ПОМИ ПРЕПРИНТ — 13/2022

# ОДНОМЕРНЫЕ ЦЕНТРАЛЬНЫЕ МЕРЫ НА НУМЕРАЦИЯХ УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

**А. М. ВЕРШИК**

С.-Петербургское отделение математического института имени Стеклова Российской Академии Наук, С.-Петербургский Государственный Университет, Московский институт проблем передачи информации.

vershik@pdmi.ras.ru

АННОТАЦИЯ

Описываются одномерные центральные меры на нумерациях (таблицах) идеалов частично упорядоченных множеств (посетов). В качестве основного примера исследуется посет $\mathbb{Z}_+^d$ и граф его конечных идеалов, многомерных таблиц Юнга; при $d = 2$ это обычный граф Юнга. Центральные меры стратифицированы по размерности; в работе дается полное описание одномерной страты и доказывается, что всякая эргодическая одномерная центральная мера однозначно задается своими частотами. Предлагаемый метод, в частности, дает первое чисто комбинаторное доказательство теоремы Э.Тома для одномерных центральных мер, отличных от меры Планшереля (которая имеет размерность два).

**Ключевые слова:** Посеты, идеалы, нумерации, центральные меры, спектр.

Поддержано грантом РНФ 21-11-00152

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St. Petersburg Department
of Steklov Institute of Mathematics

# 1 Комбинаторное введение

## 1.1 Общие определения. Посеты, идеалы, нумерации

Рассматриваются частично упорядоченные множества (посеты) $(P, \succ)$. Будем в дальнейшем предполагать их конечность, а во всех нетривиальных примерах счетность, и, кроме того, конечную заданность: существует, порождающее посет, конечное множество попарно не сравнимых элементов. Для удобства считаем, что в посете существует наименьший элемент.

Идеал (нижний) — это подмножество посета, содержащее вместе со всяким элементом все элементы, меньшие его. *Минимальным бесконечным идеалом называется идеал, перестающий быть идеалом при удалении любого из его элементов.* Множество всех конечных идеалов посета $P$ есть *дистрибутивная решетка* $\Gamma(P)$; по теореме Биркгофа верно и обратное: всякая конечнопорожденая дистрибутивная решетка есть решетка идеалов некоторого посета. $N$-градуированный граф, соответствующий этой решетке (или диаграмму Хассе решетки) будем обозначать также через $\Gamma(P)$.

*Нумерацией посета $P$, (или его идеала $I$), называется отображение $\Psi : \mathbb{N} \to P$,(соответственно $\Psi : \mathbb{N} \to I$),удовлетворяющее условию монотонности: $x \succ y$ влечет $\Psi^{-1}(x) > \Psi^{-1}(y)$; заметим, что если $x = \Psi(n+1) \succ \Psi(n) = y$, то $x$ непосредственно следует в смысле порядка, за $y$, иначе говоря, интервал $(y, x)$— пуст.*

Образ нумерации $\Psi$ (или ее части до некоторого номера $n$) есть идеал посета, обозначаемый через $\Psi(\mathbf{N})$, соответственно $\Psi(\mathbf{n}$

Нумерация естественно определяет путь в графе $\Gamma(P)$. По аналогии с терминологией теории графа Юнга, отвечающего посету $P = \mathbb{Z}_+^2$, естественно называть идеалы графа *диаграммами, а нумерации идеалов — таблицами, этих диаграммы.*

Нас будут интересовать *центральные случайные нумерации, т.е. вероятностные меры на нумерациях или, эквивалентно, меры на пространстве путей графа* $\Gamma(P)$; они определяются как случайные нумерации, для которых условная вероятность на конечном числе всех путей, ведущих в данную точку $\Psi(n)$, есть равномерная мера. Таким образом, эта мера является мерой "с наибольшей энтропией".

## 1.2 Пространства одномерных идеалов и одномерные нумерации

Множество непустых минимальных идеалов счетного посета образует в свою очередь посет по включению, обозначаемый через $Min(P)$.

