi(\mathbf{x})$ *является мультипликатором из* $H^\sigma(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ *в* $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, *причем*

$$\|[\Xi]\|_{H^\sigma(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant c\|\Xi\|_{L_q(\Omega)},$$

где $c=c(d,\sigma,\Omega)$ *при* $d\neq 2\sigma$ *и* $c=c(d,q,\Omega)$ *при* $d=2\sigma$.

Следствие 5.6. *Пусть при некотором* $J\in\{p,\dots,2p-1\}$ *выполнено условие* $d\leqslant 6p-2J$. *Тогда выполнены соотношения* (5.35)–(5.39), *причем постоянные в оценках зависят только от* d, p, J, $\widehat{J}$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, α_0, α_1, r_0 *и* Ω. *В частности, если* $d\leqslant 2p+2$, *то соотношения* (5.35), (5.36) *справедливы при всех* $J=p,\dots,2p-1$.

Доказательство. В силу следствия 3.7 при всех $|\nu|\leqslant p-1$ выполнено $\widehat{\Theta}_\nu\in\widetilde{H}^p(\Omega;\mathrm{M}^{m,n}(\mathbb{C}))$, причем норма $\|\widehat{\Theta}_\nu\|_{H^p(\Omega)}$ оценивается константой, зависящей от d, p, ν, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, α_0, α_1, r_0, $|\Omega|$.

Воспользуемся непрерывным вложением $H^p(\Omega)\subset L_{q_*}(\Omega)$, где $q_*=\infty$ при $d<2p$, $q_*<\infty$ при $d=2p$, $q_*=2d/(d-2p)$ при $d>2p$. Следовательно, матрица-функция $\widehat{\Theta}_\nu$ автоматически удовлетворяет условиям леммы 5.5 при $\sigma=2p-J$, если $d\leqslant 2p$ или $d>2p$ и $2d/(d-2p)\geqslant d/(2p-J)$, то есть $d\leqslant 6p-2J$. При этом норма $\big\|[\widehat{\Theta}_\nu]\big\|_{H^{2p-J}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}$ оценивается в конечном счете в терминах $\big\|\widehat{\Theta}_\nu\big\|_{H^p(\Omega)}$. Остается сослаться на теорему 5.4. $\square$

5.4. **Специальные случаи.** Обсудим специфику общих результатов в случаях, когда $g^0=\overline{g}$ или $g^0=\underline{g}$.

Предложение 5.7. *Пусть* $g^0=\overline{g}$, *то есть выполнены соотношения* (4.4). *Тогда первый корректор обращается в ноль*: $\mathcal{K}_1=0$, *а потому справедлива оценка*

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon+I)^{-1}-(\mathcal{A}^0+I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_2\varepsilon^2, \quad \varepsilon>0. \tag{5.40}$$

Кроме того, выполнены равенства $\Phi_p^\varepsilon=0$, $\Psi_p^\varepsilon=0$, $\mathcal{K}''_{p+1,\varepsilon}=0$.

Доказательство. Из (4.4) следует, что периодическое решение задачи (4.1) равно нулю: $\Theta(\mathbf{x})=\Theta(0;\mathbf{k},\mathbf{x})=0$. Согласно (3.44) и замечанию 3.8 имеем

$$g_{2p+1}(\mathbf{k})=|\Omega|^{-1}\int_\Omega \big(\Upsilon_p(\mathbf{k},\mathbf{x})^*g(\mathbf{x})\check{\Upsilon}_{p+1}(\mathbf{k},\mathbf{x})+\check{\Upsilon}_{p+1}(\mathbf{k},\mathbf{x})^*g(\mathbf{x})\Upsilon_p(\mathbf{k},\mathbf{x})\big)\,d\mathbf{x}=0. \tag{5.41}$$

Последнее равенство вытекает из того, что $\check{\Upsilon}_{p+1}(\mathbf{k},\mathbf{x})=B_1(\mathbf{k},\mathbf{D})\Theta(\mathbf{x})=0$.

Теперь из (5.5) и (5.41) следует, что

$$\Delta_{2p+1}(\mathbf{D}) = (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} b(\mathbf{D})^* g_{2p+1}(\mathbf{D}) b(\mathbf{D}) (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} = 0, \tag{5.42}$$

а тогда и (см. (5.6))

$$\mathcal{K}_1 = -\Delta_{2p+1}(\mathbf{D}) = 0. \tag{5.43}$$

Оценка (5.40) прямо вытекает из (5.22), (5.23) при $J = 1$ с учетом (5.43).

Далее, из равенства $\Theta(\mathbf{x}) = \Theta(0; \mathbf{k}, \mathbf{x}) = 0$ и соотношений (5.7), (5.8) следует, что $\Phi_p^\varepsilon = 0$, $\Psi_p^\varepsilon = 0$, а тогда и $\mathcal{K}''_{p+1,\varepsilon} = 0$ (см. (5.13)). $\square$

Предложение 5.8. *Пусть $g^0 = \underline{g}$, то есть выполнены соотношения* (4.5). *Тогда первый корректор обращается в ноль*: $\mathcal{K}_1 = 0$, *а потому справедлива оценка* (5.40).

Доказательство. В силу замечания 4.4 выполнено равенство

$$g(\mathbf{x}) \Upsilon_p(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Theta(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) = g^0.$$

Отсюда и из (3.44) и замечания 3.8 следует, что

$$\begin{aligned} g_{2p+1}(\mathbf{k}) &= |\Omega|^{-1} \int_\Omega \left(\Upsilon_p(\mathbf{k}, \mathbf{x})^* g(\mathbf{x}) \check{\Upsilon}_{p+1}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) + \check{\Upsilon}_{p+1}(\mathbf{k}, \mathbf{x})^* g(\mathbf{x}) \Upsilon_p(\mathbf{k}, \mathbf{x}) \right) d\mathbf{x} \\ &= |\Omega|^{-1} \int_\Omega \left(g^0 B_1(\mathbf{k}, \mathbf{D}) \Theta(\mathbf{x}) + (B_1(\mathbf{k}, \mathbf{D}) \Theta(\mathbf{x}))^* g^0 \right) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Поскольку интеграл по ячейке Ω от производных Γ-периодических функций равен нулю, приходим к выводу, что $g_{2p+1}(\mathbf{k}) = 0$.

