PDMI Preprint 12/2022

Регулярные пространства и регулярные отображения

Н. В. Дуров[1]

[1] Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской Академии Наук

email: `douroff@pdmi.ras.ru`

Аннотация. В работе [AB4] были построены примеры эффективных систем счисления и было дано неформальное определение эффективной системы счисления как способа представления чисел бесконечными словами над конечным алфавитом, таким, что равенство чисел может быть проверено, а сумма чисел — вычислена с помощью конечных автоматов. Данная работа посвящена более формальному определению эффективных систем счисления. В качестве первого шага на этом пути вводится близкое, но более удобное понятие регулярного пространства и регулярного отображения, и изучаются их основные свойства. Эффективные отображения будут затем рассмотрены в отдельной работе. Для иллюстрации полезности введённых понятий и их свойств с их помощью доказываются свойства эффективных систем счисления, неформально объяснённые, но не доказанные ранее в [AB4].

Ключевые слова: Абсолютная геометрия, поле из одного элемента, эффективная система счисления, конечные автоматы, эффективное отображение, регулярное отображение, регулярное пространство, регулярное множество, регулярный язык.

ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:
ЭЛ № ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г.
Выдано Федеральной службой по надзору
в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные:

191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны: (812) 312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www.pdmi.ras.ru/preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором В. Н. Симонова

6 Регулярные пространства и регулярные отображения

Мы ранее определили в [AB4] *эффективную систему счисления* как некоторый способ представления чисел с помощью бесконечных слов в конечном алфавите D (множестве цифр), таким образом, чтобы сложение, вычитание и проверка на равенство выполнялись эффективно, т.е. с помощью конечных автоматов (см. [AB4],**4.4.10**). Более того, в [AB4] были приведены примеры эффективных систем счисления, такие, как избыточная двоичная система с цифрами $\{-1, 0, 1\}$ и система с основанием φ или $-\varphi$ и двумя цифрами $\{0, 1\}$. Мы бы хотели дать более точное определение эффективных систем счисления и классифицировать их. Однако перед этим нам надо изучить более общий класс *эффективных отображений*, т.е. отображений, которые могут быть вычислены с помощью конечных автоматов (вернее, трансдукторов), а также технически более удобный класс *регулярных отображений*, т.е. отображений, график которых может быть распознан конечным автоматом. Мы начнём с рассмотрения регулярных отображений и регулярных пространств. Затем в одной из последующих работ мы отдельно изучим эффективные отображения.

6.1 Регулярные отношения эквивалентности

Для того, чтобы в дальнейшем можно было дать строгое определение эффективной системы счисления, изучим регулярные подмножества и регулярные отношения эквивалентности $\equiv$ на бесконечных словах D^ω, поскольку такое отношение эквивалентности является важной компонентой эффективной системы счисления.

6.1.1. (Отношения на бесконечных словах, заданные конечными автоматами.) Пусть D — конечное множество, $D^\omega = D^{\mathbb{N}_0}$ — множество бесконечных слов над алфавитом D, т.е. последовательностей $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n\geq 0} = x_0x_1\ldots$ с $x_n \in D$. Пусть $G = (S, s_0, E)$ — *детерминированный конечный автомат* с (конечным) множеством состояний S, начальным состоянием $s_0 \in S$, множеством переходов E и входным алфавитом $D \times D$. Иначе говоря, E состоит из троек (s, xy, t), s, $t \in S$, $xy = (x, y) \in D^2$, которые мы обычно записываем в виде $s \xrightarrow{xy} t$ и изображаем в виде ребра ориентированного графа из вершины s в вершину t с меткой xy, а *де-*

терминированность автомата означает, что для любого $s \in S$ и $xy \in D^2$ существует не более одного $t \in S$, такого, что $(s, xy, t) \in E$. Можно также сказать, что E является графиком частично заданного отображения $\gamma : S \times D^2 \dashrightarrow S$. Мы будем говорить, что автомат G *определяет* или *задаёт* отношение R на множестве D^ω, или что G *распознаёт* R, если $\boldsymbol{x}R\boldsymbol{y}$, т.е. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in R$, в том и только том случае, если автомат G никогда не останавливается на вводе, состоящем из последовательности пар символов (x_0, y_0), (x_1, y_1), $\ldots$. Иначе говоря, $\boldsymbol{x}R\boldsymbol{y}$ в том и только том случае, если существует последовательность состояний $s_n \in S$ при $n \geq 1$ (с s_0 равному начальному состоянию), такая, что $(s_n, x_n y_n, s_{n+1}) \in E$ для всех $n \geq 0$.

6.1.2. (Мы рассматриваем только синхронные автоматы.) Существенным является то ограничение, что при определении регулярных отношений $R \subset A^\omega \times A^\omega$ или регулярных соответствий $S \subset A^\omega \times B^\omega$ ниже в **6.1.4** мы рассматриваем только *синхронные* конечные автоматы, читающие оба входных потока $\boldsymbol{x} = x_0 x_1 \ldots$ и $\boldsymbol{y} = y_0 y_1 \ldots$ с одинаковой скоростью: на n-ом шаге читается x_{n-1} и y_{n-1}. В принципе мы могли бы рассмотреть конечные автоматы, которые не обязательно сдвигают обе входные ленты на одну позицию вправо при каждом переходе. Вместо этого, например, можно было бы указывать для каждого перехода два дополнительных параметра δ_x и $\delta_y \in \{0, 1\}$, показывающие, нужно ли продвигать соответствующую входную ленту. Такого рода асинхронные автоматы, вообще говоря, не сводятся к синхронным (см. пример в **6.6.7**) и требуют отдельного, более сложного, рассмотрения.

Определение 6.1.3 *(Регулярные отношения на D^ω.) Пусть D — конечное множество. Будем говорить, что отношение R на D^ω* **регулярно**, *если оно распознаётся (синхронным) конечным автоматом.*

6.1.4. (Обобщение: регулярные подмножества и регулярные соответствия.) Мы можем несколько обобщить предыдущее определение следующим образом. Будем говорить, что подмножество $R \subset A^\omega$ *распознаётся (детерминированным) конечным автоматом* $G = (S, s_0, E)$ (со входным алфавитом A), где $s_0 \in S$, $E \subset S \times A \times S$, если R — это множество всех бесконечных строк $\boldsymbol{x} \in A^\omega$, на которых G никогда не завершает работу из-за невозможности совершить очередной переход. Иначе говоря, $\boldsymbol{x} = x_0 x_1 \ldots \in R$ в том и только том случае, если существует бесконечная последовательность состояний $\{s_n\}_{n \geq 1}$, $s_n \in S$, такая, что

$(s_n, x_n, s_{n+1}) \in E$ для всех $n \geq 0$. Если $R \subset A^\omega$ распознаётся конечным автоматом, мы будем говорить, что R — *регулярное подмножество* A^ω. Далее, поскольку $(A \times B)^\omega \cong A^\omega \times B^\omega$, будем говорить, что соответствие R между A^ω и B^ω *регулярно*, если R регулярно как подмножество $R \subset A^\omega \times B^\omega \cong (A \times B)^\omega$; в этом случае R распознаётся некоторым конечным автоматом над алфавитом $A \times B$. При $A = B = D$ снова получаем понятия регулярного отношения R на D^ω из **6.1.3** и распознающего его (синхронного) конечного автомата.

Такого рода обобщения удобны тем, что в действительности многие свойства регулярных отношений выполнены и для регулярных соответствий и регулярных подмножеств, и проще всего доказываются именно в контексте регулярных подмножеств.

6.1.5. (Примеры: пустое множество и всё A^ω регулярны.) В качестве тривиального примера регулярных подмножеств $R \subset A^\omega$ приведём пустое подмножество $\varnothing$, а также всё A^ω. Оба они распознаются конечным автоматом с единственным состоянием $*$, без переходов в случае $R = \varnothing$ либо с переходами $* \xrightarrow{x} *$ для всевозможных $x \in A$ в случае $R = A^\omega$.

6.1.6. (Множества бесконечных слов, заданные недетерминированными конечными автоматами, регулярны.) Отметим, что предыдущие определения формально годятся и для недетерминированных конечных автоматов $G = (S, s_0, E)$, т.е. не обладающих дополнительным свойством, что $(s, x, t) \in E$ & $(s, x, t') \in E \Rightarrow t = t'$. Однако распространение предыдущих определений на недетерминированные (синхронные конечные) автоматы не расширяет класс распознаваемых подмножеств, отношений или соответствий, поскольку любой недетерминированный автомат может быть стандартным образом преобразован в детерминированный. Состояния такого детерминированного автомата соответствуют непустым подмножествам $\alpha \subset S$ состояний исходного автомата; начальным состоянием является $\{s_0\}$, а переход $\alpha \xrightarrow{x} \beta$ присутствует в том и только том случае, если α и β — непустые подмножества S, такие, что $\beta = \{t \in S \mid \exists s \in \alpha : (s, x, t) \in E\}$. Получившийся детерминированный конечный автомат распознаёт бесконечные слова $\boldsymbol{x} \in A^\omega$, обладающие тем свойством, что сколь угодно длинные префиксы $\boldsymbol{x}$ распознаются исходным недетерминированным автоматом; несложно видеть, что это равносильно тому, что и всё $\boldsymbol{x}$ распознаётся исходным автоматом, например, применив лемму Кёнига или эквивалентный ей факт непустоты проективного предела $P = \lim_n P_n$ последовательности непустых *конечных* множеств $\{P_n\}$, где в качестве P_n можно взять все последовательности переходов $s_0 \xrightarrow{x_0} s_1 \to \cdots \to s_{n-1} \xrightarrow{x_{n-1}} s_n$ длины n в исходном автомате, начинающиеся с начального состояния и такие, что их метки образуют префикс $x_0 x_1 \ldots x_{n-1}$ бесконечного слова $\boldsymbol{x}$.

6.1.7. (D^ω — польский компакт.) Введём дискретную топологию на конечном множестве D, и затем топологию прямого произведения на $D^\omega = D^{\mathbb{N}_0}$ и $D^\omega \times D^\omega$; тогда D^ω — это метризуемый компакт. В качестве метрики можно взять

$$d_\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \rho^{-\inf\{n \geq 0 \colon x_n \neq y_n\}} \tag{6.1.7.1}$$

для произвольного фиксированного вещественного $\rho > 1$.

6.1.8. (Регулярные подмножества $R \subset A^\omega$ всегда замкнуты.) Отметим, что *регулярные подмножества $R \subset A^\omega$ всегда замкнуты в топологии прямого произведения на A^ω*. В самом деле, надо проверить, что если $\boldsymbol{x} \in A^\omega$ таково, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $\boldsymbol{y} \in R$, совпадающее с $\boldsymbol{x}$ по первым n символам, то и $\boldsymbol{x} \in R$. Однако это очевидно из описания R с помощью конечного автомата G: данное условие гарантирует, что автомат G проработает на вводе $\boldsymbol{x}$ как минимум n шагов для каждого натурального n, а значит, никогда не остановится.

6.1.9. (Регулярные отношения замкнуты в топологии $D^\omega \times D^\omega$.) Как следствие, *регулярные отношения $R \subset D^\omega \times D^\omega$ замкнуты в топологии произведения $D^\omega \times D^\omega$*, поскольку они являются регулярными подмножествами $(D \times D)^\omega \cong D^\omega \times D^\omega$.

6.1.10. (Пополненный конечный автомат $G_\perp$, распознающий R.) Пусть $G = (S, s_0, E)$ — конечный автомат, распознающий регулярное подмножество $R \subset A^\omega$. Тогда R состоит из всех бесконечных слов, на которых автомат G никогда не останавливается из-за невозможности совершить очередной переход. Мы можем преобразовать G в *пополненный автомат* $G_\perp$, в котором есть дополнительное *ошибочное* состояние $\perp$, и добавлены все ранее отсутствовавшие переходы, так, чтобы они вели в $\perp$. Тогда $\boldsymbol{x} \in R$, если и только если конечный автомат $G_\perp$ никогда не оказывается в ошибочном состоянии $\perp$ в процессе чтения бесконечного слова $\boldsymbol{x}$.

6.1.11. (Связь регулярных подмножеств $R \subset A^\omega$ с регулярными языками.) Отметим, что регулярные подмножества $R \subset A^\omega$ тесно связаны с регулярными языками $\mathcal{R} \subset A^*$, где $A^* = \bigsqcup_{n \geq 0} A^n$ обозначает множество всех конечных слов над алфавитом A, или, если угодно, свободный моноид, порождённый A. Например, множество всех префиксов всех слов

$\boldsymbol{x} \in R$ образует некоторый регулярный язык $\mathcal{R} \subset A^*$, и наоборот, если $\mathcal{R} \subset A^*$ — произвольный регулярный язык, то множество R всех $\boldsymbol{x} \in A^\omega$, все префиксы которых принадлежат $\mathcal{R}$, является регулярным.

Другой способ связать регулярные подмножества $R \subset A^\omega$ с регулярными языками таков. Пусть $G_\perp$ — пополненный конечный автомат, распознающий R, и пусть $\bar{\mathcal{R}} \subset A^*$ — регулярный язык, распознаваемый $G_\perp$, если считать $\perp$ конечным состоянием. Тогда $\bar{\mathcal{R}}$ состоит в точности из всех конечных слов, не являющихся префиксами никаких бесконечных слов из R, а R состоит из всех бесконечных слов, никакие префиксы которых не попадают в $\bar{\mathcal{R}}$. Более того, любой регулярный язык $\bar{\mathcal{R}} \subset A^*$ определяет таким образом регулярное подмножество $R \subset A^\omega$.

