PDMI Preprint — 14/2022

ТЕОРИЯ РАЗРЕШИМОСТИ В ГЁЛЬДЕРОВСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ ДЛЯ ЗАДАЧИ ВРАЩЕНИЯ ДВУХФАЗНОЙ КАПЛИ

И. В. Денисова

Институт проблем машиноведения Российской академии наук

В. А. Солонников

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Аннотация. Исследуется равномерно вращающаяся конечная масса, состоящая из двух несмешивающихся вязких несжимаемых самогравитирующих жидкостей. Это движение описывается задачей с неизвестными границами для системы Навье–Стокса с массовыми силами и градиентом ньютоновского потенциала в правых частях. Поверхность раздела жидкостей считается замкнутой. Поверхностное натяжение действует как на границу раздела, так и на внешнюю свободную поверхность. Исследование задачи проводится в пространствах функций Гёльдера. Доказывается устойчивость вращающейся двухфазной капли с самогравитацией при достаточной малости начальных данных, угловой скорости и экспоненциально убывающих массовых сил, а также положительности второй вариации функционала энергии. Доказательство основано на анализе малых возмущений состояния равновесия вращающейся двухслойной жидкости. В результате делается вывод, что возмущение осесимметричной фигуры равновесия экспоненциально стремится к нулю при $t \to \infty$, при этом движение капли переходит во вращение жидкой массы как твердого тела.

Ключевые слова: задача для двухфазной жидкости с учётом массовых сил; устойчивость решения; вязкие несжимаемые самогравитирующие жидкости; задача дифракции для системы Навье–Стокса; пространства Гёльдера; экспоненциальное убывание.

Это исследование было частично поддержано Российским фондом фундаментальных исследований, грант 20-01-00397.

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

---

1 Введение

В работе рассматривается проблема устойчивости вращения изолированной жидкой массы вокруг неподвижной оси. Такими задачами занимались многие выдающиеся математики. Обзор по этой теме можно найти в книге П. Аппеля [1]. Там приведены, например, результаты А. Шаррюо [2, 3], который первым начал исследование проблемы с учётом капиллярных сил ещё начале 20-го века.

А. М. Ляпунов [4, 5, 6] предложил анализировать устойчивость фигур равновесия вращающейся жидкой массы без поверхностного натяжения аналитическими методами. Он исследовал вторую вариацию функционала энергии относительно малых возмущений границы фигуры. Положительность этой вариации гарантирует устойчивость системы, поскольку в этом состоянии её энергия имеет минимум.

Метод Ляпунова был обобщён на случай вращающейся капиллярной жидкости одним из авторов в [7, 8]. Мы применяем эту технику для анализа устойчивости вращения конечной массы двухфазной жидкости. Мы рассматриваем задачу об устойчивости двух вращающихся несжимаемых капиллярных самогравитирующих жидкостей, разделенных неизвестной границей близкой к границе раздела фигуры равновесия. Существование фигур равновесия в двухфазном случае было получено в [9]. Кроме того, мы адаптируем доказательство теоремы о глобальной разрешимости для двухжидкостной задачи без вращения к нашему случаю [10, 11, 12, 13]. Исследование вращающейся двухфазной капли в пространствах Соболева выполнено авторами в [14, 15], где можно найти доказательство априорного экспоненциального неравенства для обобщенной энергии системы. На этой основе была получена глобальная разрешимость линейной задачи.

Этот материал будет опубликован в статье [16].

Приведем математическую постановку задачи. Пусть две вязкие несжимаемые несмешивающиеся жидкости со ступенчатыми плотностью $\rho^{\pm}$ и вязкостью $\mu^{\pm}$ содержатся в области $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$, ограниченной свободной поверхностью Γ_t^-, и разделены переменной границей Γ_t^+. Предполагается, что Γ_t^+ ограничивает область Ω_t^+, заполненную жидкостью с плотностью ρ^+, которая окружена другой жидкостью с плотностью ρ^-, занимающей область $\Omega_t^- = \Omega_t \setminus \overline{\Omega_t^+}$. Эта двухфазная капля вращается вокруг вертикальной оси x_3 (см. рис. 1). В начальный момент времени $t = 0$ поверхности Γ_0^-, Γ_0^+ заданы. Необходимо найти Γ_t^-, Γ_t^+, а также векторное поле скоростей $\boldsymbol{v}(x,t)$ и функцию давления $p(x,t)$, которые удовлетворяют задаче дифракции для системы

Навье–Стокса

$$
\begin{aligned}
&\rho^{\pm}\big(\mathcal{D}_t\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\big)-\mu^{\pm}\nabla^2\boldsymbol{v}+\nabla p=\rho^{\pm}(\boldsymbol{f}+\varkappa\nabla U),\\
&\qquad\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0\quad\text{в}\ \cup\Omega_t^{\pm}=\Omega_t^{+}\cup\Omega_t^{-},\ \ t>0,\\
&\qquad\qquad\boldsymbol{v}(x,0)=\boldsymbol{v}_0(x)\ \ \text{в}\ \ \cup\Omega_0^{\pm},\\
&\mathbb{T}(\boldsymbol{v},p)\boldsymbol{n}\big|_{\Gamma_t^-}=\sigma^-H^-\boldsymbol{n}\quad\text{на}\ \Gamma_t^-,\\
&[\boldsymbol{v}]\big|_{\Gamma_t^+}\equiv\lim_{\substack{x\to x_0\in\Gamma_t^+,\\ x\in\Omega_t^+}}\boldsymbol{v}(x,t)-\lim_{\substack{x\to x_0\in\Gamma_t^+,\\ x\in\Omega_t^-}}\boldsymbol{v}(x,t)=0,\\
&[\mathbb{T}(\boldsymbol{v},p)\boldsymbol{n}]\big|_{\Gamma_t^+}=\sigma^+H^+\boldsymbol{n}\quad\text{на}\ \Gamma_t^+,\\
&V_{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\quad\text{на}\ \Gamma_t=\Gamma_t^+\cup\Gamma_t^-,
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

где $\mathcal{D}_t=\partial/\partial t$, $\nabla=(\partial/\partial x_1,\partial/\partial x_2,\partial/\partial x_3)$, $\nabla^2\equiv\nabla\cdot\nabla$, $\boldsymbol{f}$ – вектор массовых сил,

$$U(x,t)=\int_{\Omega_t}\frac{\rho^{\pm}\,\mathrm{d}z}{|x-z|},$$

$\varkappa\geqslant 0$ – коэффициент самопритяжения, $\boldsymbol{v}_0$ – начальное распределение скоростей,

$$\mathbb{T}(\boldsymbol{v},p)=-p+\mu^{\pm}\mathbb{S}(\boldsymbol{v})$$

– тензор напряжений, $\mathbb{S}(\boldsymbol{v})=(\nabla\boldsymbol{v})+(\nabla\boldsymbol{v})^T$ – удвоенный тензор скорости деформации, верхний индекс T обозначает транспонирование, $\rho^{\pm},\mu^{\pm}>0$ – ступенчатые функции плотности и динамической вязкости, равные ρ^-, μ^- в Ω_t^- и ρ^+, μ^+ в Ω_t^+; H^-, H^+ – удвоенные средние кривизны поверхностей Γ_t^-, Γ_t^+ ($H^+<0$ в точках, где Γ_t^+ выпукла в сторону Ω_t^-); $\sigma^-,\sigma^+>0$ – коэффициенты поверхностного натяжения на Γ_t^- и Γ_t^+ соответственно; $\boldsymbol{n}(x,t)$ – внешняя нормаль к объединению Γ_t^- и Γ_t^+, $V_{\boldsymbol{n}}$ – скорость эволюции поверхностей Γ_t^- и Γ_t^+ в направлении $\boldsymbol{n}$. Предположим, что в $\mathbb{R}^3$ введена декартова система координат $\{x\}$. Точка означает декартово скалярное произведение.

Мы подразумеваем суммирование по повторяющимся индексам от 1 до 3, если они обозначены латинскими буквами. Мы помечаем векторы и векторные пространства жирным шрифтом.

Предположим, что области Ω_0^+,Ω_0 мало отличаются от фигур равновесия $\mathcal{F}^+$ и $\mathcal{F}$ таких, что

$$|\Omega_0^+|=|\mathcal{F}^+|,\quad |\Omega_0|=|\mathcal{F}|. \tag{1.2}$$

В силу несжимаемости жидкостей равенства (1.2) выполняются при любых $t>0$:

$$|\Omega_t^+|=|\mathcal{F}^+|,\quad |\Omega_t|=|\mathcal{F}|. \tag{1.3}$$

Это подразумевает сохранение массы ввиду постоянства плотностей жидкостей. Кроме того, обозначим $\mathcal{G}^+=\partial\mathcal{F}^+$ и $\mathcal{G}^-=\partial\mathcal{F}$ (см. рис. 1). Пусть $\mathcal{F}^-\equiv\mathcal{F}\setminus\overline{\mathcal{F}^+}$.

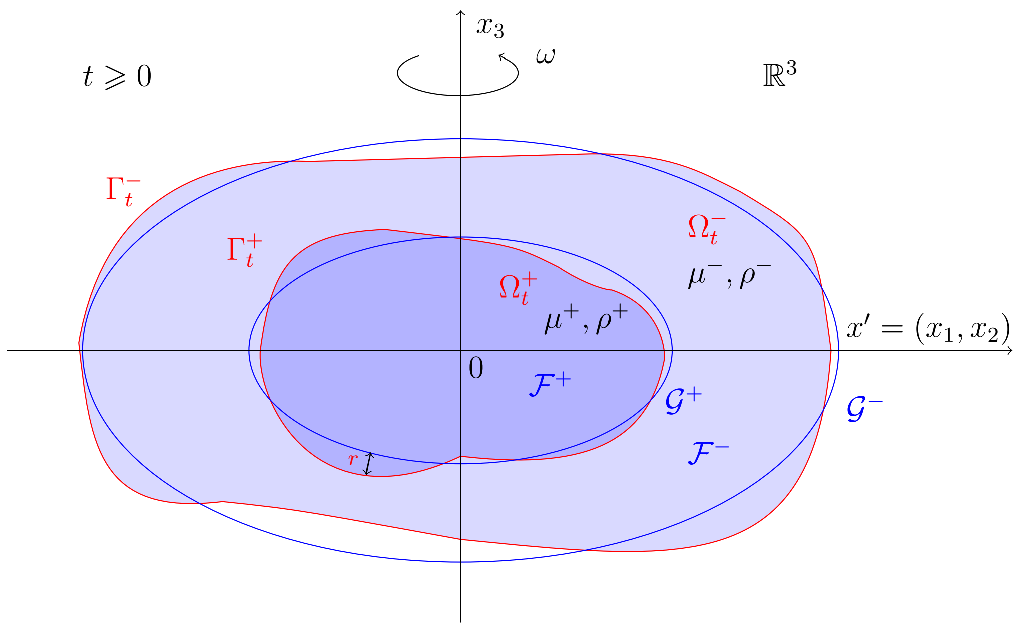

Рис. 1.

Если сила $\boldsymbol{f}$ ортогональна всем векторам жёсткого смещения, т. е.

$$\int_{\Omega_t} \rho^{\pm} \boldsymbol{f}(x,t)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \int_{\Omega_t} \rho^{\pm} \boldsymbol{f}(x,t) \cdot \boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1.4}$$

то решение задачи (1.1) удовлетворяет и другим законам сохранения:

$$\begin{gathered}
\int_{\Omega_t} \rho^{\pm} x_j\,\mathrm{d}x = \int_{\Omega_0} \rho^{\pm} x_j\,\mathrm{d}x \equiv 0, \quad j = 1, 2, 3, \\
\text{(сохранение положения центра тяжести)}, \\
\int_{\Omega_t} \rho^{\pm} \boldsymbol{v}(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_{\Omega_0} \rho^{\pm} \boldsymbol{v}_0(x)\,\mathrm{d}x \equiv 0 \quad \text{(сохранение количества движения)}, \\
\int_{\Omega_t} \rho^{\pm} \boldsymbol{v}(x,t) \cdot \boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\Omega_0} \rho^{\pm} \boldsymbol{v}_0(x) \cdot \boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}x \equiv \omega \int_{\mathcal{F}} \bar{\rho} \boldsymbol{\eta}_3(x) \cdot \boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}x = \beta \delta_i^3, \\
\text{(сохранение углового момента)},
\end{gathered} \tag{1.5}$$

где $\boldsymbol{\eta}_i(x) = \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{x}$, $i = 1, 2, 3$, $\bar{\rho}$ – ступенчатая функция плотности, равная ρ^- в $\mathcal{F}^-$ и ρ^+ в $\mathcal{F}^+$, δ_i^k – символ Кронекера; ω – угловая скорость вращения, а

$$\beta = \omega \int_{\mathcal{F}} \bar{\rho}(x) |x'|^2\,\mathrm{d}x \equiv \omega \mathcal{I}$$

– угловой момент вращающихся жидкостей. Можно показать, что (1.5) справедливо для всех $t>0$, если оно выполняется при $t=0$ (см. [9]), и условия (1.4) верны для всех неотрицательных t.

Если ввести новую функцию давления $p-\rho^{\pm}\varkappa U$, система (1.1) превращается в задачу

$$\begin{gathered}
\rho^{\pm}\big(\mathcal{D}_t\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\big)-\mu^{\pm}\nabla^2\boldsymbol{v}+\nabla p=\rho^{\pm}\boldsymbol{f},\\
\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0\ \text{ в }\ \cup\,\Omega_t^{\pm},\ t>0,\\
\boldsymbol{v}(x,0)=\boldsymbol{v}_0(x)\ \text{ в }\ \cup\,\Omega_0^{\pm}=\Omega_0^{+}\cup\Omega_0^{-},
\end{gathered}\tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{T}(\boldsymbol{v},p)\boldsymbol{n}\big|_{\Gamma_t^-}=(\sigma^-H^-+\rho^-\varkappa U)\boldsymbol{n}\quad\text{на }\Gamma_t^-,\\
&[\boldsymbol{v}]\big|_{\Gamma_t^+}=0,\qquad[\mathbb{T}(\boldsymbol{v},p)\boldsymbol{n}]\big|_{\Gamma_t^+}=(\sigma^+H^++[\rho^{\pm}]\big|_{\Gamma_t^+}\varkappa U)\boldsymbol{n}\quad\text{на }\Gamma_t^+,\\
&V_{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\quad\text{на }\Gamma_t=\Gamma_t^+\cup\Gamma_t^-.
\end{aligned}\tag{1.7}$$

Двухфазная капля, равномерно вращающаяся вокруг оси x_3 с постоянной угловой скоростью $\omega=\beta/I_0$, имеет векторное поле скоростей

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}(x)=\omega\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{x}\equiv\omega\boldsymbol{\eta}_3$$

и функцию давления

$$\mathcal{P}(x)=\bar\rho\frac{\omega^2}{2}|x'|^2+p_0^{\pm},$$

где $|x'|^2=x_1^2+x_2^2$ и $\bar\rho$, $p_0^{\pm}$ – ступенчатые функции в $\mathcal{F}^{\pm}$. Это движение описывается однородными стационарными уравнениями Навье–Стокса

$$\bar\rho(\boldsymbol{\mathcal{V}}\cdot\nabla)\boldsymbol{\mathcal{V}}-\bar\mu\nabla^2\boldsymbol{\mathcal{V}}+\nabla\mathcal{P}=0,\qquad\nabla\cdot\boldsymbol{\mathcal{V}}=0\quad\text{в }\cup\mathcal{F}^{\pm}$$

со ступенчатой функцией $\bar\mu$ равной μ^+ в $\mathcal{F}^+$ и μ^- в $\mathcal{F}^-$. Подставив $\boldsymbol{\mathcal{V}},\mathcal{P}$ в граничные условия (1.7), получим уравнения для поверхности $\mathcal{G}^-$ области $\mathcal{F}$ и для границы раздела между жидкостями $\mathcal{G}^+$:

$$\begin{aligned}
&\sigma^-\mathcal{H}^-(x)+\rho^-\frac{\omega^2}{2}|x'|^2+\rho^-\varkappa\mathcal{U}+p_0^-=0,\quad x\in\mathcal{G}^-,\\
&\sigma^+\mathcal{H}^+(x)+[\bar\rho]\big|_{\mathcal{G}^+}\frac{\omega^2}{2}|x'|^2+[\bar\rho]\big|_{\mathcal{G}^+}\varkappa\mathcal{U}+[p_0^{\pm}]\big|_{\mathcal{G}^+}=0,\quad x\in\mathcal{G}^+,
\end{aligned}\tag{1.8}$$

где $\mathcal{H}^-$, $\mathcal{H}^+$ – удвоенные средние кривизны $\mathcal{G}^-$, $\mathcal{G}^+$ соответственно,

$$\mathcal{U}(x)=\int_{\mathcal{F}}\frac{\bar\rho\,\mathrm{d}z}{|x-z|}.$$

В [9] было доказано существование поверхностей $\mathcal{G}^-$, $\mathcal{G}^+$, удовлетворяющих уравнениям (1.8) при условии, что β достаточно мало, а $\varkappa,[\bar\rho]\big|_{\mathcal{G}^+}>0$ (предложение 3.3). Там же было отмечено, что $\mathcal{G}^{\pm}$ представляют собой сплющенные сфероиды.

Предложение 1.1. *Пусть угловой момент β достаточно мал и $\varkappa > 0$, $\rho^+ > \rho^-$. Тогда для заданных объемов $|\mathcal{F}^+|$ и $|\mathcal{F}|$ существует единственная равновесная фигура, осесимметричная относительно оси x_3 и симметричная относительно плоскости $x_3 = 0$. Поверхности $\mathcal{G}^+$ и $\mathcal{G}^-$ близки к сферам $S_{R_+} = \{|x| = R_+\}$ и $S_{R_-} = \{|x| = R_-\}$ соответственно, где R_+, R_- таковы, что*

$$\frac{4\pi}{3}R_+^3 = |\mathcal{F}^+|, \quad \frac{4\pi}{3}R_-^3 = |\mathcal{F}|$$

и

$$\mathcal{G}^\pm = \{y = z + \varphi^\pm \boldsymbol{z}/|z|, \quad z \in S_{R_\pm}\}.$$

Итак, мы предполагаем осевую симметрию $\mathcal{F}^\pm$ и их симметрию относительно плоскости $x_3 = 0$; отсюда вытекает, что

$$\int_{\mathcal{F}} \bar\rho(x) x_i dx = 0, \quad i = 1,2,3, \tag{1.9}$$

$$\int_{\mathcal{F}} \bar\rho x_3 x_j dx = 0, \quad j = 1,2.$$

Условие (1.9) соответствует первому соотношению в (1.5), означающему, что центр тяжести жидкости все время совпадает с началом координат. Другие условия в (1.5) – сохранение импульса и углового момента – принимают вид

$$\int_{\Omega_t} \rho^\pm \boldsymbol{v}(x,t) dx = \int_{\mathcal{F}} \bar\rho \boldsymbol{\mathcal{V}}(x) dx = 0, \tag{1.10}$$

$$\int_{\Omega_t} \rho^\pm \boldsymbol{v}(x,t) \cdot \boldsymbol{\eta}_i(x) dx = \int_{\mathcal{F}} \bar\rho \boldsymbol{\mathcal{V}}(x) \cdot \boldsymbol{\eta}_i(x) dx = \delta_i^3 \beta, \quad i = 1,2,3.$$

Рассмотрим задачу о возмущениях скорости и давления

$$\boldsymbol{v}_r(x,t) = \boldsymbol{v}(x,t) - \boldsymbol{\mathcal{V}}(x), \quad p_r(x,t) = p(x,t) - \mathcal{P}(x)$$

записанную в системе координат, вращающейся вокруг оси x_3 с угловой скоростью ω. Введем новые координаты $\{y_i\}$ и новые неизвестные функции ($\tilde{\boldsymbol{v}}$, $\tilde p$) по формулам

$$x = \mathcal{Z}(\omega t) y,$$

$$\tilde{\boldsymbol{v}}(y,t) = \mathcal{Z}^{-1}(\omega t) \boldsymbol{v}_r(\mathcal{Z}(\omega t) y, t), \quad \tilde p(y,t) = p_r(\mathcal{Z}(\omega t) y, t),$$