Аналогично (5.42), (5.43), равенство $g_{2p+1}(\mathbf{k}) = 0$ влечет $\mathcal{K}_1 = -\Delta_{2p+1}(\mathbf{D}) = 0$. Отсюда и из (5.22), (5.23) при $J = 1$ следует оценка (5.40). $\square$

Замечание 5.9. *Как проверено в* [KuSu, предложение 7.10], *при условии* $g^0 = \underline{g}$ *имеет место включение* $\Theta \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$, *причем норма* $\|\Theta\|_{L_\infty}$ *контролируется через* $d, p, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ *и параметры решетки* Γ. *Тогда из лемм* 5.2, 5.3, 5.5 *следует, что в аппроксимациях из теоремы* 5.1 *можно заменить корректор* $\mathcal{K}_{p,\varepsilon}$ *на* $\mathcal{K}^0_{p,\varepsilon}$ *и* $\mathcal{K}''_{p+1,\varepsilon}$ *на* $\mathcal{K}''^0_{p+1,\varepsilon}$.

Пример. При $q \in \mathbb{N}$ рассмотрим оператор $\mathcal{A}_\varepsilon = \Delta^q g^\varepsilon(\mathbf{x}) \Delta^q$, где Δ — оператор Лапласа, а $g(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая ограниченная и положительно определенная функция. В этом случае $p = 2q$, $m = n = 1$. Согласно предложению 4.1 выполнено $g^0 = \underline{g}$. Тогда в силу предложения 5.8 первый корректор равен нулю и справедлива оценка (5.40).

Обсудим теперь "скалярный вещественный" случай, то есть случай, когда $n = 1$ и оператор имеет вещественные коэффициенты.

Предложение 5.10. *Пусть $n = 1$ и матрицы $g(\mathbf{x})$, b_β, $|\beta| = p$, из* (2.3) *имеют вещественные элементы. Тогда первый корректор обращается в ноль*: $\mathcal{K}_1 = 0$, *а потому справедлива оценка* (5.40).

Доказательство. Если p — нечетное число, то периодическое решение $\Theta(\mathbf{x})$ задачи (4.1) — чисто мнимое, а матрица $\widetilde{g}(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Theta(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m)$ имеет вещественные элементы. Матрица $\check{\Upsilon}_{p+1}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = B_1(\mathbf{k}, \mathbf{D})\Theta(\mathbf{x})$ имеет чисто мнимые элементы. Из сказанного с учетом (3.44) и замечания 3.8 следует, что эрмитова матрица

$$g_{2p+1}(\mathbf{k}) = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \left(\widetilde{g}(\mathbf{x})^* \check{\Upsilon}_{p+1}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) + \check{\Upsilon}_{p+1}(\mathbf{k}, \mathbf{x})^* \widetilde{g}(\mathbf{x}) \right) d\mathbf{x}$$

имеет чисто мнимые элементы. Тогда (1×1)-матрица (число) $b(\mathbf{k})^* g_{2p+1}(\mathbf{k}) b(\mathbf{k})$ является эрмитовой и чисто мнимой. Следовательно,

$$b(\mathbf{k})^* g_{2p+1}(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}) = 0,$$

а потому

$$\Delta_{2p+1}(\mathbf{D}) = (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} b(\mathbf{D})^* g_{2p+1}(\mathbf{D}) b(\mathbf{D}) (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} = 0.$$

Тогда (см. (5.6)) $\mathcal{K}_1 = -\Delta_{2p+1}(\mathbf{D}) = 0$.

Аналогично рассматривается случай, когда p — четное число. В этом случае $\Theta(\mathbf{x})$ и $\widetilde{g}(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Theta(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m)$ — вещественные матрицы; $\check{\Upsilon}_{p+1}(\mathbf{k},\mathbf{x})$ имеет чисто мнимые элементы. В результате матрица $g_{2p+1}(\mathbf{k})$ опять оказывается чисто мнимой, что приводит к равенству $\mathcal{K}_1 = 0$. $\square$

Легко привести пример скалярного оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ с комплексной эрмитовой матрицей коэффициентов, в котором первый корректор отличен от нуля. См. пункт 6.2 ниже.

§ 6. Случай оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ четвертого порядка

Ввиду важности случая оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ четвертого порядка для приложений (такой оператор возникает в теории упругих пластин), в этом параграфе мы “расшифруем” общие результаты при $p = 2$. Эти результаты были анонсированы в заметках [SlSu1], [SlSu2].