6.1.12. (Минимальный конечный автомат, распознающий заданное отношение или подмножество.) Заметим, что среди всех детерминированных (синхронных) конечных автоматов, распознающих данное регулярное отношение R на D^ω, или, более общо, данное регулярное подмножество $R \subset A^\omega$, есть наименьший, т.е. обладающий минимальным количеством состояний, причём он единственный с точностью до изоморфизма (переименования состояний). Из любого конечного автомата $G = (S, s_0, E)$, распознающего R, можно эффективно построить минимальный. Для этого надо выбросить из S состояния, недостижимые из начального состояния s_0, а также состояния, из которых не начинаются бесконечно длинные пути (для чего можно выкинуть все состояния, отличные от начального, из которых нет ни одного перехода, а затем повторять эту процедуру снова и снова до тех пор, пока таких состояний не останется, возможно, за исключением начального состояния). Затем надо рассмотреть все отношения эквивалентности $\sim$ на S, обладающие тем свойством, что если $(s, a, t) \in E$ и $s \sim s'$, то существует $t' \in S$, такое, что $(s', a, t') \in E$ и $t \sim t'$. Надо выбрать наибольшее из всех таких отношений эквивалентности (что в действительности можно проделать эффективно с помощью описания из **6.1.13**: $s \sim s'$ в том и только том случае, если конечные автоматы, полученные из исходного заменой начального состояния на s и s', определяют одно и то же регулярное множество, что можно эффективно проверить с помощью **6.1.21**)[1], и заменить S на $\bar{S} := S/{\sim}$.

[1] Самый простой способ вычисления графика $\sim$ — построить прямое произведение $G_\perp \times G_\perp$ пополненных автоматов как в **6.1.18** или **6.1.19** и найти в нём все состояния $(s, s') \in S \times S$, из которых недостижимо ни одно состояние вида $(t, \perp)$ или $(\perp, t)$ с $t \neq \perp$.

6.1.13. (Единственность минимального автомата, распознающего данное регулярное отношение или подмножество.) Единственность минимального конечного автомата следует из того факта, что он допускает непосредственное описание в терминах распознаваемого им подмножества R. А именно, состояния пополненного минимального автомата — это все подмножества $R' \subset A^\omega$ вида

$$\alpha\backslash R := \{\boldsymbol{x} \in A^\omega \mid \alpha\boldsymbol{x} \in R\} \tag{6.1.13.1}$$

для всевозможных $\alpha \in A^*$. Переход $R' \xrightarrow{a} R''$ присутствует в минимальном автомате в том и только том случае, если $R'' = a\backslash R'$, т.е. если $a\boldsymbol{x} \in R' \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in R''$. Начальное состояние — это само R, а ошибочное состояние $\perp$ — это $\varnothing$; если его выкинуть, получится минимальный конечный автомат.

6.1.14. (Критерий регулярности замкнутого подмножества.) Предыдущая конструкция позволяет нам сформулировать удобный критерий регулярности: *подмножество $R \subset A^\omega$ регулярно в том и только том случае, если R замкнуто в A^ω и множество $S_R := \{\alpha\backslash R \mid \alpha \in A^*\}$ конечно.* В этом случае мы можем использовать S_R как множество состояний пополненного минимального конечного автомата, распознающего R (см. **6.1.13**). Пустое множество $\varnothing$ является тогда ошибочным состоянием этого автомата; если его выкинуть, получится непополненный автомат (если вдруг $\varnothing \notin S_R$, то $R = A^\omega$, и минимальный автомат обладает единственным состоянием и всевозможными переходами из него в себя; если же ошибочное состояние $\varnothing$ совпадает с начальным состоянием R, то его нельзя выкидывать, но тогда $R = \varnothing$).

Ясно, что сформулированный выше критерий является необходимым условием регулярности, поскольку все регулярные множества замкнуты по **6.1.8**, и если $G_\perp = (S, s_0, E)$ — произвольный пополненный конечный автомат, распознающий R, и если $s(\alpha) \in S$ обозначает состояние, в которое он переходит после чтения слова $\alpha \in A^*$, то из $s(\alpha) = s(\beta)$ следует $\alpha\backslash R = \beta\backslash R$, и потому $\operatorname{card} S_R \leq \operatorname{card} S < +\infty$. Наоборот, предположим, что S_R конечно. Тогда условие, что конечный автомат с состояниями S_R, построенный в **6.1.13**, не оказывается в ошибочном состоянии $\perp = \varnothing$ после чтения первых n символов $x_0 \ldots x_{n-1}$ бесконечного слова $\boldsymbol{x} \in A^\omega$, есть

$$x_0 \ldots x_{n-1}\backslash R \neq \varnothing \tag{6.1.14.1}$$

что равносильно
$$x_0 \dots x_{n-1} A^\omega \cap R \neq \varnothing \tag{6.1.14.2}$$
Поскольку $x_0 \dots x_{n-1} A^\omega$ образуют фундаментальную систему окрестностей точки $\boldsymbol{x} \in A^\omega$, предыдущее условие выполнено для всех $n \geq 0$ в том и только том случае, если $\boldsymbol{x} \in \bar{R}$. Иначе говоря, построенный конечный автомат распознаёт в точности $\bar{R}$, так что замыкание $\bar{R}$ регулярно. Поскольку R по предположению замкнуто, регулярно и $R = \bar{R}$.

6.1.15. (Предрегулярные множества $R \subset A^\omega$ и их замыкания.) Будем говорить, что подмножество $R \subset A^\omega$ *предрегулярно*, если множество $S_R := \{\alpha \backslash R \mid \alpha \in A^*\}$ из **6.1.14** конечно. Тогда **6.1.14** означает, что *замкнутые предрегулярные подмножества A^ω — это в точности регулярные подмножества.* Более того, если $R \subset A^\omega$ предрегулярно, то конечный автомат с состояниями S_R, построенный в **6.1.13**, распознаёт замыкание $\bar{R} \subset A^\omega$, как это было показано в **6.1.14**. Поэтому *замыкание $\bar{R}$ предрегулярного подмножества $R \subset A^\omega$ регулярно.*

6.1.16. (Пример: корректные двоичные записи образуют предрегулярное, но не регулярное множество.) Приведём пример достаточно простого и естественно возникающего множества, не являющегося регулярным. Пусть $D = \{0, 1\}$, и рассмотрим внутри D^ω подмножество X всех корректных двоичных записей чисел из отрезка $[0, 1)$. Иначе говоря, X состоит из $\boldsymbol{x} = x_0 x_1 \dots \in D^\omega$, в которых встречается бесконечно много нулей. Несложно видеть, что $X \subset D^\omega$ *не* является регулярным, например, потому что оно не замкнуто (см. **6.1.8**). Можно также доказать это с помощью прямых комбинаторных рассуждений. Если $G = (S, s_0, E)$ — детерминированный конечный автомат, распознающий X, то посмотрим на последовательность его переходов на бесконечной строке $1^\infty = 111 \cdots$. Поскольку эта строка не принадлежит X, автомат должен остановиться на каком-то шаге, скажем, после n-ого перехода. Тогда он остановится и при обработке строки $1^{n+1}0^\infty \in X$, что неправильно. Таким образом, X не регулярно; тем не менее, оно предрегулярно в смысле **6.1.15**, поскольку $\alpha \backslash X = X$ для любой конечной строки $\alpha \in D^*$, и потому $S_X = \{X\}$ конечно.

Несложно видеть также, что дополнение $D^\omega - X$, т.е. множество всех некорректных двоичных записей, также не является регулярным, например, потому что распознающий его конечный автомат должен был бы останавливаться на строке $0^\infty \in X$, а значит, и на $0^{n+1}1^\infty \notin X$ для достаточно большого n, что неправильно.

6.1.17. (Операции $R \mapsto \alpha\backslash R$ и $R \mapsto \alpha R$ переводят регулярные множества в регулярные.) Отметим, что для любого регулярного $R \subset A^\omega$ и любого слова $\alpha \in A^*$ подмножество $\alpha\backslash R$ является регулярным: в самом деле, оно распознаётся тем же конечным автоматом $G = (S, s_0, E)$, что и R, но с другим начальным состоянием s'_0, а именно, тем состоянием, в которое исходный автомат переходит после прочтения слова α (если такого состояния нет, то $\alpha\backslash R = \varnothing$). Кроме того, множество $\alpha R = \{\alpha\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in R\}$ также регулярно: распознающий его конечный автомат G_α содержит $n = |\alpha|$ дополнительных состояний $s_{-n}, \ldots, s_{-1}$ по сравнению с G, а также дополнительные переходы $s_{-n+i} \xrightarrow{\alpha_i} s_{-n+i+1}$ при $0 \leq i < n$, где $\alpha = \alpha_0 \cdots \alpha_{n-1}$, при этом начальным состоянием G_α является s_{-n}.

6.1.18. (Пересечение регулярных подмножеств.) *Если R_1 и R_2 — регулярные подмножества A^ω, то их пересечение $R_1 \cap R_2$ также регулярно.* В частности, *пересечение двух регулярных отношений на D^ω регулярно.* В самом деле, если $G_j = (S_j, s_{j0}, E_j)$ распознаёт R_j, $j = 1$, 2, то $R_1 \cap R_2$ распознаётся (внутренним) прямым произведением этих конечных автоматов $G = G_1 \times G_2$, т.е. конечным автоматом $G = (S_1 \times S_2, s_0, E)$, где $s_0 = (s_{10}, s_{20})$ и $E = E_1 \times_A E_2$; иначе говоря, переход $(s_1, s_2) \xrightarrow{a} (t_1, t_2)$ присутствует в $G_1 \times G_2$, если и только если $s_j \xrightarrow{a} t_j$ присутствует в G_j при $j = 1$, 2. Кроме того, это рассуждение показывает, что конечный автомат, распознающий $R_1 \cap R_2$, может быть эффективно вычислен с помощью некоторого алгоритма по конечным автоматам, распознающим R_1 и R_2 (и затем может быть минимизирован). Иначе говоря, операция пересечения регулярных подмножеств, а также регулярных отношений и регулярных соответствий, эффективна.

6.1.19. (Объединение регулярных подмножеств.) Чуть менее очевидно, что *объединение $R_1 \cup R_2$ регулярных подмножеств R_1 и $R_2 \subset A^\omega$ также регулярно.* Можно доказать это, например, заметив, что $\alpha\backslash(R_1 \cup R_2) = (\alpha\backslash R_1) \cup (\alpha\backslash R_2)$ для любого конечного слова $\alpha \in A^*$. Поэтому множество $S_{R_1 \cup R_2}$ из **6.1.14** содержится во множестве, состоящем из всевозможных объединений $R' \cup R''$, $R' \in S_{R_1}$, $R'' \in S_{R_2}$, и потому конечно, если S_{R_1} и S_{R_2} конечны; кроме того, $R_1 \cup R_2$ замкнуто. Можно также напрямую построить пополненный конечный автомат, распознающий $R_1 \cup R_2$, как прямое произведение пополненных конечных автоматов $G_{1,\perp}$ и $G_{2,\perp}$, распознающих R_1 и R_2, соответственно.

6.1.20. (Проверка $R_1 \subset R_2$.) Пусть R_1 и R_2 — регулярные подмножества A^ω. Покажем, что включение $R_1 \subset R_2$ (т.е. импликация $R_1 \Rightarrow R_2$ в случае регулярных отношений или соответствий) может быть эффективно проверено, исходя из конечных автоматов G_1 и G_2, распознающих R_1 и R_2. Действительно, пополним автомат $G_2 = (S_2, s_{20}, E_2)$ до автомата $G_{2,\perp}$ с помощью дополнительного ошибочного состояния $\perp$, как описано в **6.1.10**, и затем построим прямое произведение $G_1 \times G_{2,\perp}$, как в **6.1.18**, выкинем в получившимся автомате состояния, недостижимые из начального, а также состояния, из которых не начинаются бесконечные пути, как в **6.1.12**. Если в итоговом автомате осталось хоть одно состояние вида $(s, \perp)$ с $s \in S_1$, то $R_1 \not\subset R_2$, поскольку мы можем построить конечный путь с метками $x_0, \ldots, x_{n-1}$ из начального состояния (s_{10}, s_{20}) в $(s, \perp)$, и затем продолжить его до бесконечного пути с метками $x_n, x_{n+1}, \ldots$; тогда бесконечное слово $\boldsymbol{x} = x_0 x_1 \ldots \in A^\omega$ таково, что $\boldsymbol{x} \in R_1$, но $\boldsymbol{x} \notin R_2$. Напротив, если состояний вида $(s, \perp)$ не осталось, то $R_1 \subset R_2$.

6.1.21. (Проверка $R_1 = R_2$.) В частности, мы можем проверять два регулярных подмножества (в том числе два регулярных отношения) на равенство с помощью их конечных автоматов, поскольку $R_1 = R_2$ равносильно $(R_1 \subset R_2) \,\&\, (R_2 \subset R_1)$. Впрочем, чуть более эффективно сразу построить прямое произведение пополненных автоматов $G_{1,\perp} \times G_{2,\perp}$ и проверить, есть ли в нём состояния вида $(s_1, \perp)$ или $(\perp, s_2)$ с s_1, $s_2 \neq \perp$, достижимые из начального; перед этим надо минимизировать G_1 и G_2 или хотя бы удалить из них состояния, из которых не начинаются бесконечные пути.

6.1.22. (Проверка рефлексивности R.) Поскольку равенство на D^ω является регулярным отношением эквивалентности (оно задаётся автоматом с единственным состоянием $*$ и переходами $* \xrightarrow{xx} *$ для всех $x \in D$), мы можем эффективно проверять включение $[=] \subset R$, т.е. рефлексивность регулярного отношения R.

6.1.23. (Проверка симметричности R.) Заметим, что если отношение R регулярно, то и симметричное ему отношение R^{-1} также регулярно, поскольку оно распознаётся тем же конечным автоматом, что и R, если в нём заменить все метки переходов xy на симметричные yx. Поэтому проверка симметричности регулярного отношения R также эффективна, так как она равносильна проверке включения $R \subset R^{-1}$.