*Одномерным минимальным идеалом* в произвольной решетке называется идеал, который как множество есть объединение конечного числа цепей.

Множество всех одномерных минимальных идеалов с порядком, индуцированным из множества $Min(P)$ всех минимальных идеалов, обозначим через $min_1(P)$.

Опишем это множество для основных примеров.

a)$Min(\mathbb{Z}_+^2)$ есть множество всех пар натуральных чисел, кроме нулевой пары: $\mathbb{Z}_+^2\{(0,0)\}\bigcup\infty$; а именно, паре $(t_1,t_2)\neq(0,0)$ отвечает идеал, состоящий из $t_1$ первых бесконечных ее строк решетки $\mathbb{Z}_+^2$ и $t_2$ первых ее бесконечных её столбцов, а символ $\infty$ соответствует всему посету, мажорирующему все минимальные идеалы В этом примере все собственные минимальные идеалы одномерны.

b) Пространство одномерных, минимальных идеалов решетки $\mathbb{Z}_+^d$ при $d>2$ устроено более сложно.

Оно параметризуется набором из $d$ диаграмм Юнга $\nu_i$ размерности $d-1$ $i, i=1,2\ldots,d$. Если все диаграммы, кроме одной $i$-той, пусты, то этот идеал есть подмножество решетки, состоящее из элементов,$i$-тая координата которых — произвольна (т.е неотрицательное целое число),а остальные $d-1$ координат задают вектор, лежащий в $i$-той $d-1$-мерной диаграмме Юнга $\nu_i$. Такие одномерные идеалы мы называем *неприводимыми.* Общий одномерный минимальный идеал в этой решетке есть объединение нескольких (не более, чем $d$) неприводимых идеалов, отвечающих различным подмножествам множества $1,2,\ldots d$ мощности $d-1$.

Минимальные идеалы размерности больше единицы $2,3,\ldots,d-1$ строятся аналогично. В этой работе о них речь не пойдет за исключением параграфа "Комментарии".

c) *В случае произвольного посета* $P$ минимальный идеал как множество цепей определяет некоторым образом конечный идеал в дополнительном посете (или фактор посете) к одномерным компонентам пространстве цепей. Автору неизвестно, рассматривались эти понятия в общей теории посетов или теории решеток.

Нумерация (таблица) идеала называется *одномерной*, если, либо сам идеал является одномерным (т.е. конечным упорядоченным объединением цепей), либо он является бесконечным упорядоченным объединением цепей, а нумерация в естественном смысле согласована с этим упорядочением.

Например, нумерация всей решетки $\mathbb{Z}_+^2$, рассматриваемой как линейно упорядоченное объединение её горизонтальных (или вертикальных) цепей, является одномерной, хотя на самой решетке, как на несобственном идеале существует не одномерные нумерации.

Аналогичным образом определяется размерность произвольных нумераций упорядоченных множеств. (см. Комментарии).

*Мы будем изучать случайные одномерные нумерации, т.е. вероятностные меры на множестве одномерных нумераций. Основным понятием является понятие центральности мер (см.выше), а в качестве основной задачи ставится задача описания центральных мер на одномерных нумерациях посетов.*

## 1.3 Частоты

Расссмотрим одномерную нумерацию и определим понятие частоты цепи.

**Определение 1.** *Пусть $\Psi : \boldsymbol{N} \to P$ — некоторая нумерация посета $P$ и $l$ произвольная цепь т.е.линейно упорядоченное счетное подмножество в $P$. Частотой цепи $l$ называется предел (если он существует)*

$$\lim_n \frac{\#\{k : k < n, \Psi(k) \in l\}}{n} = \lambda_l.$$

*Случайной нумерации $\Psi$ отвечает мера $\mu_\Lambda$ на пространстве одномерных нумераций. Для почти всех индивидуальных нумераций и для каждой цепи, входящий в эту нумерацию (их число не более чем счетно), существует частота этой цепочки; совокупность частот (не более чем счетная) по всем цепям называется спектром меры.*

Из общих соображений эргодической теории вытекает, что для эргодических центральных мер частоты, т.е. спектр, существует. т.е. всякая центральная мера задает спектр. В силу того, что одномерный идеал есть объединение цепей, сумма конечная) частот для одномерной таблице должна быть равна единице. Для случая счетного числа частот предполагается такое же условие на сумму.