6.1. **Аппроксимация резольвенты оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ четвертого порядка.** При $p = 2$ разложение (3.1) принимает вид

$$b(\mathbf{D} + \mathbf{k}) = b(\mathbf{D}) + B_1(\mathbf{k}, \mathbf{D}) + b(\mathbf{k}).$$

Как и в общем случае (см. (4.1)), $(n \times m)$-матрица-функция $\Theta(\mathbf{x}) := \Theta(0; \mathbf{k}, \mathbf{x})$ является Γ-периодическим решением задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) \left(b(\mathbf{D})\Theta(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m\right) = 0, \quad \int_\Omega \Theta(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{6.1}$$

Согласно (3.39), $\Upsilon_p(\mathbf{k},\mathbf{x}) = \Upsilon_p(\mathbf{x}) = b(\mathbf{D})\Theta(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m$. Положим

$$\widetilde{g}(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x})\Upsilon_p(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \left(b(\mathbf{D})\Theta(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m\right). \tag{6.2}$$

Как и в общем случае, $(m \times m)$-матрица (3.44) при $s = 2p$ обозначается через g^0, называется эффективной матрицей и имеет вид

$$g^0 := g_{2p} = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \widetilde{g}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}. \tag{6.3}$$

В соответствии с (3.27) матрица-функция $\Theta(1; \mathbf{k}, \mathbf{x})$ является Γ-периодическим решением задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \Theta(1; \mathbf{k}, \mathbf{x}) = -B_1(\mathbf{k}, \mathbf{D})^* \widetilde{g}(\mathbf{x}) - b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) B_1(\mathbf{k}, \mathbf{D}) \Theta(\mathbf{x}), \quad \int_\Omega \Theta(1; \mathbf{k}, \mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0.$$

Справедливо представление

$$\Theta(1; \mathbf{k}, \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^d \widehat{\Theta}_j(\mathbf{x}) k_j, \tag{6.4}$$

где $\widehat{\Theta}_j(\mathbf{x})$ — периодические матрицы-функции.

Матрица-функция $\Theta(2; \mathbf{k}, \mathbf{x})$ является Γ-периодическим решением задачи

$$\begin{aligned} b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \Theta(2; \mathbf{k}, \mathbf{x}) = -b(\mathbf{k})^* \left(\widetilde{g}(\mathbf{x}) - g^0\right) - b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) \left(B_1(\mathbf{k}, \mathbf{D}) \Theta(1; \mathbf{k}, \mathbf{x}) + b(\mathbf{k})\Theta(\mathbf{x})\right) \\ -B_1(\mathbf{k}, \mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) \left(b(\mathbf{D})\Theta(1; \mathbf{k}, \mathbf{x}) + B_1(\mathbf{k}, \mathbf{D})\Theta(\mathbf{x})\right), \quad \int_\Omega \Theta(2; \mathbf{k}, \mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \end{aligned}$$

Далее, согласно (3.40), (3.47) имеем

$$\Upsilon_{p+1}(\mathbf{k},\mathbf{x}) = b(\mathbf{D})\Theta(1;\mathbf{k},\mathbf{x}) + B_1(\mathbf{k},\mathbf{D})\Theta(\mathbf{x}),$$
$$\check{\Upsilon}_{p+1}(\mathbf{k},\mathbf{x}) = B_1(\mathbf{k},\mathbf{D})\Theta(\mathbf{x}),$$
$$\Upsilon_{p+2}(\mathbf{k},\mathbf{x}) = b(\mathbf{D})\Theta(2;\mathbf{k},\mathbf{x}) + B_1(\mathbf{k},\mathbf{D})\Theta(1;\mathbf{k},\mathbf{x}) + b(\mathbf{k})\Theta(\mathbf{x}),$$
$$\check{\Upsilon}_{p+2}(\mathbf{k},\mathbf{x}) = B_1(\mathbf{k},\mathbf{D})\Theta(1;\mathbf{k},\mathbf{x}) + b(\mathbf{k})\Theta(\mathbf{x}),$$
$$\check{\Upsilon}_{p+3}(\mathbf{k},\mathbf{x}) = B_1(\mathbf{k},\mathbf{D})\Theta(2;\mathbf{k},\mathbf{x}) + b(\mathbf{k})\Theta(1;\mathbf{k},\mathbf{x}).$$

Определим теперь матрицы (3.44) при $s = 2p+1, 2p+2, 2p+3$, учитывая замечание 3.8. Первая матрица однородна по $\mathbf{k}$ первой степени и задана соотношением

$$\begin{aligned} g^{(1)}(\mathbf{k}) := g_{2p+1}(\mathbf{k}) &= |\Omega|^{-1}\int_\Omega \big(\Upsilon_p(\mathbf{x})^* g(\mathbf{x})\check{\Upsilon}_{p+1}(\mathbf{k},\mathbf{x}) + \check{\Upsilon}_{p+1}(\mathbf{k},\mathbf{x})^* g(\mathbf{x})\Upsilon_p(\mathbf{x})\big)\,d\mathbf{x} \\ &= |\Omega|^{-1}\int_\Omega \left(\widetilde{g}(\mathbf{x})^* B_1(\mathbf{k},\mathbf{D})\Theta(\mathbf{x}) + (B_1(\mathbf{k},\mathbf{D})\Theta(\mathbf{x}))^*\widetilde{g}(\mathbf{x})\right)d\mathbf{x}, \end{aligned} \tag{6.5}$$

Вторая матрица однородна второй степени и принимает вид

$$\begin{aligned} &g^{(2)}(\mathbf{k}) := g_{2p+2}(\mathbf{k}) \\ &= |\Omega|^{-1}\int_\Omega \big(\Upsilon_p(\mathbf{x})^* g(\mathbf{x})\check{\Upsilon}_{p+2}(\mathbf{k},\mathbf{x}) + \Upsilon_{p+1}(\mathbf{x})^* g(\mathbf{x})\Upsilon_{p+1}(\mathbf{k},\mathbf{x}) + \check{\Upsilon}_{p+2}(\mathbf{k},\mathbf{x})^* g(\mathbf{x})\Upsilon_p(\mathbf{x})\big)\,d\mathbf{x} \\ &= |\Omega|^{-1}\int_\Omega \left(\widetilde{g}(\mathbf{x})^*\left(B_1(\mathbf{k},\mathbf{D})\Theta(1;\mathbf{k},\mathbf{x}) + b(\mathbf{k})\Theta(\mathbf{x})\right) + \left(B_1(\mathbf{k},\mathbf{D})\Theta(1;\mathbf{k},\mathbf{x}) + b(\mathbf{k})\Theta(\mathbf{x})\right)^*\widetilde{g}(\mathbf{x})\right)d\mathbf{x} \\ &+ |\Omega|^{-1}\int_\Omega \left(b(\mathbf{D})\Theta(1;\mathbf{k},\mathbf{x}) + B_1(\mathbf{k},\mathbf{D})\Theta(\mathbf{x})\right)^* g(\mathbf{x})\left(b(\mathbf{D})\Theta(1;\mathbf{k},\mathbf{x}) + B_1(\mathbf{k},\mathbf{D})\Theta(\mathbf{x})\right)d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Третья матрица однородна третьей степени и задана соотношением