где

$$\mathcal{Z}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\nabla_x = \mathcal{Z}^{-T}\nabla_y = \mathcal{Z}\nabla_y$, $\mathcal{Z}^{-1}(\omega t)(\boldsymbol{\mathcal{V}}\cdot\nabla_x)\boldsymbol{v}_r = \omega\big(\boldsymbol{\eta}_3(x)\cdot\nabla_x\big)\tilde{\boldsymbol{v}}(y,t)$ $= \omega\big(\mathcal{Z}\boldsymbol{\eta}_3(y)\cdot\mathcal{Z}\nabla_y\big)\tilde{\boldsymbol{v}} = \omega\big(\boldsymbol{\eta}_3(y)\cdot\nabla_y\big)\tilde{\boldsymbol{v}}(y,t) = \omega\big(y_2\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{v}}}{\partial y_1} - y_1\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{v}}}{\partial y_2}\big)$ и $\mathcal{D}_t\boldsymbol{v}_r|_{x=\mathcal{Z}y} = \mathcal{D}_t\boldsymbol{v}_r(\mathcal{Z}y,t) - (\boldsymbol{\mathcal{V}}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_r$. Подставляя это в (1.6), (1.7), применяя $\mathcal{Z}^{-1}$ и учитывая (1.8) в граничных условиях, приходим к задаче со свободной границей для возмущений скорости $\tilde{\boldsymbol{v}}$ и давления $\tilde{p}$:

$$
\begin{aligned}
&\rho^{\pm}\big(\mathcal{D}_t\tilde{\boldsymbol{v}} + (\tilde{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla)\tilde{\boldsymbol{v}} + 2\omega(e_3\times\tilde{\boldsymbol{v}})\big) - \mu^{\pm}\nabla^2\tilde{\boldsymbol{v}} + \nabla\tilde{p} = \rho^{\pm}\tilde{\boldsymbol{f}},\\
&\qquad\qquad \nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{v}} = 0 \qquad \text{в } \cup\tilde{\Omega}_t^{\pm} \equiv \tilde{\Omega}_t^{-}\cup\tilde{\Omega}_t^{+}, \qquad t>0,\\
&\tilde{\boldsymbol{v}}(y,0) = \boldsymbol{v}_0(y) - \boldsymbol{\mathcal{V}}(y) \equiv \tilde{\boldsymbol{v}}_0(y), \quad y\in\cup\tilde{\Omega}_0^{\pm}\equiv\tilde{\Omega}_0^{-}\cup\tilde{\Omega}_0^{+},\\
&-\tilde{p}\tilde{\boldsymbol{n}} + \mu^{-}\mathbb{S}(\tilde{\boldsymbol{v}})\tilde{\boldsymbol{n}}\big|_{\tilde{\Gamma}_t^{-}} = \big\{\sigma^{-}\big(\tilde{H}^{-}(y) - \mathcal{H}^{-}(z)\big) + \rho^{-}\omega^2\big(|y'|^2 - |z'|^2\big)/2\\
&\qquad\qquad + \varkappa\rho^{-}\big(\tilde{U}(y,t) - \mathcal{U}(z)\big)\big\}\tilde{\boldsymbol{n}},\\
&[\tilde{\boldsymbol{v}}]\big|_{\tilde{\Gamma}_t^{+}} = 0,\\
&[-\tilde{p}\tilde{\boldsymbol{n}} + \mu^{\pm}\mathbb{S}(\tilde{\boldsymbol{v}})\tilde{\boldsymbol{n}}]|_{\tilde{\Gamma}_t^{+}} = \big\{\sigma^{+}\big(\tilde{H}^{+}(y) - \mathcal{H}^{+}(z)\big) + [\rho^{\pm}]\omega^2\big(|y'|^2 - |z'|^2\big)/2\\
&\qquad\qquad + \varkappa[\rho^{\pm}]|_{\Gamma_t^{+}}\big(\tilde{U}(y,t) - \mathcal{U}(z)\big)\big\}\tilde{\boldsymbol{n}},\\
&\tilde{V}_{\tilde{\boldsymbol{n}}} = \tilde{\boldsymbol{v}}\cdot\tilde{\boldsymbol{n}} \quad \text{на } \tilde{\Gamma}_t \equiv \tilde{\Gamma}_t^{-}\cup\tilde{\Gamma}_t^{+},
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

где $\tilde{\Omega}_t^{\pm} = \mathcal{Z}^{-1}(\omega t)\Omega_t^{\pm}$, $\tilde{\Gamma}_t^{\pm} = \mathcal{Z}^{-1}(\omega t)\Gamma_t^{\pm}$, $\tilde{\boldsymbol{f}}(y,t) = \mathcal{Z}^{-1}(\omega t)\boldsymbol{f}(\mathcal{Z}(\omega t)y,t)$, $\tilde{\boldsymbol{n}}$ – внешняя нормаль к $\tilde{\Gamma}_t$, $\boldsymbol{n} = \mathcal{Z}\tilde{\boldsymbol{n}}$, $y' = (y_1, y_2, 0)$ и т. д. Отметим, что кинематическое граничное условие $V_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$, сохраняет свою форму (см.[14]).

Соотношения (1.3), (1.5), (1.10) преобразуются в

$$
|\tilde{\Omega}_t^{+}| = |\mathcal{F}^{+}|, \quad |\tilde{\Omega}_t| = |\mathcal{F}|, \tag{1.12}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{\tilde{\Omega}_t}\rho^{\pm}y_j\,\mathrm{d}y = 0, \quad j=1,2,3, \quad \text{(сохранение центра тяжести)},\\
&\int_{\tilde{\Omega}_t}\rho^{\pm}\tilde{\boldsymbol{v}}(y,t)\,\mathrm{d}y = 0 \quad \text{(сохранение импульса)},\\
&\int_{\tilde{\Omega}_t}\rho^{\pm}\tilde{\boldsymbol{v}}(y,t)\cdot\boldsymbol{\eta}_i(y)\,\mathrm{d}y + \omega\int_{\tilde{\Omega}_t}\rho^{\pm}\boldsymbol{\eta}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_i(y)\,\mathrm{d}y = \omega\int_{\mathcal{F}}\bar{\rho}\boldsymbol{\eta}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_i(y)\,\mathrm{d}y = \beta\delta_i^3\\
&\qquad\qquad \text{(сохранение углового момента)},
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

где $\boldsymbol{\eta}_i(y) = \boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{y}$, $i=1,2,3$.

Дадим определение анизотропных пространств Гёлдера, которыми мы будем пользоваться.

Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^n$, $n\in\mathbb{N}$; для $T>0$ положим $Q_T = \Omega\times(0,T)$; наконец, пусть $\alpha\in(0,1)$. Через $C^{\alpha,\alpha/2}(Q_T)$ обозначим множество функций f над Q_T с нормой

$$
|f|_{Q_T}^{(\alpha,\alpha/2)} = |f|_{Q_T} + \langle f\rangle_{Q_T}^{(\alpha,\alpha/2)},
$$

где
$$|f|_{Q_T} = \sup_{t\in(0,T)} \sup_{x\in\Omega} |f(x,t)|, \qquad \langle f\rangle^{(\alpha,\alpha/2)}_{Q_T} = \langle f\rangle^{(\alpha)}_{x,Q_T} + \langle f\rangle^{(\alpha/2)}_{t,Q_T},$$
и
$$\begin{aligned}
\langle f\rangle^{(\alpha)}_{x,Q_T} &= \sup_{t\in(0,T)} \sup_{x,y\in\Omega} |f(x,t)-f(y,t)||x-y|^{-\alpha},\\
\langle f\rangle^{(\mu)}_{t,Q_T} &= \sup_{x\in\Omega} \sup_{t,\tau\in(0,T)} |f(x,t)-f(x,\tau)||t-\tau|^{-\mu}, \quad \mu\in(0,1).
\end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:
$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\boldsymbol{r}}_x &= \partial^{|\boldsymbol{r}|}/\partial x_1^{r_1}\ldots\partial x_n^{r_n}, \quad \boldsymbol{r}=(r_1,\ldots r_n), \quad r_i\geqslant 0,\ |\boldsymbol{r}|=r_1+\cdots+r_n,\\
\mathcal{D}^s_t &= \partial^s/\partial t^s, \quad s\in\mathbb{N}\cup\{0\}.
\end{aligned}$$

Пусть $k\in\mathbb{N}$. По определению пространство $C^{k+\alpha,(k+\alpha)/2}(Q_T)$ состоит из функций f с конечной нормой
$$|f|^{(k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2})}_{Q_T} \equiv \sum_{|\boldsymbol{r}|+2s\leqslant k} |\mathcal{D}^{\boldsymbol{r}}_x\mathcal{D}^s_t f|_{Q_T} + \langle f\rangle^{(k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2})}_{Q_T},$$
где
$$\langle f\rangle^{(k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2})}_{Q_T} = \sum_{|\boldsymbol{r}|+2s=k} \langle\mathcal{D}^{\boldsymbol{r}}_x\mathcal{D}^s_t f\rangle^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})}_{Q_T} + \sum_{|\boldsymbol{r}|+2s=k-1} \langle\mathcal{D}^{\boldsymbol{r}}_x\mathcal{D}^s_t f\rangle^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,Q_T}.$$

Определим $C^{k+\alpha}(\Omega)$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, как пространство функций $f(x)$, $x\in\Omega$, с нормой
$$|f|^{(k+\alpha)}_{\Omega} \equiv \sum_{|\boldsymbol{r}|\leqslant k} |\mathcal{D}^{\boldsymbol{r}}_x f|_{\Omega} + \langle f\rangle^{(k+\alpha)}_{\Omega}.$$
Здесь
$$\langle f\rangle^{(k+\alpha)}_{\Omega} = \sum_{|\boldsymbol{r}|=k} \langle\mathcal{D}^{\boldsymbol{r}}_x f\rangle^{(\alpha)}_{\Omega} = \sum_{|\boldsymbol{r}|=k} \sup_{x,y\in\Omega} |\mathcal{D}^{\boldsymbol{r}}_x f(x)-\mathcal{D}^{\boldsymbol{r}}_y f(y)||x-y|^{-\alpha}.$$

Нам также будет нужна следующая полунорма с $\alpha,\gamma\in(0,1)$:
$$\left|\!\left| f \right|\!\right|^{(\gamma,1+\alpha)}_{Q_T} = \langle\!\langle f\rangle\!\rangle^{(\gamma,1+\alpha)}_{Q_T} + \langle f\rangle^{(\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}_{t,Q_T} + |f|_{Q_T},$$
где
$$\langle\!\langle f\rangle\!\rangle^{(\gamma,1+\alpha)}_{Q_T} \equiv \sup_{t,\tau\in(0,T)} \sup_{x,y\in\Omega} \frac{|f(x,t)-f(y,t)-f(x,\tau)+f(y,\tau)|}{|x-y|^{\gamma}|t-\tau|^{(1+\alpha-\gamma)/2}}.$$
Известна оценка
$$\langle\!\langle f\rangle\!\rangle^{(\gamma,1+\alpha)}_{Q_T} \leqslant c_1\langle f\rangle^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{Q_T}.$$

Будем считать по определению, что $f \in C^{(\gamma,1+\alpha)}(Q_T)$, если

$$\mathbf{|}f\mathbf{|}_{Q_T}^{(\gamma,1+\alpha)} < \infty.$$

Наконец, если функция f имеет конечную норму

$$|f|_{Q_T}^{(\gamma,\mu)} \equiv \langle f\rangle_{x,Q_T}^{(\gamma)} + |f|_{t,Q_T}^{(\mu)}, \qquad \gamma \in (0,1), \quad \mu \in [0,1),$$

где

$$|f|_{t,Q_T}^{(\mu)} = \begin{cases} |f|_{Q_T} + \langle f\rangle_{t,Q_T}^{(\mu)}, & \text{если } \mu > 0, \\ |f|_{Q_T}, & \text{если } \mu = 0, \end{cases}$$

будем считать, что $f \in C^{\gamma,\mu}(Q_T)$.

Вектор-функция является элементом пространства Гёльдера, если все ее компоненты принадлежат этому пространству и ее норма определяется как максимум норм компонент. То же самое относится и к тензорнозначной функции.

Положим

$$|f|_{D_T}^{(k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2})} \equiv |f|_{Q_T^-}^{(k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2})} + |f|_{Q_T^+}^{(k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2})}, \qquad D_T \equiv Q_T^+ \cup Q_T^-,$$

$$|f|_{\cup\Omega^\pm}^{(k+\alpha)} \equiv |f|_{\Omega^-}^{(k+\alpha)} + |f|_{\Omega^+}^{(k+\alpha)}.$$

2 Линеаризованная задача

Предположим, что поверхности $\tilde{\Gamma}_t^\pm$ могут быть заданы соотношениями

$$\tilde{\Gamma}_t^\pm = \{y = z + \boldsymbol{N}(z)r(z,t), \quad z \in \mathcal{G}^\pm\}, \tag{2.1}$$

где $\boldsymbol{N}$ – внешняя единичная нормаль к $\mathcal{G}^- \cup \mathcal{G}^+$.

Отобразим $\tilde{\Omega}_t^\pm$ на $\mathcal{F}^\pm$ с помощью преобразования, обратное к которому является преобразованием Ханзавы

$$y = z + \boldsymbol{N}^*(z)r^*(z,t) \equiv e_r(z,t), \tag{2.2}$$

где $\boldsymbol{N}^*$ и r^* являются продолжениями $\boldsymbol{N}$ и r в $\mathcal{F}$ соответственно.

Для анализа задачи (1.11) с начальными данными, близкими к режиму вращения двухслойной жидкости как твердого тела (см. рис. 1), мы линеаризуем ее. Для этого вычислим первую вариацию по $r^\pm$ выражений $H(y)-\mathcal{H}(z)$, $|y'|^2 - |z'|^2$, $U(y,t) - \mathcal{U}(z)$, где y связан с z соотношением (2.2). Применим следующие формулы для первой и второй вариаций функционала $R[r]$ относительно r

$$\delta_0 R[r] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} R[sr]\big|_{s=0}, \qquad \delta_0^2 R[r] = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} R[sr]\big|_{s=0}. \tag{2.3}$$

Очевидно, что $\delta_0\big(|y'|^2 - |z'|^2\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big(|\boldsymbol{z}' + \boldsymbol{N}'sr|^2 - |\boldsymbol{z}'|^2\big)\big|_{s=0} = 2\boldsymbol{z}'\cdot\boldsymbol{N}'r,\ \boldsymbol{N}' = (N_1, N_2, 0)$, и, согласно [17], $\delta_0\big(H^\pm(y) - \mathcal{H}^\pm(z)\big) = \Delta^\pm r^\pm + \big({\mathcal{H}^\pm}^2(z) - 2\mathcal{K}^\pm(z)\big)r^\pm$, где $\Delta^\pm$ – операторы Лапласа–Бельтрами на $\mathcal{G}^\pm$ соответственно. Более того, как указано в [9], вариация отклонения ньютоновского потенциала

$$\delta_0\big(U(y,t) - \mathcal{U}(z)\big) = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{N}} r + \mathcal{W}[r](z,t),$$

где

$$\mathcal{U}(z) = \int_{\mathcal{F}} \frac{\bar\rho\,\mathrm{d}x}{|z-x|}, \qquad \mathcal{W}[r](z,t) \equiv \rho^- \int_{\mathcal{G}^-} \frac{r(x,t)}{|z-x|}\,\mathrm{d}\mathcal{G}_x + [\rho^\pm]\big|_{\mathcal{G}^+} \int_{\mathcal{G}^+} \frac{r(x,t)}{|z-x|}\,\mathrm{d}\mathcal{G}_x.$$

Вследствие (2.2) кинематическое условие для $V_{\boldsymbol{n}} \equiv \mathcal{D}_t \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{n}|_{\mathcal{G}}$ принимает вид

$$\mathcal{D}_t r\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{n} = \tilde{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{n}. \tag{2.4}$$

Таким образом, используя приведенные выше соотношения, приходим к линейной задаче, соответствующей (1.11) относительно неизвестного векторного поля скорости $\boldsymbol{w}$ и функции давления p_1:

$$\begin{aligned}
&\bar\rho\big(\mathcal{D}_t\boldsymbol{w} + 2\omega(e_3\times\boldsymbol{w})\big) - \bar\mu\nabla^2\boldsymbol{w} + \nabla p_1 = \bar\rho\boldsymbol{f},\\
&\qquad\qquad\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{w} = f \equiv \nabla\cdot\boldsymbol{F} \qquad \text{в } \cup\mathcal{F}^\pm \equiv \mathcal{F}^-\cup\mathcal{F}^+, \quad t>0,\\
&\boldsymbol{w}(z,0) = \boldsymbol{v}_0(z) - \boldsymbol{\mathcal{V}}(z) \equiv \boldsymbol{w}_0(z), \quad z\in\cup\mathcal{F}^\pm,\\
&\mathbb{T}(\boldsymbol{w},p_1)\boldsymbol{N} + \boldsymbol{N}\mathcal{B}_0^-(r) = \boldsymbol{d} \quad \text{на } \mathcal{G}^-,\\
&[\boldsymbol{w}]\big|_{\mathcal{G}^+} = 0, \quad [\mathbb{T}(\boldsymbol{w},p_1)\boldsymbol{N}]\big|_{\mathcal{G}^+} + \boldsymbol{N}\mathcal{B}_0^+(r) = \boldsymbol{d} \quad \text{на } \mathcal{G}^+,\\
&\mathcal{D}_t r - \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{N} = g \quad \text{на } \mathcal{G}\equiv\mathcal{G}^-\cup\mathcal{G}^+, \qquad r\big|_{t=0} = r_0 \quad \text{на } \mathcal{G},
\end{aligned} \tag{2.5}$$

где операторы

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_0^-(r) &= -\sigma^-\Delta^- r - b^-(z)r - \rho^-\varkappa\mathcal{W}[r], \quad z\in\mathcal{G}^-,\\
\mathcal{B}_0^+(r) &= -\sigma^+\Delta^+ r - b^+(z)r - [\bar\rho]\big|_{\mathcal{G}^+}\varkappa\mathcal{W}[r], \quad z\in\mathcal{G}^+,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

с

$$\begin{aligned}
b^-(z) &= \sigma^-({\mathcal{H}^-}^2 - 2\mathcal{K}^-) + \rho^-\omega^2\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{z}' + \rho^-\varkappa\partial\mathcal{U}/\partial\boldsymbol{N},\\
b^+(z) &= \sigma^+({\mathcal{H}^+}^2 - 2\mathcal{K}^+) + [\bar\rho]\big|_{\mathcal{G}^+}\omega^2\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{z}' + [\bar\rho]\big|_{\mathcal{G}^+}\varkappa\partial\mathcal{U}/\partial\boldsymbol{N},
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{z}' = (z_1, z_2, 0)$, $\mathcal{K}^{\pm}$ – гауссовы кривизны поверхностей $\mathcal{G}^{\pm}$, ω – угловая скорость вращения, $r(x,t)$ – неизвестная функция, определяющая границы $\Gamma^{\pm}$; $\boldsymbol{f}, f, \boldsymbol{d}, g$, $\boldsymbol{w}_0, r_0$ – заданные функции.

Рассмотрим сначала однородную задачу (2.5):

$$
\begin{aligned}
&\bar{\rho}(\mathcal{D}_t\boldsymbol{w} + 2\omega(\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{w})) - \bar{\mu}\nabla^2\boldsymbol{w} + \nabla p_1 = 0, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{w} = 0 \quad \text{в } \cup\mathcal{F}^{\pm},\ \ t>0,\\
&\boldsymbol{w}\big|_{t=0} = \boldsymbol{w}_0 \quad \text{в } \cup\mathcal{F}^{\pm},\\
&\mathbb{T}(\boldsymbol{w}, p_1)\boldsymbol{N}\big|_{\mathcal{G}^-} + \boldsymbol{N}\mathcal{B}_0^-(r) = 0 \quad \text{на } \mathcal{G}^-,\\
&[\boldsymbol{w}]\big|_{\mathcal{G}^+} = 0, \quad [\mathbb{T}(\boldsymbol{w}, p_1)\boldsymbol{N}]\big|_{\mathcal{G}^+} + \boldsymbol{N}\mathcal{B}_0^+(r) = 0 \quad \text{на } \mathcal{G}^+,\\
&\mathcal{D}_t r - \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{N} = 0 \quad \text{на } \mathcal{G}, \qquad r\big|_{t=0} = r_0 \quad \text{на } \mathcal{G}.
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Будем считать, что области $\mathcal{F}^{\pm}$ симметричны относительно z_1, z_2, z_3, а начальные данные удовлетворяют, в соответствии с линеаризацией предположений (1.12), (1.13), условиям ортогональности

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{G}^{\pm}} r_0(z)\,\mathrm{d}\mathcal{G} = 0,\\
&\rho^- \int_{\mathcal{G}^-} r_0(z) z_j\,\mathrm{d}\mathcal{G} + [\bar{\rho}]\big|_{\mathcal{G}^+}\int_{\mathcal{G}^+} r_0(z) z_j\,\mathrm{d}\mathcal{G} = 0, \quad j = 1,2,3,
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{F}} \bar{\rho}\boldsymbol{w}_0(z)\,\mathrm{d}z = 0,\\
&\int_{\mathcal{F}} \bar{\rho}\boldsymbol{w}_0(z)\cdot\boldsymbol{\eta}_j(z)\,\mathrm{d}z + \omega\big(\rho^-\int_{\mathcal{G}^-} r_0(z)\boldsymbol{\eta}_3(z)\cdot\boldsymbol{\eta}_j(z)\,\mathrm{d}\mathcal{G}\\
&\qquad\qquad + [\bar{\rho}]\big|_{\mathcal{G}^+}\int_{\mathcal{G}^+} r_0(z)\boldsymbol{\eta}_3(z)\cdot\boldsymbol{\eta}_j(z)\,\mathrm{d}\mathcal{G}\big) = 0.
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Введём обозначения: $Q_T^{\pm} = \mathcal{F}^{\pm}\times(0,T)$, $G_T^{\pm} = \mathcal{G}^{\pm}\times(0,T)$, $D_T = Q_T^+ \cup Q_T^-$, $Q_T = Q_T^+ \cup \overline{Q_T^-}$, $G_T = G_T^+ \cup G_T^-$, $T \in (0,\infty]$.