Теперь мы можем сформулировать основной вопрос: определяется ли всякая одномерная центральная случайная нумерация своим спектром? Назовем спектр невырожденным, если все частоты различны.

Наш основной результат содержится в следующей теореме:

**Теорема 1.** *Всякий невырожденный конечный спектр (т.е. конечный набор различных частот) определяет единственную одномерную эргодическую центральную меру с этими частотами.*

Условия невырожденности и конечности спектра будет снято в следующей работе.

Перед доказательством теоремы сделаем ещё одну редукцию проблемы, относя ее только к интересующим нас решеткам $\mathbb{Z}_+^d, d > 1$. [1]

Редукция состоит в следующем. Одномерные минимальные идеалы в этих посетах являются объединением неприводимых идеалов. Очевидно, что пересечение различных неприводимых идеалов есть конечный идеал. Поскольку частоты цепочек не меняются при конечных изменениях, то объединение частот всех неприводимых компонент совпадает с набором частот исходного минимального идеала. Следовательно, не умалая общности, можно рассматривать в отдельности неприводимые минимальные идеалы.

То же соображение относится и к общим одномерным нумерациям — т.е. к случаю счетного числа цепочек и соответственно счетного числа частот. Таким образом теорему единственности, достаточно доказать для каждой центральной, одномерной нумерации неприводимого идеала. После этого замечания можно сформулировать окончательную постановка вопроса в виде вероятностной задачи о конечных посетах. Теорема 1 непосредственно следует из теоремы 2 (см. ниже), точнее, из положительного ответа на поставленный вопрос, поставленный в следующем параграфе.

# 2 Центральные меры на решетчатых последовательностях

Следующая постановка задачи никак не связана с предшествующими рассмотрениями и может восприниматься изолированно.

Рассмотрим конечный посет $P$ и пространство $P^\infty$ всех бесконечных последовательностей символов из этого посета $P$. Назовем последовательность $\{x_n\} \in P^\infty$ *решетчатой*, если она удовлетворяет следующему условию: для любых двух элементов $a, b \in P$, таких,что $a \succ b$, и для

[1] Возможно, редукция имеет смысл для произвольных посетов, но, видимо, для этого необходим серьезный экскурс в общую теорию посетов, если таковая существует.

любого $n \in \mathbf{N}$ выполнено неравенство:

$$\#\{k : k < n, x_k = a\} > \#\{k : k < n, x_k = b\}$$

. Множество всех решетчатых последовательностей обозначим $R^P \subset P^\infty$.

Определим разбиение де Финетти на пространстве $P^\infty$ и на его подмножестве $R^P$. *Две последовательности* $\{x_n\}, \{x'_n\}$ *лежат в одном классе этого разбиения, если они принадлежат одной орбите счетной симметрической группы* $S_{\mathbf{N}}$, которая действует на $P^\infty$ с помощью перестановок координат; иначе говоря, отрезки последовательности от 1 до $n$ имеют одинаковый состав, и $x_m = x'_m$ при $m > n$. Заметим, что $R^P$ как подмножество в $P^\infty$ неинвариантно относительно действия $S_{\mathbf{N}}$, но, тем не менее, разбиение Де Финетти корректно определено на $R^P$. Обозначим эти два разбиения через $\xi_{P^\infty}$ и $\xi_{R^P}$; второе есть ограничение первого на $R^P$. Как мы увидим, это простое замечвание играет в дальнейшем принципиальную роль.