$$\begin{aligned} &g^{(3)}(\mathbf{k}) := g_{2p+3}(\mathbf{k}) \\ &= |\Omega|^{-1}\int_\Omega \big(\Upsilon_p(\mathbf{x})^* g(\mathbf{x})\check{\Upsilon}_{p+3}(\mathbf{k},\mathbf{x}) + \check{\Upsilon}_{p+3}(\mathbf{k},\mathbf{x})^* g(\mathbf{x})\Upsilon_p(\mathbf{x})\big)\,d\mathbf{x} \\ &+ |\Omega|^{-1}\int_\Omega \left(\Upsilon_{p+1}(\mathbf{x})^* g(\mathbf{x})\Upsilon_{p+2}(\mathbf{k},\mathbf{x}) + \Upsilon_{p+2}(\mathbf{x})^* g(\mathbf{x})\Upsilon_{p+1}(\mathbf{k},\mathbf{x})\right)d\mathbf{x} \\ &= |\Omega|^{-1}\int_\Omega \widetilde{g}(\mathbf{x})^*\left(B_1(\mathbf{k},\mathbf{D})\Theta(2;\mathbf{k},\mathbf{x}) + b(\mathbf{k})\Theta(1;\mathbf{k},\mathbf{x})\right)d\mathbf{x} \\ &+ |\Omega|^{-1}\int_\Omega \left(B_1(\mathbf{k},\mathbf{D})\Theta(2;\mathbf{k},\mathbf{x}) + b(\mathbf{k})\Theta(1;\mathbf{k},\mathbf{x})\right)^*\widetilde{g}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \\ &+ |\Omega|^{-1}\int_\Omega \left(b(\mathbf{D})\Theta(1;\mathbf{k},\mathbf{x}) + B_1(\mathbf{k},\mathbf{D})\Theta(\mathbf{x})\right)^* g(\mathbf{x})\times \\ &\qquad\times\left(b(\mathbf{D})\Theta(2;\mathbf{k},\mathbf{x}) + B_1(\mathbf{k},\mathbf{D})\Theta(1;\mathbf{k},\mathbf{x}) + b(\mathbf{k})\Theta(\mathbf{x})\right)d\mathbf{x} \\ &+ |\Omega|^{-1}\int_\Omega \left(b(\mathbf{D})\Theta(2;\mathbf{k},\mathbf{x}) + B_1(\mathbf{k},\mathbf{D})\Theta(1;\mathbf{k},\mathbf{x}) + b(\mathbf{k})\Theta(\mathbf{x})\right)^* g(\mathbf{x})\times \\ &\qquad\times\left(b(\mathbf{D})\Theta(1;\mathbf{k},\mathbf{x}) + B_1(\mathbf{k},\mathbf{D})\Theta(\mathbf{x})\right)d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Пусть $g^{(1)}(\mathbf{D})$ — $(m\times m)$-матричный ДО первого порядка с символом $g^{(1)}(\mathbf{k})$, $g^{(2)}(\mathbf{D})$ — $(m\times m)$-матричный ДО второго порядка с символом $g^{(2)}(\mathbf{k})$ и $g^{(3)}(\mathbf{D})$ — $(m\times m)$-матричный ДО третьего порядка с символом $g^{(3)}(\mathbf{k})$. Положим для краткости

$$\mathcal{R}_0 := (\mathcal{A}^0 + I)^{-1}.$$

Корректоры $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_{2,\varepsilon}$, $\mathcal{K}_{3,\varepsilon}$ определяются согласно общим правилам (5.6), (5.10), (5.11)–(5.14). Первый корректор не зависит от ε и принимает вид:

$$\mathcal{K}_1 = -\mathcal{R}_0 b(\mathbf{D})^* g^{(1)}(\mathbf{D}) b(\mathbf{D})\mathcal{R}_0. \tag{6.6}$$

Второй корректор содержит слагаемые с быстро осциллирующим множителем $\Theta^\varepsilon(\mathbf{x}) = \Theta(\mathbf{x}/\varepsilon)$ и сглаживающим оператором Π_ε и задается равенством