Предложение 2.1. *Решение задачи* (2.7) –(2.9) *удовлетворяет условиям* (2.8), (2.9) *для всех* $t>0$.

Это предложение доказывается так же, как предложение 2.1 в [14] в силу предложения 2.2.

Ввиду закона сохранения импульса справедливо следующее утверждение.

Следствие 2.1. *Имеет место разложение*

$$
\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}^{\perp} + \sum_{i=1}^{3} d_i(r)\boldsymbol{\eta}_i,
\tag{2.10}
$$

где $\boldsymbol{w}^{\perp}$ *– векторное поле, ортогональное всем векторам жесткого смещения* $\boldsymbol{\eta}$*, т.е.*

$$\int_{\mathcal{F}} \bar{\rho}\boldsymbol{w}^{\perp}\cdot\boldsymbol{\eta}\,\mathrm{d}z = 0, \qquad \boldsymbol{\eta}(z) = \boldsymbol{e}_i \quad or \quad \boldsymbol{\eta}(z) = \boldsymbol{\eta}_i(z), \quad i = 1,2,3,$$

и

$$d_i(r) = -\frac{\omega}{S_i}\big(\rho^- \int_{\mathcal{G}^-} r\boldsymbol{\eta}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_i\,\mathrm{d}\mathcal{G} + [\bar{\rho}]|_{\mathcal{G}^+}\int_{\mathcal{G}^+} r\boldsymbol{\eta}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_i\,\mathrm{d}\mathcal{G}\big), \quad S_i = \int_{\mathcal{F}} \bar{\rho}|\boldsymbol{\eta}_i|^2\,\mathrm{d}z.$$

Предложение 2.2. *Имеют место следующие соотношения:*

$$\mathcal{B}_0^-(\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{N}) = -\omega^2\rho^-\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{z}', \quad z\in\mathcal{G}^-,$$
$$\mathcal{B}_0^+(\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{N}) = -\omega^2[\bar{\rho}]|_{\mathcal{G}_t^+}\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{z}', \quad z\in\mathcal{G}^+,$$

где $\boldsymbol{\eta}$ *– это произвольный вектор жесткого смещения.*

Это утверждение было доказано в [15].

Приведем результат, доказанный в [18] (см. также [13, 19]) о разрешимости следующей линейной задачи для системы Стокса в неограниченной области $\Omega^-\cup\Omega^+$, $\overline{\Omega^+}\cup\Omega^- = \mathbb{R}^3$, с замкнутой поверхностью раздела $\Gamma = \partial\Omega^+$:

$$\mathcal{D}_t\boldsymbol{v} - \nu^{\pm}\nabla^2\boldsymbol{v} + \frac{1}{\rho^{\pm}}\nabla p = \boldsymbol{f},\ \nabla\cdot\boldsymbol{v} = g \quad \text{в}\ \ D_T \equiv \cup Q_T^{\pm} = \Omega^{\pm}\times(0,T),$$

$$\boldsymbol{v}|_{t=0} = \boldsymbol{v}_0 \quad \text{в}\ \ \Omega^-\cup\Omega^+, \quad \boldsymbol{v}\xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0,$$

$$[\boldsymbol{v}]|_{\Gamma} = 0, \qquad [\Pi_0\mathbb{T}\boldsymbol{n}]|_{\Gamma} = \boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n} = 0, \tag{2.11}$$

$$[\boldsymbol{n}\cdot\mathbb{T}\boldsymbol{n}]\big|_{\Gamma} - \sigma\boldsymbol{n}\cdot\int_0^t \Delta_{\Gamma}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t' = b' + \sigma\int_0^t B\,\mathrm{d}t' \quad \text{на}\ G_T \equiv \Gamma\times(0,T),$$

где $\boldsymbol{f}, g, \boldsymbol{b}, b', B, \boldsymbol{v}_0$ – заданные функции; $\boldsymbol{n}$ обозначает внешнюю единичную нормаль к Γ, $\Pi_0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} - (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{n}$.

Во-первых, допустим, что существуют два представления

$$g = \nabla\cdot\boldsymbol{R} \ \text{ и } \ \mathcal{D}_t\boldsymbol{R} - \boldsymbol{f} \equiv \boldsymbol{h} = \nabla\cdot\mathbb{M} = \sum_{k=1}^{3}\partial M_{ik}/\partial x_k. \tag{2.12}$$

Во-вторых, мы предполагаем, что выполнены условия согласования

$$[\boldsymbol{v}_0]|_{\Gamma} = 0,\ \nabla\cdot\boldsymbol{v}_0(x) = g(x,0),\ x\in\Omega^-\cup\Omega^+,$$

$$[\mu^{\pm}\Pi_0\mathbb{S}(\boldsymbol{v}_0(x))\boldsymbol{n}]|_{x\in\Gamma} = \boldsymbol{b}(x,0),\ x\in\Gamma, \tag{2.13}$$

$$\big[\Pi_0\big(\boldsymbol{f}(x,0)-\frac{1}{\rho^\pm}\nabla p(x,0)+\nu^\pm\nabla^2\boldsymbol{v}_0(x)\big)\big]\big|_{x\in\Gamma}=0.$$

Последнее из этих условий возникает из-за необходимости согласования скачка производной $\mathcal{D}_t\boldsymbol{v}$ с нулем при $t=0:\ [\mathcal{D}_t\boldsymbol{v}]|_\Gamma=0$. Нормальная часть этого равенства $[\mathcal{D}_t\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}]|_{\Gamma,t=0}=0$ верна, если $p_0\equiv p(x,0)$ является решением задачи

$$\frac{1}{\rho^\pm}\nabla^2 p_0(x)=\nabla\cdot\big(\boldsymbol{f}(x,0)+\nu^\pm\nabla g(x,0)-\mathcal{D}_t\boldsymbol{R}(x,0)\big)\quad\text{в }\cup\Omega^\pm,$$

$$[p_0]|_\Gamma=\Big[2\mu^\pm\frac{\partial\boldsymbol{v}_0}{\partial\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{n}\Big]\Big|_\Gamma-b'|_{t=0}\equiv p_{00},\tag{2.14}$$

$$\Big[\frac{1}{\rho^\pm}\frac{\partial p_0}{\partial\boldsymbol{n}}\Big]\Big|_\Gamma=\big[\boldsymbol{n}\cdot\big(\boldsymbol{f}(x,0)+\nu^\pm\nabla^2\boldsymbol{v}_0\big)\big]\big|_\Gamma\equiv p_{01}\qquad\Big(\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}}\equiv\nabla\psi\cdot\boldsymbol{n}\Big).$$

(Здесь первое уравнение понимается в слабом смысле.)

Теорема 2.1. *Пусть выполняются предположения* (2.12) – (2.14). *Кроме того, для* $\alpha,\gamma\in(0,1)$, $\gamma<\alpha$ *при* $\sigma>0$, *и* $T<\infty$ *предполагается, что* $\Gamma\in C^{2+\alpha}$, $\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{C}^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(D_T)$, $g\in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(D_T)$, $\boldsymbol{R}\in\boldsymbol{C}^{(\gamma,1+\alpha)}(D_T)$, $\mathcal{D}_t\boldsymbol{R}\in\boldsymbol{C}^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(D_T)$, $[\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}]\big|_{G_T}=0$, $\boldsymbol{v}_0\in\boldsymbol{C}^{2+\alpha}(\Omega^-\cup\Omega^+)$, $\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}^{1+\alpha,\frac{1+a}{2}}(G_T)$, $b'\in C^{(\gamma,1+\alpha)}(G_T)$, $B\in C^{\alpha,\alpha/2}(G_T)$, *а элементы тензора* $\mathbb{M}$ *имеют конечные полунормы* $\boldsymbol{[}M_{ik}\boldsymbol{|}^{(\gamma,1+\alpha)}_{D_T}$, $\langle M_{ik}\rangle^{(\gamma)}_{x,D_T}$, $i,k=1,2,3$. *Допустим также, что все известные функции достаточно хорошо убывают при* $|x|\to\infty$ *(например, степенным способом). Тогда задача* (2.11) *имеет решение* $(\boldsymbol{v},p)$ *такое, что* $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(D_T)$, $\nabla p\in\boldsymbol{C}^{\alpha,\alpha/2}(D_T)$, $p\in C^{(\gamma,1+\alpha)}(B_T)$, *и верно неравенство*

$$\begin{aligned}&|\boldsymbol{v}|^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{D_T}+|\nabla p|^{(\alpha,\alpha/2)}_{D_T}+\boldsymbol{\langle} p\boldsymbol{\rangle}^{(\gamma,1+\alpha)}_{D_T}+|p|^{(\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}_{t,B_T}\\ &\leqslant c_{13}(T)\Big\{|\boldsymbol{f}|^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})}_{D_T}+|g|^{(1+\alpha,\frac{1+a}{2})}_{D_T}+|\mathcal{D}_t\boldsymbol{R}|^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})}_{D_T}+\boldsymbol{[}\boldsymbol{R}\boldsymbol{|}^{(\gamma,1+\alpha)}_{D_T}+|\boldsymbol{b}|^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{G_T}+\boldsymbol{[}b'\boldsymbol{|}^{(\gamma,1+\alpha)}_{G_T}\\ &\qquad+|b'|_{G_T}+|\nabla_\tau b'|^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})}_{G_T}+\sigma|B|^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})}_{G_T}+\boldsymbol{[}\mathbb{M}\boldsymbol{|}^{(\gamma,1+\alpha)}_{D_T}+\langle\mathbb{M}\rangle^{(\gamma)}_{x,D_T}+|\boldsymbol{v}_0|^{(2+\alpha)}_{\cup\Omega^\pm}\Big\}\\ &\equiv c_{13}(T)F(T),\end{aligned}\tag{2.15}$$

где $\nabla_\tau=\Pi_0\nabla, c_{13}(T)$ – *неубывающая функция от* T, $B_T=B_1\times(0,T)$, *а* B_1 – *шар, содержащий* $\overline{\Omega^+}$. *Векторное поле скорости* $\boldsymbol{v}$ *определяется однозначно, а давление* p *определяется в классе функций слабого степенного роста с точностью до гладкой ограниченной функции, зависящей от времени.*

Для ограниченной области $D_T\equiv\cup\mathcal{F}^\pm\times(0,T)$ аналогичная теорема также верна [13]. При доказательстве такой теоремы применяются оценки вблизи внешней границы $\mathcal{G}^-$, полученные в [20, 21] для одной жидкости.

Теорема 2.2 (Локальная разрешимость линейной задачи). *Пусть* $\mathcal{G} \in C^{3+\alpha}$ *и* $r_0 \in C^{3+\alpha}(\mathcal{G})$ *с* $\alpha \in (0,1)$. *Допустим, что* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(D_T)$, $f \in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(D_T)$, $f = \nabla\cdot\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F} \in \boldsymbol{C}^{(\gamma,1+\alpha)}(D_T)$, $\mathcal{D}_t\boldsymbol{F} \in \boldsymbol{C}^{\alpha,\alpha/2}(D_T)$, $[\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N}]|_{\mathcal{G}^+} = 0$, $\boldsymbol{w}_0 \in \boldsymbol{C}^{2+\alpha}(\cup\mathcal{F}^\pm)$, $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}_\tau + d\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{d}_\tau \in \boldsymbol{C}^{1+\alpha,\frac{1+a}{2}}(G_T)$, $\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{d}_\tau = 0$, $d \in C^{(\gamma,1+\alpha)}(G_T)$, $\nabla_\tau d \in \boldsymbol{C}^{\alpha,\alpha/2}(G_T)$, $g \in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(G_T)$, $G_T \equiv \mathcal{G}\times(0,T)$, $\gamma \in (0,1)$, $\gamma < \alpha$, $T < \infty$, *удовлетворяют условиям согласования*

$$\begin{aligned}
&\nabla\cdot\boldsymbol{w}_0 = f|_{t=0},\\
&[\boldsymbol{w}_0]|_{\mathcal{G}^+} = 0, \quad [\bar{\mu}\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{w}_0)\boldsymbol{N}]|_{\mathcal{G}^+} = \boldsymbol{d}_\tau|_{t=0}, \quad \mu^-\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{w}_0)\boldsymbol{N}|_{\mathcal{G}^-} = \boldsymbol{d}_\tau|_{t=0},
\end{aligned}$$

$$\big[\Pi_{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{f}(x,0) - \frac{1}{\rho^\pm}\nabla p_1(x,0) + \bar{\nu}\nabla^2\boldsymbol{w}_0(x)\big)\big]\big|_{x\in\mathcal{G}^+} = 0,$$

где $\Pi_{\mathcal{G}}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{N}$. *Кроме того, мы предполагаем, что для* $\boldsymbol{f}$ *и* $\boldsymbol{F}$ *есть представление*

$$\mathcal{D}_t\boldsymbol{F} - \boldsymbol{f} \equiv \boldsymbol{h} = \nabla\cdot\mathbb{M} = \sum_{k=1}^{3}\partial M_{ik}/\partial x_k,$$

где M_{ik} *имеют конечную норму* $|\!|M_{ik}|\!|_{D_T}^{(\gamma,1+\alpha)}$ *и полунорму* $\langle M_{ik}\rangle_{x,D_T}^{(\gamma)}$, $i,k = 1,2,3$, *а начальное давление* $p_0 \equiv p_1(,0)$ *является (в слабом смысле) решением задачи*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\bar{\rho}}\nabla^2 p_0(x) = \nabla\cdot\big(\boldsymbol{f}(x,0) + \bar{\nu}\nabla f(x,0) - \mathcal{D}_t\boldsymbol{F}(x,0) - 2\omega(e_3\times\boldsymbol{w}_0)\big) \quad \text{в } \cup\mathcal{F}^\pm,\\
&[p_0]|_{\mathcal{G}^+} = \Big[2\bar{\mu}\frac{\partial\boldsymbol{w}_0}{\partial\boldsymbol{N}}\cdot\boldsymbol{N}\Big]\Big|_{\mathcal{G}^+} + \mathcal{B}_0^+(r_0) - d|_{t=0} \equiv p_{00}^+,\\
&\Big[\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial p_0}{\partial\boldsymbol{N}}\Big]\Big|_{\mathcal{G}^+} = \big[\boldsymbol{N}\cdot\big(\boldsymbol{f}(x,0) + \bar{\nu}\nabla^2\boldsymbol{w}_0\big)\big]\big|_{\mathcal{G}^+} \equiv p_{01}^+ \qquad \Big(\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{N}} \equiv \nabla\psi\cdot\boldsymbol{N}\Big),
\end{aligned}$$

$$p_0|_{\mathcal{G}^-} = 2\mu^-\frac{\partial\boldsymbol{w}_0}{\partial\boldsymbol{N}}\cdot\boldsymbol{N}\Big|_{\mathcal{G}^-} + \mathcal{B}_0^-(r_0) - d|_{t=0} \equiv p_{00}^-.$$

Тогда задача (2.5) *имеет единственное решение* $(\boldsymbol{w}, p_1, r)$ *такое, что* $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(D_T)$, $\nabla p_1 \in \boldsymbol{C}^{\alpha,\alpha/2}(D_T)$, $p_1 \in C^{(\gamma,1+\alpha)}(D_T)$, $r(\cdot,t) \in C^{3+\alpha}(\mathcal{G})$ *для любого* $t \in (0,T)$, *и верно неравенство*

$$\begin{aligned}
&Y_{(0,T)}[\boldsymbol{w},p_1,r] \equiv |\boldsymbol{w}|_{D_T}^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})} + |\nabla p_1|_{D_T}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})} + |\!|p_1|\!|_{D_T}^{(\gamma,1+\alpha)} + |r|_{G_T}^{(3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2})} + |\mathcal{D}_t r|_{G_T}^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})}\\
&\leqslant c_{13}(T)\Big\{|\boldsymbol{f}|_{D_T}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})} + |f|_{D_T}^{(1+\alpha,\frac{1+a}{2})} + |\mathcal{D}_t\boldsymbol{F}|_{D_T}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})} + |\!|\boldsymbol{F}|\!|_{D_T}^{(\gamma,1+\alpha)} + |\boldsymbol{d}_\tau|_{G_T}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})} + |\!|d|\!|_{G_T}^{(\gamma,1+\alpha)}\\
&+ |\nabla_\tau d|_{G_T}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})} + \sigma|B|_{G_T}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})} + |\!|\mathbb{M}|\!|_{D_T}^{(\gamma,1+\alpha)} + \langle\mathbb{M}\rangle_{x,D_T}^{(\gamma)} + |\boldsymbol{w}_0|_{\cup\Omega^\pm}^{(2+\alpha)} + |r_0|_{\mathcal{G}}^{(3+\alpha)} + |g|_{G_T}^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})}\Big\}\\
&\equiv c_{13}(T)F(T). \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

Доказательство. Пусть r_1 – функция, удовлетворяющая условиям

$$r_1(y,0) = r_0(y),$$
$$\mathcal{D}_t r_1(y,0) = g(y,0) + \boldsymbol{w}_0(y)\cdot \boldsymbol{N}(y) \equiv r_0'(y)$$

и оценке

$$|r_1|_{G_T}^{(3+\alpha,3/2+\frac{\alpha}{2})} + |\mathcal{D}_t r_1|_{G_T}^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})} \leqslant c\big\{|r_0|_{\mathcal{G}}^{(3+\alpha)} + |r_0'|_{\mathcal{G}}^{(2+\alpha)}\big\}. \tag{2.17}$$

Такая r_1 существует. Действительно, мы можем найти эту функцию как решение гиперболического уравнения с начальными данными $r_1^*(y,0) = r_0^*(y)$, $\mathcal{D}_t r_1^* = {r'}_0^*$, где r_0^*, ${r'}_0^*$ – продолжения начальных данных в $\mathbb{R}^3$ с сохранением класса. Тогда

$$\begin{aligned}|r_1|_{G_T}^{(3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2})} + |\mathcal{D}_t r_1|_{G_T}^{(2+\alpha,1+\alpha/2)} &\leqslant |r_1^*|_{Q_T}^{(3+\alpha,3+\alpha)} + |\mathcal{D}_t r_1^*|_{Q_T}^{(2+\alpha,2+\alpha)}\\ &\leqslant c\big\{|r_0|_{\mathcal{G}}^{(3+\alpha)} + |r_0'|_{\mathcal{G}}^{(2+\alpha)}\big\}.\end{aligned}$$

Очевидно,

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_0^{\pm} r(y,t) &= \mathcal{B}_0^{\pm} r_1(y,t) + \int_0^t \mathcal{B}_0^{\pm}\mathcal{D}_t\big(r(y,\tau) - r_1(y,\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau\\ &= \mathcal{B}_0^{\pm} r_1(y,t) + \int_0^t \mathcal{B}_0^{\pm}\Big(g(y,\tau) + \boldsymbol{w}(y,\tau)\cdot\boldsymbol{N}(y) - \mathcal{D}_t r_1(y,\tau)\Big)\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

Следовательно, система (2.5) может быть преобразована к виду:

$$\begin{aligned}
&\bar\rho\big(\mathcal{D}_t\boldsymbol{w} + 2\omega(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{w})\big) - \bar\mu\nabla^2\boldsymbol{w} + \nabla p_1 = \bar\rho\boldsymbol{f}, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{w} = f \quad \text{в } D_T,\\
&\qquad \boldsymbol{w}(y,0) = \boldsymbol{w}_0(y) \quad \text{в } \cup\mathcal{F}^{\pm},\\
&\mu^-\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{w})\boldsymbol{N}\big|_{G_T^-} = \boldsymbol{d}_\tau, \quad [\boldsymbol{w}]|_{G_T^+} = 0, \quad [\mu^{\pm}\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{w})\boldsymbol{N}]\big|_{G_T^+} = \boldsymbol{d}_\tau,\\
&\boldsymbol{N}\cdot\mathbb{T}(\boldsymbol{w},p_1)\boldsymbol{N}\big|_{G_T^-} - \sigma^-\boldsymbol{N}\cdot\Delta^-\int_0^t \boldsymbol{w}|_{G_T^-}\,\mathrm{d}\tau = d' + \sigma^-\int_0^t B'\,\mathrm{d}\tau\\
&\qquad + \rho^-\varkappa\int_0^t\Big(\mathcal{W}[\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{w}] + \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\boldsymbol{N}}\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{w}\Big)\,\mathrm{d}\tau + \sigma^-\nabla_{\mathcal{G}}\mathcal{H}\cdot\int_0^t\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}\tau \qquad (2.18)\\
&\qquad - \sigma^-\omega^2\rho^-\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{y}'\int_0^t\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{N}\,\mathrm{d}\tau + 2\sigma^-\int_0^t\nabla_{\mathcal{G}}\boldsymbol{w}:\nabla_{\mathcal{G}}\boldsymbol{N}\,\mathrm{d}\tau \quad \text{на } G_T^-,\\
&[\boldsymbol{N}\cdot\mathbb{T}(\boldsymbol{w},p_1)\boldsymbol{N}]\big|_{G_T^+} - \sigma^+\boldsymbol{N}\cdot\Delta^+\int_0^t\boldsymbol{w}|_{G_T^+}\,\mathrm{d}\tau = d' + \sigma^+\int_0^t B'\,\mathrm{d}\tau\\
&\qquad + \sigma^+\nabla_{\mathcal{G}}\mathcal{H}^+\cdot\int_0^t\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}\tau + [\bar\rho]\big|_{\mathcal{G}^+}\varkappa\int_0^t\Big(\mathcal{W}[\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{w}] + \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\boldsymbol{N}}\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{w}\Big)\,\mathrm{d}\tau\\
&\qquad - \sigma^+\omega^2[\bar\rho]\big|_{\mathcal{G}^+}\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{y}'\int_0^t\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{N}\,\mathrm{d}\tau + 2\sigma^+\int_0^t\nabla_{\mathcal{G}}\boldsymbol{w}:\nabla_{\mathcal{G}}\boldsymbol{N}\,\mathrm{d}\tau \quad \text{на } G_T^+,
\end{aligned}$$