Центральной мерой на $P^\infty$ и на $R^P$ называется (цилиндрическая) вероятностная мера обладающая тем свойством, что для всякого $n$ условная мера на начальном отрезке $\{x_1, \dots x_n\}$ последовательности при условии фиксации "хвоста"последовательности $\{x_{n+1}, \dots\}$ (множество "начал"конечно) является равномерной мерой. Тем самым понятие центральности выделяет совокупность мер на любом пространстве последовательностей. Разумеется, сами центральные меры различны для различных пространств.

*Эргодической мерой* на произвольном пространстве последовательностей называется любая мера $\mu$, для которой тривиально пересечение сигма-алгебр $\bigcap_n \mathfrak{A}_n^\infty$, где сигма-алгебра $\mathfrak{A}_n^\infty$ состоит из множеств, которые задаются условиям на координаты с номерами, большими $n$.

Классическая теорема де Финетти утверждает, что всякая эргодическая центральная мера на $P^\infty$ есть произведение независимых, т.е. мера Бернулли. Наша задача — описать эргодические центральные меры на $R^P$.

Прежде всего, для любой эргодической центральной меры на $P^\infty$ и, в частности, на $R^P$ можно определить частоты $\lambda_p$ для каждого из символов $p \in P$

$$\lim_n \frac{\#(k < n : x_k = p)}{n} = \lambda_p \in [0, 1]$$

; при этом $\sum_{p \in P} \lambda_p = 1$.

Для пространства решетчатых последовательностей $R^P$ естественно предположить, что *частоты согласованы с порядком*: $p \succ p' \Rightarrow \lambda_p > \lambda_{p'}$}

*Напомним, что множество всех эргодических центральных мер (для графа, для группы и т.д.) называется абсолютом.*

Наше главное техническое утверждение таково.

**Теорема 2.** *Для любой системы попарно неравных неотрицательных частот $\Lambda = \lambda_p, p \in P$, согласованной с порядком, существует единственная эргодическая центральная мера $\mu_\Lambda$ на $R^P$. Множество мер $\mu_\Lambda$ исчерпывает абсолют.*

Теорема, таким образом, утверждает, что множество спектров, согласованных с порядком есть абсолют пространства $R^P$ решётчатых последовательностей и, тем самым, определена биекция между мерами Бернулли и центральными мерами на $R^P$.

*Доказательство.* 1. Прежде всего заметим, что, если $P$ конечно, и если все частоты т.е. вероятности в схеме Бернулли) $\Lambda = \{\lambda_p\}; p \in P$ — различны, то множество $R^P$ решетчатых последовательностей имеет положительную меру Бернулли $\mu_\Lambda(R^P)$. Действительно, поскольку $P$ конечно, то достаточно проверить этот факт для двухточечного посета $P$, и затем пересечь множества по всем парам элементов исходного посета.

Пусть $P$ состоит из двух элементов — $a$ и $b$, при этом $\lambda_a > \lambda_b$ Применив неравенство Чебышева к случайной последовательности, принимающей значения 1 и 0 соответственно в $a$ и $b$, получим, что математическое ожидание конечных есумм положительно и, следовательно, на множестве последовательностей положительной меры решетчатость имеет место. Таким образом на $R^P$ задана индуцированная мера,которая с точность до нормировки совпадает с $\mu_\Lambda$.