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{2,\varepsilon} &= \widetilde{\mathcal{K}}_{2,\varepsilon} + \widehat{\mathcal{K}}_2,\\
\widetilde{\mathcal{K}}_{2,\varepsilon} &= [\Theta^\varepsilon] b(\mathbf{D})\mathcal{R}_0\Pi_\varepsilon + ([\Theta^\varepsilon] b(\mathbf{D})\mathcal{R}_0\Pi_\varepsilon)^*,\\
\widehat{\mathcal{K}}_2 &= -\mathcal{R}_0 b(\mathbf{D})^* g^{(2)}(\mathbf{D}) b(\mathbf{D})\mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_0 b(\mathbf{D})^* g^{(1)}(\mathbf{D}) b(\mathbf{D})\mathcal{R}_0 b(\mathbf{D})^* g^{(1)}(\mathbf{D}) b(\mathbf{D})\mathcal{R}_0.
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Третий корректор также содержит члены с быстро осциллирующими множителями и сглаживающий оператор:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{3,\varepsilon} &= \widetilde{\mathcal{K}}_{3,\varepsilon} + \widehat{\mathcal{K}}_3,\\
\widetilde{\mathcal{K}}_{3,\varepsilon} &= \sum_{j=1}^d [\widehat{\Theta}_j^\varepsilon] D_j b(\mathbf{D})\mathcal{R}_0\Pi_\varepsilon + \sum_{j=1}^d \Big([\widehat{\Theta}_j^\varepsilon] D_j b(\mathbf{D})\mathcal{R}_0\Pi_\varepsilon\Big)^*\\
&\quad - [\Theta^\varepsilon] b(\mathbf{D})\mathcal{R}_0 b(\mathbf{D})^* g^{(1)}(\mathbf{D}) b(\mathbf{D})\mathcal{R}_0\Pi_\varepsilon - \Big([\Theta^\varepsilon] b(\mathbf{D})\mathcal{R}_0 b(\mathbf{D})^* g^{(1)}(\mathbf{D}) b(\mathbf{D})\mathcal{R}_0\Pi_\varepsilon\Big)^*,\\
\widehat{\mathcal{K}}_3 &= -\mathcal{R}_0 b(\mathbf{D})^* g^{(3)}(\mathbf{D}) b(\mathbf{D})\mathcal{R}_0\\
&\quad + \mathcal{R}_0 b(\mathbf{D})^* g^{(1)}(\mathbf{D}) b(\mathbf{D})\mathcal{R}_0 b(\mathbf{D})^* g^{(2)}(\mathbf{D}) b(\mathbf{D})\mathcal{R}_0\\
&\quad + \mathcal{R}_0 b(\mathbf{D})^* g^{(2)}(\mathbf{D}) b(\mathbf{D})\mathcal{R}_0 b(\mathbf{D})^* g^{(1)}(\mathbf{D}) b(\mathbf{D})\mathcal{R}_0\\
&\quad - \mathcal{R}_0 b(\mathbf{D})^* g^{(1)}(\mathbf{D}) b(\mathbf{D})\mathcal{R}_0 b(\mathbf{D})^* g^{(1)}(\mathbf{D}) b(\mathbf{D})\mathcal{R}_0 b(\mathbf{D})^* g^{(1)}(\mathbf{D}) b(\mathbf{D})\mathcal{R}_0.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Следующий результат представляет собой частный случай теоремы 5.1.

Теорема 6.1. *Пусть $p = 2$, выполнены условия (2.1), (2.4) и матрицы-функции $g(\mathbf{x})$ и $h(\mathbf{x})$ периодичны с решеткой периодов Γ. Пусть $\mathcal{A}_\varepsilon$ — оператор в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, порожденный квадратичной формой (5.2). Пусть $\mathcal{A}^0$ — оператор (4.7). Пусть корректоры $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_{2,\varepsilon}$ и $\mathcal{K}_{3,\varepsilon}$ определены согласно (6.6)–(6.8). Тогда при $\varepsilon > 0$ справедливы оценки*

$$\begin{aligned}
&\big\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1}\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_0\varepsilon,\\
&\big\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon\mathcal{K}_1\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_1\varepsilon^2,\\
&\big\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon\mathcal{K}_1 - \varepsilon^2\mathcal{K}_{2,\varepsilon}\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_2\varepsilon^3,\\
&\big\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon\mathcal{K}_1 - \varepsilon^2\mathcal{K}_{2,\varepsilon} - \varepsilon^3\mathcal{K}_{3,\varepsilon}\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_3\varepsilon^4.
\end{aligned}$$

Постоянные $\mathcal{C}_J$, $J = 0,1,2,3$, зависят от $d, \|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, α_0, α_1, r_0, $|\Omega|$. Нормы корректоров равномерно ограничены константами, зависящими от тех же параметров.

Аналогично, следующий результат вытекает из теоремы 5.4.

Теорема 6.2. *Пусть выполнены условия теоремы 6.1. Пусть $\Theta(\mathbf{x})$ — периодическое решение задачи (6.1) и $\widehat{\Theta}_j(\mathbf{x})$, $j = 1,\dots,d$ — периодические матрицы-функции из представления (6.4).*
1°. *Предположим, что*

$$\Theta \in \mathfrak{M}(H^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m); L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)), \quad j = 1,\dots,d.$$

Положим

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{2,\varepsilon}^0 &= \widetilde{\mathcal{K}}_{2,\varepsilon}^0 + \widehat{\mathcal{K}}_2,\\
\widetilde{\mathcal{K}}_{2,\varepsilon}^0 &= [\Theta^\varepsilon] b(\mathbf{D})\mathcal{R}_0 + ([\Theta^\varepsilon] b(\mathbf{D})\mathcal{R}_0)^*,
\end{aligned}$$

Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ справедливы оценки

$$\big\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon\mathcal{K}_1 - \varepsilon^2\mathcal{K}_{2,\varepsilon}^0\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_2^0\varepsilon^3, \tag{6.9}$$

$$\big\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon\mathcal{K}_1 - \varepsilon^2\mathcal{K}_{2,\varepsilon}^0 - \varepsilon^3\mathcal{K}_{3,\varepsilon}\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_{2,3}^0\varepsilon^4. \tag{6.10}$$

Постоянные $\mathcal{C}_3^0$ *и* $\mathcal{C}_{2,3}^0$ *зависят только от* d, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, α_0, α_1, r_0, $|\Omega|$ *и от нормы* $\|[\Theta]\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}$. *Норма корректора* $\mathcal{K}_{2,\varepsilon}^0$ *равномерно ограничена константой, зависящей от тех же параметров.*

2°. *Предположим, что*

$$\Theta, \widehat{\Theta}_j \in \mathfrak{M}(H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m); L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)), \quad j = 1,\dots,d.$$