6.1.24. (Образ и прообраз регулярного множества.) Если $f : A \to B$ — произвольное отображение конечных множеств, то индуцированное отображение бесконечных слов $f^\omega : A^\omega \to B^\omega$ обладает тем свойством, что *образ $f^\omega(R)$ регулярен в B^ω, если $R \subset A^\omega$ регулярно*, и наоборот, *если $S \subset B^\omega$ регулярно, то и прообраз $(f^\omega)^{-1}(S) \subset A^\omega$ также регулярен.* Более общо, если Φ — произвольное соответствие между конечными множествами A и B, и Φ^ω — индуцированное соответствие между A^ω и B^ω, то образ $\Phi^\omega(R) \subset B^\omega$ регулярен для любого регулярного $R \subset A^\omega$, причём конечный автомат, задающий этот образ, легко строится по конечному автомату $G = (S, s_0, E)$, $E \subset S \times A \times S$, распознающему R: новый автомат $G^\Phi = (S, s_0, E^\Phi)$ обладает тем же множеством состояний S и начальным состоянием s_0, однако его переходы другие: $(s, b, t) \in E^\Phi$ в том и только том случае, если $(s, a, t) \in E$ для некоторого $a \in A$, такого, что $(a, b) \in \Phi$. Получающийся автомат G^Φ, очевидно, распознаёт $\Phi^\omega(R)$, однако он недетерминирован; его можно преобразовать в детерминированный стандартным образом, см. **6.1.6**.

6.1.25. (Пример: проекция регулярного множества регулярна.) В частности, если $R \subset A^\omega \times B^\omega = (A \times B)^\omega$ — регулярное соответствие, то $\mathrm{pr}_1(R) \subset A^\omega$ и $\mathrm{pr}_2(R) \subset B^\omega$ — регулярные подмножества.

6.1.26. (Прямое произведение регулярных множеств регулярно.) Если $R \subset A^\omega$ и $S \subset B^\omega$ — регулярные множества, то их прямое произведение $R \times S \subset A^\omega \times B^\omega \cong (A \times B)^\omega$ также регулярно. В самом деле, конечный автомат $G_{R \times S}$, распознающий $R \times S$, есть внешнее прямое произведение $G_R \boxtimes G_S$ автоматов G_R и G_S, распознающих R и S соответственно.

6.1.27. (Композиция $S \circ R$ регулярных соответствий R и S регулярна.) Пусть $R \subset A^\omega \times B^\omega$ и $S \subset B^\omega \times C^\omega$ — регулярные соответствия. Тогда их композиция $S \circ R \subset A^\omega \times C^\omega$, заданная стандартным образом

$$S \circ R = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \mid \exists \boldsymbol{y} \colon (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in R \,\&\, (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in S\} \tag{6.1.27.1}$$

является регулярным соответствием. Действительно, $S \circ R$ является образом прообраза прямого произведения $R \times S$:

$$S \circ R = p^\omega\bigl((\Delta^\omega)^{-1}(R \times S)\bigr) \tag{6.1.27.2}$$

где прямое произведение $R \times S \subset (A \times B \times B \times C)^\omega$ регулярно по **6.1.26**, $\Delta = \mathrm{id}_A \times \Delta_B \times \mathrm{id}_C : A \times B \times C \to A \times B \times B \times C$ индуцировано диагональю, а $p = \mathrm{pr}_{23} : A \times B \times C \to A \times C$ — проекция, так что $S \circ R$ регулярно согласно **6.1.24**. Более того, конечный автомат, распознающий $S \circ R$, может быть эффективно построен по конечным автоматам, распознающим R и S.

6.1.28. (Проверка транзитивности R.) Теперь мы готовы обсудить эффективную проверку транзитивности регулярного отношения R на D^ω. Для этого заметим, что транзитивность эквивалентна включению $R \circ R \subset R$, и при этом композиция $R \circ R$ может быть эффективно вычислена по R согласно **6.1.27**, после чего включение $R \circ R \subset R$ может быть эффективно проверено по **6.1.20**.

6.1.29. (Регулярные отношения эквивалентности.) Будем говорить, что отношение $\equiv$ на D^ω — *регулярное отношение эквивалентности*, если оно одновременно регулярно и является отношением эквивалентности. Такое отношение эквивалентности всегда задаётся некоторым конечным автоматом, который при желании можно всегда минимизировать (см. **6.1.12**); кроме того, по конечному автомату над алфавитом $D \times D$ можно эффективно проверить, является ли заданное им регулярное отношение на D^ω отношением эквивалентности (см. **6.1.22**, **6.1.23** и **6.1.28**).

Определение 6.1.30 *(Регулярные отображения.) Пусть A и B — конечные множества, $R \subset A^\omega$ и $S \subset B^\omega$ — регулярные подмножества. Будем говорить, что отображение $f : R \to S$* **регулярно**, *если его график $\Gamma_f \subset R \times S \subset A^\omega \times B^\omega$ — регулярное соответствие в смысле* **6.1.4**.

6.1.31. (Композиция регулярных отображений.) Из **6.1.27** немедленно следует, что композиция регулярных отображений регулярна. Кроме того, из **6.1.22** следует, что $\mathrm{id}_R : R \to R$ — регулярное отображение для любого регулярного множества $R \subset A^\omega$.

6.1.32. (Пример регулярного отображения: $\sigma_a : \boldsymbol{x} \mapsto a\boldsymbol{x}$ для $a \in A$.) Пусть A — конечное множество, зафиксируем $a \in A$ и рассмотрим отображение конкатенации $\sigma_a : \boldsymbol{x} \mapsto a\boldsymbol{x}$. Это отображение регулярно. Действительно, множество всех пар $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ с $\boldsymbol{y} = a\boldsymbol{x}$ можно распознать с помощью конечного автомата, состояния которого — это элементы A, начальное состояние — это $a \in A$, а переходы — это $y \xrightarrow{xy} x$ для всех x, $y \in A$.

6.1.33. (Пример регулярного отображения: $\sigma_\alpha : \boldsymbol{x} \mapsto \alpha\boldsymbol{x}$ для $\alpha \in A^*$.) Предыдущий пример можно обобщить: если $\alpha \in A^*$ — произвольное конечное слово, то $\sigma_\alpha : \boldsymbol{x} \mapsto \alpha\boldsymbol{x}$ — регулярное отображение. Это следует, например, из **6.1.32** и **6.1.31**, поскольку $\sigma_\alpha = \sigma_{a_0} \circ \cdots \circ \sigma_{a_{n-1}}$, если $\alpha = a_0 \ldots a_{n-1}$. Можно также напрямую построить конечный автомат, распознающий пары $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, такие, что $\boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{x}$. Состояния этого автомата — это всевозможные слова $\beta \in A^n$ с $|\beta| = n := |\alpha|$, начальное состояние — это слово α, а переходы — это $y\beta \xrightarrow{xy} \beta x$ для всех $\beta \in A^{n-1}$, x, $y \in A$.

6.1.34. (Отображение отбрасывания первого символа $\tau : x_0x_1\cdots \mapsto x_1x_2\cdots$ регулярно.) Отображение отбрасывания первого символа $\tau : A^\omega \to A^\omega$, $(\tau(\boldsymbol{x}))_n = x_{n+1}$, также регулярно, например, потому что его график симметричен объединению графиков всех σ_a, $a \in A$. Как и в предыдущих примерах, можно напрямую построить конечный автомат, распознающий график Γ_τ: состояния этого конечного автомата — слова длины не более 1, начальное состояние — пустое слово $\emptyset$, а переходы — $\emptyset \xrightarrow{xy} y$ и $x \xrightarrow{xy} y$ для всех x, $y \in A$.

6.1.35. (Факторпространство $K := D^\omega/\equiv$ — польский компакт.) Пусть дано регулярное отношение эквивалентности $\equiv$ на компакте D^ω. Тогда факторпространство $K := D^\omega/\equiv$ отделимо (раз график $\equiv$ замкнут согласно **6.1.9**), а значит, и компактно. Напомним, что компакт является польским (т.е. метризуемым топологическим пространством, обладающим счётным всюду плотным множеством) в том и только том случае, если он метризуем, а также в том и только том случае, если он удовлетворяет второй аксиоме счётности, т.е. обладает счётной базой топологии. Отсюда сразу следует, что отделимое факторпространство польского компакта является польским компактом; в частности, $K = D^\omega/\equiv$ — польский компакт (если $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — счётная база топологии D^ω, то в качестве счётной базы топологии K можно взять семейство множеств $W_A := K - \pi(D^\omega - \bigcup_{n\in A} V_n)$, где A пробегает всевозможные конечные подмножества $\mathbb{N}$, а $\pi : D^\omega \twoheadrightarrow K = D^\omega/\equiv$ обозначает каноническую проекцию). В частности, компакт K метризуем. Однако явно указать расстояние на K (например, с помощью формулы, аналогичной (6.1.7.1), задающей расстояние на D^ω) не всегда просто.

6.1.36. (Граница и дополнение внутренности регулярного множества регулярны.) Докажем, что *граница* $\partial R = R - \operatorname{Int} R$ *и дополнение внутренности* $A^\omega - \operatorname{Int} R$*, или, что одно и то же, замыкание дополнения* $\overline{A^\omega - R}$ *регулярного множества* $R \subset A^\omega$ *регулярны.* Отметим, что едва ли можно ожидать регулярности самой внутренности $\operatorname{Int} R$, поскольку она, вообще говоря, не замкнута, а значит, и не регулярна (см. **6.1.8**); аналогичное замечание верно и для дополнения $A^\omega - R$. Для доказательства зафиксируем минимальный конечный автомат $G = (S, s_0, E)$ над алфавитом A, распознающий R. Пусть $S_{int} \subset S$ — те состояния, при использовании которых в качестве начальных распознаются все слова из A^ω. Множество

S_{int} можно эффективно вычислить, поскольку S_{int} — это в точности все состояния пополненного конечного автомата $G_\perp$ (см. **6.1.10**), из которых недостижимо ошибочное состояние $\perp$. Если $s_0 \in S_{int}$, то $R = A^\omega$ и утверждение тривиально, т.к. $\partial R = A^\omega - \operatorname{Int} R = \varnothing$. Поэтому будем считать, что $s_0 \notin S_{int}$. Выбросим из G все состояния из S_{int}, а также все переходы, ведущие в такие состояния или из них. Получившийся конечный автомат ∂G распознаёт те бесконечные строки $\boldsymbol{x} \in A^\omega$, которые распознаются исходным автоматом G таким образом, что он никогда не оказывается в одном из состояний S_{int}; иначе говоря, ∂G распознаёт регулярное множество

$$R' = \{\boldsymbol{x} = x_0 x_1 \cdots \in R \mid \forall n \in \mathbb{N}_0,\, x_0 x_1 \ldots x_{n-1} A^\omega \not\subset R\} \qquad (6.1.36.1)$$

Это условие означает, что $\boldsymbol{x} \in R$ таково, что никакая его окрестность не содержится целиком в R, т.е. что $\boldsymbol{x} \in \partial R$. Это доказывает регулярность границы ∂R. Регулярность $A^\omega - \operatorname{Int} R$ доказывается аналогично: это множество распознаётся конечным автоматом G'', получающимся из пополненного автомата $G_\perp$ выбрасыванием состояний из S_{int}, после чего ошибочное состояние $\perp$ интерпретируется как одно из обычных состояний нового автомата. Несложно видеть, что G'' распознаёт в точности те $\boldsymbol{x} \in A^\omega$, которые либо вовсе не распознаются исходным автоматом G (т.е. $G_\perp$ переходит на них через конечное число шагов в состояние $\perp$ и остаётся в нём навсегда), либо которые распознаются им, но так, что G никогда не оказывается в состояниях из S_{int}. Это означает, что G'' распознаёт множество $R'' = (A^\omega - R) \cup \partial R = A^\omega - \operatorname{Int} R$, так что $A^\omega - \operatorname{Int} R$ регулярно.

6.2 Регулярные подсистемы

Регулярные подмножества $R \subset A^\omega$, изученные в предыдущем подразделе, в какой-то степени аналогичны замкнутым по Зарискому подмножествам аффинного пространства. Мы хотим определить *регулярные подсистемы* $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{A^\omega}$, аналогичные замкнутым подсхемам того же аффинного пространства. Таким образом, каждой регулярной подсистеме $\boldsymbol{R}$ сопоставляется некоторое регулярное подмножество — а именно, её *носитель* $|\boldsymbol{R}|$, однако одному и тому же регулярному подмножеству могут соответствовать различные регулярные системы.

6.2.1. (Проекции $\operatorname{pr}_{n\to m} : A^n \to A^m$ при $0 \le m \le n \le \omega$.) Пусть $0 \le m \le$

$n \le \omega$ — ординалы, A — произвольное множество (обычно конечное). Тогда мы можем определить *отображение проекции* $\mathrm{pr}_{n\to m} : A^n \to A^m$, переводящее конечную последовательность $(x_i)_{0\le i<n} \in A^n$ в её ограничение $(x_i)_{0\le i<m}$, или, если угодно, слово $x_0x_1 \dots x_{n-1}$ в его префикс $x_0x_1 \dots x_{m-1}$ длины m. Можно также сказать, что $\mathrm{pr}_{n\to m}$ — это $A^{m\to n}$, т.е. результат применения контравариантного функтора $A^{(-)} = \mathrm{Hom}_{Sets}(-, A)$ к вложению ординалов $m \to n$. Ясно, что при $0 \le m \le n \le p \le \omega$ выполнено равенство $\mathrm{pr}_{n\to m} \circ \mathrm{pr}_{p\to n} = \mathrm{pr}_{p\to m}$, так что $\{A_n, \mathrm{pr}_{n\to m}\}$ с $0 \le m \le n < \omega$ образуют проективную систему, а $\mathrm{pr}_{\omega\to n}$ определяют биективное отображение $A^\omega \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{n\in\mathbb{N}_0} A^n$ из A^ω в проективный предел этой системы.

6.2.2. (Усечения R_n и огрубления $\tilde{R}_n = W_n(R)$ произвольного подмножества $R \subset A^\omega$.) Пусть A — конечный алфавит, $R \subset A^\omega$ — произвольное подмножество. Обозначим $R_n := \mathrm{pr}_{\omega\to n}(R) \subset A^n$ и $\tilde{R}_n := \mathrm{pr}^{-1}_{\omega\to n}(R_n)$; будем говорить, что R_n — *n-ое усечение* R, а $\tilde{R}_n$ — *n-ое огрубление* R. Если R замкнуто, то R отождествляется с проективным пределом $\varprojlim_n R_n \subset \varprojlim_n A^n \cong A^\omega$; в общем случае этот проективный предел равен замыканию $\bar{R}$. Кроме того, если W_n — окружение равномерной структуры компакта A^ω, такое, что $\boldsymbol{x} W_n \boldsymbol{y}$ в том и только том случае, если $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y} \in A^\omega$ совпадают по первым n символам, т.е. $\mathrm{pr}_{\omega\to n}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{pr}_{\omega\to n}(\boldsymbol{y})$, то $\tilde{R}_n = W_n(R)$. Ясно, что $\tilde{R}_n$ одновременно открыто и замкнуто в A^ω, и что $\{\tilde{R}_n\}_{n\ge 0}$ — убывающая последовательность компактов в A^ω, пересечение членов которой равно замыканию $\bar{R}$ исходного множества R.