где $d' = d - \mathcal{B}_0^{\pm} r_1$, $B' = -\mathcal{B}_0^{\pm}(g - \mathcal{D}_t r_1)$, $\nabla_{\mathcal{G}} = \Pi_{\mathcal{G}}\nabla$ – поверхностный градиент на $\mathcal{G}^{\pm}$; $\mathbb{S}:\mathbb{T} \equiv S_{ij}T_{ij}$. Здесь мы использовали (лемма 10.7 в [22]), что

$$\Delta^{\pm}\boldsymbol{N} = \nabla_{\mathcal{G}}\mathcal{H}^{\pm} - (\mathcal{H}^{\pm^2} - 2\mathcal{K}^{\pm})\boldsymbol{N}.$$

Мы можем применить теорему 2.1, сформулированную для ограниченной области, к задаче (2.18), чтобы установить ее разрешимость, при этом дополнительные члены $2\omega(\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{w})$ и

$$\begin{aligned}[\bar\rho]\big|_{\mathcal{G}^{\pm}}\varkappa\int_0^t \big(\mathcal{W}[\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{w}] + \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\boldsymbol{N}}\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{w}\big)\,\mathrm{d}\tau + \sigma^{\pm}\nabla_{\mathcal{G}}\mathcal{H}\cdot\int_0^t \boldsymbol{w}\,\mathrm{d}\tau \\ - \sigma^{\pm}\omega^2[\bar\rho]|_{\mathcal{G}^{\pm}}\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{y}'\int_0^t \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{N}|_{\mathcal{G}^{\pm}}\,\mathrm{d}\tau + 2\sigma^{\pm}\int_0^t \nabla_{\mathcal{G}}\boldsymbol{w}(y,t):\nabla_{\mathcal{G}}\boldsymbol{N}(y)|_{\mathcal{G}^{\pm}}\,\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

являются слабыми и не имеют существенного влияния на конечный результат. Действительно, рассмотрим, например, члены, связанные с самогравитацией:

$$|\mathcal{W}[\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{N}]|_{G_T}^{(\alpha,\alpha/2)} \leqslant c|\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{N}|_{G_T}^{(\alpha,\alpha/2)} \leqslant c|\boldsymbol{w}|_{G_T}^{(\alpha,\alpha/2)}|\boldsymbol{N}|_{\mathcal{G}}^{(\alpha)}, \tag{2.19}$$

$$\Big|\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\boldsymbol{N}}\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{N}\Big|_{G_T}^{(\alpha,\alpha/2)} \leqslant c|\mathcal{U}|_{\mathcal{G}}^{(1+\alpha)}|\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{N}|_{G_T}^{(\alpha,\alpha/2)} \leqslant c|\boldsymbol{w}|_{G_T}^{(\alpha,\alpha/2)}. \tag{2.20}$$

Аналогично можно оценить и другие члены. Итак, неравенство (2.15) вместе с (2.17), (2.19), (2.20) влечет за собой оценку (2.16). □

Теперь рассмотрим однородную задачу (2.7) с $\boldsymbol{w}_0$ и r_0, удовлетворяющими условиям ортогональности (2.8), (2.9). Экспоненциальные L_2-оценки $\boldsymbol{w}$ и r были получены в [15] на основе разложения (2.10).

Предложение 2.3. *Предположим, что форма*

$$R_0(r) = \int_{\mathcal{G}} r\mathcal{B}_0^{\pm} r\,\mathrm{d}\mathcal{G} \tag{2.21}$$

положительно определена, т. е. для произвольного $r(x)$, удовлетворяющего (2.8),

$$c^{-1}\|r\|^2_{W_2^1(\mathcal{G})} \leqslant R_0(r) \leqslant c\|r\|^2_{W_2^1(\mathcal{G})}. \tag{2.22}$$

Тогда решение (2.7) – (2.9) подчиняется неравенству

$$\|e^{\beta_1 t}\boldsymbol{w}(\cdot,t)\|^2_{\mathcal{F}} + \|e^{\beta_1 t} r(\cdot,t)\|^2_{W_2^1(\mathcal{G})} \leqslant c\big\{\|\boldsymbol{w}_0\|^2_{\mathcal{F}} + \|r_0\|^2_{W_2^1(\mathcal{G})}\big\}, \quad t>0, \tag{2.23}$$

где β_1, $c>0$ не зависят от t.

Замечание 2.1. *Заметим, что условие* (2.22) *совпадает с положительностью второй вариации потенциальной энергии*

$$G(r) = \sigma^+|\Gamma_t^+| + \sigma^-|\Gamma_t^-| - \frac{\omega^2}{2}\int_{\Omega_t}\rho^{\pm}|x'|^2\,\mathrm{d}x - \frac{\varkappa}{2}\int_{\Omega_t}\rho^{\pm}U\,\mathrm{d}x - p_0^+|\Omega_t^+| - p_0^-|\Omega_t^-|$$

для заданных объемов $\Omega_t^{\pm}$. *Её можно рассчитать согласно* (2.3) (*см.* [*15*, *7*, *9*]). *С учетом уравнений* (1.8) *окончательно получаем*

$$\begin{aligned}\delta_0^2 G(r) = &\int_{\mathcal{G}^-}\Big\{\sigma^-|\nabla_{\mathcal{G}} r|^2 + \Big(\sigma^-(2\mathcal{K}-\mathcal{H}^2) - \rho^-\omega^2\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{x}'\Big)r^2\Big\}\,\mathrm{d}\mathcal{G}\\ &+\int_{\mathcal{G}^+}\Big\{\sigma^+|\nabla_{\mathcal{G}} r|^2 + \Big(\sigma^+(2\mathcal{K}-\mathcal{H}^2) - [\bar\rho]\big|_{\mathcal{G}^+}\omega^2\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{x}'\Big)r^2\Big\}\,\mathrm{d}\mathcal{G}\\ &-\varkappa\rho^-\int_{\mathcal{G}^-}\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\boldsymbol{N}}r^2\,\mathrm{d}\mathcal{G} - \varkappa[\bar\rho]\big|_{\mathcal{G}^+}\int_{\mathcal{G}^+}\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\boldsymbol{N}}r^2\,\mathrm{d}\mathcal{G}\\ &-\varkappa\rho^-\int_{\mathcal{G}^-}r(x)\mathcal{W}[r](x.t)\,\mathrm{d}\mathcal{G}_x - \varkappa[\bar\rho]\big|_{\mathcal{G}^+}\int_{\mathcal{G}^+}r(x)\mathcal{W}[r](x.t)\,\mathrm{d}\mathcal{G}_x.\end{aligned}$$

Неотрицательность второй вариации потенциала $G(r)$ *на подпространстве, состоящим из* r, *удовлетворяющих условиям ортогональности* (2.8), *гарантирует его слабую полунепрерывность снизу, откуда вместе с коэрцитивностью потенциала следует существование минимума для него. Ясно, что минимум реализуется при* $r = 0$. *Отсюда следует устойчивость фигур равновесия* $\mathcal{F}$ *и* $\mathcal{F}^+$, *определяемых равенствами* (1.8), *которые являются уравнениями Эйлера для потенциала* $G(r)$.

Такой подход соответствует вариационной постановке для задачи об устойчивости поверхностей $\mathcal{G}^{\pm}$.

Теорема 2.3 (**Глобальная разрешимость линейной однородной задачи**)**.** *Мы предполагаем, что оценка* (2.22) *верна для функционала* $R_0(r)$, *определяемого формулой* (2.21), *и что* $\boldsymbol{w}_0 \in \boldsymbol{C}^{2+\alpha}(\cup\mathcal{F}^{\pm})$, $r_0 \in C^{3+\alpha}(\mathcal{G})$, $\mathcal{G} \in C^{3+\alpha}$ *с* $\alpha \in (0,1)$ *удовлетворяют условиям ортогональности* (2.8), (2.9) *и условиям согласования*

$$\begin{gathered}\nabla\cdot\boldsymbol{w}_0 = 0 \quad \text{в } \cup\mathcal{F}^{\pm},\\ [\boldsymbol{w}_0]|_{\mathcal{G}^+} = 0, \quad [\bar\mu\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{w}_0)\boldsymbol{N}]|_{\mathcal{G}^+} = 0, \quad \mu^-\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{w}_0)\boldsymbol{N}|_{\mathcal{G}^-} = 0, \qquad (2.24)\\ \big[\Pi_{\mathcal{G}}\big(-\frac{1}{\bar\rho}\nabla p_1(x,0) + \bar\nu\nabla^2\boldsymbol{w}_0(x)\big)\big]\big|_{x\in\mathcal{G}^+} = 0\end{gathered}$$

с функцией начального давления $p_0 \equiv p_1(x,0)$, *которая является решением задачи*

$$\frac{1}{\bar\rho}\nabla^2 p_0(x) = -2\omega\nabla\cdot(e_3\times\boldsymbol{w}_0) \quad \text{в } \cup\mathcal{F}^{\pm},$$

$$[p_0]|_{\mathcal{G}^+}=\Big[2\bar\mu\frac{\partial \boldsymbol{w}_0}{\partial \boldsymbol{N}}\cdot\boldsymbol{N}\Big]\Big|_{\mathcal{G}^+}+\mathcal{B}_0^+(r_0)\equiv p_{00}^+,\qquad p_0|_{\mathcal{G}^-}=2\mu^-\frac{\partial \boldsymbol{w}_0}{\partial \boldsymbol{N}}\cdot\boldsymbol{N}\Big|_{\mathcal{G}^-}+\mathcal{B}_0^-(r_0)\equiv p_{00}^-,$$
$$\Big[\frac{1}{\bar\rho}\frac{\partial p_0}{\partial \boldsymbol{N}}\Big]\Big|_{\mathcal{G}^+}=\big[\bar\nu\nabla^2\boldsymbol{w}_0\big]\big|_{\mathcal{G}^+}\equiv p_{01}^+.$$

Тогда задача (2.7) *имеет единственное решение* $(\boldsymbol{w},p_1,r)$ *такое, что* $\boldsymbol{w}\in \boldsymbol{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(D_\infty)$, $\nabla p_1\in \boldsymbol{C}^{\alpha,\alpha/2}(D_\infty)$, $p_1\in C^{(\gamma,1+\alpha)}(B_\infty)$, $r(\cdot,t)\in C^{3+\alpha}(\mathcal{G})$ *для любого* $t\in(0,\infty)$ *и выполняется неравенство*

$$\begin{aligned}|\mathrm{e}^{\beta t}\boldsymbol{w}|_{D_\infty}^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})}+|\mathrm{e}^{\beta t}\nabla p_1|_{D_\infty}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})}+|\mathrm{e}^{\beta t}p_1|_{D_\infty}^{(\gamma,1+\alpha)}+|\mathrm{e}^{\beta t}r|_{G_\infty}^{(3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2})}+|\mathrm{e}^{\beta t}\mathcal{D}_t r|_{G_\infty}^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})}\\ \leqslant c_{14}\Big\{|\boldsymbol{w}_0|_{\cup\mathcal{F}^\pm}^{(2+\alpha)}+|r_0|_{\mathcal{G}}^{(3+\alpha)}\Big\}\end{aligned}\tag{2.25}$$

с некоторым $\beta>0$.

Чтобы получить оценки гёльдеровских норм, аналогичные (2.23), мы используем локальную во времени оценку решения.

Предложение 2.4. *Пусть* $T>2$. *Решение задачи* (2.7), (2.8), (2.9) *подчиняется неравенству*

$$Y_{(t_0-1,t_0)}[\boldsymbol{w},p_1,r]\leqslant c\big\{\|\boldsymbol{w}\|_{Q_{t_0-2,t_0}}+\|r\|_{G_{t_0-2,t_0}}\big\},\tag{2.26}$$

где $2<t_0\leqslant T$, $D_{t_1,t_2}=\cup\mathcal{F}^\pm\times(t_1,t_2)$, $Q_{t_1,t_2}=\mathcal{F}\times(t_1,t_2)$, $\mathcal{F}=\overline{\mathcal{F}^+}\cup\mathcal{F}^-$, $G_{t_1,t_2}=\mathcal{G}\times(t_1,t_2)$.

Доказательство предложения 2.4. Фиксируем $t_0\in(2,T)$. Умножим (2.7) на срезающую функцию $\zeta_\lambda(t)$, гладкую, монотонную, равную нулю при $t\leqslant t_0-2+\lambda/2$ и единице при $t\geqslant t_0-2+\lambda$, где $\lambda\in(0,1]$, и такую, что для $\dot\zeta_\lambda(t)\equiv\frac{\mathrm{d}\zeta_\lambda(t)}{\mathrm{d}t}$ и $\ddot\zeta_\lambda(t)$ верны неравенства

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\big|\dot\zeta_\lambda(t)\big|\leqslant c\lambda^{-1},\quad \sup_{t\in\mathbb{R}}|\ddot\zeta_\lambda(t)|\leqslant c\lambda^{-2},\quad \langle\ddot\zeta_\lambda(t)\rangle_{\mathbb{R}}^{(\vartheta)}\leqslant c\lambda^{-2-\vartheta},\quad \forall\vartheta\in(0,1).$$

Тогда для $\boldsymbol{w}_\lambda=\boldsymbol{w}\zeta_\lambda$, $p_\lambda=p_1\zeta_\lambda$, $r_\lambda=r\zeta_\lambda$, получаем систему

$$\begin{aligned}&\bar\rho\big(\mathcal{D}_t\boldsymbol{w}_\lambda+2\omega\nabla\cdot(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{w}_\lambda)\big)-\bar\mu\nabla^2\boldsymbol{w}_\lambda+\nabla p_\lambda=\bar\rho\boldsymbol{w}\dot\zeta_\lambda,\\ &\qquad\qquad\nabla\cdot\boldsymbol{w}_\lambda=0\quad\text{в }\ \mathcal{F}^\pm,\ \ t>0,\\ &\qquad \boldsymbol{w}_\lambda(y,0)=0\quad\text{в }\ \mathcal{F},\quad r_\lambda(y,0)=0\quad\text{на }\ \mathcal{G},\\ &[\boldsymbol{w}_\lambda]|_{\mathcal{G}^+}=0,\quad [\bar\mu\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{w}_\lambda)\boldsymbol{N}]\big|_{\mathcal{G}^+}=0,\\ &[\boldsymbol{N}\cdot\mathbb{T}(\boldsymbol{w}_\lambda,p_\lambda)\boldsymbol{N}]\big|_{\mathcal{G}^+}+\mathcal{B}_0(r_\lambda)|_{\mathcal{G}^+}=0,\\ &\mu^-\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{w}_\lambda)\boldsymbol{N}\big|_{\mathcal{G}^-}=0,\qquad \boldsymbol{N}\cdot\mathbb{T}(\boldsymbol{w}_\lambda,p_\lambda)\boldsymbol{N}\big|_{\mathcal{G}^-}+\mathcal{B}_0(r_\lambda)|_{\mathcal{G}^-}=0,\\ &\mathcal{D}_t r_\lambda-\boldsymbol{w}_\lambda\cdot\boldsymbol{N}=r\dot\zeta_\lambda(t)\quad\text{на }\ \mathcal{G}.\end{aligned}\tag{2.27}$$

По теореме 2.2, примененной к системе (2.27), (2.8), (2.9), для $\boldsymbol{w}_\lambda$, p_λ, r_λ верна оценка (2.16), откуда следует, что

$$\begin{aligned}\Psi(\lambda) \equiv |\boldsymbol{w}|^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{D_{t_1+\lambda,t_0}} + |\nabla p|^{(\alpha,\alpha/2)}_{D_{t_1+\lambda,t_0}} + [\![p]\!]^{(\gamma,1+\alpha)}_{D_{t_1+\lambda,t_0}} + |r|^{(3+\alpha,3/2+\alpha/2)}_{G_{t_1+\lambda,t_0}} + |\mathcal{D}_t r|^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{G_{t_1+\lambda,t_0}} \\ \leqslant c_{13}(T)\Big\{|\boldsymbol{w}\dot{\zeta}_\lambda|^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})}_{D_{t_1+\lambda/2,t_0}} + [\![\mathbb{M}]\!]^{(\gamma,1+\alpha)}_{D_{t_1+\lambda/2,t_0}} + \langle\mathbb{M}\rangle^{(\gamma)}_{x,D_{t_1+\lambda/2,t_0}} + |r\dot{\zeta}_\lambda|^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{G_{t_1+\lambda/2,t_0}}\Big\} \quad (2.28)\end{aligned}$$

где $t_1 = t_0 - 2$, и

$$\mathbb{M}(\xi,t) = \nabla \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(\xi,y)\boldsymbol{w}\dot{\zeta}_\lambda \,\mathrm{d}y$$

с $\mathcal{E}(x,y) = \frac{-1}{4\pi|x-y|}$, при этом вектор $\boldsymbol{w}$ был продолжен во всё $\mathbb{R}^3$ так, что он обращается в нуль на бесконечности. По леммам 2.1, 2.2, которые приведены ниже, неравенство (2.28) можно продолжить следующим образом:

$$\begin{aligned}\Psi(\lambda) &\leqslant c(T)\lambda^{-2-\alpha/2}\Big\{|\boldsymbol{w}|^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})}_{D_{t_1+\lambda/2,t_0}} + |\boldsymbol{w}|^{(\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}_{t,D_{t_1+\lambda/2,t_0}} + |r|^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{G_{t_1+\lambda/2,t_0}}\Big\} \\ &\leqslant c\lambda^{-2-\alpha/2}\Big\{\theta^\gamma|\boldsymbol{w}|^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})}_{D_{t_1+\lambda/2,t_0}} + \theta\langle r\rangle^{(3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2})}_{G_{t_1+\lambda/2,t_0}} + \int\limits_{t_1}^{t_0}\big(\theta^{-\frac{7}{2}}\|\boldsymbol{w}(\cdot,\tau)\|_{2,\Omega} \\ &\qquad + \theta^{-\alpha-\frac{11}{2}}\|r(\cdot,\tau)\|_{2,\mathcal{G}}\big)\,\mathrm{d}\tau\Big\}\end{aligned}$$

с $\theta < 1$. Это приводит к неравенству

$$\Psi(\lambda) \leqslant c_1\theta\lambda^{-2-\alpha/2}\Psi(\lambda/2) + c_2\theta^{-m}\lambda^{-2-\alpha/2}K.$$

Здесь $K = \|\boldsymbol{w}\|_{Q_{t_1,t_0}} + \|r\|_{G_{t_1,t_0}}$, $m = \alpha + 11/2$.

Полагая $\theta = \delta\lambda^{2+\alpha/2} < 1$, получаем

$$\lambda^{(m+1)(2+\alpha/2)}\Psi(\lambda) \leqslant c_1\delta 2^{(m+1)(2+\alpha/2)}(\lambda/2)^{(m+1)(2+\alpha/2)}\Psi(\lambda/2) + c_2\delta^{-m}K,$$

откуда следует, что

$$\Psi(\lambda) \leqslant c_3(\delta)\lambda^{-(m+1)(2+\alpha/2)}(K + 2^{-1}K + 2^{-2}K + \ldots) \leqslant \frac{c_3\lambda^{-(m+1)(2+\alpha/2)}}{1-1/2}K,$$

если только $c_1\delta 2^{(m+1)(2+\alpha/2)} < 1/2$. При $\lambda = 1$ это неравенство совпадает с (2.26). $\square$

В [23] установлена следующая лемма об оценке градиента ньютоновского потенциала для пространств Гёльдера над $D_T \equiv \big(\Omega_0^+ \cup (\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_0^+})\big) \times (0,T)$.

Лемма 2.1. *Если $F \in C^{(0,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}(D_T)$ и обращается в нуль на бесконечности, то для градиента ньютоновского потенциала*

$$\nabla_x V(x,t) = \nabla_x \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x,y) F(y,t)\,\mathrm{d}y$$

справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |\nabla V|_{D_T}^{(\gamma,0)} &\leqslant c|F|_{D_T}, \\ |\nabla V|_{D_T}^{(\gamma,1+\alpha)} &\leqslant c\big(|F|_{D_T} + \langle F\rangle_{t,D_T}^{(\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}\big) \equiv c|F|_{D_T}^{(0,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}. \end{aligned}$$

Следующие интерполяционные неравенства доказываются аналогично [24].