2. Ограничение бернуллиевской меры $\mu_\Lambda$ на $R^P$ (множество положительной меры) есть эргодическая центральная мера. Действительно, как сказано выше, ограничение центральной меры, каковой является мера $\mu_\Lambda$ на $P^\infty$ на $R^P$ также является эргодической и центральной (в смысле $R_P$). Проверим, что других таких мер нет. Для этого воспользуемся тем, что для почти всех (в смысле обеих мер) точек множества $R^P$ класс точки по разбиению Дефинетти в смысле $R^P$ отличается от класса того же разбиения этой точки, но в смысле $P^\infty$ на конечное множество (а именно, различие несколько первых знаков). Можно сказать, что больший класс расслоен над меньшим, и слой расслоения конечен. При этом условная мера на множестве дополнительных точек равномерна. Поэтому центральную меру на $R^P$ как меру на базе можно единственным

образом поднять до центральной меры на $P^\infty$, а она эргодична и обязана, тем самым, быть бернуллиевской. Т.е. установлена биекция между эргодическими центральными мерами пространств $R^P$ и $P^\infty$.

$\square$

В силу рассмотрений предыдущего параграфа, теорема 1 является прямым следствием теоремы 2.

Как указывалось, теоремы 1 и 2 остаются справедливыми и для случая бесконечных $P$, и для случая кратных т.е. равных частот. В обоих случаях множество решетчатых последовательностей не обязательно имеет положительную бернуллиевскую меру. Более того уже в самом простом случае двух равных частот $1/2, 1/2$ пространство $R_P$ имеет бернулиевскую меру нуль. Как показывает более тщательный анализ, тем не менее, биекция, о которой сказано в доказательстве, существует.

Прием, использованный в доказтельстве имеет, конечно, общую природу. А именно, свойство центральности во-первых наследуется при ограничении на множества положительной меры и, во-вторых, сохраняется при продолжении центральных мер на накрывающее пространство, если слои конечны.

Замечательная теорема Тома об описании характеров бесконечной симметрической группы, переформулируется, как теорема об описании центральных мер на путях графа Юнга. известные доказательства этой переформулировки в терминах центральных мер, опираются на подсчеты числа таблиц и связаны с теорией симметрических функций. Приведенное доказательство является не аппроксимационным, а комбинаторно-вероятностным. Поэтому оно допускает обобщение на другие графы, например, непрерывные градуированные графе типа графа Гельфанда-Цетлина см. ([2, 4]).

# 3 Комментарии

## 3.1 Задача о центральных мерам с общей точки зрения

Задача описания центральных мер есть частный случай общей проблемы поиска мер по заданным условным или псевдоусловным мерам. В другой формулировке это задача описания марковских мер, т. е. их переходных верятностей по известным *копереходным вероятностям.* Подробнее (см. [1]) Общая схема состоит в использовании пространства с мерой, в котором задано гиперконечное разбиение, и коцикл (т.е. условной сигма-конечной мерой) для нахождения центральных мер, Специфика рассмотренного примера в том, что гиперконечное разбиение для одномерных центральных мер очень простое (разбиение де Финетти, или разбиение на орбиты действия симметричекой группы), что упрощает дело.

## 3.2 Связь с броуновскими меандрами

Самый простой случай ($P$ состоит из двух элементов) напоминает известную вероятностну конструкцию меандров. В этом случае посет $P$ есть $-1, +1$, причем $+1 > -1$; решётчатость последовательности $\{x_n\}$ означает, что число плюс-единиц в любом первоначальном отрезке последовательност превышет число минус-единиц, т.е. соответсвующее случайное блуждание происходит в положительной полуплоскости Если вероятность символа $+1$ больше или равны половине, то центральная мера -единственна и может интерпретироваться как мера, отвечающая центральному случайному блужданию в двумерной камере Вейля.

Если $P$ цепь, то случайная нумерация соответствует к случайному блужданию в многомерной камере Вейля.

Случай $\lambda = 1/2$ соответствует дискретному аналогу понятия *броуновских меандров*. Однако, более естествено искать непрерывный (диффузионный) аналог понятия центральной меры, пока такой аналог неизвестен. Случай равных вероятностей для посета с большим чем два элемента особенно интересен. Переходные вероятности соотвествующего марковский процесс выражаются через функции Шура.