Предыдущие конструкции применимы также к соответствиям $R \subset A^\omega \times B^\omega$, где B — ещё одно конечное множество, поскольку $A^\omega \times B^\omega \cong (A \times B)^\omega$, и к отношениям $R \subset A^\omega \times A^\omega$, поскольку мы можем взять $B = A$. Кроме того, всё это применимо к регулярным подмножествам, соответствиям и отношениям. В частности, *регулярное подмножество $R \subset A^\omega$ полностью определяется последовательностью своих усечений R_n или огрублений $\tilde{R}_n$*, поскольку это верно для произвольных замкнутых подмножеств $R \subset A^\omega$ (тогда $R = \bigcap_{n\ge 0} \tilde{R}_n \cong \varprojlim_n R_n$); это же верно и для регулярных соответствий $R \subset A^\omega \times B^\omega$ и регулярных отношений $R \subset A^\omega \times A^\omega$.

6.2.3. (Квазиусечения и квазиогрубления, заданные конечным автоматом, распознающим R.) Пусть $R \subset A^\omega$ — регулярное подмножество, распознаваемое некоторым конечным автоматом $G = (S, s_0, E)$ (см. **6.1.1** и **6.1.4**). В этом случае G определяет некоторые подмножества $R_{G,n} \subset A^n$ и $\tilde{R}_{G,n} := \mathrm{pr}^{-1}_{\omega\to n}(R_{G,n})$, которые можно назвать *псевдоусечениями* и *псев-*

доогрублениями R, определёнными автоматом G. А именно, $R_{G,n}$ состоит из всех строк $\alpha = x_0 x_1 \cdots x_{n-1} \in A^n$ длины n, распознаваемыми G (т.е. такими, для которых существует последовательность переходов $s_j \xrightarrow{x_j} s_{j+1}$ в G при $0 \leq j \leq n-1$, где $s_j \in S$). Ясно, что R отождествляется с $\varprojlim_n R_{G,n} \subset \varprojlim_n A^n \cong A^\omega$ (это следует непосредственно из определения **6.1.1**), но при этом $R_{G,n}$ не обязано совпадать с R_n, а может быть несколько больше. Аналогично, псевдоогрубления $\tilde{R}_{G,n} := \mathrm{pr}^{-1}_{\omega \to n}(R_{G,n})$ содержат огрубления $\tilde{R}_n$, но, вообще говоря, не совпадают с ними, однако при этом $\bigcap_{n \geq 0} \tilde{R}_{G,n} = R$. Отметим, однако, что если из каждого состояния автомата G начинается бесконечная последовательность переходов, например, если G минимален (см. **6.1.12**), то $R_{G,n} = \mathrm{pr}_{\omega \to n}(R) = R_n$ и $\tilde{R}_{G,n} = \tilde{R}_n$. Таким образом, последовательность $\boldsymbol{R} := \{R_{G,n}\}_{n \geq 0}$ или $\{\tilde{R}_{G,n}\}_{n \geq 0}$ полностью определяет регулярное множество R, но содержит больше информации; в некотором смысле это аналогично ситуации в алгебраической геометрии, где на одном и том же замкнутом подпространстве Y схемы X могут существовать различные (неприведённые) структуры подсхемы.

Предложение 6.2.4 *(Сравнение псевдоогрублений регулярных подмножеств $R \subset S$.) Пусть $R \subset S \subset A^\omega$ — регулярные подмножества, распознаваемые конечными автоматами G и G' (не обязательно минимальными), и пусть $\tilde{R}_{G,n}$ и $\tilde{S}_{G',n}$ — соответствующие псевдоогрубления (см.* **6.2.3***). Тогда существует $\ell \in \mathbb{N}_0$, такое, что для всех $n \in \mathbb{N}_0$ выполнено $\tilde{R}_{G,n+\ell} \subset \tilde{S}_{G',n}$, или, что равносильно, $\mathrm{pr}_{n+\ell \to n}(R_{G,n+\ell}) \subset S_{G',n}$. В частности, существует $\ell \in \mathbb{N}_0$, такое, что $\tilde{R}_{G,n+\ell} \subset \tilde{S}_n$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$, что равносильно $\mathrm{pr}_{n+\ell \to n}(R_{G,n+\ell}) \subset S_n$. В качестве ℓ можно взять, например, количество состояний автомата G.*

Доказательство. Если взять в качестве G' минимальный автомат, распознающий S, то псевдоогрубление $\tilde{S}_{G',n}$ совпадает с обычным огрублением $\tilde{S}_n$, так что второе утверждение предложения действительно является частным случаем основного. С другой стороны, поскольку всегда $\tilde{S}_n \subset \tilde{S}_{G',n}$, достаточно доказать второе утверждение, т.е. можно предполагать G' минимальным. Кроме того, поскольку из $R \subset S$ следует $\tilde{R}_n \subset \tilde{S}_n$, достаточно доказать это утверждение в случае $S = R$, т.е. доказать существование $\ell \in \mathbb{N}_0$, такого, что $\tilde{R}_{G,n+\ell} \subset \tilde{R}_n$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$. Поэтому будем считать, что $S = R$ и что автомат G' минимален. Возьмём в качестве ℓ количество состояний автомата G, из которых не начинается ни одного бесконечного пути (или любое большее число, например, общее количество состояний автомата G). Если $\boldsymbol{x} \in \tilde{R}_{G,n+\ell}$, то автомат G распознаёт конечную строку $x_0x_1 \dots x_{n+\ell-1}$. Пусть s_m — состояние автомата G после чтения первых m символов $\boldsymbol{x}$, и выберем наибольшее $0 \leq m \leq n+\ell$, такое, что из состояния s_m начинается бесконечный путь в G (если такого m нет, т.е. если даже из начального состояния s_0 нет бесконечного пути, то положим $m = -1$). Если $m \geq 0$, и $\boldsymbol{y}$ — последовательность меток произвольного бесконечного пути, начинающегося в s_m, то $x_0 \dots x_{m-1}\boldsymbol{y} \in R$, откуда $\boldsymbol{x} \in W_m(R) = \tilde{R}_m$. Согласно выбору m, ни из какого из $n+\ell-m$ состояний s_{m+1}, s_{m+2}, …, $s_{n+\ell}$ не начинается бесконечный путь, а значит, все эти состояния различны (если бы $s_i = s_j$ при $m < i < j \leq n+\ell$, то из s_i начинался бы бесконечный путь с циклической меткой $(x_ix_{i+1} \dots x_{j-1})^\infty$). Ввиду выбора ℓ это означает, что $n+\ell-m \leq \ell$, откуда $m \geq n$ и $\boldsymbol{x} \in \tilde{R}_m \subset \tilde{R}_n$, что завершает доказательство включения $\tilde{R}_{G,n+\ell} \subset \tilde{R}_n$ в основном случае $m \geq 0$. Если же $m = -1$, то неравенство $m \geq n$ приводит к противоречию, т.е. $\boldsymbol{x} \in \tilde{R}_{G,n+\ell}$ невозможно, откуда получаем требуемое включение $\tilde{R}_{G,n+\ell} = \varnothing \subset \tilde{R}_n$ и в этом случае.

6.2.5. (Подсистемы, или ω-подпредпучки $\boldsymbol{R} \subset A^{\boldsymbol{\omega}}$.) Отождествим ординал ω, т.е. множество неотрицательных целых чисел с естественным порядком, с соответствующей категорией, и рассмотрим категорию $\hat{\omega} = \mathit{Funct}(\omega^{op}, \mathit{Sets})$ предпучков множеств на ω. При этом мы также отождествим натуральное число (конечный ординал) $n \in \omega$ с множеством всех меньших ординалов, т.е. со стандартным конечным множеством $\boldsymbol{n} = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Тогда можно отождествить морфизм $m \to n$ в ω при $0 \leq m \leq n$ с каноническим вложением множеств $\boldsymbol{m} \hookrightarrow \boldsymbol{n}$, и считать, что ω — подкатегория категории множеств *Sets*.

Для произвольного множества A обозначим через $A^{\boldsymbol{\omega}}$ предпучок $n \rightsquigarrow A^n$, являющийся ограничением на $\omega \subset \mathit{Sets}$ представимого функтора $h_A = \mathrm{Hom}_{\mathit{Sets}}(-, A)$ после упомянутого выше отождествления объектов $n : \omega$ с конечными множествами $\boldsymbol{n} = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Отображения $A^{\boldsymbol{\omega}}(m \to n) : A^n \to A^m$, получающиеся применением функтора $A^{\boldsymbol{\omega}}$ к морфизмам $m \to n$ в ω — это в точности проекции $\mathrm{pr}_{n \to m}$ из **6.2.1**, отображающие $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ в набор из первых m компонент $(x_0, x_1, \dots, x_{m-1})$. Поэтому последовательности огрублений $\boldsymbol{R} = \{R_n\}_{n \geq 0}$, $R_n \subset A^n$, из **6.2.2** или псевдоогрублений $\boldsymbol{R} = \{R_{G,n}\}_{n \geq 0}$, $R_{G,n} \subset A^n$, из **6.2.3** представляют из себя ω-подпредпучки $\boldsymbol{R} \subset A^{\boldsymbol{\omega}}$, т.е. подфункторы функтора $A^{\boldsymbol{\omega}}$ (или его подобъекты в категории $\hat{\omega}$).

Более общо, будем говорить, что $\boldsymbol{R} = \{R_n\}_{n\geq 0}$ является *(проективной) подсистемой* или *ω-подпредпучком* $A^{\boldsymbol{\omega}}$, если $\boldsymbol{R} \subset A^{\boldsymbol{\omega}}$ в категории $\hat{\omega}$, т.е. если $R_n \subset A^n$ и $\mathrm{pr}_{n+1\to n}(R_{n+1}) \subset R_n$ для всех $n \geq 0$. Обычно мы применяем эту терминологию только для конечных множеств (алфавитов) A; тогда все $R_n \subset A^n$ также конечны.

6.2.6. (Носитель $|\boldsymbol{R}|$ подсистемы $\boldsymbol{R} \subset A^{\boldsymbol{\omega}}$. Система $\boldsymbol{R}$ как дополнительная структура на замкнутом множестве $|\boldsymbol{R}|$. Минимальные подсистемы с данным носителем.) Каждый ω-подпредпучок $\boldsymbol{R} \subset A^{\boldsymbol{\omega}}$ является подсистемой проективной системы $\{A^n, \mathrm{pr}_{n\to m}\}$, рассмотренной ранее, и потому ему можно сопоставить его проективный предел $\varprojlim \boldsymbol{R} \subset \varprojlim A^{\boldsymbol{\omega}} = A^{\omega}$, т.е. некоторое *замкнутое* подмножество в A^{ω}; мы будем также говорить, что $\varprojlim \boldsymbol{R}$ — это *носитель* системы или ω-предпучка $\boldsymbol{R}$ и обозначать его через $|\boldsymbol{R}|$. Одному и тому же замкнутому подмножеству $R \subset A^{\omega}$ могут соответствовать различные $\boldsymbol{R} \subset A^{\boldsymbol{\omega}}$, такие, что $|\boldsymbol{R}| = R$; таким образом, можно считать, что *система $\boldsymbol{R}$ — это некоторая дополнительная структура на замкнутом подмножестве $R \subset A^{\omega}$.* Из всех систем $\boldsymbol{R} \subset A^{\boldsymbol{\omega}}$ с фиксированным носителем $|\boldsymbol{R}| = R$ есть наименьшая, а именно, система, составленная из проекций $\{\mathrm{pr}_{\omega\to n}(R)\}_{n\geq 0}$. Мы будем говорить, что такая система является *минимальной* или *приведённой*. В частности, *для любого замкнутого подмножества $R \subset A^{\omega}$ существует как минимум одна подсистема с носителем R*, а именно, построенная выше минимальная система $\{\mathrm{pr}_{\omega\to n}(R)\}_{n\geq 0}$. В интересующем нас случае A конечно, и тогда *система $\boldsymbol{R} \subset A^{\boldsymbol{\omega}}$ минимальна в том и только том случае, если все её морфизмы перехода $R_{n+1} \to R_n$ сюръективны, т.е. если $\mathrm{pr}_{n+1\to n}(R_{n+1}) = R_n$ для всех $n \geq 0$.*

6.2.7. (Усечения $\boldsymbol{R}_n \subset A^n$ и огрубления $\tilde{\boldsymbol{R}}_n \subset A^{\omega}$, определённые системой $\boldsymbol{R} \subset A^{\omega}$.) Если $\boldsymbol{R} = \{\boldsymbol{R}_n\}_{n\geq 0} \subset A^{\boldsymbol{\omega}}$ — произвольная подсистема, то мы можем по аналогии с **6.2.2** рассматривать $\boldsymbol{R}_n = \boldsymbol{R}(n) \subset A^n$ (т.е. значения предпучка $\boldsymbol{R} : \omega^{op} \to Sets$ на объектах $n : \omega$) как *усечения* системы $\boldsymbol{R}$, а открыто-замкнутые подмножества $\tilde{\boldsymbol{R}}_n := \mathrm{pr}_{\omega\to n}^{-1}(\boldsymbol{R}_n) \subset A^{\omega}$ — как *огрубления* $\boldsymbol{R}$. Ясно, что $\{\tilde{\boldsymbol{R}}_n\}_{n\geq 0}$ — убывающая последовательность открыто-замкнутых подмножеств в A^{ω}, пересечение которой равно носителю $|\boldsymbol{R}|$, и что это последовательность однозначно определяет $\boldsymbol{R}$, поскольку $\boldsymbol{R}_n = \mathrm{pr}_{\omega\to n}(\tilde{\boldsymbol{R}}_n)$.