Лемма 2.2. *Пусть $v \in C^{0,\frac{1+\alpha}{2}}(D_{T_0})$, $T_0 > 0$, $0 < \theta < T_0^{1/2}$. Тогда v удовлетворяет оценке*

$$\langle v\rangle_{t,D_{T_0}}^{(\frac{1+\alpha-\gamma}{2})} \leqslant 2\theta^\gamma \langle v\rangle_{t,D_{T_0}}^{(\frac{1+\alpha}{2})} + c\,\theta^{\gamma-\alpha-\frac{9}{2}} \int\limits_0^{T_0} \|v(\cdot,\tau)\|_{2,\Omega}\,\mathrm{d}\tau.$$

Функции $u \in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(D_{T_0})$ и $r \in C^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}(D_{T_0})$, $0 < \theta < \min\big\{\operatorname{diam}\{\Omega\}, T_0^{1/2}\big\}$, подчиняются неравенствам

$$\begin{aligned} \langle u\rangle_{D_{T_0}}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})} &\leqslant 2\theta^2 \langle u\rangle_{D_{T_0}}^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})} + c\,\theta^{-\alpha-\frac{7}{2}} \int\limits_0^{T_0} \|u(\cdot,\tau)\|_{2,\Omega}\mathrm{d}\tau, \\ |u|_{D_{T_0}} &\leqslant c\Big\{\theta^{2+\alpha}\langle u\rangle_{D_{T_0}}^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})} + \theta^{-\frac{7}{2}} \int\limits_0^{T_0} \|u(\cdot,\tau)\|_{2,\Omega}\,\mathrm{d}\tau\Big\}, \\ |r|_{D_{T_0}}^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})} &\leqslant c\Big\{\theta\langle r\rangle_{D_{T_0}}^{(3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2})} + \theta^{-\alpha-\frac{11}{2}} \int\limits_0^{T_0} \|r(\cdot,\tau)\|_{2,\Omega}\,\mathrm{d}\tau\Big\}. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 2.3. По теореме 2.2 и предложению 2.4 имеем

$$e^{\beta(T-j)} Y_{(T-j-1,T-j)}[\boldsymbol{w}, p_1, r] \leqslant c e^{\beta(T-j)} \Big\{\|\boldsymbol{w}\|_{Q_{T-j-2,T-j}} + \|r\|_{G_{T-j-2,T-j}}\Big\}, \quad j = 0, 1, ..., [T]-2. \tag{2.29}$$

Просуммировав (2.29) от $j = 0$ до $j = [T]$–2, получим неравенство, из которого следует, что

$$\sum_{j=0}^{j=[T]-2} Y_{(T-j-1,T-j)}[e^{\beta t}\boldsymbol{w}, e^{\beta t}p_1, e^{\beta t}r] \leqslant c \int\limits_{T-[T]}^{T} e^{\beta t}\Big(\|\boldsymbol{w}(\cdot,t)\|_\Omega + \|r(\cdot,t)\|_{\mathcal{G}}\Big)\mathrm{d}t. \tag{2.30}$$

Выберем в (2.30) $\beta \leqslant \beta_1$ из предложения 2.3, воспользуемся неравенством, эквивалентным (2.23), и добавим оценку

$$Y_{(0,2)}[\boldsymbol{w}, p_1, r] \leqslant c\Big\{|\boldsymbol{w}_0|^{(2+\alpha)}_{\cup\Omega^\pm} + |r_0|^{(3+\alpha)}_{\mathcal{G}}\Big\}.$$

Теперь, взяв супремум по $t \in (0, \infty)$, приходим к (2.25). □

3 Глобальная разрешимость нелинейной задачи

Разделим нормальную и касательную части в граничных условиях в (1.11) после преобразования (2.2) и учтём (2.4) и (2.6). Тогда эту задачу можно записать в виде [12, 25]:

$$\begin{aligned}
&\bar\rho\big(\mathcal{D}_t\boldsymbol{u} + 2\omega(\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{u})\big) - \bar\mu\nabla^2\boldsymbol{u} + \nabla q = \bar\rho\hat{\boldsymbol{f}} + \boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{u}, q, r) \equiv \boldsymbol{f}_1,\\
&\qquad\qquad\quad \nabla\cdot\boldsymbol{u} = l_2(\boldsymbol{u}, r) \qquad \text{в } \cup\mathcal{F}^\pm,\ \ t>0,\\
&\mu^-\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{N} = \boldsymbol{l}_3^-(\boldsymbol{u}, r) \quad \text{на } \mathcal{G}^-,\\
&[\bar\mu\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{N}]\big|_{\mathcal{G}^+} = \boldsymbol{l}_3^+(\boldsymbol{u}, r) \quad \text{на } \mathcal{G}^+,\\
&-q + \mu^-\boldsymbol{N}\cdot\mathbb{S}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{N} + \mathcal{B}_0^- r = l_4^-(\boldsymbol{u}, r) + l_5^-(r) \quad \text{на } \mathcal{G}^-,\\
&[\boldsymbol{u}]\big|_{\mathcal{G}^+} = 0, \quad [-q + \bar\mu\boldsymbol{N}\cdot\mathbb{S}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{N}]\big|_{\mathcal{G}^+} + \mathcal{B}_0^+ r = l_4^+(\boldsymbol{u}, r) + l_5^+(r) \quad \text{на } \mathcal{G}^+,\\
&\mathcal{D}_t r - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{N} = l_6(\boldsymbol{u}, r) \quad \text{на } \mathcal{G},\\
&\boldsymbol{u}\big|_{t=0} = \boldsymbol{u}_0 \quad \text{в } \cup\mathcal{F}^\pm, \quad r\big|_{t=0} = r_0 \quad \text{на } \mathcal{G},
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где $\boldsymbol{u}(z,t) = \tilde{\boldsymbol{v}}\big(e_r(z,t),t\big)$, $\boldsymbol{u}_0(z) = \tilde{\boldsymbol{v}}\big(e_{r_0}(z,0),0\big)$, $q(z,t) = \tilde{p}\big(e_r(z,t),t\big)$, $\hat{\boldsymbol{f}}(z,t) = \tilde{\boldsymbol{f}}\big(e_r(z,t),t\big)$,

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{u},q,r) = \bar{\mu}(\widetilde{\nabla}^2 - \nabla^2)\boldsymbol{u} + (\nabla - \widetilde{\nabla})q + \bar{\rho}\mathcal{D}_t r^*(\mathbb{L}^{-1}\boldsymbol{N}^*\cdot\nabla)\boldsymbol{u} - \bar{\rho}(\mathbb{L}^{-1}\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u},\\
&l_2(\boldsymbol{u},r) = (\nabla - \widetilde{\nabla})\cdot\boldsymbol{u} \equiv \nabla\cdot\boldsymbol{L}_2(\boldsymbol{u},r),\\
&\boldsymbol{l}_3^-(\boldsymbol{u},r) = \mu^-\Pi_{\mathcal{G}}\big(\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{N} - \tilde{\Pi}\widetilde{\mathbb{S}}(\boldsymbol{u})\tilde{\boldsymbol{n}}(e_r)\big),\\
&\boldsymbol{l}_3^+(\boldsymbol{u},r) = \big[\bar{\mu}\Pi_{\mathcal{G}}\big(\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{N} - \tilde{\Pi}\widetilde{\mathbb{S}}(\boldsymbol{u})\tilde{\boldsymbol{n}}(e_r)\big)\big]\big|_{\mathcal{G}^+},\\
&l_4^-(\boldsymbol{u},r) = \mu^-\big(\boldsymbol{N}\cdot\mathbb{S}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{N} - \tilde{\boldsymbol{n}}(e_r)\cdot\widetilde{\mathbb{S}}(\boldsymbol{u})\tilde{\boldsymbol{n}}(e_r)\big),\\
&l_4^+(\boldsymbol{u},r) = \big[\bar{\mu}\big(\boldsymbol{N}\cdot\mathbb{S}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{N} - \tilde{\boldsymbol{n}}(e_r)\cdot\widetilde{\mathbb{S}}(\boldsymbol{u})\tilde{\boldsymbol{n}}(e_r)\big)\big]\big|_{\mathcal{G}^+},\\
&l_5^-(r) = \sigma^-\int_0^1(1-s)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\Big(\mathbb{L}^{-T}(z,sr)\nabla_{\mathcal{G}}\cdot\frac{\widehat{\mathbb{L}}^T(z,sr)\boldsymbol{N}}{|\widehat{\mathbb{L}}^T(z,sr)\boldsymbol{N}|}\Big)\,\mathrm{d}s + \frac{\omega^2}{2}\rho^-|\boldsymbol{N}'|^2r^2\\
&\qquad\qquad + \varkappa\rho^-\int_0^1(1-s)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\widetilde{U}(e_{sr}(z),t)\,\mathrm{d}s,\\
&l_5^+(r) = \sigma^+\int_0^1(1-s)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\Big(\mathbb{L}^{-T}(z,sr)\nabla_{\mathcal{G}}\cdot\frac{\widehat{\mathbb{L}}^T(z,sr)\boldsymbol{N}}{|\widehat{\mathbb{L}}^T(z,sr)\boldsymbol{N}|}\Big)\,\mathrm{d}s + \frac{\omega^2}{2}[\bar{\rho}]\big|_{\mathcal{G}^+}|\boldsymbol{N}'|^2r^2\\
&\qquad\qquad + \varkappa[\bar{\rho}]\big|_{\mathcal{G}^+}\int_0^1(1-s)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\widetilde{U}(e_{sr}(z),t)\,\mathrm{d}s,\\
&l_6(\boldsymbol{u},r) = \Big(\frac{\widehat{\mathbb{L}}^T\boldsymbol{N}}{\boldsymbol{N}\cdot\widehat{\mathbb{L}}^T\boldsymbol{N}} - \boldsymbol{N}\Big)\cdot\boldsymbol{u},
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

$\mathbb{I}$ – единичная матрица, $\mathbb{L}$ – матрица преобразования Якоби (2.2):

$$
\mathbb{L}(z,r) \equiv \big\{L_{ij}\big\} = \Big\{\delta_j^i + \frac{\partial\big(r^*(z,t)N_i^*(z)\big)}{\partial z_j}\Big\}_{i,j=1}^3,
$$

$L \equiv \det\mathbb{L}$, $\widehat{\mathbb{L}} \equiv L\mathbb{L}^{-1}$. Кроме того, $\widetilde{\nabla} = \mathbb{L}^{-T}\nabla$ – преобразованный градиент ∇_x, $\mathbb{L}^{-T} \equiv (\mathbb{L}^{-1})^T$, верхний индекс T означает транспонирование, $\tilde{\boldsymbol{n}} = \frac{\widehat{\mathbb{L}}^T(z,r)\boldsymbol{N}}{|\widehat{\mathbb{L}}^T(z,r)\boldsymbol{N}|}$; $\widetilde{\mathbb{S}}(\boldsymbol{u}) = \widetilde{\nabla}\boldsymbol{u} + (\widetilde{\nabla}\boldsymbol{u})^T$ – преобразованный удвоенный тензор скорости деформации; $\tilde{\Pi}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{b}\tilde{\boldsymbol{n}}$ – проекция вектора $\boldsymbol{b}$ на касательную плоскость к $\tilde{\Gamma}_t$, $\nabla_{\mathcal{G}} = \Pi_{\mathcal{G}}\nabla$.

Заметим, что операторы $\boldsymbol{l}_1$ и l_2 имеют дивергентный вид:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{w}, s) &= \bar\rho \partial \boldsymbol{L}_{1j}(\boldsymbol{w}, s)/\partial\xi_j, \\
\boldsymbol{L}_{1j}(\boldsymbol{w}, s, r) &= \bar\nu(\widehat{L}_{ji}\widehat{L}_{mi}/L^2 - \delta_j^m)\partial\boldsymbol{w}/\partial\xi_m - \mathbb{B}^T\boldsymbol{e}_j s/\bar\rho + \partial\boldsymbol{U}(\boldsymbol{w}, s, r)/\partial\xi_j \\
&= \bar\nu(B_{ji}\widehat{L}_{mi}/L + B_{mj})\partial\boldsymbol{w}/\partial\xi_m - \mathbb{B}^T\boldsymbol{e}_j s/\bar\rho + \partial\boldsymbol{U}(\boldsymbol{w}, s, r)/\partial\xi_j, \\
\boldsymbol{U}(\xi, t) &= \int_{\cup\mathcal{F}^\pm} \mathcal{E}(\xi, \eta)\Big\{\mathcal{D}_t r^*(\mathbb{L}^{-1}\boldsymbol{N}^*\cdot\nabla)\boldsymbol{w} - (\mathbb{L}^{-1}\boldsymbol{w}\cdot\nabla)\boldsymbol{w} \\
&\qquad + \bar\nu\frac{\widehat{L}_{ki}}{L^2}\frac{\partial L}{\partial\xi_k}\frac{\widehat{L}_{mi}}{L}\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial\xi_m} - s\frac{\mathbb{L}^{-T}\nabla_\eta L}{\bar\rho L(\eta, t)}\Big\}\,d\eta, \\
l_2(\boldsymbol{w}) &= (\mathbb{I} - \mathbb{L}^{-T})\nabla\cdot\boldsymbol{w} = \nabla\cdot\boldsymbol{L}_2(\boldsymbol{w}, r), \\
\boldsymbol{L}_2(\boldsymbol{w}, r) &= -\mathbb{B}\boldsymbol{w} + \nabla V(\boldsymbol{w}), \quad \mathbb{B} \equiv \mathbb{L}^{-1} - \mathbb{I}, \\
V(\xi, t) &\equiv -\int\limits_{\cup\mathcal{F}^\pm} \frac{\mathcal{E}(\xi, \eta)}{L^2(\eta, t)}\nabla_\eta L\cdot\widehat{\mathbb{L}}\boldsymbol{w}(\eta, t)\,d\eta = -\int\limits_{\cup\mathcal{F}^\pm} \frac{\mathcal{E}(\xi, \eta)}{L(\eta, t)}\mathbb{L}^{-T}\nabla_\eta L\cdot\boldsymbol{w}(\eta, t)\,d\eta
\end{aligned}
$$

($\boldsymbol{e}_j$ – единичный вектор в направлении ξ_j, $\bar\nu = \bar\mu/\bar\rho$). Здесь мы использовали равенство $\widehat{\mathbb{L}}^T\nabla\cdot\boldsymbol{w} = \nabla\cdot\widehat{\mathbb{L}}\boldsymbol{w}$, которое следует из тождества

$$
\frac{\partial\widehat{L}_{ij}}{\partial\xi_i} = 0,
$$

справедливого для алгебраических дополнений матрицы Якоби любого преобразования.

Кроме того, выражение $\bar\rho\mathcal{D}_t l_2(\boldsymbol{u}) - \nabla\cdot\boldsymbol{f}_1$ также представимо в дивергентной форме:

$$
\begin{aligned}
\bar\rho\mathcal{D}_t l_2(\boldsymbol{u}) - \nabla\cdot\boldsymbol{f}_1 &= \bar\rho\big(\mathcal{D}_t l_2(\boldsymbol{u}) - \nabla\cdot\hat{\boldsymbol{f}}\big) - \nabla\cdot\boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{u}, q) \\
&= \nabla\cdot[\bar\rho\mathcal{D}_t\boldsymbol{L}_2(\boldsymbol{u}, r) - \bar\rho\hat{\boldsymbol{f}} - \boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{u}, q)] \\
&= -\nabla\cdot[\bar\rho\hat{\boldsymbol{f}} + \bar\rho\mathbb{B}\mathcal{D}_t\boldsymbol{u} + \bar\rho(\mathcal{D}_t\mathbb{B})\boldsymbol{u} + \bar\rho\nabla\mathcal{D}_t V(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{u}, q)] \\
&\equiv -\nabla\cdot\big(\bar\rho\mathbb{L}^{-1}\hat{\boldsymbol{f}} + \boldsymbol{l}_7(\boldsymbol{u}, q)\big)
\end{aligned}
$$

с

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{l}_7(\boldsymbol{u}, q) &= \bar\rho\mathbb{B}(\mathcal{D}_t\boldsymbol{u} - \hat{\boldsymbol{f}}) + \bar\rho(\mathcal{D}_t\mathbb{B})\boldsymbol{u} + \bar\rho\nabla\mathcal{D}_t V(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{u}, q) \\
&= -\mathbb{B}\big(2\omega\bar\rho(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{u}) - \bar\mu\nabla^2\boldsymbol{u} + \nabla q\big) + \bar\rho(\mathcal{D}_t\mathbb{B})\boldsymbol{u} + \mathbb{L}^{-1}\boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{u}, q) \equiv \frac{\partial\boldsymbol{L}_{7j}(\boldsymbol{u}, q)}{\partial\xi_j}, \\
\boldsymbol{L}_{7j}(\boldsymbol{u}, q) &= \bar\mu\mathbb{B}\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\xi_j} - \mathbb{B}\boldsymbol{e}_j q + \bar\rho\mathbb{L}^{-1}\boldsymbol{L}_{1j} + \frac{\partial\boldsymbol{W}}{\partial\xi_j}, \quad j = 1, 2, 3, \qquad (3.3) \\
\boldsymbol{W}(\xi, t) &= -\int\limits_{\cup\mathcal{F}^\pm}\mathcal{E}(\xi, \eta)\Big\{\frac{\partial\mathbb{B}}{\partial\eta_m}\Big(\bar\mu\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\eta_m} - \boldsymbol{e}_m q + \bar\rho\boldsymbol{L}_{1m}\Big) + 2\omega\bar\rho\mathbb{B}(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{u}) - \bar\rho(\mathcal{D}_t\mathbb{B})\boldsymbol{u}\Big\}\mathrm{d}\eta.
\end{aligned}
$$

Мы предполагаем выполнение ограничений (1.4). Условия (1.12), (1.13) могут быть выражены через r следующим образом (см. [26]):

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{G}^\pm}\varphi^\pm(z,r)\,\mathrm{d}\mathcal{G}=0 \qquad \text{(закон сохранения массы)},\\
&\rho^-\int_{\mathcal{G}^-}\boldsymbol{\psi}^-(z,r)\,\mathrm{d}\mathcal{G}+[\bar\rho]\big|_{\mathcal{G}^+}\int_{\mathcal{G}^+}\boldsymbol{\psi}^+(z,r)\,\mathrm{d}\mathcal{G}=0\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(сохранение положения барицентра)},\\
&\int_{\mathcal{F}}\bar\rho\boldsymbol{u}(z,t)L(z,r)\,\mathrm{d}z=0 \qquad \text{(сохранение импульса)},\\
&\int_{\mathcal{F}}\bar\rho\boldsymbol{u}(z,t)\cdot\boldsymbol{\eta}_j(e_r)L(z,r)\,\mathrm{d}z+\omega\int_{\mathcal{F}}\bar\rho\boldsymbol{\eta}_3(e_r)\cdot\boldsymbol{\eta}_j(e_r)L(z,r)\,\mathrm{d}z\\
&\quad=\int_{\mathcal{F}}\bar\rho\boldsymbol{\eta}_3(z)\cdot\boldsymbol{\eta}_j(z)\,\mathrm{d}z \quad j=1,2,3, \quad \text{(сохранение углового момента)},
\end{aligned}\tag{3.4}$$

где

$$\begin{aligned}
\varphi^\pm(z,r)&=r-\frac{r^2}{2}\mathcal{H}^\pm(z)+\frac{r^3}{3}\mathcal{K}^\pm(z),\\
\boldsymbol{\psi}^\pm(z,r)&=\varphi^\pm(z,r)\boldsymbol{z}+\boldsymbol{N}(z)\Big(\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3}\mathcal{H}^\pm(z)+\frac{r^4}{4}\mathcal{K}^\pm(z)\Big).
\end{aligned}$$

Предложение 3.1. *Для произвольных чисел $l^\pm$, векторов $\boldsymbol{M}=(M_1,M_2,M_3)$, $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m}$, функции $f_0\in C^{1+\alpha}(\cup\mathcal{F}^\pm)$ и векторного поля $\boldsymbol{b}_0\in \boldsymbol{C}^{1+\alpha}(\mathcal{G})$ существуют $r\in C^{3+\alpha}(\mathcal{G})$ и $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{C}^{2+\alpha}(\cup\mathcal{F}^\pm)$, удовлетворяющие условиям*

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{G}^-}r(z)\,\mathrm{d}\mathcal{G}=l^-,\quad \int_{\mathcal{G}^+}r(z)\,\mathrm{d}\mathcal{G}=l^+,\\
&\rho^-\int_{\mathcal{G}^-}r(z)\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}\mathcal{G}+[\bar\rho]|_{\mathcal{G}^+}\int_{\mathcal{G}^+}r(z)\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}\mathcal{G}=\boldsymbol{l},
\end{aligned}\tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{F}}\bar\rho\boldsymbol{u}(z)\,\mathrm{d}z=\boldsymbol{m},\\
&\int_{\mathcal{F}}\bar\rho\boldsymbol{u}(z)\cdot\boldsymbol{\eta}_j(z)\,\mathrm{d}z+\omega\Big(\rho^-\int_{\mathcal{G}^-}r(z)\boldsymbol{\eta}_3(z)\cdot\boldsymbol{\eta}_j(z)\,\mathrm{d}\mathcal{G}\\
&\qquad\qquad+[\bar\rho]|_{\mathcal{G}^+}\int_{\mathcal{G}^+}r(z)\boldsymbol{\eta}_3(z)\cdot\boldsymbol{\eta}_j(z)\,\mathrm{d}\mathcal{G}\Big)=M_j,\quad j=1,2,3,\\
&\nabla\cdot\boldsymbol{u}=f_0 \quad \text{в } \cup\mathcal{F}^\pm,\quad \boldsymbol{b}_0\cdot\boldsymbol{n}_0=0 \ \text{на}\ \mathcal{G}^\pm,\\
&\mu^-\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{N}=\boldsymbol{b}_0 \quad \text{на } \mathcal{G}^-,\qquad [\boldsymbol{u}]|_{\mathcal{G}^+}=0,\quad [\bar\mu\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{N}]|_{\mathcal{G}^+}=\boldsymbol{b}_0 \quad \text{на } \mathcal{G}^+
\end{aligned}$$

и неравенству

$$|r|_{\mathcal{G}}^{(3+\alpha)}+|\boldsymbol{u}|_{\cup\mathcal{F}^\pm}^{(2+\alpha)}\leqslant c\Big(|l^+|+|l^-|+|\boldsymbol{l}|+|\boldsymbol{m}|+|\boldsymbol{M}|+|f_0|_{\cup\mathcal{F}^\pm}^{(1+\alpha)}+|\boldsymbol{b}_0|_{\mathcal{G}}^{(1+\alpha)}\Big).\tag{3.6}$$

Доказательство. Пусть

$$\begin{aligned} r(z) &= \frac{l^- \boldsymbol{N}(z)\cdot \boldsymbol{z}}{3|\mathcal{F}|} + \frac{C^-}{|\mathcal{F}|}\boldsymbol{l}\cdot \boldsymbol{N}(z), \quad z\in \mathcal{G}^-, \\ r(z) &= \frac{l^+ \boldsymbol{N}(z)\cdot \boldsymbol{z}}{3|\mathcal{F}^+|} + \frac{C^+}{|\mathcal{F}^+|}\boldsymbol{l}\cdot \boldsymbol{N}(z), \quad z\in \mathcal{G}^+. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Так как $\boldsymbol{l}$ – постоянный вектор, то

$$\int_{\mathcal{G}^\pm} \boldsymbol{l}\cdot \boldsymbol{N}(z)\,\mathrm{d}\mathcal{G} = 0.$$

Кроме того,

$$\int_{\mathcal{G}^-} \boldsymbol{N}\cdot \boldsymbol{z}\,\mathrm{d}\mathcal{G} = \int_{\mathcal{F}} \nabla\cdot \boldsymbol{z}\,\mathrm{d}z = 3|\mathcal{F}|.$$

Таким образом, первая строка в (3.5) выполняется.