Положим

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{3,\varepsilon}^0 &= \widetilde{\mathcal{K}}_{3,\varepsilon}^0 + \widehat{\mathcal{K}}_3,\\
\widetilde{\mathcal{K}}_{3,\varepsilon}^0 &= \sum_{j=1}^d [\widehat{\Theta}_j^\varepsilon] D_j b(\mathbf{D})\mathcal{R}_0 + \sum_{j=1}^d \Big([\widehat{\Theta}_j^\varepsilon] D_j b(\mathbf{D})\mathcal{R}_0\Big)^*\\
&\quad - [\Theta^\varepsilon] b(\mathbf{D})\mathcal{R}_0 b(\mathbf{D})^* g^{(1)}(\mathbf{D}) b(\mathbf{D})\mathcal{R}_0 - \Big([\Theta^\varepsilon] b(\mathbf{D})\mathcal{R}_0 b(\mathbf{D})^* g^{(1)}(\mathbf{D}) b(\mathbf{D})\mathcal{R}_0\Big)^*.
\end{aligned}$$

Тогда при $0<\varepsilon\leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\big\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon\mathcal{K}_1 - \varepsilon^2\mathcal{K}_{2,\varepsilon}^0 - \varepsilon^3\mathcal{K}_{3,\varepsilon}^0\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_3^0 \varepsilon^4. \tag{6.11}$$

Постоянная $\mathcal{C}_3^0$ *зависит только от* d, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, α_0, α_1, r_0, $|\Omega|$ *и от норм* $\|[\Theta]\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}$, $\|[\widehat{\Theta}_j]\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}$, $j=1,\dots,d$. *Норма корректора* $\mathcal{K}_{3,\varepsilon}^0$ *равномерно ограничена константой, зависящей от тех же параметров.*

Согласно следствию 5.6 условия пункта 1° теоремы 6.2 заведомо выполнены в размерности $d\leqslant 8$, а условия пункта 2° — в размерности $d \leqslant 6$.

Следствие 6.3. *Пусть* $p=2$. *Если* $d\leqslant 6$, *то выполнены оценки* (6.9) *и* (6.11), *причем постоянные в этих оценках зависят только от* $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, α_0, α_1, r_0, $|\Omega|$. *Если* $d\leqslant 8$, *то выполнены оценки* (6.9) *и* (6.10), *причем постоянные в этих оценках зависят только от* $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, α_0, α_1, r_0, Ω.

Разумеется, при $p=2$ применимы также предложения 5.7, 5.8 и 5.10. В частности, в скалярном вещественном случае первый корректор обращается в ноль и выполняется оценка (5.40).

6.2. **Пример.** В заключение этого параграфа приведем пример скалярного оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ четвертого порядка с комплексной эрмитовой матрицей коэффициентов, в котором первый корректор отличен от нуля.

Пусть $d=2$, $p=2$, $n=1$, $m=3$, $\Gamma=\mathbb{Z}^2$,

$$b(\mathbf{D}) = \begin{pmatrix} D_1^2 \\ D_1 D_2 \\ D_2^2 \end{pmatrix}, \quad g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & if''(x_1) & 0 \\ -if''(x_1) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $f(x_1)$ — гладкая 1-периодическая вещественная функция, причем

$$\int_0^1 f(x_1)\,dx_1 = 0, \quad 1-(f''(x_1))^2 > 0.$$

Очевидно, все условия пунктов 2.1, 2.2 выполнены.

Вычисления показывают, что периодическое решение $\Theta(x_1)$ задачи (6.1) имеет вид

$$\Theta(x_1) = \begin{pmatrix} 0 & if(x_1) & 0 \end{pmatrix},$$

матрица (6.2) задана равенством

$$\widetilde{g}(x_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -if''(x_1) & 1-(f''(x_1))^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно (6.3),

$$g^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \langle (f'')^2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\langle (f'')^2 \rangle := \int_0^1 (f''(x_1))^2 \, dx_1$.

Далее, оператор $B_1(\mathbf{k}, \mathbf{D})$ имеет вид

$$B_1(\mathbf{k}, \mathbf{D}) = \begin{pmatrix} 2k_1 D_1 \\ k_1 D_2 + k_2 D_1 \\ 2k_2 D_2 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя $g^{(1)}(\mathbf{k})$ по формуле (6.5), получаем

$$g^{(1)}(\mathbf{k}) = 2k_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\langle f'(f'')^2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда выводим равенство

$$b(\mathbf{k})^* g^{(1)}(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}) = -2k_1^2 k_2^3 \langle f'(f'')^2 \rangle.$$

Вычисляя первый корректор по формуле (6.6), имеем

$$\mathcal{K}_1 = -2\langle f'(f'')^2 \rangle \mathcal{R}_0 D_1^2 D_2^3 \mathcal{R}_0.$$

Таким образом, $\mathcal{K}_1 \neq 0$, коль скоро $\langle f'(f'')^2 \rangle \neq 0$.

Легко привести конкретный пример, когда это условие выполнено. Если $f(x_1) = \frac{c}{4\pi}(\sin 4\pi x_1 - 2\cos 2\pi x_1)$, где $c \neq 0$ достаточно мало, то $\langle f'(f'')^2 \rangle = -3\pi^2 c^3 \neq 0$.

Список литературы

[BaPan] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.

[BeLP] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G., *Asymptotic analysis for periodic structures.* Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publishing Co., 1978.

[BSu1] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), вып. 5, 1–108.

[BSu2] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Пороговые аппроксимации резольвенты факторизованного самосопряженного семейства с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), вып. 5, 69–90.

[BSu3] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), вып. 6, 1–104.

[BSu4] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$*, Алгебра и анализ **18** (2006), вып. 6, 1–130.

[BSu5] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности при усреднении нестационарных периодических уравнений*, Алгебра и анализ **20** (2008), вып. 6, 30–107.