6.2.8. (Регулярные системы $\boldsymbol{R}_G = \{R_{G,n}\}_{n\geq 0} \subset A^{\boldsymbol{\omega}}$, заданные конечным автоматом G над алфавитом A.) Пусть $G = (S, s_0, E)$ — конечный (не обязательно детерминированный) автомат над конечным алфавитом A.

Пусть $R_{G,n}$ — множество всех слов $\alpha = x_0 x_1 \ldots x_{n-1} \in A^n$, распознаваемых G, т.е. таких, что существуют состояния $s_j \in S$, $1 \leq j \leq n$, и переходы $s_j \xrightarrow{x_j} s_{j+1}$ из E, $0 \leq j \leq n-1$. Иначе говоря, $R_{G,n}$ — это псевдоусечения, определённые конечным автоматом G в смысле **6.2.3**. Тогда $\mathrm{pr}_{n+1\to n}(R_{G,n+1}) \subset R_{G,n}$, и потому G определяет некоторую систему $\boldsymbol{R}_G = \{R_{G,n}\}_{n\geq 0} \subset A^{\boldsymbol{\omega}}$. Мы будем говорить, что система $\boldsymbol{R} \subset A^{\boldsymbol{\omega}}$ *регулярна*, если $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_G$ для некоторого конечного автомата G, который при желании можно считать детерминированным, при необходимости преобразовав его стандартным образом из **6.1.6**.

6.2.9. (Носитель регулярной системы $\boldsymbol{R}_G$ — это регулярное множество, распознаваемое G. Регулярная система как дополнительная структура на регулярном множестве.) Отметим, что носитель $|\boldsymbol{R}_G|$ регулярной системы $\boldsymbol{R}_G$, заданной конечным автоматом G — это в точности регулярное множество $R \subset A^\omega$, распознаваемое G в смысле **6.1.4**. Наоборот, если множество $R \subset A^\omega$ регулярно, то и минимальная регулярная система с носителем R (см. **6.2.6**) также регулярна, например, потому что она совпадает с регулярной системой, заданной минимальным автоматом, распознающим R. Поэтому имеет смысл рассматривать регулярную систему $\boldsymbol{R}$ как некоторую дополнительную структуру на регулярном множестве $|\boldsymbol{R}|$. Можно также отождествлять регулярное множество R с соответствующей минимальной регулярной системой. В этом смысле регулярные подмножества $R \subset A^\omega$ аналогичны замкнутым по Зарискому подмножествам аффинного пространства, а регулярные системы $\boldsymbol{R} \subset A^{\boldsymbol{\omega}}$ — замкнутым подсхемам того же аффинного пространства.

6.2.10. (Критерий регулярности системы $\boldsymbol{R} \subset A^{\boldsymbol{\omega}}$ и минимальный автомат, распознающий $\boldsymbol{R}$.) Для любой системы $\boldsymbol{R} = \{R_n\}_{n\geq 0} \subset A^{\boldsymbol{\omega}}$ и любого конечного слова $\alpha \in A^*$ обозначим через $\alpha\backslash\boldsymbol{R}$ систему

$$\alpha\backslash\boldsymbol{R} := \{\alpha\backslash R_{n+|\alpha|}\}_{n\geq 0} \subset A^{\boldsymbol{\omega}} \qquad (6.2.10.1)$$

где, как обычно, для любого подмножества $T \subset A^*$

$$\alpha\backslash T = \{\beta \in A^* :\ \alpha\beta \in T\} \qquad (6.2.10.2)$$

Рассмотрим для системы $\boldsymbol{R} \subset A^{\boldsymbol{\omega}}$ множество

$$S_{\boldsymbol{R}} := \{\alpha\backslash\boldsymbol{R} :\ \alpha \in A^*\} \qquad (6.2.10.3)$$

Несложно видеть по аналогии с **6.1.14**, что *система $\boldsymbol{R} \subset A^{\boldsymbol{\omega}}$ регулярна в том и только том случае, если множество $S_{\boldsymbol{R}}$ конечно*, и что в этом случае $S_{\boldsymbol{R}}$ можно рассматривать как состояния (пополненного) минимального конечного автомата, распознающего $\boldsymbol{R}$. Начальное состояние этого автомата — это само $\boldsymbol{R} = \emptyset \backslash \boldsymbol{R}$, а переходы — $\boldsymbol{T} \xrightarrow{x} x \backslash \boldsymbol{T}$; ошибочное состояние — это пустая система $\boldsymbol{\varnothing}$, инициальный объект категории $\hat{\omega}$. Если нужен непополненный автомат, можно выкинуть ошибочное состояние.

Отметим, что критерий регулярности для систем $\boldsymbol{R} \subset A^{\boldsymbol{\omega}}$ оказывается даже проще, чем критерий регулярности **6.1.14** для подмножеств $R \subset A^{\omega}$, поскольку последний дополнительно требует также замкнутость R.

Теперь можно переформулировать **6.2.4** следующим образом:

Предложение 6.2.11 *(Включение регулярных систем и их огрублений.) Если $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{S} \subset A^{\boldsymbol{\omega}}$ — регулярные подсистемы, такие, что $|\boldsymbol{R}| \subset |\boldsymbol{S}|$ в A^{ω}, то существует $\ell \in \mathbb{N}_0$, такое, что включение огрублений $\tilde{\boldsymbol{R}}_{n+\ell} \subset \tilde{\boldsymbol{S}}_n$ выполнено для всех $n \geq 0$.*

6.2.12. (Операции пересечения и объединения регулярных систем.) Если $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{S} \subset A^{\boldsymbol{\omega}}$ — регулярные подсистемы, то их пересечение $\boldsymbol{R} \cap \boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{R} \cup \boldsymbol{S}$, определённые, например, как их нижняя и верхняя грань в решётке подобъектов $A^{\boldsymbol{\omega}}$, либо с помощью явных покомпонентных формул $(\boldsymbol{R} \cap \boldsymbol{S})_n := \boldsymbol{R}_n \cap \boldsymbol{S}_n$, $(\boldsymbol{R} \cup \boldsymbol{S})_n := \boldsymbol{R}_n \cup \boldsymbol{S}_n$, регулярны в $A^{\boldsymbol{\omega}}$. Это утверждение является обобщением **6.1.18** и **6.1.19** и доказывается ровно так же, с помощью тех же конструкций с конечными автоматами, либо с помощью формул $\alpha \backslash (\boldsymbol{R} \cap \boldsymbol{S}) = (\alpha \backslash \boldsymbol{R}) \cap (\alpha \backslash \boldsymbol{S})$ и $\alpha \backslash (\boldsymbol{R} \cup \boldsymbol{S}) = (\alpha \backslash \boldsymbol{R}) \cup (\alpha \backslash \boldsymbol{S})$ и критерия **6.2.10**.

6.2.13. (Прямое произведение регулярных систем.) Аналогично, если $\boldsymbol{R} \subset A^{\boldsymbol{\omega}}$ и $\boldsymbol{S} \subset B^{\boldsymbol{\omega}}$ регулярны, то и их прямое произведение $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{S} \subset A^{\boldsymbol{\omega}} \times B^{\boldsymbol{\omega}} \cong (A \times B)^{\boldsymbol{\omega}}$, определённое либо категорно внутри $\hat{\omega}$, либо покомпонентно с помощью $(\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{S})_n := \boldsymbol{R}_n \times \boldsymbol{S}_n \subset A^n \times B^n \cong (A \times B)^n$, снова регулярно, что устанавливается с помощью внешнего прямого произведения соответствующих конечных автоматов, как в **6.1.26**, либо с помощью критерия **6.2.10** и формулы $(\alpha, \beta) \backslash (\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{S}) = (\alpha \backslash \boldsymbol{R}) \times (\beta \backslash \boldsymbol{S})$ для любых $\alpha \in A^*$, $\beta \in B^*$ одинаковой длины.

6.2.14. (Образ и прообраз регулярных систем относительно $\varphi^{\boldsymbol{\omega}} : A^{\boldsymbol{\omega}} \to B^{\boldsymbol{\omega}}$.) Ясно, что конструкция $A \rightsquigarrow A^{\boldsymbol{\omega}}$ функториальна по A, и потому любое отображение конечных множеств $\varphi : A \to B$ индуцирует морфизм $\varphi^{\boldsymbol{\omega}} : A^{\boldsymbol{\omega}} \to B^{\boldsymbol{\omega}}$. Докажем, что образы и прообразы относительно $\varphi^{\boldsymbol{\omega}}$ регулярных подсистем снова регулярны. Как и в **6.1.24**, докажем более общее утверждение, а именно, что для произвольного соответствия $\Phi \subset A \times B$ соответствие $\Phi^{\boldsymbol{\omega}} \subset A^{\boldsymbol{\omega}} \times B^{\boldsymbol{\omega}}$ переводит регулярное $\boldsymbol{R} \subset A^{\boldsymbol{\omega}}$ в регулярное $\Phi^{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{R}) \subset B^{\boldsymbol{\omega}}$ с компонентами $\Phi^{\times n}(\boldsymbol{R}_n) \subset B^n$, а затем применим это утверждение к $\Phi = \varphi$ и $\Phi = \varphi^{-1}$. Доказательство снова ровно такое же, как в **6.1.24**: достаточно взять детерминированный конечный автомат G, распознающий $\boldsymbol{R}$, построить по нему недетерминированный автомат G^{Φ}, распознающий $\Phi^{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{R})$, а затем стандартным образом преобразовать G^{Φ} в детерминированный автомат.

6.2.15. (Частный случай: проекции и покомпонентная композиция.) В качестве частного случая применения предыдущих конструкций отметим, что если система $\boldsymbol{R} \subset A^{\boldsymbol{\omega}} \times B^{\boldsymbol{\omega}}$ регулярна, то и её проекции $\mathrm{pr}_1(\boldsymbol{R}) \subset A^{\boldsymbol{\omega}}$ и $\mathrm{pr}_2(\boldsymbol{R}) \subset B^{\boldsymbol{\omega}}$ регулярны, а также что если системы $\boldsymbol{R} \subset A^{\boldsymbol{\omega}} \times B^{\boldsymbol{\omega}}$ и $\boldsymbol{S} \subset B^{\boldsymbol{\omega}} \times C^{\boldsymbol{\omega}}$ регулярны, то и их «покомпонентная композиция» $\boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{R} = \{S_n \circ R_n\}_{n \geq 0} \subset A^{\boldsymbol{\omega}} \times C^{\boldsymbol{\omega}}$ также регулярна, поскольку

$$\boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{R} = \mathrm{pr}_{13}^{\boldsymbol{\omega}}\big(((\mathrm{id}_A \times \Delta_B \times \mathrm{id}_C)^{\boldsymbol{\omega}})^{-1}(\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{S})\big) \tag{6.2.15.1}$$

(см. также **6.1.25**).

6.2.16. (Операции с регулярными системами согласованы с соответствующими операциями с регулярными множествами.) Отметим, что определённые выше операции с регулярными системами, такие, как объединение, пересечение, прямое произведение, образ, прообраз и композиция, обобщают соответствующие операции с регулярными множествами в том смысле, что они перестановочны с операцией взятия носителя. Например, $|\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{S}| = |\boldsymbol{R}| \times |\boldsymbol{S}|$, $|\boldsymbol{R} \cap \boldsymbol{S}| = |\boldsymbol{R}| \cap |\boldsymbol{S}|$, $|\boldsymbol{R} \cup \boldsymbol{S}| = |\boldsymbol{R}| \cup |\boldsymbol{S}|$, $\big|\varphi^{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{R})\big| = \varphi^{\omega}(|\boldsymbol{R}|)$, $\big|(\varphi^{\boldsymbol{\omega}})^{-1}(\boldsymbol{R})\big| = (\varphi^{\omega})^{-1}\big(|\boldsymbol{R}|\big)$ и $|\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S}| = |\boldsymbol{R}| \circ |\boldsymbol{S}|$. Можно дополнить эти формулы равенством $|\boldsymbol{R} \sqcup \boldsymbol{S}| = |\boldsymbol{R}| \sqcup |\boldsymbol{S}|$ для дизъюнктных объединений, где $\boldsymbol{R} \sqcup \boldsymbol{S} \subset (A \sqcup B)^{\boldsymbol{\omega}}$ для $\boldsymbol{R} \subset A^{\boldsymbol{\omega}}$ и $\boldsymbol{S} \subset B^{\boldsymbol{\omega}}$. Все эти формулы в действительности верны для произвольных подсистем $\boldsymbol{R} \subset A^{\boldsymbol{\omega}}$ и $\boldsymbol{S} \subset B^{\boldsymbol{\omega}}$, не обязательно регулярных, однако для некоторых операций требуется конечность множеств A и B.

Для тех из перечисленных операций, что выражаются конечными пределами, т.е. $\cap$, $\times$ и φ^{-1} (поскольку $(\varphi^{\boldsymbol{\omega}})^{-1}(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R} \times_{B^{\boldsymbol{\omega}}} A^{\boldsymbol{\omega}}$ для $\varphi : A \to B$ и $\boldsymbol{R} \subset B^{\boldsymbol{\omega}}$), эти формулы верны в максимальной общности (даже для бесконечных A и B), поскольку функтор $|\cdot|$ вычисления носителя — это функтор $\varprojlim$ вычисления проективного предела, который, конечно же, сохраняет произвольные пределы. Формула для $\circ$ следует из остальных, поскольку $\circ$ выражается через взятие прямого произведения, прообраза и образа с помощью (6.2.15.1). Формула для дизъюнктного объединения проверяется непосредственно, после чего формула для объединения следует из формулы для образа, поскольку при $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{S} \subset A^{\boldsymbol{\omega}}$ выполнено $\boldsymbol{R} \cup \boldsymbol{S} = \nabla_A^{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{R} \sqcup \boldsymbol{S})$ и $|\boldsymbol{R}| \cup |\boldsymbol{S}| = \nabla_A^{\omega}(|\boldsymbol{R}| \sqcup |\boldsymbol{S}|)$, где $\nabla_A : A \sqcup A \to A$ — кодиагональ.