Учитём, что

$$\begin{aligned} \rho^- \int_{\mathcal{G}^-} r(z)\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}\mathcal{G} &= \frac{\rho^- l^-}{3|\mathcal{F}|}\int_{\mathcal{F}} \Big(\nabla\cdot(z_1\boldsymbol{z}), \nabla\cdot(z_2\boldsymbol{z}), \nabla\cdot(z_3\boldsymbol{z})\Big)\,\mathrm{d}z \\ &+ \frac{\rho^- C^-}{|\mathcal{F}|}\int_{\mathcal{F}} \Big(\nabla\cdot(z_1\boldsymbol{l}), \nabla\cdot(z_2\boldsymbol{l}), \nabla\cdot(z_3\boldsymbol{l})\Big)\,\mathrm{d}z = \frac{4\rho^- l^-}{3|\mathcal{F}|}\int_{\mathcal{F}} \boldsymbol{z}\,\mathrm{d}z + \rho^- C^- \boldsymbol{l}. \end{aligned}$$

Ввиду сохранения центра масс вторая строка в соотношениях (3.5) для (3.7) выполняется, если $\rho^- C^- + [\bar\rho]|_{\mathcal{G}^+} C^+ = 1$. Итак, положим

$$C^- = \frac{\rho^-}{\rho^{-2} + [\bar\rho]|^2_{\mathcal{G}^+}}, \quad C^+ = \frac{[\bar\rho]|_{\mathcal{G}^+}}{\rho^{-2} + [\bar\rho]|^2_{\mathcal{G}^+}}.$$

Далее построим вектор $\boldsymbol{u}_1$, удовлетворяющий уравнениям

$$\begin{aligned} &\nabla\cdot \boldsymbol{u}_1 = f_0 \quad \text{в } \cup\mathcal{F}^\pm, \\ &[\boldsymbol{u}_1]|_{\mathcal{G}^+} = 0, \qquad \boldsymbol{u}_1\cdot \boldsymbol{N}|_{\mathcal{G}^-} = f_1 \quad \text{на } \mathcal{G}^-, \end{aligned} \tag{3.8}$$

где

$$f_1(z) = \frac{\boldsymbol{N}(z)\cdot \boldsymbol{z}}{3|\mathcal{F}|}\int_{\mathcal{F}} f_0(z)\,\mathrm{d}z + \frac{1}{|\mathcal{F}|}\boldsymbol{K}^-\cdot \boldsymbol{N}(z), \quad z\in \mathcal{G}^-,$$

с некоторым вектором $\boldsymbol{K}^-$, определённым ниже. В качестве решения (3.8) можно взять $\boldsymbol{u}_1 = \nabla\Psi$ с функцией Ψ такой, что

$$\begin{aligned} &\nabla^2\Psi = f_0 \quad \text{в } \cup\mathcal{F}^\pm, \\ &[\Psi]|_{\mathcal{G}^+} = 0, \quad \Big[\frac{\partial\Psi}{\partial \boldsymbol{N}}\Big]\Big|_{\mathcal{G}^+} = 0, \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial \boldsymbol{N}}\Big|_{\mathcal{G}^-} = f_1 \quad \text{на } \mathcal{G}^-. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Поскольку выполнено условие совместности

$$\int_{\mathcal{G}^-} f_1(z)\,\mathrm{d}\mathcal{G} = \int_{\mathcal{F}} f_0(z)\,\mathrm{d}z,$$

то существует Ψ, удовлетворяющая (3.9) и неравенству (см. [27] или [13], §9)

$$|\Psi|^{(3+\alpha)}_{\cup\mathcal{F}^\pm} \leqslant c\big(|f_0|^{(1+\alpha)}_{\cup\mathcal{F}^\pm} + |f_1|^{(2+\alpha)}_{\mathcal{G}}\big). \tag{3.10}$$

Из соотношений

$$\int_{\mathcal{F}} \bar\rho(\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}z = -\int_{\mathcal{F}} \bar\rho\boldsymbol{u}_1\,\mathrm{d}z + \rho^-\int_{\mathcal{G}^-}(\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{N})\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}\mathcal{G} + [\bar\rho]|_{\mathcal{G}^+}\int_{\mathcal{G}^+}(\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{N})\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}\mathcal{G}$$

заключаем, что

$$\int_{\mathcal{F}} \bar\rho\boldsymbol{u}_1\,\mathrm{d}z = -\int_{\mathcal{F}} \bar\rho f_0\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}z + \rho^-\boldsymbol{K}^- + [\bar\rho]|_{\mathcal{G}^+}\boldsymbol{K}^+ = \boldsymbol{m}$$

при

$$\boldsymbol{K}^- = \frac{\rho^-}{\rho^{-2} + [\bar\rho]|^2_{\mathcal{G}^+}}\Big(\boldsymbol{m} + \int_{\mathcal{F}}\bar\rho f_0\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}z\Big), \quad \boldsymbol{K}^+ = \frac{[\bar\rho]|_{\mathcal{G}^+}}{\rho^{-2} + [\bar\rho]|^2_{\mathcal{G}^+}}\Big(\boldsymbol{m} + \int_{\mathcal{F}}\bar\rho f_0\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}z\Big).$$

Отметим, что $\int_{\mathcal{G}^-}(\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{N})\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}\mathcal{G} = \int_{\mathcal{G}^-} f_1\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}\mathcal{G} = \boldsymbol{K}^-$. В силу (3.10) $\boldsymbol{u}_1$ подчиняется неравенству

$$|\boldsymbol{u}_1|^{(2+\alpha)}_{\cup\mathcal{F}^\pm} \leqslant c\big(|f_0|^{(1+\alpha)}_{\cup\mathcal{F}^\pm} + |\boldsymbol{m}|\big).$$

Теперь найдем векторное поле $\boldsymbol{u}_2$, удовлетворяющее соотношениям

$$\begin{aligned}
&\mu^-\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{N} = \boldsymbol{b}_0(z) - \mu^-\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{N} \equiv \boldsymbol{b}'(z), \quad z\in\mathcal{G}^-,\\
&[\bar\mu\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{N}]|_{\mathcal{G}^+} = \boldsymbol{b}_0(z) - [\bar\mu\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{N}]|_{\mathcal{G}^+} \equiv \boldsymbol{b}'(z), \quad z\in\mathcal{G}^+.
\end{aligned}$$

Следуя [12], положим $\boldsymbol{u}_2 = \mathrm{rot}\boldsymbol{\Phi}(z)$, где $\boldsymbol{\Phi}\in\boldsymbol{C}^{3+\alpha}(\cup\mathcal{F}^\pm)$,

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Phi}(z) = \frac{\partial\boldsymbol{\Phi}(z)}{\partial\boldsymbol{N}} = 0, \quad \frac{\partial^2\boldsymbol{\Phi}(z)}{\partial\boldsymbol{N}^2} = \boldsymbol{b}'(z)\times\boldsymbol{N}, \quad z\in\mathcal{G}^-,\\
&\boldsymbol{\Phi}(z) = \frac{\partial\boldsymbol{\Phi}(z)}{\partial\boldsymbol{N}} = 0, \quad \Big[\bar\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{\Phi}(z)}{\partial\boldsymbol{N}^2}\Big]\Big|_{\mathcal{G}^+} = \boldsymbol{b}'(z)\times\boldsymbol{N}, \quad z\in\mathcal{G}^+,
\end{aligned}$$

и потребуем, чтобы

$$|\boldsymbol{\Phi}|^{(3+\alpha)}_{\mathcal{F}^\pm} \leqslant c|\boldsymbol{b}'|^{(1+\alpha)}_{\mathcal{G}^\pm} \leqslant c\big\{|\boldsymbol{b}_0|^{(1+\alpha)}_{\mathcal{G}^\pm} + |\boldsymbol{u}_1|^{(2+\alpha)}_{\cup\mathcal{F}^\pm}\big\}.$$

Определим

$$\boldsymbol{u}_3(z) = \sum_{k=1}^{3}\widehat{M}_k\mathrm{rot}\boldsymbol{e}_iA(z),$$

где $A \in C_0^\infty(\mathcal{F}^-)$, $\rho^- \int_{\mathcal{F}^-} A(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}$ и

$$\widehat{M_k} = M_k - \int_{\mathcal{F}} \bar\rho(\boldsymbol{u}_1(z) + \boldsymbol{u}_2(z)) \cdot \boldsymbol{\eta}_k(z)\,\mathrm{d}z - \omega\Big(\rho^- \int_{\mathcal{G}^-} r\boldsymbol{\eta}_3 \cdot \boldsymbol{\eta}_k\,\mathrm{d}\mathcal{G} + [\bar\rho]|_{\mathcal{G}^+} \int_{\mathcal{G}^+} r\boldsymbol{\eta}_3 \cdot \boldsymbol{\eta}_k\,\mathrm{d}\mathcal{G}\Big).$$

Окончательно имеем: $\int_{\mathcal{F}} \bar\rho \boldsymbol{u}_3(z) \cdot \boldsymbol{\eta}_j(z)\,\mathrm{d}z = \widehat{M}_j$ и

$$|\boldsymbol{u}_3|^{(2+\alpha)}_{\cup\mathcal{F}^\pm} \leqslant c|\widehat{\boldsymbol{M}}|.$$

Теперь можно заключить, что функция r, определенная (3.7) и вектор $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3$ удовлетворяют всем необходимым требованиям. □

Положим $D_T \equiv \cup\mathcal{F}^\pm \times (0,T)$, $Q_T \equiv \mathcal{F} \times (0,T)$, $G_T \equiv \cup\mathcal{G}^\pm \times (0,T)$.

Теорема 3.1 (Локальная разрешимость нелинейной задачи). *Пусть $\Gamma \in C^{3+\alpha}$, $\boldsymbol{f}, \mathcal{D}_x\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}^{\alpha,\frac{1+\alpha-\gamma}{2}}(Q_{T_0})$, $\boldsymbol{u}_0 \in \boldsymbol{C}^{2+\alpha}(\cup\mathcal{F}^\pm)$ для некоторых $\alpha, \gamma \in (0,1)$, $\gamma < \alpha$, $T_0 < \infty$. Предположим, что выполнены условия согласования:*

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot \boldsymbol{u}_0 = l_2(\boldsymbol{u}_0, r_0) \quad \text{в } \cup\mathcal{F}^\pm, \qquad \mu^-\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{u}_0)\boldsymbol{N} = \boldsymbol{l}_3^-(\boldsymbol{u}_0, r_0) \quad \text{на } \mathcal{G}^-,\\
&[\boldsymbol{u}_0]\big|_{\mathcal{G}^+} = 0, \quad [\bar\mu\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{u}_0)\boldsymbol{N}]\big|_{\mathcal{G}^+} = \boldsymbol{l}_3^+(\boldsymbol{u}_0, r_0) \quad \text{на } \mathcal{G}^+,\\
&\big[\Pi_{\mathcal{G}}\big(\bar\nu\nabla^2\boldsymbol{u}_0(x) - \frac{1}{\bar\rho}\nabla q_0 + \frac{1}{\bar\rho}\boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{u}_0, q_0, r_0)\big)\big]\big|_{x\in\mathcal{G}^+} = 0,
\end{aligned}$$

где $q_0 \equiv q(x,0)$ – начальная функция давления, являющаяся решением задачи

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\bar\rho}\nabla^2 q_0(x) - \frac{1}{\bar\rho}\nabla \cdot \boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{u}_0, q_0, r_0) = \hat{\boldsymbol{f}} - 2\omega\nabla \cdot (e_3 \times \boldsymbol{u}_0) + \bar\nu\nabla^2 l_2(\boldsymbol{u}_0, r_0) \quad \text{в } \cup\mathcal{F}^\pm,\\
&[q_0]|_{\mathcal{G}^+} = \Big[2\bar\mu\frac{\partial\boldsymbol{u}_0}{\partial\boldsymbol{N}} \cdot \boldsymbol{N}\Big]\Big|_{\mathcal{G}^+} + \mathcal{B}_0^+(r_0) - l_4(\boldsymbol{u}_0, r_0) - l_5(r_0),\\
&\Big[\frac{1}{\bar\rho}\frac{\partial q_0}{\partial\boldsymbol{N}}\Big]\Big|_{\mathcal{G}^+} - \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{u}_0, q_0, r_0) = \big[\bar\nu\boldsymbol{N} \cdot \nabla^2\boldsymbol{u}_0\big]\big|_{\mathcal{G}^+},\\
&q_0|_{\mathcal{G}^-} = 2\mu^-\frac{\partial\boldsymbol{u}_0}{\partial\boldsymbol{N}} \cdot \boldsymbol{N}\Big|_{\mathcal{G}^-} + \mathcal{B}_0^-(r_0) - l_4(\boldsymbol{u}_0, r_0) - l_5(r_0).
\end{aligned}$$

Тогда существует значение $\varepsilon(T_0) \ll 1$ такое, что задача (3.1) с малыми данными:

$$|\boldsymbol{u}_0|^{(2+\alpha)}_{\cup\mathcal{F}^\pm} + |r_0|^{(3+\alpha)}_{\mathcal{G}} + |\boldsymbol{f}|^{(\alpha,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}_{Q_{T_0}} + |\nabla\boldsymbol{f}|^{(\alpha,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}_{Q_{T_0}} \leqslant \varepsilon, \tag{3.11}$$

имеет единственное решение $(\boldsymbol{u}, q, r)$ на отрезке $(0, T_0]$ и выполняются неравенства

$$Y_{(0,T_0)}(\boldsymbol{u}, q, r) \leqslant c(\varepsilon)\Big\{N(\boldsymbol{u}_0, r_0) + |\boldsymbol{f}|^{(\alpha,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}_{Q_{T_0}}\Big\}, \tag{3.12}$$

$$N\big(\boldsymbol{u}(\cdot,T_0),r(\cdot,T_0)\big)\leqslant \vartheta N(\boldsymbol{u}_0,r_0)+c|\boldsymbol{f}|^{(\alpha,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}_{Q_{T_0}}, \tag{3.13}$$

где $\vartheta<1/2$,

$$Y_{(0,T)}(\boldsymbol{u},q,r)\equiv|\boldsymbol{u}|^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})}_{D_T}+|\nabla q|^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})}_{D_T}+|q|^{(\gamma,1+\alpha)}_{D_T}+|r|^{(3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2})}_{G_T}+|\mathcal{D}_t r|^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})}_{G_T}$$

и

$$N(\boldsymbol{w},\rho)\equiv|\boldsymbol{w}|^{(2+\alpha)}_{\cup\mathcal{F}^\pm}+|\rho|^{(3+\alpha)}_{\mathcal{G}}.$$

Доказательство теоремы 3.1 опирается на теорему 2.2 и на следующие оценки нелинейных членов.

Предложение 3.2. *Если*

$$|r|^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})}_{G_T}+|\mathcal{D}_t r|^{(2,1+\frac{\alpha-\gamma}{2})}_{G_T}+|\boldsymbol{u}|^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{D_T}\leqslant\delta, \tag{3.14}$$

где δ *– это некоторое малое положительное число, а* $\boldsymbol{f},\nabla\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{C}^{\alpha,\frac{1+\alpha-\gamma}{2}}(Q_{T_0})$ *удовлетворяют условию малости* (3.11)*, тогда нелинейные члены* (3.2) *и* $\hat{\boldsymbol{f}}(z,t)\equiv\tilde{\boldsymbol{f}}(e_r(z,t),t)$ *подчиняются неравенствам*

$$\begin{aligned}Z_{(0,T)}(\boldsymbol{u},q,r)\equiv{}&|\boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{u},r)|^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})}_{D_T}+|l_2(\boldsymbol{u},r)|^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{D_T}+|\mathcal{D}_t\boldsymbol{L}_2(\boldsymbol{u},r)|^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})}_{D_T}+|l_4(\boldsymbol{u},r)|_{G_T}\\&+|\boldsymbol{L}_2(\boldsymbol{u},r)|^{(\gamma,1+\alpha)}_{D_T}+|\boldsymbol{l}_3(\boldsymbol{u},r)|^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{G_T}+|l_4(\boldsymbol{u},r)|^{(\gamma,1+\alpha)}_{G_T}\\&+|\nabla_\tau l_4(\boldsymbol{u},r)|^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})}_{G_T}+|l_5(r)|_{G_T}+|l_5(r)|^{(\gamma,1+\alpha)}_{G_T}+|\nabla_\tau l_5(r)|^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})}_{G_T}\\&+|l_6(\boldsymbol{u},r)|^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{G_T}+|\mathbb{M}|^{(\gamma,1+\alpha)}_{D_T}+\langle\mathbb{M}\rangle^{(\gamma)}_{x,D_T}\\\leqslant{}& c_1\Big\{\big(1+|\mathcal{D}_t r^*|^{(1,0)}_{D_T}\big)|\boldsymbol{f}|^{(1,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}_{Q_T}+Y^2_{(0,T)}(\boldsymbol{u},q,r)\Big\},\end{aligned} \tag{3.15}$$

где $\nabla\cdot\mathbb{M}=-\bar{\rho}\mathbb{L}^{-1}\hat{\boldsymbol{f}}-\boldsymbol{l}_7$, *и*

$$|\hat{\boldsymbol{f}}|^{(\alpha,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}_{Q_T}\leqslant c\Big\{|\boldsymbol{f}|^{(\alpha,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}_{Q_T}+\big(|\nabla r|_{G_T}+|\mathcal{D}_t r^*|_{Q_T}\big)|\nabla\boldsymbol{f}|_{Q_T}\Big\}.$$

Если $(\boldsymbol{u},r)$ *и* $(\boldsymbol{u}',r')$ *удовлетворяют* (3.14)*, тогда*

$$\begin{aligned}Z_{(0,T)}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}',q-q',r-r')&\leqslant c(\delta+\varepsilon)Y_{(0,T)}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}',q-q',r-r'),\\|\hat{\boldsymbol{f}}-\hat{\boldsymbol{f}}'|^{(\alpha,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}_{Q_T}&\leqslant c\varepsilon Y_{(0,T)}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}',q-q',r-r'),\end{aligned} \tag{3.16}$$

где $\hat{\boldsymbol{f}}'=\tilde{\boldsymbol{f}}(e_{r'}(z,t),t)$.