[Bo] Борисов Д. И., *Асимптотики решений эллиптических систем с быстро осциллирующими коэффициентами*, Алгебра и анализ **20** (2008), вып. 2, 19–42.

[BoCDu] Borisov D. I., Cardone G., Durante T., *Homogenization and norm resolvent convergence for elliptic operators in a strip perforated along a curve*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, Section: A Math. **146** (2016), no. 6, 1115–1158.

[BoCFPe] Borisov D. I., Cardone G., Faella L., Perugia C., *Uniform resolvent convergence for strip with fast oscillating boundary*, J. Diff. Equ. **255** (2013), no. 12, 4378–4402.

[BoSh] Борисов Д. И., Шарапов Т. Ф., *О резольвенте многомерных операторов с частой сменой краевых условий в случае третьего усредненного условия*, Проблемы мат. анализа **83** (2015), 3–40.

[ChCo] Cherednichenko K. D., Cooper S., *Resolvent estimates for high-contrast elliptic problems with periodic coefficients*, Arch. Ration. Mech. Anal. **219** (2016), 1061–1086.

[ChEKiN] Cherednichenko K. D., Ershova Yu. Yu., Kiselev A. V., Naboko S. N. *Unified approach to critical-contrast homogenisation with explicit links to time-dispersive media*, Труды Московского матем. общества **80** (2019), вып. 2, 295–342.

[ChEKi] Cherednichenko K., Ershova Y., Kiselev A., *Effective behavior of critical-contrast PDEs: microresonanses, frequency conversion, and time dispersive properties*, Comm. Math. Phys. **375** (2020), 1833–1884.

[V] Василевская Е. С., *Усреднение параболической задачи Коши с периодическими коэффициентами при учёте корректора*, Алгебра и анализ **21** (2009), вып. 1, 3–60.

[VSu1] Василевская Е. С., Суслина Т. А., *Пороговые аппроксимации факторизованного самосопряженного операторного семейства с учетом первого и второго корректоров*, Алгебра и анализ **23** (2011), вып. 2, 102–146.

[VSu2] Василевская Е. С., Суслина Т. А., *Усреднение параболических и эллиптических периодических операторов в $L_2(\mathbb{R}^d)$ при учёте первого и второго корректоров*, Алгебра и анализ **24** (2012), вып. 2, 1–103.

[Ve] Вениаминов Н. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов высокого порядка*, Алгебра и анализ **22** (2010), вып. 5, 69–103.

[GeS] Geng J., Shen Z., *Convergence rates in parabolic homogenization with time-dependent coeficients*, J. Funct. Anal. **272** (2017), 2092–2113.

[Gr1] Griso G., *Error estimate and unfolding for periodic homogenization*, Asymptot. Anal. **40** (2004), no. 3/4, 269–286.

[Gr2] Griso G., *Interior error estimate for periodic homogenization*, Anal. Appl. **4** (2006), no. 1, 61–79.

[Gu] Gu S., *Convergence rates in homogenization of Stokes system*, J. Diff. Equ. **260** (2016), no. 7, 5796–5815.

[D] Dorodnyi M. A., *Operator error estimates for homogenization of the nonstationary Schrödinger-type equations: sharpness of the results*, Appl. Anal. **101** (2022), no. 16, 5582–5614.

[DSu1] Dorodnyi M. A., Suslina T. A., *Spectral approach to homogenization of hyperbolic equations with periodic coefficients*, J. Diff. Equ. **264** (2018), no. 12, 7463–7522.

[DSu2] Дородный М. А., Суслина Т. А., *Усреднение гиперболических уравнений с периодическими коэффициентами в $\mathbb{R}^d$: точность результатов*, Алгебра и анализ **32** (2020), вып. 4, 3–136.

[DSu3] Dorodnyi M. A., Suslina T. A., *Homogenization of a non-stationary periodic Maxwell system in the case of constant permeability*, J. Diff. Equ. **307** (2022), 348–388.

[Zh] Жиков В. В., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Докл. РАН **403** (2005), № 3, 305–308.

[ZhKO] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Наука, М., 1993.

[ZhPas1] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys. **12** (2005), № 4, 515–524.

[ZhPas2] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients*, Russ. J. Math. Phys. **13** (2006), no. 2, 224–237.

[ZhPas3] Жиков В. В., Пастухова С. Е., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Успехи матем. наук. **71** (2016), № 3, 27–122.

[Ka] Като Т., *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

[KeLiS] Kenig C. E., Lin F., Shen Z., *Convergence rates in L^2 for elliptic homogenization problems*, Arch. Ration. Mech. Anal. **203** (2012), no. 3, 1009–1036.

[KuSu] Кукушкин А. А., Суслина Т. А., *Усреднение эллиптических операторов высокого порядка с периодическими коэффициентами*, Алгебра и анализ, **28** (2016), вып. 1, 89–149.

[M] Meshkova Yu. M., *On operator error estimates for homogenization of hyperbolic systems with periodic coeff-cients*, J. Spectr. Theory **11** (2021), no. 2, 587–660.

[MSu] Meshkova Yu. M., Suslina T. A., *Homogenization of initial boundary-value problems for parabolic systems with periodic coefficients*, Appl. Anal. **95** (2016), no. 8, 1736–1775.

[MilSu] Милослова А. А., Суслина Т. А., *Усреднение параболических уравнений высокого порядка с периодическими коэффициентами*, Современная математика. Фундаментальные направления, **67** (2021), вып. 1, 130–191.

[Pas1] Пастухова С. Е., *Операторные оценки усреднения для эллиптических уравнений четвертого порядка*, Алгебра и анализ **28** (2016), вып. 2, 204–226.