Таким образом, остаётся только доказать формулу для носителя образа подсистемы $\boldsymbol{R} \subset A^{\boldsymbol{\omega}}$ относительно $\varphi^{\boldsymbol{\omega}} : A^{\boldsymbol{\omega}} \to B^{\boldsymbol{\omega}}$; здесь мы будем предполагать конечность множеств A и B. Заметим, что все компоненты морфизма $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{S} := \varphi^{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{R})$, индуцированного $\varphi^{\boldsymbol{\omega}}$, сюръективны, и при этом все множества $\boldsymbol{R}_n$ конечны; поскольку функтор $\varprojlim$ переводит сюръективные морфизмы проективных систем *конечных* множеств в сюръективные отображения множеств, отображение $|\boldsymbol{R}| \to |\boldsymbol{S}|$ сюръективно, откуда $|\boldsymbol{S}| = \varphi^{\omega}(|\boldsymbol{R}|)$.

6.2.17. (Операции, сохраняющие минимальность регулярных систем: объединение, прямое произведение и образ относительно $\varphi^{\boldsymbol{\omega}}$.) Отметим, что некоторые, но не все из перечисленных выше операций сохраняют минимальность (т.е. приведённость) (регулярных) систем. А именно, $\boldsymbol{R} \cup \boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{R} \sqcup \boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{S}$ и $\varphi^{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{R})$ минимальны, если $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{S}$ были минимальны, однако это, вообще говоря, неверно для $\boldsymbol{R} \cap \boldsymbol{S}$, $(\varphi^{\boldsymbol{\omega}})^{-1}(\boldsymbol{R})$ и $\boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{R}$. Для доказательства этих утверждений заметим, что $\boldsymbol{R} = \{\boldsymbol{R}_n\}_{n \geq 0}$ минимально в том и только том случае, если все морфизмы перехода $\boldsymbol{R}_{n+1} \to \boldsymbol{R}_n$ сюръективны (см. **6.2.6**), откуда немедленно выводится требуемое, поскольку $\cup$, $\sqcup$, $\times$ и образ относительно $\varphi^{\boldsymbol{\omega}}$ вычисляются покомпонентно и сохраняют сюръективность отображений множеств. Контрпримеры для операций, не сохраняющих минимальность, также легко строятся, например, для $\boldsymbol{R} \cap \boldsymbol{S}$ можно взять в качестве $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{S}$ минимальные системы в $A^{\boldsymbol{\omega}} := \{0, 1\}^{\boldsymbol{\omega}}$ с непересекающимися одноточечными носителями $\{0^\infty\}$ и $\{01^\infty\}$, тогда $\boldsymbol{R} \cap \boldsymbol{S}$ имеет пустой носитель, но не равна инициальному объекту $\boldsymbol{\varnothing}$, поскольку $(\boldsymbol{R} \cap \boldsymbol{S})_1 = \boldsymbol{R}_1 \cap \boldsymbol{S}_1 = \{0\} \neq \varnothing$. Отсюда также следует и контрпример для прообраза относительно $\varphi^{\boldsymbol{\omega}}$, поскольку $\boldsymbol{R} \cap \boldsymbol{S} = (\Delta_A^{\boldsymbol{\omega}})^{-1}(\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{S})$.

6.2.18. (Образ и прообраз регулярной системы относительно регулярного соответствия или отображения.) Если $\boldsymbol{R} \subset A^{\boldsymbol{\omega}}$ и $\boldsymbol{\Phi} \subset A^{\boldsymbol{\omega}} \times B^{\boldsymbol{\omega}}$, то мы определим «образ системы $\boldsymbol{R}$ относительно системы-соответствия $\boldsymbol{\Phi}$»

как
$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{R}) := \mathrm{pr}_2^{\boldsymbol{\omega}}\big(\boldsymbol{\Phi} \cap (\mathrm{pr}_1^{\boldsymbol{\omega}})^{-1}(\boldsymbol{R})\big) \tag{6.2.18.1}$$
Ясно, что тогда $\big(\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{R})\big)_n = \boldsymbol{\Phi}_n(\boldsymbol{R}_n)$. Результаты **6.2.12**, **6.2.14** и **6.2.16** показывают, что система $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{R})$ регулярна, если $\boldsymbol{\Phi}$ и $\boldsymbol{R}$ регулярны, и что $|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{R})| = |\boldsymbol{\Phi}|\big(|\boldsymbol{R}|\big)$. Эта конструкция применима, в частности, в том случае, если $\Phi \subset A^\omega \times B^\omega$ — произвольное регулярное (или даже замкнутое) соответствие между A^ω и B^ω, а $\boldsymbol{\Phi}$ — минимальная система с носителем, равным Φ; в этом случае мы пишем $\Phi(\boldsymbol{R})$ вместо $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{R})$ и говорим, что $\Phi(\boldsymbol{R})$ — это *образ (регулярной) системы $\boldsymbol{R} \subset A^{\boldsymbol{\omega}}$ относительно (регулярного) соответствия $\Phi \subset A^\omega \times B^\omega$.* Далее, если $f : A^\omega \dashrightarrow B^\omega$ — частично заданное регулярное отображение, т.е. график $\Gamma_f \subset A^\omega \times B^\omega$ регулярен, то мы пишем $f(\boldsymbol{R})$ вместо $\Gamma_f(\boldsymbol{R})$ и называем его *образом системы $\boldsymbol{R}$ относительно регулярного отображения f*; если $|\boldsymbol{R}|$ содержится в области определения f, то $\big|f(\boldsymbol{R})\big| = f\big(|\boldsymbol{R}|\big)$. Аналогично, мы пишем $f^{-1}(\boldsymbol{R})$ вместо $\Gamma_f^{-1}(\boldsymbol{R})$ (где теперь $\boldsymbol{R} \subset B^{\boldsymbol{\omega}}$) и называем его *прообразом системы $\boldsymbol{R}$ относительно регулярного отображения f.* Эти определения обобщают рассмотренные ранее понятия образа и прообраза относительно морфизмов вида $\varphi^{\boldsymbol{\omega}} : A^{\boldsymbol{\omega}} \to B^{\boldsymbol{\omega}}$ для $\varphi : A \to B$ и обладают аналогичными свойствами.

Предложение 6.2.19 *(Композиция огрублений.) Пусть регулярные системы $\boldsymbol{R} \subset A^{\boldsymbol{\omega}} \times B^{\boldsymbol{\omega}}$, $\boldsymbol{S} \subset B^{\boldsymbol{\omega}} \times C^{\boldsymbol{\omega}}$ и $\boldsymbol{T} \subset A^{\boldsymbol{\omega}} \times C^{\boldsymbol{\omega}}$ таковы, что $|\boldsymbol{S}| \circ |\boldsymbol{R}| \subset |\boldsymbol{T}|$. Тогда существует $\ell \geq 0$, такое, что*
$$\tilde{\boldsymbol{S}}_{n+\ell} \circ \tilde{\boldsymbol{R}}_{n+\ell} \subset \tilde{\boldsymbol{T}}_n \quad \text{для всех } n \geq 0 \tag{6.2.19.1}$$
где огрубления $\tilde{\boldsymbol{R}}_n$, $\tilde{\boldsymbol{S}}_n$, $\tilde{\boldsymbol{T}}_n$ определены как в **6.2.7**.

В частности, если регулярные соответствия $R \subset A^\omega \times B^\omega$, $S \subset B^\omega \times C^\omega$ и $T \subset A^\omega \times C^\omega$ таковы, что $S \circ R \subset T$, то существует $\ell \geq 0$, для которого выполнено
$$\tilde{S}_{n+\ell} \circ \tilde{R}_{n+\ell} \subset \tilde{T}_n \quad \text{для всех } n \geq 0 \tag{6.2.19.2}$$
где огрубления $\tilde{R}_n$, $\tilde{S}_n$, $\tilde{T}_n$ определены как в **6.2.2**.

Аналогичные формулы верны и для композиций более длинных цепочек регулярных систем или регулярных соответствий.

Доказательство. Второе утверждение действительно является частным случаем первого, поскольку в качестве $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{T}$ можно взять минимальные регулярные системы (см. **6.2.6**) с данными носителями R,

S и T, соответственно, тогда $\tilde{\boldsymbol{R}}_n = \tilde{R}_n$ и т.п. Для доказательства первого утверждения заметим, что $|\boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{R}| = |\boldsymbol{S}| \circ |\boldsymbol{R}|$ согласно **6.2.16**, и потому $|\boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{R}| \subset |\boldsymbol{T}|$, так что мы можем применить **6.2.11** к регулярным системам $\boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{T}$. Таким образом, существует $\ell \geq 0$, такое, что $(\widetilde{\boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{R}})_{n+\ell} \subset \tilde{\boldsymbol{T}}_n$ для всех $n \geq 0$. Поскольку композиция регулярных систем определяется покомпонентно, имеем $(\boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{R})_n = \boldsymbol{S}_n \circ \boldsymbol{R}_n$, откуда получаем равенство огрублений $(\widetilde{\boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{R}})_n = \tilde{\boldsymbol{S}}_n \circ \tilde{\boldsymbol{R}}_n$. Подставив в это равенство $n + \ell$ вместо n, получаем требуемое включение (6.2.19.1).

Следствие 6.2.20 *(Квазитранзитивность огрублений транзитивных регулярных отношений.) Пусть $\boldsymbol{R} \subset A^{\boldsymbol{\omega}} \times A^{\boldsymbol{\omega}}$ — регулярная система, такая, что $R := |\boldsymbol{R}|$ является транзитивным (регулярным) отношением на A^ω. Тогда существует $\ell \geq 0$, такое, что*

$$\tilde{\boldsymbol{R}}^{\circ 2}_{n+\ell} \subset \tilde{\boldsymbol{R}}_n \quad \textit{для всех } n \geq 0. \tag{6.2.20.1}$$

где огрубления $\tilde{\boldsymbol{R}}_n \subset A^\omega \times A^\omega$ определены как в **6.2.7**.

В частности, для любого транзитивного регулярного отношения R на A^ω существует $\ell \geq 0$, такое, что

$$\tilde{R}^{\circ 2}_{n+\ell} \subset \tilde{R}_n \quad \textit{для всех } n \geq 0 \tag{6.2.20.2}$$

для огрублений $\tilde{R}_n$, определённых в **6.2.2**.

Доказательство. Транзитивность $|\boldsymbol{R}|$ означает, что $|\boldsymbol{R}| \circ |\boldsymbol{R}| \subset |\boldsymbol{R}|$, так что данное следствие является частным случаем **6.2.19** при $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$ или $R = S = T$.

6.3 Категория стандартных регулярных пространств

Продолжим наше изучение регулярных множеств и соответствий, построив категорию регулярных соответствий *RegRel* и её подкатегорию — категорию стандартных регулярных пространств *Reg*.

6.3.1. (Категория соответствий *Rel*.) Напомним, что *категория соответствий Rel* — это категория, объектами которой являются обычные множества, а морфизмы — это соответствия между ними; композиция морфизмов — это обычная композиция соответствий (6.1.27.1). Категория *Rel* обладает инициальным и финальным объектом — это пустое множество $\varnothing$; там также существуют бинарные произведения и копроизведения, которые совпадают и задаются дизъюнктным объединением множеств. Кроме того, Rel является моноидальной категорией относительно $A \otimes B := A \times B$ (декартова произведения множеств), и даже $*$-автономной категорией: двойственным $A^\perp$ к множеству A является оно само, а если $R \in Rel(A, B)$ — морфизм в Rel, т.е. соответствие $R \subset A \times B$, то $R^\perp$ — это симметричное соответствие $R^{-1} \subset B \times A$, являющееся морфизмом $R^\perp \in Rel(B^\perp, A^\perp)$. Мультипликативная дизъюнкция $\parr$ совпадает с $\otimes$, т.е. с декартовым произведением множеств, поскольку всегда $A \parr B = (A^\perp \otimes B^\perp)^\perp$, а внутренний $\mathbf{Hom}(A, B) = (A \multimap B)$, т.е. линейная импликация, задаётся обычной формулой $(A \multimap B) = A^\perp \parr B = (A \otimes B^\perp)^\perp$, т.е. снова совпадает с декартовым произведением множеств A и B. Мультипликативная единица $\mathbf{1}$ — это одноточечное множество, и дуализирующий объект $\perp$ со свойством $A^\perp \cong (A \multimap \perp)$ — это тоже оно.

6.3.2. (Симметричные транзитивные отношения как идемпотенты в Rel. Частичное идемпотентное расширение Rel_+.) Пусть R — симметричное транзитивное отношение на некотором множестве X. Обозначим $X_0 := \operatorname{dom} R = \operatorname{pr}_1(R) = \{x \in X \mid \exists y\colon xRy\}$. Если xRy, то по симметричности yRx, откуда по транзитивности xRx и yRy. Это доказывает, что xRx для любого $x \in X_0$, и что $xRy \Rightarrow (x \in X_0)\ \&\ (y \in X_0)$. Иначе говоря, $R \subset X_0 \times X_0$, и R является отношением эквивалентности на подмножестве $X_0 \subset X$. Таким образом, *симметричные транзитивные отношения на множестве X — это то же самое, что и отношения эквивалентности на всевозможных подмножествах $X_0 \subset X$*. Если R — такое отношение, то, очевидно, $R \circ R = R$; это означает, что $R \in Rel(X, X)$ — идемпотентный эндоморфизм X в категории соответствий Rel. Поэтому мы можем рассмотреть полную подкатегорию Rel_+ идемпотентного пополнения категории Rel, состоящую из объектов (X, R) такого рода, т.е. из множества X и симметричного транзитивного отношения R на X. Морфизмы $Rel_+\big((X, R), (Y, S)\big)$ — это, как обычно, $F \in Rel(X, Y)$, такие, что $S \circ F \circ R = F$, что равносильно паре равенств $S \circ F = F = F \circ R$, поскольку $R \circ R = R$ и $S \circ S = S$. Однако в нашем случае категория Rel_+ оказывается эквивалентна исходной категории Rel, поскольку объект (X, R) из Rel_+ оказывается изоморфен фактормножеству X_0/R (где $X_0 = \operatorname{dom} R$), рассматриваемому как объект Rel_+ с помощью тривиального идемпотента $\mathrm{id}_{X_0/R} = \Delta_{X_0/R}$.