Доказательство. Оценим, например, член $\boldsymbol{l}_1$. По виду $\mathbb{L}$ легко видеть, что первое слагаемое в $\boldsymbol{l}_1$ содержит производные второго порядка, только умноженные на функции от $\nabla r(z,t)$. Поэтому можно сделать вывод, что

$$|\bar{\mu}(\widetilde{\nabla}^2-\nabla^2)\boldsymbol{u}|_{D_T}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})}\leqslant c\big(|r^*|_{D_T}^{(1+\alpha,\frac{\alpha}{2})}+|\nabla r^*|_{D_T}^{(1+\alpha,\frac{\alpha}{2})}\big)|\boldsymbol{u}|_{D_T}^{(2+\alpha,\frac{\alpha}{2})}\leqslant cY^2_{(0,T)}(\boldsymbol{u},q,r).$$

Член $(\nabla-\widetilde{\nabla})q$ может быть оценен аналогичным образом. Третье слагаемое удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned}|\bar{\rho}\mathcal{D}_t r^*(\mathbb{L}^{-1}\boldsymbol{N}^*\cdot\nabla)\boldsymbol{u}|_{D_T}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})}&\leqslant c|\mathcal{D}_t r^*|_{D_T}^{(\alpha,0)}(1+|\nabla r^*|_{D_T}^{(\alpha,0)})|\nabla\boldsymbol{u}|_{D_T}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})}\\&+|\mathcal{D}_t r^*|_{D_T}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})}(1+|\nabla r^*|_{D_T}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})})|\boldsymbol{u}|_{D_T}^{(1+\alpha,0)}\leqslant cY^2_{(0,T)}(\boldsymbol{u},q,r).\end{aligned}$$

А последнее слагаемое можно оценить так:

$$\begin{aligned}\bar{\rho}(\mathbb{L}^{-1}\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}|_{D_T}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})}&\leqslant c\Big(\big(1+|r^*|_{D_T}^{(1+\alpha,0)}\big)|\boldsymbol{u}|_{D_T}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})}+|\nabla r^*|_{D_T}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})}|\boldsymbol{u}|_{D_T}^{(\alpha,0)}\Big)|\boldsymbol{u}|_{D_T}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}\\&\leqslant c|\boldsymbol{u}|_{D_T}^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})}Y_{(0,T)}(\boldsymbol{u},q,r).\end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned}&|l_2(\boldsymbol{u},r)|_{D_T}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}+|\mathcal{D}_t\boldsymbol{L}_2(\boldsymbol{u},r)|_{D_T}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})}+|\!|\boldsymbol{L}_2(\boldsymbol{u},r)|\!|_{D_T}^{(\gamma,1+\alpha)}\\&\quad\leqslant c\Big\{|r^*|_{D_T}^{(3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2})}|\nabla\boldsymbol{u}|_{D_T}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}+\big(|\mathcal{D}_t r^*|_{D_T}^{(1+\alpha,\frac{\alpha}{2})}+|r^*|_{D_T}^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})}\big)|\boldsymbol{u}|_{D_T}^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})}\Big\}\\&\quad\leqslant cY_{(0,T)}(\boldsymbol{u},q,r)|\boldsymbol{u}|_{D_T}^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})}.\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим $\boldsymbol{l}_7(\boldsymbol{u},q,r)=\partial\boldsymbol{L}_{7j}(\boldsymbol{u},q,r)/\partial x_j$ и

$$\mathbb{M}(x,t)=-\{\boldsymbol{L}_{7j}\}_{j=1}^3-\nabla\int\limits_{\mathbb{R}^3}\bar{\rho}\mathcal{E}(x,y)\mathbb{L}^{-1}\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}y,$$

где согласно (3.3)

$$\boldsymbol{L}_{7j}(\boldsymbol{u},q)=\bar{\mu}\mathbb{B}\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\xi_j}-\mathbb{B}\boldsymbol{e}_j q+\bar{\rho}\mathbb{L}^{-1}\boldsymbol{L}_{1j}+\frac{\partial\boldsymbol{W}}{\partial\xi_j},\quad j=1,2,3,$$

$$\boldsymbol{W}(\xi,t)=-\int\limits_{\cup\mathcal{F}^\pm}\mathcal{E}(\xi,\eta)\Big\{\frac{\partial\mathbb{B}}{\partial\eta_m}\Big(\bar{\mu}\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\eta_m}-\boldsymbol{e}_m q+\bar{\rho}\boldsymbol{L}_{1m}\Big)+2\omega\bar{\rho}\mathbb{B}(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{u})-\bar{\rho}(\mathcal{D}_t\mathbb{B})\boldsymbol{u}\Big\}\mathrm{d}\eta.$$

Для оценки $\mathbb{M}$ применим лемму 2.1. Тогда имеем:

$$\begin{aligned}&|\!|\mathbb{M}|\!|_{D_T}^{(\gamma,1+\alpha)}+\langle\mathbb{M}\rangle_{x,D_T}^{(\gamma)}\leqslant c\big\{\max_j|\!|\boldsymbol{L}_{7j}|\!|_{D_T}^{(\gamma,1+\alpha)}+\max_j\langle\boldsymbol{L}_{7j}\rangle_{x,D_T}^{(\gamma)}+|\bar{\rho}\mathbb{L}^{-1}\boldsymbol{f}|_{D_T}^{(0,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}\big\}\\&\leqslant c\Big\{\Big(1+|\nabla r^*|_{D_T}^{(0,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}\Big)|\boldsymbol{f}|_{D_T}^{(0,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}+|\boldsymbol{u}|_{D_T}^{(0,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}\Big(|\mathcal{D}_t r^*|_{D_T}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}+|r^*|_{D_T}^{(2+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}\Big)\\&\qquad+\Big(|r^*|_{D_T}^{(1,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}+|\nabla\nabla r^*|_{D_T}^{(0,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}\Big)\Big(|\boldsymbol{u}|_{D_T}^{(2+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}+|q|_{D_T}^{(0,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}\Big)\Big\}\\&\leqslant c\Big\{\big(1+|\mathcal{D}_t r^*|_{D_T}^{(1,0)}\big)|\hat{\boldsymbol{f}}|_{D_T}^{(0,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}+Y^2_{(0,T)}(\boldsymbol{u},q,r)\Big\}.\end{aligned}$$

Кроме того,

$$
|l_4(\boldsymbol{u},r)|_{G_T}^{(\gamma,1+\alpha)}+|\nabla_\tau l_4(\boldsymbol{u},r)|_{G_T}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})}+|l_5(r)|_{G_T}^{(\gamma,1+\alpha)}+|\nabla_\tau l_5(r)|_{G_T}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})}+|l_6(\boldsymbol{u},r)|_{G_T}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}
$$

$$
\leqslant c\Big\{|\nabla r|_{G_T}^{(\gamma,1+\alpha)}|\boldsymbol{u}|_{D_T}^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})}
$$

$$
+|\nabla r|_{G_T}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}\big(|\nabla\nabla r|_{G_T}^{(\gamma,1+\alpha)}+|r|_{G_T}^{(3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2})}+|\boldsymbol{u}|_{D_T}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}\big)\Big\}.
$$

Некоторые детали оценки отклонений потенциала U от $\mathcal{U}$ и удвоенной средней кривизны H от $\mathcal{H}$ можно найти в [28] (предложение 3.1).

Аналогично оцениваются остальные нелинейные члены.

Наконец, если продолжить функцию $\boldsymbol{f}$ за пределы Ω с сохранением класса и воспользоваться соотношением

$$
\boldsymbol{f}\big(e_r(y,t),t\big)-\boldsymbol{f}\big(e_r(y,t-\tau),t\big)=
$$

$$
=\int\limits_0^1\nabla\boldsymbol{f}\Big(e_r(y,t)-\lambda\int\limits_0^\tau\boldsymbol{N}^*(y)\mathcal{D}_t r^*(y,t-\tau')\,\mathrm{d}\tau',t\Big)\,\mathrm{d}\lambda\int\limits_0^\tau\boldsymbol{N}^*(y)\mathcal{D}_t r^*(y,t-\tau')\,\mathrm{d}\tau',
$$

то можно получить неравенство

$$
|\hat{\boldsymbol{f}}|_{Q_T}^{(\alpha,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}\leqslant c\Big\{|\boldsymbol{f}|_{Q_T}^{(\alpha,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}+\big(|\nabla r|_{G_T}+|\mathcal{D}_t r|_{G_T}\big)|\nabla\boldsymbol{f}|_{Q_T}\Big\}.
$$

Собирая предыдущие оценки, мы приходим к (3.15).

Неравенство (3.16) доказывается применением приведенной выше оценки к

$$
\boldsymbol{f}\big(e_r,t\big)-\boldsymbol{f}\big(e_{r'},t\big)=\int_0^1\nabla\boldsymbol{f}\Big(e_{r'}+\lambda\big(\boldsymbol{N}^*(y,t)(r-r')\big),t\Big)\,\mathrm{d}\lambda\boldsymbol{N}^*(y,t)(r-r').
$$

□

На основании предложения 3.2 можно доказать теорему 3.1 последовательными приближениями аналогично [12].

Теперь сформулируем основной результат работы.

Теорема 3.2 (Глобальная разрешимость нелинейной задачи). *Пусть* $\varkappa\geqslant 0$, $[\bar\rho]\big|_{\mathcal{G}^+}>0$. *Допустим выполнение всех условий теоремы* 3.1. *Предположим также, что условие малости*

$$
|\boldsymbol{u}_0|_{\cup\mathcal{F}^\pm}^{(2+\alpha)}+|r_0|_{\mathcal{G}}^{(3+\alpha)}\leqslant\varepsilon\ll 1, \tag{3.17}
$$

а также неравенство (2.22), *ограничения* (3.4) *при* $t=0$ *и* (1.4) *тоже выполнены. Кроме того, мы предполагаем, что* $\boldsymbol{f}$ *имеет малые нормы*:

$$
|e^{bt}\boldsymbol{f}|_{Q_\infty}^{(1,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}\leqslant\varepsilon,\quad b>0,\qquad|\mathcal{D}_x^{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{f}|_{Q_\infty}^{(\alpha,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}\leqslant\varepsilon,\quad|\boldsymbol{i}|=1, \tag{3.18}
$$

где $Q_\infty = \mathcal{F} \times (0,\infty)$, $T_0 > 2$ *– подходящее фиксированное число.*

Тогда задача (3.1) *имеет единственное решение, определенное на интервале времени* $t > 0$, *и*

$$\begin{aligned}|\mathrm{e}^{at}\boldsymbol{u}|_{D_\infty}^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})} + |\mathrm{e}^{at}\nabla q|_{D_\infty}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})} + \|\mathrm{e}^{at}q\|_{D_\infty}^{(\gamma,1+\alpha)} + |\mathrm{e}^{at}r|_{G_\infty}^{(3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2})} + |\mathrm{e}^{at}\mathcal{D}_t r|_{G_\infty}^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})} \\ \leqslant c_1(\varepsilon)\Big\{|\mathrm{e}^{at}\boldsymbol{f}|_{Q_\infty}^{(1,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})} + |\boldsymbol{u}_0|_{\cup\mathcal{F}^\pm}^{(2+\alpha)} + |r_0|_{\mathcal{G}}^{(3+\alpha)}\Big\} \qquad (3.19)\end{aligned}$$

с некоторым $0 < a < b$, *причём* $c_1(\varepsilon)$ *является ограниченной функцией от* ε.

Заметим, что аналогичный результат в случае $\varkappa = 0$ можно доказать без ограничения $[\bar\rho]\big|_{\mathcal{G}^+} > 0$.

Доказательство теоремы 3.2. Запишем условия (3.4) в виде

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{G}^\pm} r^\pm \,\mathrm{d}\mathcal{G} = \int_{\mathcal{G}^\pm}(r^\pm - \varphi(z,r^\pm))\,\mathrm{d}\mathcal{G}, \qquad \varphi(z,r^\pm) = \varphi^\pm(z,r^\pm) \ \text{ на } \mathcal{G}^\pm,\\
&\rho^-\int_{\mathcal{G}^-} r^-\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}\mathcal{G} + [\bar\rho]|_{\mathcal{G}^+}\int_{\mathcal{G}^+} r^+\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}\mathcal{G} = \rho^-\int_{\mathcal{G}^-}\big(r^-\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\psi}^-(z,r^-)\big)\,\mathrm{d}\mathcal{G}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + [\bar\rho]|_{\mathcal{G}^+}\int_{\mathcal{G}^+}\big(r^+\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\psi}^+(z,r^+)\big)\,\mathrm{d}\mathcal{G},\\
&\int_{\mathcal{F}}\bar\rho\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}z = \int_{\mathcal{F}}\bar\rho\boldsymbol{u}\big(1 - L(z,r)\big)\,\mathrm{d}z, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (3.20)\\
&\int_{\mathcal{F}}\bar\rho\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\eta}_j(z)\,\mathrm{d}z + \omega\Big(\rho^-\int_{\mathcal{G}_i} r\boldsymbol{\eta}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_j\,\mathrm{d}\mathcal{G} + [\bar\rho]|_{\mathcal{G}^+}\int_{\mathcal{G}_i} r\boldsymbol{\eta}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_j\,\mathrm{d}\mathcal{G}\Big)\\
&\quad = \omega\Big(\rho^-\int_{\mathcal{G}_i} r\boldsymbol{\eta}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_j\,\mathrm{d}\mathcal{G} + [\bar\rho]|_{\mathcal{G}^+}\int_{\mathcal{G}_i} r\boldsymbol{\eta}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_j\,\mathrm{d}\mathcal{G} - \int_{\widetilde\Omega_t}\rho^\pm\boldsymbol{\eta}_3(y)\cdot\boldsymbol{\eta}_j(y)\,\mathrm{d}y\Big)\\
&\qquad + \int_{\mathcal{F}}\bar\rho\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\eta}_j(z)\big(1 - L(z,r)\big)\,\mathrm{d}z + \int_{\mathcal{F}}\bar\rho\boldsymbol{\eta}_3(z)\cdot\boldsymbol{\eta}_j(z)\,\mathrm{d}z, \quad j = 1,2,3.\end{aligned}$$

Согласно предложению 3.1 можно найти функции $\boldsymbol{u}_0'', r_0''$, удовлетворяющие соотношениям

$$\int_{\mathcal{G}^\pm} r_0^{\pm''}\,\mathrm{d}\mathcal{G} = \int_{\mathcal{G}^\pm} \big(r_0^\pm - \varphi(z, r_0^\pm)\big)\,\mathrm{d}\mathcal{G} \equiv l^\pm,$$

$$\rho^- \int_{\mathcal{G}^-} r_0^{-''} \boldsymbol{z}\,\mathrm{d}\mathcal{G} + [\bar\rho]|_{\mathcal{G}^+} \int_{\mathcal{G}^+} r_0^{+''} \boldsymbol{z}\,\mathrm{d}\mathcal{G} = \rho^- \int_{\mathcal{G}^-} \big(r_0^- \boldsymbol{z} - \boldsymbol{\psi}^-(z, r_0^-)\big)\,\mathrm{d}\mathcal{G}$$

$$+ [\bar\rho]\big|_{\mathcal{G}^+} \int_{\mathcal{G}^+} \big(r_0^+ \boldsymbol{z} - \boldsymbol{\psi}^+(z, r_0^+)\big)\,\mathrm{d}\mathcal{G} \equiv \boldsymbol{l},$$

$$\int_{\mathcal{F}} \bar\rho \boldsymbol{u}_0''\,\mathrm{d}z = \int_{\mathcal{F}} \bar\rho \boldsymbol{u}_0 \big(1 - L(z, r_0)\big)\,\mathrm{d}z \equiv m, \tag{3.21}$$

$$\int_{\mathcal{F}} \bar\rho \boldsymbol{u}_0'' \cdot \boldsymbol{\eta}_j(z)\,\mathrm{d}z + \omega\Big(\rho^- \int_{\mathcal{G}^-} r_0'' \boldsymbol{\eta}_3 \cdot \boldsymbol{\eta}_j\,\mathrm{d}\mathcal{G} + [\bar\rho]\big|_{\mathcal{G}^+} \int_{\mathcal{G}^+} r_0'' \boldsymbol{\eta}_3 \cdot \boldsymbol{\eta}_j\,\mathrm{d}\mathcal{G}\Big)$$

$$= \omega\Big(\rho^- \int_{\mathcal{G}^-} r_0 \boldsymbol{\eta}_3 \cdot \boldsymbol{\eta}_j\,\mathrm{d}\mathcal{G} + [\bar\rho]\big|_{\mathcal{G}^+} \int_{\mathcal{G}_i} r_0 \boldsymbol{\eta}_3 \cdot \boldsymbol{\eta}_j\,\mathrm{d}\mathcal{G} - \int_{\widetilde\Omega_0} \rho^\pm \boldsymbol{\eta}_3(y) \cdot \boldsymbol{\eta}_j(y)\,\mathrm{d}y\Big)$$

$$+ \int_{\mathcal{F}} \bar\rho \boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}_j(z)\big(1 - L(z, r_0)\big)\,\mathrm{d}z + \int_{\mathcal{F}} \bar\rho \boldsymbol{\eta}_3(z) \cdot \boldsymbol{\eta}_j(z)\,\mathrm{d}z, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}_0'' = l_2(\boldsymbol{u}_0, r_0) \quad \text{в } \cup\mathcal{F}^\pm, \qquad [\boldsymbol{u}_0'']\big|_{\mathcal{G}^+} = 0,$$

$$\mu^- \Pi_{\mathcal{G}} \mathbb{S}(\boldsymbol{u}_0'') \boldsymbol{N}\big|_{\mathcal{G}^-} = \boldsymbol{l}_3^-(\boldsymbol{u}_0, r_0), \quad [\bar\mu \Pi_{\mathcal{G}} \mathbb{S}(\boldsymbol{u}_0'') \boldsymbol{N}]\big|_{\mathcal{G}^+} = \boldsymbol{l}_3^+(\boldsymbol{u}_0, r_0).$$

Найдём решение (3.1) в виде суммы

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{u}'', \quad q = q' + q'', \quad r = r' + r'',$$

определяя $(\boldsymbol{u}', q', r')$ как решение линейной задачи

$$\begin{aligned}
&\bar\rho\big(\mathcal{D}_t \boldsymbol{u}'(z,t) + 2\omega(\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{u}')\big) - \bar\mu \nabla^2 \boldsymbol{u}' + \nabla q' = 0, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{u}' = 0 \quad \text{в } \cup\mathcal{F}^\pm,\\
&\mu^- \Pi_{\mathcal{G}} \mathbb{S}(\boldsymbol{u}') \boldsymbol{N}\big|_{\mathcal{G}^-} = 0, \quad -q' + \mu^- \boldsymbol{N} \cdot \mathbb{S}(\boldsymbol{u}') \boldsymbol{N} + \mathcal{B}_0^- r' = 0 \quad \text{на } \mathcal{G}^-,\\
&[\boldsymbol{u}']\big|_{\mathcal{G}^+} = 0, \quad \big[\bar\mu \Pi_{\mathcal{G}} \mathbb{S}(\boldsymbol{u}') \boldsymbol{N}(z)\big]\big|_{\mathcal{G}^+} = 0,\\
&\big[-q' + \mu^- \boldsymbol{N} \cdot \mathbb{S}(\boldsymbol{u}') \boldsymbol{N}\big]\big|_{\mathcal{G}^+} + \mathcal{B}_0^+ r' = 0 \quad \text{на } \mathcal{G}^+,\\
&\mathcal{D}_t r' - \boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{N} = 0 \quad \text{на } \mathcal{G},\\
&\boldsymbol{u}'(z, 0) = \boldsymbol{u}_0'(z), \quad z \in \mathcal{F}, \quad r'(z, 0) = r_0'(z), \quad z \in \mathcal{G},
\end{aligned} \tag{3.22}$$

где $\boldsymbol{u}_0' \equiv \boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{u}_0''$, $r_0' \equiv r_0 - r_0''$. Заметим, что начальные данные $\boldsymbol{u}_0'$, r_0' удовлетворяют (2.8), (2.9) и однородным условиям согласования (2.24).