## 3.3 Мера Планшереля и GUE(гауссовский унитарный ансамбль)

Предельный переход при увеличении числа элементов посета $P$ при равных вероятностей не возможен, он обретает смысл только, если диаграмму Юнга с одними строками рассматривать вместе диаграммами с таким же количеством столбцов, и тогда предельный переход приведет к *мере Планшереля*. Фактически, такой предельный переход и был сделан в наших работах с С.В.Керовым, предельный марковский процесс подробно описан в работе [7]. Но волнующий вопрос — как прямо истолковать этот предельный переход, отправляясь от конечного случая, а не исходя из готовой меры Планшереля, — остался невыясненным. Более того, этот переход должен иметь тот же характер, что и предельные переходы от унитарно-инвариантных мер на положительно определённых эрмитовых матрицах (от уишартовых мер)— к GUE. Параллель состоит в том, что взаимодействие диаграмм со строками и столбцами, приводит к мере Планшереля аналогично тому, что меры на положительно- и отрицательно- определенных эрмитовых матрицах приводят к мере GUE. Речь идет о новом описании мер Планшереля и GUE, включая их limit shape и другие характеристики.

### 3.4 Многомерные центральные меры

Изложенные выше комментарии имеют прямое отношение к содержанию данной работы. Но,если в этой работе описаны все *одномерные центральные меры*, то сказанное выше относится к описанию уже *двумерных центральных мер*. В случае графа Юнга и непрерывного графа Гельфанда-Цетлина (см.[2]) двумерные инвариантные меры есть соответственно меры Планшнреля и GUE. Для их прчмого описания рассмотренный выше метод неприменим. Для случая $\mathbb{Z}_+^d$ при $d > 2$ возникает ещё более сложная проблема описания трех- и т.д. до $d$-мерных центральных мер. В частности, уже давно стоит исключительно важный вопрос о единственности $d$-мерной центральной мерой (аналоге меры Планшереля для $d = 2$) для $\mathbb{Z}_+^d$ , и аналога её для тензоров произвольного ранга.

### 3.5 Меры Бернулли и алгоритм RSK

В [6] все центральные меры для графа Юнга были представлены как проекции мер Бернулли относительно отображения Робинсона-Шенстеда-Кнута (RSK). В этой статье и в (см.[2]) замечено, что одномерные центральные меры могут быть представлены как ограничения бернуллиевских мер на подмножества или почти подмножества (в случае равных частот). В данном случае слово "ограничение"понимается в смысле подразбиений, а не (как в теории инвариантых мер), ограничение на инвариантное подмножество. Возможно, именно из-за этого различия сам этот факт не был замечен долгое время. Но тогда возникает вопрос: как истолковать алгоритм RSK, как проектор на множество решётчатых последовательностей; не есть ли это абстрактное его определение? До сих пор он определялся только как алгоритм.

## Список литературы


[1] А. Вершик. Способ задания центральных и гибсовских мер и эргодический метод. Докл. Акад. Наук т. 497, 30-34 (2021).

[2] A. Vershik, F. Petrov. Central Measures of Continuous Graded Graphs: the Case of Distinct Frequencies. Eur.Math.J. 2022.

[3] А. Вершик.Три теоремы о единственности меры Планшереля с разных позиций Тр. МИАН, 305, (2019), 71–85.

[4] А. Вершик, Ф. Петров. Обобщенная пемма Максвелла-Пуанкаре и меры Уишарта. Зап.Нуач. сем.ПОМИ т.507, (2021), 15-24.

[5] А.Вершик. Описание инвариантных мер для действий некоторых бесконечномерных групп Докл. АН СССР, 1974, 218:4, 749–752

[6] A. Vershik, S. Kerov. The characters of the infinite symmetric group and probability properties of the Robinson-Schensted-Knuth algoritm. SIAM J. Alg. Discr. Methods 7, No.1, 116-124 (1986).

[7] С. Керов. Дифференциальная модель роста диаграмм Юнга. Труды Ст.Петербургскогоммаетематического Общества, т.4 (1996), 165-192.