[Pas2] Pastukhova S. E., *Estimates in homogenization of higher-order elliptic operators*, Appl. Anal. **95** (2016), no. 7, 1449–1466.

[Pas3] Пастухова С. Е., *L^2-аппроксимация резольвенты в усреднении эллиптических операторов высокого порядка*, Проблемы мат. анализа **107** (2020), 113–132.

[Pas4] Пастухова С. Е., *L^2-аппроксимации резольвенты в усреднении эллиптических операторов четвертого порядка*, Матем. сборник **212** (2021), вып. 1, 111–134.

[Pas5] Пастухова С. Е., *Улучшенные L^2-аппроксимации резольвенты в усреднении операторов четвертого порядка*, Алгебра и анализ **34** (2022), вып. 4, 74–106.

[PasT1] Пастухова С. Е., Тихомиров Р. Н., *Операторные оценки повторного и локально-периодического усреднения*, Докл. РАН **415** (2007), вып. 3, 304–309.

[PasT2] Пастухова С. Е., Тихомиров Р. Н., *Операторные оценки локально-периодического и повторного усреднения: параболические уравнения*, Докл. РАН **428** (2009), вып. 2, 166–170.

[PaSu] Пахнин М. А., Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности при усреднении эллиптической задачи Дирихле в ограниченной области*, Алгебра и анализ **24** (2012), вып. 6, 139–177.

[PiSlSuZ] Piatnitski A., Sloushch V., Suslina T., Zhizhina E., *On operator estimates in homogenization of nonlocal operators of convolution type*, J. Diff. Equ. **352** (2023), 153–188.

[Se1] Сеник Н. Н., *Об усреднении несамосопряженных локально периодических эллиптических операторов*, Функц. анализ и его прил. **51** (2017), вып. 2, 92–96.

[Se2] Сеник Н. Н., *Об усреднении локально периодических эллиптических и параболических операторов*, Функц. анализ и его прил. **54** (2020), вып. 1, 87–92.

[Se3] Senik N. N., *Homogenization for locally periodic elliptic operators*, J. Math. Anal. Appl. **505** (2022), no. 2, DOI:10.1016/j.jmaa.2021.125581.

[SlSu1] Слоущ В. А., Суслина Т. А., *Усреднение эллиптического оператора четвертого порядка с периодическими коэффициентами при учете корректоров*, Функц. анализ и его прил. **54** (2020), вып. 3, 94–99.

[SlSu2] Слоущ В. А., Суслина Т. А., *Усреднение эллиптического оператора четвертого порядка с периодическими коэффициентами*, Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2020, Симферополь, Полипринт, 2020, стр. 186–188.

[SlSu3] Слоущ В. А., Суслина Т. А., *Пороговые аппроксимации резольвенты полиномиального неотрицательного операторного пучка*, Алгебра и анализ **33** (2021), вып. 2, 233–274.

[Su1] Суслина Т. А., *Усреднение стационарной периодической системы Максвелла*, Алгебра и анализ **16** (2004), вып. 5, 162–244.

[Su2] Суслина Т. А., *Об усреднении периодических параболических систем*, Функц. анализ и его прил. **38** (2004), вып. 4, 86–90.

[Su3] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem*, Amer. Math. Soc. Transl. (2), vol. 220, 2007, 201–233.

[Su4] Суслина Т. А., *Усреднение стационарной периодической системы Максвелла с учетом корректора*, Алгебра и анализ **19** (2007), вып. 3, 183–235.

[Su5] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem in the Sobolev space $H^1(\mathbb{R}^d)$*, Math. Model. Nat. Phenom. **5** (2010), no. 4, 390–447.

[Su6] Suslina T. A., *Homogenization of the Dirichlet problem for elliptic systems: L_2-operator error estimates*, Mathematika **59** (2013), no. 2, 463–476.

[Su7] Suslina T. A., *Homogenization of the Neumann problem for elliptic systems with periodic coefficients*, SIAM J. Math. Anal. **45** (2013), no. 6, 3453–3493.

[Su8] Суслина Т. А., *Усреднение задачи Дирихле для эллиптических уравнений высокого порядка с периодическими коэффициентами*, Алгебра и анализ **29** (2017), вып. 2, 139–192.

[Su9] Suslina T. A., *Spectral approach to homogenization of nonstationary Schrödinger-type equations*, J. Math. Anal. Appl. **446** (2017), no. 2, 1466–1523.

[Su10] Суслина Т. А., *Усреднение стационарной периодической системы Максвелла в ограниченной области в случае постоянной магнитной проницаемости*, Алгебра и анализ **30** (2018), вып. 3, 169–209.

[Su11] Suslina T. A., *Homogenization of the Neumann problem for higher order elliptic equations with periodic coefficients*, Complex Variables and Elliptic Equations **63** (2018), no. 7-8, 1185–1215.

[Su12] Suslina T. A., *Homogenization of the stationary Maxwell system with periodic coefficients in a bounded domain*, Arch. Ration. Mech. Anal. **234** (2019), no. 2, 453–507.

[Su13] Suslina T. A., *Homogenization of higher-order parabolic systems in a bounded domain*, Appl. Anal. **98** (2019), no. 1-2, 3–31.

[Su14] Suslina T. A., *Homogenization of the higher-order Schrödinger-type equations with periodic coefficients*, in: Partial Differential Equations, Spectral Theory, and Mathematical Physics, The Ari Laptev Anniversary Volume, EMS Press, 2021, p. 405–426.

[Su15] Suslina T. A., *Homogenization of the higher-order hyperbolic equations with periodic coefficients*, Lobachevskii Journal of Mathematics **42** (2021), 3518–3542.

[Su16] Суслина Т. А., *Усреднение уравнений типа Шрёдингера: операторные оценки при учете корректоров*, Функц. анализ и его прил. **56** (2022), вып. 3, 93–99.