Наконец, в качестве $(\boldsymbol{u}'', q'', r'')$ возьмем решение нелинейной системы

$$
\begin{aligned}
&\bar\rho\big(\mathcal{D}_t\boldsymbol{u}'' + 2\omega(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{u}'')\big) - \bar\mu\nabla^2\boldsymbol{u}'' + \nabla q'' = \bar\rho\hat{\boldsymbol{f}} + \boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}'', q'+q'', r'+r''),\\
&\qquad\qquad\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{u}'' = l_2(\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}'', r'+r'') \quad \text{в } \cup\mathcal{F}^\pm,\ \ t>0,\\
&\mu^-\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{u}'')\boldsymbol{N} = \boldsymbol{l}_3^-(\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}'', r'+r'') \quad \text{на } \mathcal{G}^-,\\
&[\boldsymbol{u}'']\big|_{\mathcal{G}^+} = 0, \quad \big[\bar\mu\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{u}'')\boldsymbol{N}\big]\big|_{\mathcal{G}^+} = \boldsymbol{l}_3^+(\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}'', r'+r'') \quad \text{на } \mathcal{G}^+,\\
&-q'' + \mu^-\boldsymbol{N}\cdot\mathbb{S}(\boldsymbol{u}'')\boldsymbol{N} + \mathcal{B}_0^- r'' = l_4^-(\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}'', r'+r'') + l_5^-(r'+r'') \quad \text{на } \mathcal{G}^-,\\
&[-q'' + \bar\mu\boldsymbol{N}\cdot\mathbb{S}(\boldsymbol{u}'')\boldsymbol{N}]|_{\mathcal{G}^+} + \mathcal{B}_0^+ r'' = l_4^+(\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}'', r'+r'') + l_5^+(r'+r'') \quad \text{на } \mathcal{G}^+,\\
&\mathcal{D}_t r'' - \boldsymbol{u}''\cdot\boldsymbol{N} = l_6(\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}'', r'+r'') \quad \text{на } \mathcal{G},\\
&\boldsymbol{u}''\big|_{t=0} = \boldsymbol{u}_0'' \quad \text{в } \cup\mathcal{F}^\pm, \qquad r''\big|_{t=0} = r_0'' \quad \text{на } \mathcal{G}.
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

Рассмотрим ограничения (3.21). Если выполняется (3.17), то выражения

$$
\begin{aligned}
&l^\pm = \int_{\mathcal{G}^\pm}\big(r_0^\pm - \varphi(z, r_0^\pm)\big)\,\mathrm{d}\mathcal{G},\\
&\boldsymbol{l} = \rho^-\int_{\mathcal{G}^-}\big(r_0^-\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\psi}^-(z, r_0^-)\big)\,\mathrm{d}\mathcal{G} + [\bar\rho]|_{\mathcal{G}^+}\int_{\mathcal{G}^+}(r_0^+\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\psi}^+(z, r_0^+))\,\mathrm{d}\mathcal{G},\\
&\boldsymbol{m} = \int_{\mathcal{F}}\rho\boldsymbol{u}_0\big(1 - L(z, r_0)\big)\,\mathrm{d}z,\\
&M_j = \int_{\mathcal{F}}\rho\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{\eta}_j\big(1 - L(z, r_0)\big)\,\mathrm{d}z, \quad j = 1,2,3,
\end{aligned}
$$

и функции $f_0 = l_2(\boldsymbol{u}_0, r_0)$, $\boldsymbol{b}_0(z) = \boldsymbol{l}_3^\pm(\boldsymbol{u}_0, r_0)$, $z\in\mathcal{G}^\pm$, удовлетворяют неравенству

$$
|l^+| + |l^-| + |\boldsymbol{l}| + |\boldsymbol{m}| + |\boldsymbol{M}| + |f_0|_{\cup\mathcal{F}^\pm}^{(1+\alpha)} + |\boldsymbol{b}_0|_{\mathcal{G}}^{(1+\alpha)} \leqslant c\varepsilon\big(|\boldsymbol{u}_0|_{\cup\mathcal{F}^\pm}^{(2+\alpha)} + |r_0|_{\mathcal{G}}^{(3+\alpha)}\big).
$$

Значит, в силу (3.6)

$$
\begin{aligned}
&|\boldsymbol{u}_0''|_{\cup\mathcal{F}^\pm}^{(2+\alpha)} + |r_0''|_{\mathcal{G}}^{(3+\alpha)} \leqslant c\varepsilon\big(|\boldsymbol{u}_0|_{\cup\mathcal{F}^\pm}^{(2+\alpha)} + |r_0|_{\mathcal{G}}^{(3+\alpha)}\big),\\
&|\boldsymbol{u}_0'|_{\mathcal{F}}^{(2+\alpha)} + |r_0'|_{\mathcal{G}}^{(3+\alpha)} \leqslant c\big(|\boldsymbol{u}_0|_{\cup\mathcal{F}^\pm}^{(2+\alpha)} + |r_0|_{\mathcal{G}}^{(3+\alpha)}\big).
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

Более того, ввиду (3.20), (3.21) $\boldsymbol{u}_0', r_0'$ подчиняется необходимым условиям

$$
\int_{\mathcal{G}^\pm} r_0'\,\mathrm{d}\mathcal{G} = \int_{\mathcal{G}^\pm}(r_0 - r_0''^{\pm})\,\mathrm{d}\mathcal{G} = \int_{\mathcal{G}^\pm}\varphi(z, r_0)\,\mathrm{d}S = 0,
$$

$$
\rho^-\int_{\mathcal{G}^-} r_0'\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}\mathcal{G} + [\bar\rho]\big|_{\mathcal{G}^+}\int_{\mathcal{G}^+} r_0'\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}\mathcal{G} = \rho^-\int_{\mathcal{G}^-}\boldsymbol{\psi}^-(z, r_0)\,\mathrm{d}\mathcal{G} + [\bar\rho]\big|_{\mathcal{G}^+}\int_{\mathcal{G}^+}\boldsymbol{\psi}^+\,\mathrm{d}\mathcal{G} = 0,
$$

$$
\int_{\mathcal{F}}\bar\rho\boldsymbol{u}_0'\,\mathrm{d}\mathcal{G} = 0,
$$

$$\int_{\mathcal{F}} \bar{\rho}\boldsymbol{u}_0' \cdot \boldsymbol{\eta}_j(z)\,\mathrm{d}z + \omega\Big(\rho^- \int_{\mathcal{G}^-} r_0'\boldsymbol{\eta}_3 \cdot \boldsymbol{\eta}_j\,\mathrm{d}\mathcal{G} + [\bar{\rho}]|_{\mathcal{G}^+} \int_{\mathcal{G}^+} r_0'\boldsymbol{\eta}_3 \cdot \boldsymbol{\eta}_j\,\mathrm{d}S\Big) = 0.$$

По теореме 2.3 решение $(\boldsymbol{u}', q', r')$ задачи (3.22) при любом положительном T удовлетворяет неравенству

$$N\big(\boldsymbol{u}'(\cdot,T), r'(\cdot,T)\big) \equiv |\boldsymbol{u}'(\cdot,T)|^{(2+\alpha)}_{\cup\mathcal{F}^\pm} + |r'(\cdot,T)|^{(3+\alpha)}_{\mathcal{G}} \leqslant c_1\mathrm{e}^{-\beta T}\big\{|\boldsymbol{u}_0|^{(2+\alpha)}_{\cup\mathcal{F}^\pm} + |r_0|^{(3+\alpha)}_{\mathcal{G}}\big\}.$$

Зафиксируем $T = T_0$ настолько большим, что

$$c_1 e^{-\beta T_0} \leqslant \theta/2 \ll 1/2, \qquad \beta > 0.$$

Что касается задачи (3.23), то она решается итерациями, как в [12], на основе теоремы 2.2 и оценки (3.15) нелинейных членов (3.2):

$$Z_{0,T}(\boldsymbol{u}, q, r) \leqslant c\big(|\boldsymbol{f}|^{(1,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}_{Q_{T_0}} + Y^2_{0,T}(\boldsymbol{u}, q, r)\big).$$

Заметим, что неравенство малости (3.14) нулевого приближения гарантируется (3.24). Таким образом, если ε достаточно мало, то из неравенств (3.12) и (3.13) получаем

$$Y_{0,T_0}(\boldsymbol{u}'', q'', r'') \leqslant c_2(\varepsilon)\big(|\boldsymbol{f}|^{(1,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}_{Q_{T_0}} + |\boldsymbol{u}_0|^{(2+\alpha)}_{\cup\mathcal{F}^\pm} + |r_0|^{(3+\alpha)}_{\mathcal{G}}\big),$$

$$\begin{aligned} N\big(\boldsymbol{u}(\cdot,T_0), r(\cdot,T_0)\big) &\leqslant N\big(\boldsymbol{u}'(\cdot,T_0), r'(\cdot,T_0)\big) + N\big(\boldsymbol{u}''(\cdot,T_0), r''(\cdot,T_0)\big) \\ &\leqslant (\theta/2 + \vartheta)\big(|\boldsymbol{u}_0|^{(2+\alpha)}_{\cup\mathcal{F}^\pm} + |r_0|^{(3+\alpha)}_{\mathcal{G}}\big) + c|\boldsymbol{f}|^{(1,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}_{Q_{T_0}}. \end{aligned}$$

Положим $\lambda \equiv \theta/2 + \vartheta < 1$, в следствие (3.17), (3.18) отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} Y_{0,T_0}(\boldsymbol{u}, q, r) &\leqslant c\Big(|\boldsymbol{f}|^{(1,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}_{Q_{T_0}} + |\boldsymbol{u}_0|^{(2+\alpha)}_{\cup\mathcal{F}^\pm} + |r_0|^{(3+\alpha)}_{\mathcal{G}}\Big) \leqslant c\varepsilon, \\ N\big(\boldsymbol{u}(\cdot,T_0), r(\cdot,T_0)\big) &\leqslant \lambda\big(|\boldsymbol{u}_0|^{(2+\alpha)}_{\cup\mathcal{F}^\pm} + |r_0|^{(3+\alpha)}_{\mathcal{G}}\big) + c|\boldsymbol{f}|^{(1,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}_{Q_{T_0}} \leqslant C\varepsilon. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Неравенства (3.25) позволяют распространить решение $(\boldsymbol{u}, q, r)$ на интервалы $(T_0, 2T_0)$, ..., $(kT_0, (k+1)T_0)$, ... вплоть до бесконечного интервала $t > 0$ повторными применениями полученного локального результата и завершить доказательство теоремы 3.2 так же, как в [12]. Для этого воспользуемся методом математической индукции. Итак, предположим, что для $t \leqslant kT_0$ решение уже найдено. Тогда его можно определить для $t \in (kT_0, (k+1)T_0]$ как решение задачи с начальными условиями $\boldsymbol{u}(z, kT_0) = \boldsymbol{u}(z, kT_0 - 0) \equiv \boldsymbol{u}_k(z)$, $r(z, kT_0) = r(z, kT_0 - 0) \equiv r_k(z)$.

Рассмотрим случай $k = 1$. Из (3.11) и (3.12) следует, что

$$N_1 \equiv N(\boldsymbol{u}_1, r_1) \leqslant C\varepsilon,$$

следовательно, заменяя ε на $C^{-1}\varepsilon$, мы видим, что эта задача разрешима на интервале времени $(T_0, 2T_0]$ и в силу (3.25) есть оценки

$$Y_1(\boldsymbol{u}, q, r) \leqslant c\Big\{N_1 + |\boldsymbol{f}|^{(1,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}_{Q_{T_0,2T_0}}\Big\},$$

$$N_2 \leqslant \lambda N_1 + c|\boldsymbol{f}|^{(1,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}_{Q_{T_0,2T_0}} \leqslant C\varepsilon,$$

где

$$N_k \equiv N(\boldsymbol{u}_k, r_k), \qquad Y_k(\boldsymbol{u}, q, r) \equiv Y_{kT_0,(k+1)T_0}(\boldsymbol{u}, q, r).$$

Если решение найдено при $t \leqslant kT_0$ и выполнены неравенства

$$\begin{aligned} &N_j \leqslant \lambda N_{j-1} + c|\boldsymbol{f}|^{(1,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}_{Q_{(j-1)T_0,jT_0}}, \quad \lambda < 1, \\ &Y_j \leqslant c\Big\{N_j + |\boldsymbol{f}|^{(1,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}_{Q_{jT_0,(j+1)T_0}}\Big\}, \quad j = 1, ..., k, \end{aligned} \tag{3.26}$$

тогда при $\lambda_0 = \mathrm{e}^{-bT_0} < \lambda$

$$\begin{aligned} N_j &\leqslant ... \leqslant \lambda^j N_0 + c\sum_{i=0}^{j-1} \lambda^{j-1-i} |\boldsymbol{f}|^{(1,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}_{Q_{iT_0,(i+1)T_0}} \leqslant \lambda^j N_0 + c\lambda^{j-1} |\mathrm{e}^{bT_0}\boldsymbol{f}|^{(1,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}_{Q_{0,jT_0}} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{\lambda_0^i}{\lambda^i} \\ &\leqslant c\lambda^j \Big(N_0 + \frac{|\mathrm{e}^{bT_0}\boldsymbol{f}|^{(1,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}_{Q_\infty}}{\lambda - \lambda_0}\Big) \leqslant c\lambda^j\varepsilon \end{aligned} \tag{3.27}$$

с константами c, не зависящими от j (мы использовали неравенства (3.18) для $\boldsymbol{f}$). Поскольку $\lambda^j \to 0$ при $j \to \infty$, то правая часть (3.27) меньше, чем ε при $j \geqslant j_0$, значит, замену ε на $C^{-1}\varepsilon$ нужно делать только конечное число раз.

Пусть $\lambda_1 > \lambda$ ($\lambda_1 = \mathrm{e}^{-aT_0}$, $a < b$). Просуммируем неравенства (3.27), умноженные на λ_1^{-j}. Это приведёт к оценке

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k \lambda_1^{-j} N_j \leqslant &N_0 + \sum_{j=1}^k \frac{\lambda^j}{\lambda_1^j} N_0 + c\sum_{j=1}^k \frac{\lambda^j}{\lambda_1^j} \sum_{i=0}^{j-1} |\boldsymbol{f}|^{(1,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}_{Q_{iT_0,(i+1)T_0}} \\ \leqslant &\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda}\Big(N_0 + \frac{c\lambda}{\lambda - \lambda_0} |\mathrm{e}^{bT_0}\boldsymbol{f}|^{(1,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}_{Q_\infty}\Big). \end{aligned}$$

Наконец, сумма (3.26), умноженных на λ_1^{-j}, даёт нам

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k \lambda_1^{-j} Y_j(\boldsymbol{u}, q, r) \leqslant &c\Big\{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda}\Big(N_0 + \frac{c\lambda}{\lambda - \lambda_0}|\mathrm{e}^{bT_0}\boldsymbol{f}|^{(1,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}_{Q_\infty}\Big) + \sum_{j=0}^k \lambda_1^{-j} |\boldsymbol{f}|^{(1,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}_{Q_{jT_0,(j+1)T_0}}\Big\} \\ \leqslant &c\Big\{N_0 + \Big(c + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_0}\Big)|\mathrm{e}^{bT_0}\boldsymbol{f}|^{(1,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}_{Q_\infty}\Big\}. \end{aligned}$$

Левую часть в последнем неравенстве можно заменить на $\max_{j\leqslant k}\lambda_1^{-j}Y_j$. Таким образом, переходя к пределу по $k\to\infty$, мы приходим к неравенству, эквивалентному (3.19). $\square$

Список литературы

[1] Аппелль П., Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости, Главная редакция общетехнической литературы (сокр. ОНТИ) Ленинград – Москва, 1936, 375 стр. (Appell P., Figures d'équilibre d'une mass liquide homogène en rotation – Traité de Mécanique rationnelle, T. IV, Fasc. I, 2ème edit., Paris, Gautier–Villars, 1932.)

[2] Charrueau A., *Ètude d'une masse liquide de revolution homogène, sans pesanteur et à tension superficielle, animée d'une rotation uniforme*. Annales de Ècole Normale supérieure **1927**, 129–176.

[3] Charrueau A., *Sur les figures d'équilibre relatif d'une masse liquide en rotation à tension superficielle*, Comptes rendus **184** (1927), p. 1418.

[4] Ляпунов А. М., Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости, Издание АН (1884).

[5] Lyapunov A. M., *Sur les Questions Qui Appartiennent aux Surfaces des Figures d'Equilibre Dérivées des Ellipsoïdes,* News of the Academy of Scien.: Russia, 1916; p. 139.

[6] Ляпунов А. М., Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости, Собр. сочин., т. 3, АН СССР, М., 1959. – С. 5–113

[7] Солонников В. А., *Об устойчивости осесимметрических фигур равновесия вращающейся вязкой несжимаемой жидкости*, Алгебра и анализ **16** (2) (2004), 120 – 153. (Solonnikov V. A., *On the stability of axially symmetric equilibrium figures of a rotating viscous incompressible fluid*, St. Petersburg Math. J., **16** (2) (2005), 377–400).

[8] Solonnikov V. A., *On problem of stability of equilibrium figures of uniformly rotating viscous incompressible liquid*, in: Instability in models connected with fluid flows. II, Int. Math. Ser. **7** (2008) Springer, New York, 189–254.

[9] Солонников В. А., *Задача о нестационарном движении двух вязких несжимаемых жидкостей*, Проб. мат. анализа, **34**, (2006) 103–121. (Engl. transl. in J.Math.Sci. **142** (1) (2007) 1844–1866).

[10] Денисова И. В., Солонников В. А., *Глобальная разрешимость задачи о движении двух несжимаемых капиллярных жидкостей в контейнере*, Зап. научн. семин. ПОМИ **397** (2011), 20–52 (English transl. in J. Math. Sci. **185**(5) (2012), 668–686).

[11] Denisova I. V., Solonnikov V. A., L_2-theory for two incompressible fluids separated by a free interface, Preprint POMI RAN, 12/2017, St. Petersburg, 2017, 29 p. (St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of RAS)

[12] Denisova I. V., Solonnikov V. A., *L_2-theory for two incompressible fluids separated by a free interface*, Topol. Methods Nonlinear Anal., **52** (2018) 213–238. (DOI: 10.12775/TMNA.2018.019).

[13] Денисова И. В., Солонников В. А., Движение капли в несжимаемой жидкости: монография, Санкт-Петербург: “Лань”, 2020. – 296 с. (I. V. Denisova, V. A. Solonnikov, Motion of a Drop in an Incompressible Fluid, monograph, Adv. in Mathematical Fluid Mechanics (Birkhäuser), Springer, 2021, 316 p.)

[14] Denisova I. V., Solonnikov V. A. *Rotation Problem for a Two-Phase Drop*, J. Math. Fluid Mech. **24** (2022), 40. https://doi.org/10.1007/s00021-022-00662-x

[15] Denisova I. V.; Solonnikov V. A. *Stability of the rotation of a two-phase drop with self-gravity*, Зап. научн. семин. ПОМИ, **508**, (2021), 89–123.

[16] Denisova I. V., Solonnikov V. A., *Hölder Space Theory for Rotation Problem of Two-Phase Drop*, Mathematics (2023) (to appear).

[17] Бляшке В., Элементарная дифференциальная геометрия, ОНТИ, М.-Л., 1935. (W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. I. Springer, Berlin, 1924).

[18] Денисова И. В., *Разрешимость в гёльдеровских пространствах линейной задачи о движении двух жидкостей, разделённых замкнутой поверхностью*, Алгебра и анализ 5(4) (1993), 122-148 (English transl. in St.Petersburg Math. J. **5**(4), (1994), 765–787).

[19] Денисова И. В., Солонников В. А., *Разрешимость в гёльдеровских пространствах модельной начально-краевой задачи, порождённой задачей о движении двух жидкостей*, Зап. научн. семин. ЛОМИ **188**, (1991), 5-44 (English transl. in J. Math. Sci., **70**(3), (1994), 1717–1746).

[20] Могилевский И. Ш., Солонников В. А., *Разрешимость одной некоэрцитивной начально-краевой задачи для системы Стокса в гёльдеровских классах функций (случай полупространства)*, Z. Anal. Anwend. **8**(4), (1989), 329–347 (in Russian).

[21] Mogilevskiĭ I. Sh., Solonnikov V. A., *On the Solvability of an Evolution Free Boundary Problem for the Navier–Stokes Equations in Hölder Spaces of functions*, Mathematical Problems Relating to Navier – Stokes Equations, Ser. on Advances in Math. Appl. Sci. **11**; Galdi G. P., Eds.; World Sci. Publ.: Singapore, 1992, pp. 105–181.

[22] Джусти Э., Минимальные поверхности и функции ограниченной вариации, Пер. с англ., М.: "Мир", 1989, 240с. (E. Giusti, Minimal surfaces и functions of bounded variation. Monographs in Mathematics, Vol. 80, Edited by A. Borel, J. Moser, S.-T. Yau, Birkhäuser Boston-Basel-Stuttgart, 1984.)

[23] Денисова И. В., Солонников В. А., *Классическая разрешимость задачи о движении двух вязких несжимаемых жидкостей*, Алгебра и анализ, **7**(5) (1995), 101-142 (English transl. in St. Petersburg Math. J. **7**(5) (1996), 755–786).

[24] Денисова И. В., *Глобальная разрешимость задачи о движении двух жидкостей без учёта сил поверхностного натяжения*, Зап. научн. семин. ЛОМИ **348** (2007), 19–39 (English transl. in J. Math. Sci. **152**(5) (2008), 625–637).

[25] Солонников В. А., *О неустойчивости осесимметричных фигур равновесия вращающейся вязкой несжимаемой жидкости*, Zap. Nauchn. Sem. Sankt-Peterb. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) **318**, 2004, 277–297 (English transl. in J. Math. Sci. **136**(2) (2006), 3812–3825).

[26] Солонников В. А., *Оценка обобщенной энергии в задаче со свободной границей для вязкой несжимаемой жидкости*, Зап. научн. сем. ПОМИ **282** (2001), 216–243 (Engl. transl. in J. Math. Sci., **120** (2004) 1766–1783).

[27] Денисова И. В., Нечасова Ш., *Движение двух несжимаемых жидкостей в приближении Обербека–Буссинеска*, Зап. научн. семин. ПОМИ, **362** (2008), 92-119 (English transl. in J. Math. Sci. **159**(4) (2009), 436–451).

[28] Солонников В. А. *Задача о нестационарном движении изолированной жидкой массы*, СМФН, МАИ, Москва, **3** (2003), 43–62 (English transl. in J. Math. Sci. **124**(6) (2004), 5442–5460)