6.3.3. (Обозначение X/R для симметричного транзитивного отношения

R на X.) Пусть R — симметричное транзитивное отношение на множестве X, или, что одно и то же, отношение эквивалентности на некотором подмножестве $X_0 := \operatorname{dom} R \subset X$. Обозначим через X/R фактормножество $\operatorname{dom} R/R$. Иначе говоря, X/R — это множество всех непустых множеств вида $R(x)$, $x \in X$. Если X — топологическое пространство, то введём на $X/R = X_0/R$ фактортопологию, индуцированную топологией подпространства $X_0 \subset X$.

6.3.4. ($*$-автономная категория регулярных соответствий RegRel_0 между A^ω.) Пусть теперь RegRel_0 — категория регулярных соответствий между множествами вида A^ω, где A может быть любым конечным множеством. Таким образом, объекты RegRel_0 — это всевозможные A^ω (либо просто конечные множества A), а морфизмы — это регулярные соответствия $R \subset A^\omega \times B^\omega$ в смысле **6.1.4**. Композиция двух регулярных соответствий регулярна по **6.1.27**, а тождественный морфизм id_{A^ω}, т.е. отношение равенства на A^ω, регулярен по **6.1.22**, так что RegRel_0 действительно категория. При желании мы можем описать эту категорию очень явно и конструктивно, задавая объекты A^ω с помощью конечного множества A, а морфизмы, т.е. регулярные соответствия $R \subset A^\omega \times B^\omega$ — с помощью минимального конечного автомата над конечным алфавитом $A \times B$, распознающего R. Ясно, что RegRel_0 — это $\otimes$-подкатегория категории соответствий Rel, с $A^\omega \otimes B^\omega = (A \times B)^\omega$ и с $R \otimes S = R \times S$, поскольку декартово произведение регулярных соответствий регулярно по **6.1.26**. Более того, RegRel_0 — $*$-автономная подкатегория Rel, с той же двойственностью $(A^\omega)^\perp = A^\omega$ и $R^\perp = R^{-1}$ на морфизмах.

6.3.5. ($*$-автономная категория регулярных соответствий RegRel как частичное идемпотентное пополнение RegRel_0.) Рассмотрим теперь частичное идемпотентное пополнение RegRel категории RegRel_0, определённое с помощью регулярных симметричных транзитивных отношений R по аналогии с **6.3.2**. Таким образом, если R — симметричное транзитивное регулярное отношение на A^ω для некоторого конечного множества A, или, что одно и то же, регулярное отношение эквивалентности на некотором регулярном подмножестве $\operatorname{dom} R \subset A^\omega$ (отметим, что $\operatorname{dom} R = \mathrm{pr}_1(R)$ необходимо регулярно по **6.1.25**), то $R \circ R = R$, и потому (A^ω, R) — некоторый объект идемпотентного пополнения категории RegRel_0. Наша новая категория RegRel — это полная подкатегория идемпотентного пополнения категории RegRel_0, образованная объектами

(A^ω, R) указанного выше вида. В частности,

$$RegRel\big((A^\omega,R),(B^\omega,S)\big) = \big\{F \in RegRel_0(A^\omega,B^\omega)\colon S\circ F\circ R = F\big\} \tag{6.3.5.1}$$

Эта категория по-прежнему допускает очень явное описание с помощью конечных множеств и минимальных конечных автоматов; отметим, что симметричность и транзитивность отношения R на A^ω, равно как и свойство $S\circ F\circ R = F$, могут быть эффективно проверены, см. **6.1.23**, **6.1.28**, **6.1.27** и **6.1.21**.

6.3.6. (Категория *RegRel* является $*$-автономной.) Категория *RegRel*, будучи полной подкатегорией идемпотентного пополнения $*$-автономной категории $RegRel_0$, также $*$-автономна. Например, $\otimes$ задаётся на *RegRel* с помощью

$$(A^\omega,R)\otimes(B^\omega,S) = \big((A\times B)^\omega, R\times S\big) \tag{6.3.6.1}$$

Здесь существенно, что декартово произведение $R\times S$ по-прежнему симметрично, транзитивно и регулярно, см. **6.1.26**. Кроме того, $(A^\omega,R)^\perp = (A^\omega,R^\perp) = (A^\omega,R)$, поскольку $R^\perp = R^{-1} = R$ по симметричности R, так что все объекты $*$-автономной категории *RegRel* канонически самодвойственны.[2]

6.3.7. (Конечные произведения и копроизведения в *RegRel*.) В категории *RegRel*, в отличие от $RegRel_0$, существуют конечные произведения и копроизведения, причём они совпадают, как и в *Rel*. А именно,

$$(A^\omega,R)\mathbin{\&}(B^\omega,S) = (A^\omega,R)\oplus(B^\omega,S) = \big((A\sqcup B)^\omega, R\cup S\big) \tag{6.3.7.1}$$

где & и $\oplus$ — обозначения для бинарного прямого произведения и копроизведения, или, что одно и то же, для аддитивной конъюнкции и аддитивной дизъюнкции из линейной логики. Мы воспользовались **6.1.19**, чтобы установить, что объединение $R\cup S$ регулярно в $(A\sqcup B)^\omega\times(A\sqcup B)^\omega$.

6.3.8. (Функтор Φ из *RegRel* в *Rel*.) Поскольку каждый объект (A^ω,R) категории *RegRel* является также объектом категории Rel_+, рассмотренной в **6.3.2**, и изоморфен там фактормножеству $A^\omega/R := \operatorname{dom} R/R$, мы получаем естественный функтор $\Phi : RegRel \to Rel$, $(A^\omega,R)\mapsto A^\omega/R$ в обозначениях **6.3.3**, забывающий дополнительную структуру на множествах A^ω и регулярность используемых отношений эквивалентности

[2] В этом плане они чем-то похожи на гильбертовы пространства над полем из одного элемента.

и соответствий. При этом Φ является (сильным) $\otimes$-функтором и сохраняет конечные произведения и копроизведения, а также двойственность $*$-автономной категории.

6.3.9. (Категория стандартных регулярных пространств *StdReg* или *Reg*.) Будем говорить, что морфизм $F \in \mathit{RegRel}\big((A^\omega, R), (B^\omega, S)\big)$ является *регулярным отображением*, если индуцированное им соответствие $\Phi(F) \in \mathit{Rel}(A^\omega/R, B^\omega/S)$ является отображением множеств (т.е. графиком отображения множеств). Ясно, что это условие равносильно тому, что $F^{-1} \circ F \supset R$ и $F \circ F^{-1} \subset S$, что может быть проверено эффективно; это следует из того наблюдения, что соответствие $R \subset X \times Y$ является графиком некоторого отображения $X \to Y$ в том и только том случае, если $R^{-1} \circ R \supset \mathrm{id}_X$ и $R \circ R^{-1} \subset \mathrm{id}_Y$.

Обозначим через *Reg* или через *StdReg* категорию (стандартных) регулярных пространств — подкатегорию *RegRel*, состоящую из всех объектов (A^ω, R) и из регулярных отображений между ними. Объекты категории *Reg*, или, что одно и то же, объекты категории *RegRel*, будут называться *(стандартными) регулярными пространствами*. Их не надо путать с регулярными топологическими пространствами, т.е. топологическими пространствами, в которых выполнена аксиома отделимости T_3 (любое замкнутое подмножество является пересечением всех своих замкнутых окрестностей).

6.3.10. (Мы рассматриваем только стандартные регулярные пространства.) В дальнейшем мы заменим категорию стандартных регулярных пространств *StdReg* на эквивалентную ей, но более удобную категорию регулярных пространств *Reg* (см. **6.5.2**), которые будут определены как топологические пространства с дополнительной структурой, по аналогии с категорией (аффинных приведённых) схем в алгебраической геометрии. Однако до конца следующего подраздела мы рассматриваем только стандартные регулярные пространства в смысле данного выше определения **6.3.9**, и называем их просто регулярными пространствами, считая, что $\mathit{Reg} = \mathit{StdReg}$.

6.3.11. (Функтор $\Phi : \mathit{Reg} \to \mathit{Sets}$.) Заметим, что функтор $\Phi : \mathit{RegRel} \to \mathit{Rel}$, переводящий (A^ω, R) в A^ω/R, переводит подкатегорию $\mathit{Reg} \subset \mathit{RegRel}$ в подкатегорию $\mathit{Sets} \subset \mathit{Rel}$, и потому индуцирует функтор $\mathit{Reg} \to \mathit{Sets}$, который мы обозначим той же буквой Φ.

6.3.12. (Функторы $\Phi : \mathit{RegRel} \to \mathit{Rel}$ и $\mathit{Reg} \to \mathit{Sets}$ строги и консервативны.) Отметим, что оба варианта функтора Φ строги (т.е. инъективны на морфизмах) и консервативны. Это следует из того, что изоморфизмы в *Rel*, равно как и в *Sets* — это биекции множеств, и из того, что если $F \in \mathit{RegRel}\big((A^\omega, R), (B^\omega, S)\big)$ индуцирует биекцию $\Phi(F) : A^\omega/R \xrightarrow{\sim} B^\omega/S$, то F^{-1} — обратный морфизм к F в *RegRel*; здесь существенно то, что соответствие F^{-1} регулярно, если регулярно F.

6.3.13. (Категория *Reg* содержит регулярные множества и регулярные отображения между ними.) Если $X \subset A^\omega$ — регулярное подмножество, то $(A^\omega, \mathrm{id}_X) = (A^\omega, \Delta_X)$ — объект категории *Reg* (т.е. регулярное пространство), причём Φ переводит этот объект в $A^\omega/\Delta_X = X/\Delta_X = X$, т.е. «в само X». Мы можем отождествить $X \subset A^\omega$ с этим объектом в *Reg*. Если $Y \subset B^\omega$ — ещё одно регулярное подмножество, то $\mathit{Reg}(X, Y)$ — это в точности регулярные отображения из **6.1.30**, т.е. наше новое определение регулярных отображений согласовано со старым и расширяет его.

6.3.14. (Топология на польском компакте A^ω/R.) Пусть (A^ω, R) — регулярное пространство, т.е. объект категории *RegRel* или *Reg*. Иначе говоря, A — конечное множество, а R — симметричное транзитивное регулярное отношение на A^ω. Тогда A^ω — польский компакт (относительно топологии прямого произведения), а значит, его регулярное подмножество $\operatorname{dom} R \subset A^\omega$ также является польским компактом, будучи замкнутым в A^ω по **6.1.8**. Отсюда следует, что и факторпространство $A^\omega/R = \operatorname{dom} R/R$ также является польским компактом (см. **6.1.35**).

6.3.15. (Функтор геометрической реализации $|\cdot| : \mathit{Reg} \to \mathit{Cpt}$.) Определим *геометрическую реализацию* $|X_0|$ регулярного подмножества $X_0 \subset A^\omega$ как множество X_0 вместе с топологией, индуцированной топологией прямого произведения на A^ω. Кроме того, если R — регулярное симметричное транзитивное отношение на A^ω, т.е. регулярное отношение эквивалентности на некотором регулярном подмножестве $X_0 := \operatorname{dom} R \subset A^\omega$, то $|A^\omega/R|$ или $|(A^\omega, R)|$ — это фактормножество $A^\omega/R = X_0/R$ с фактортопологией из **6.3.14**. Тем самым мы получаем *функтор геометрической реализации* $|\cdot| : \mathit{RegRel} \to \mathit{CptRel}$ из категории регулярных соответствий *RegRel* в категорию компактных соответствий *CptRel*, объекты которой — компактные топологические пространства, а морфизмы — компактные соответствия между ними, т.е. соответствия, график которых компактен как подпространство прямого произведения. Поскольку всякая непрерывная биекция между компактами является гомеоморфизмом, подкатегория *CptRel*, состоящая из тех компактных соответствий, что являются графиками отображений, отождествляется с категорией *Cpt* компактных пространств и их непрерывных отображений. Поэтому функтор геометрической реализации ограничивается до функтора $|\cdot| : \mathit{Reg} \to \mathit{Cpt}$ из категории регулярных пространств в категорию компактных топологических пространств (и даже польских компактов).

6.3.16. (Функтор геометрической реализации $|\cdot|$ строг и консервативен.) Оба варианта функтора геометрической реализации строги (т.е. инъективны на морфизмах) и консервативны, поскольку это верно для их композиции с забывающим функтором $\mathit{CptRel} \to \mathit{Rel}$ или $\mathit{Cpt} \to \mathit{Sets}$, см. **6.3.12**.

6.3.17. (Обозначение A^ω/R для объекта (A^ω, R) категории *Reg* или *RegRel* и для польского компакта $|(A^\omega, R)|$.) В дальнейшем (но не в этом разделе) мы зачастую злоупотребляем тем, что функторы Φ и $|\cdot|$ являются строгими (но не вполне строгими) и консервативными, и обозначаем через A^ω/R сам объект (A^ω, R), а не только его образ $\Phi\big((A^\omega, R)\big) = A^\omega/R$ в категории множеств или отношений относительно функтора Φ. Более того, мы подразумеваем, что на A^ω/R введена описанная выше фактортопология, так что A^ω/R отождествляется и с польским компактом $|(A^\omega, R)|$ в категории *Cpt* или *CptRel*.

Следует, однако, учитывать то, что в таких ситуациях сам по себе компакт или множество A^ω/R не помнит дополнительную структуру, с помощью которой его построили, поэтому в действительности надо помнить и исходный объект (A^ω, R). Иначе говоря, функторы Φ и $|\cdot|$ не являются вполне строгими, и потому мы на самом деле не можем отождествить *Reg* с полной подкатегорией *Sets* или *Cpt*. Корректное топологическое, вернее, геометрическое описание *Reg* будет дано далее в **6.5**.

6.3.18. (Регулярное отношение R или распознающий его конечный автомат полностью определяют регулярное пространство (A^ω, R).) Заметим ещё, что объект (A^ω, R) категории *RegRel* или *Reg*, т.е. регулярное пространство (A^ω, R), которое мы зачастую обозначаем просто A^ω/R, в действительности полностью определяется (с точностью до изоморфизма) регулярным отношением R или распознающим его конечным автоматом. В самом деле, существует наименьшее конечное множество A_0, такое, что $R \subset A_0^\omega \times A_0^\omega$; тогда $A_0 \subset A$, и (A_0^ω, R) изоморфно (A^ω, R) в *Reg*. Более того, если R распознаётся (минимальным) конечным автоматом $G_R = (S, s_0, E)$, где S — конечное множество состояний, $s_0 \in S$ —

начальное состояние, и $E \subset S \times A \times A \times S$, то A_0 полностью определяется этим конечным автоматом, поскольку $A_0 = \mathrm{pr}_2(E) \cup \mathrm{pr}_3(E) = \mathrm{pr}_2(E)$. Поэтому в действительности мы можем полностью задать регулярное пространство (A^ω, R) отношением R или минимальным конечным автоматом G_R.

6.4 Регулярные подпространства и конечные пределы в *Reg*

Продолжим наше изучение категории (стандартных) регулярных пространств *Reg*. Для этого мы дадим явное описание подобъектов в этой категории и воспользуемся им для доказательства существования расслоенных произведений и произвольных конечных пределов в *Reg*. Как и в предыдущем разделе, мы считаем все регулярные пространства стандартными и отождествляем *Reg* с *StdReg* (см. **6.3.9** и **6.3.10**).

Определение 6.4.1 *(Регулярные подпространства.) Пусть $X = (A^\omega, R)$ — регулярное пространство. Мы говорим, что Y —* **регулярное подпространство** *X, и пишем $Y \subset X$, если $Y = (A^\omega, S)$ и при этом $S \subset R$ и $R \circ S = S$. В этом случае* **каноническое вложение** *$i_Y : Y \to X$ — это морфизм $S \in Reg\big((A^\omega, S), (A^\omega, R)\big)$.*

6.4.2. (Регулярные подпространства $Y \subset X$ определяют подобъекты X в *Reg*.) Отметим, что свойство $R \circ S = S$ из **6.4.1** равносильно $S^{-1} \circ R^{-1} = S^{-1}$, т.е. $S \circ R = S$, поскольку R и S оба симметричны. Поэтому $S \circ S \circ R = S$, так что действительно $S \in Reg\big((A^\omega, S), (A^\omega, R)\big)$ и $i_Y : Y \to X$ корректно определено. Свойство $R \circ S = S$ также означает, что любой непустой класс S-эквивалентности $S(x)$ R-насыщен, т.е. является объединением классов R-эквивалентности; поскольку, кроме того, $S \subset R$, это означает, что всякий непустой класс S-эквивалентности является классом R-эквивалентности, так что $\Phi(Y) = A^\omega/S \subset \Phi(X) = A^\omega/R$ (напомним, что A^ω/R — это в точности множество всех непустых классов $R(x)$). Обратно, несложно видеть, что если всякий непустой класс S-эквивалентности является классом R-эквивалентности (т.е. буквально если $\Phi(Y) \subset \Phi(X)$ как множества), то $S \subset R$ и $R \circ S = S$. Иначе говоря, $Y \subset X$ *если и только если* $\Phi(Y) \subset \Phi(X)$. В этом случае $\Phi(i_X)$ — это вложение $\Phi(Y) \hookrightarrow \Phi(X)$; в частности, $\Phi(i_X)$ инъективен, а значит, $i_Y : Y \hookrightarrow X$ — мономорфизм в *Reg* (так как Φ строг), т.е. Y *может быть* *отождествлён с некоторым подобъектом X в категории регулярных пространств* (мы докажем позже в **6.4.16**, что в действительности все подобъекты X в *Reg* возникают таким образом). Кроме того, поскольку $|i_Y| : |Y| \to |X|$ — инъективное непрерывное отображение компактов, $|Y|$ *отождествляется с замкнутым подпространством компакта* $|X|$.

6.4.3. (Альтернативное описание регулярных подпространств через насыщенные регулярные подмножества.) Пусть по-прежнему $X = (A^\omega, R)$ — регулярное пространство, и пусть $X_0 := \operatorname{dom} R \subset A^\omega$ — носитель R, регулярное подмножество в A^ω; тогда $\Phi(X) = X_0/R$. Если $Y = (A^\omega, S)$ — регулярное подпространство X, то $Y_0 := \operatorname{dom} S$ — также регулярное подмножество A^ω, содержащееся в X_0 (потому что $S \subset R$), причём R-насыщенное (действительно, Y_0 — объединение всех непустых S-классов эквивалентности $S(x)$, а мы видели, что каждый такой класс R-насыщен). Мы можем восстановить S по Y_0, поскольку $S = R \cap (Y_0 \times Y_0)$. Более того, если $Y_0' \subset X_0$ — произвольное R-насыщенное регулярное подмножество, то $S' := R \cap (Y_0' \times Y_0')$ — симметричное транзитивное регулярное отношение на A^ω, причём $\operatorname{dom} S' = Y_0'$, $S' \subset R$ и $R \circ S' = S'$, так что $Y' := (A^\omega, S')$ — регулярное подпространство X. Тем самым $Y = (A^\omega, S) \mapsto \operatorname{dom} S$ *определяет биекцию между регулярными подпространствами $Y \subset X$ и R-насыщенными регулярными подмножествами* $Y_0 \subset X_0$. Конечно же, при этом $\Phi(Y) \subset \Phi(X)$ отождествляется с образом $Y_0 \subset X_0$ относительно сюръекции $X_0 \twoheadrightarrow X_0/R = \Phi(X)$. Отметим ещё, что *$R$-насыщенные регулярные подмножества $Y_0 \subset X_0$ — это в точности регулярные подмножества $Y_0 \subset A^\omega$, совпадающие со своими R-насыщениями* $R(Y_0)$.

6.4.4. (Регулярные подпространства регулярных подпространств.) Отметим, что если Z — регулярное подпространство Y, а Y — регулярное подпространство X, то Z является также регулярным подпространством X; в этом случае мы пишем $Z \subset Y \subset X$. Кроме того, если $Z \subset X$ и $Y \subset X$ — регулярные подпространства X, такие, что $Z \subset Y$ как подобъекты X в *Reg*, или, что равносильно, $\Phi(Z) \subset \Phi(Y)$ внутри $\Phi(X)$, то Z является регулярным подпространством Y, так что использование одной и той же записи $Z \subset Y$ для включения подобъектов и для обозначения регулярных подпространств не приводит к противоречию.

6.4.5. (Дистрибутивная решётка регулярных подпространств регулярного пространства X.) Поскольку регулярные подпространства $Y \subset X$ являются подобъектами X, на множестве регулярных подпространств

$\{Y : Y \subset X\}$ есть естественный частичный порядок $\subset$, индуцированный включением соответствующих подобъектов; мы только что видели, что $Z \subset Y$ равносильно тому, что Z является регулярным подпространством Y. Кроме того, $Z \subset Y$ в том и только том случае, если $\Phi(Z) \subset \Phi(Y)$ внутри множества $\Phi(X)$; в частности, $\Phi(Z) = \Phi(Y)$ влечёт $Z = Y$. Если $Y = (A^\omega, S)$ и $Z = (A^\omega, T)$ — регулярные подпространства $X = (A^\omega, R)$, то $Y \cap Z := (A^\omega, S \cap T)$ и $Y \cup Z := (A^\omega, S \cup T)$ — также регулярные подпространства согласно **6.1.18** и **6.1.19**, причём $\Phi(Y \cap Z) = \Phi(Y) \cap \Phi(Z)$ и $\Phi(Y \cup Z) = \Phi(Y) \cup \Phi(Z)$; отсюда следует, что $Y \cap Z$ и $Y \cup Z$ — это нижняя и верхняя грань Y и Z в решётке регулярных подпространств X. Более того, *решётка регулярных подпространств X дистрибутивна*, поскольку $\Phi : Y \mapsto \Phi(Y)$ определяет её вложение в решётку $\mathfrak{P}(\Phi(X))$ подмножеств множества $\Phi(X)$.

6.4.6. (Регулярные подпространства X и $\mathit{RegRel}(\mathbf{1}, X)$.) В категории множеств множество $\mathfrak{P}(X) = \{Y : Y \subset X\}$ всех подмножеств фиксированного множества X допускает три разных описания: теоретико-множественное ($\mathfrak{P}(X)$ состоит из всех множеств Y, таких, что из $y \in Y$ следует $y \in X$), в рамках категории множеств ($\mathfrak{P}(X)$ — это множество подобъектов X в *Sets*) и в рамках категории соответствий ($\mathfrak{P}(X) = \mathit{Rel}(\mathbf{1}, X)$). Мы хотим проверить, что регулярные подпространства допускают аналогичные описания в категориях *Reg* и *RegRel*. Докажем сначала, что *регулярные подпространства $Y \subset X$ находятся во взаимно однозначном соответствии с $\mathit{RegRel}(\mathbf{1}, X)$*. Здесь $\mathbf{1} = \mathbf{1}_{\mathit{Reg}}$ — мультипликативная единица *Reg* и *RegRel*, т.е. $(\{*\}^\omega, \mathrm{id})$. Для этого зафиксируем $X = (A^\omega, R)$ и заметим, что $\mathit{RegRel}(\mathbf{1}, X)$ по определению есть множество всех регулярных $F \subset \{*\}^\omega \times A^\omega \cong A^\omega$, таких, что $R \circ F = F$, т.е. $R(F) = F$, если отождествить F с регулярным подмножеством A^ω. Однако это условие означает, что F является R-насыщенным подмножеством носителя $X_0 = \operatorname{dom} R$, а мы только что видели в **6.4.3**, что такие регулярные подмножества $F \subset X_0$ находятся во взаимно однозначном соответствии с регулярными подпространствами $Y \subset X$, а именно, $Y = \bigl(A^\omega, R \cap (F \times F)\bigr)$. Таким образом, $\mathit{RegRel}(\mathbf{1}, X)$ действительно находится во взаимно однозначном соответствии с множеством регулярных подпространств $Y \subset X$. При этом функтор $\Phi : \mathit{RegRel} \to \mathit{Rel}$ индуцирует отображение $\mathit{RegRel}(\mathbf{1}, X) \to \mathit{Rel}(\mathbf{1}, \Phi(X)) \cong \mathfrak{P}(\Phi(X))$, которое можно отождествить с отображением, переводящим регулярное подпространство $Y \subset X$ в регулярное подмножество $\Phi(Y) \subset \Phi(X)$.

6.4.7. (Образ и прообраз регулярного подпространства относительно регулярного соответствия или отображения.) Пусть $X' \subset X$ — регулярное подпространство и $F \in \mathit{RegRel}(X, Y)$ — регулярное соответствие. Поскольку $X' \subset X$ соответствует некоторому морфизму $\mathit{RegRel}(\mathbf{1}, X)$, композиция этого морфизма с F в *RegRel* определяет некоторое регулярное подпространство $Y' \subset Y$, которое мы обозначим через $F(X')$ и назовём *образом* X' *относительно* F. Поскольку функтор $\Phi : \mathit{RegRel} \to \mathit{Rel}$ согласован с используемыми отождествлениями, $\Phi(F(X')) \subset \Phi(Y)$ совпадает с образом подмножества $\Phi(X') \subset \Phi(X)$ относительно соответствия $\Phi(F)$ между $\Phi(X)$ и $\Phi(Y)$.

Эти конструкции применимы, в частности, к регулярному отображению $f \in \mathit{Reg}(X, Y) \subset \mathit{RegRel}(X, Y)$, а также к $f^{-1} \in \mathit{RegRel}(Y, X)$. Тем самым определены понятия образа и прообраза регулярного подпространства относительно любого морфизма в *Reg*, причём эти понятия согласованы с функтором $\Phi : \mathit{Reg} \to \mathit{Sets}$. Например, если $X' \subset X$, то $\Phi(f(X')) = \Phi(f)\bigl(\Phi(X')\bigr) \subset \Phi(Y)$, а если $Y' \subset Y$, то $\Phi(f^{-1}(Y')) = \Phi(f)^{-1}\bigl(\Phi(Y')\bigr) \subset \Phi(X)$.

6.4.8. (Каноническое разложение регулярного отображения.) В частности, для любого регулярного отображения $f : X \to Y$ определён *образ* $f(X) \subset Y$, т.е. образ X как регулярного подпространства самого себя. При этом $\Phi(f(X)) = \Phi(f)\bigl(\Phi(X)\bigr) \subset \Phi(Y)$. Докажем, что f пропускается через мономорфизм $i = i_{f(X)} : f(X) \hookrightarrow X$, т.е. что существует разложение $f : X \overset{p}{\twoheadrightarrow} f(X) \overset{i}{\hookrightarrow} Y$. Действительно, если $X = (A^\omega, R)$ и $Y = (B^\omega, S)$, то $\mathit{Reg}(X, Y)$ состоит из регулярных соответствий $F \subset A^\omega \times B^\omega$, таких, что $S \circ F \circ R = F$, $F^{-1} \circ F \supset R$ и $F \circ F^{-1} \subset S$. Поэтому $f : X \to Y$ — это тоже такое регулярное соответствие F. Положим $S' := F \circ F^{-1}$; S' — регулярное отношение по **6.1.27**, симметричное по построению. Тогда $S' \subset S$ и $S \circ F = S \circ S \circ F \circ R = S \circ F \circ R = F$, откуда $S \circ S' = S \circ F \circ F^{-1} = F \circ F^{-1} = S'$; в частности, $S' \circ S' \subset S \circ S' = S'$, так что S' транзитивно. Иначе говоря, $Y' := (B^\omega, S')$ — это регулярное подпространство в $Y = (B^\omega, S)$. При этом $F^{-1} \circ F \subset R$ и $F \circ F^{-1} = S'$, так что F определяет морфизм $p : X \to Y'$. Далее, поскольку $i_{Y'} : Y' \hookrightarrow Y$ задаётся S', а также $S' \circ F = F \circ F^{-1} \circ F \supset F \circ R = F$ и одновременно $S' \circ F \subset S \circ F = F$, откуда $S' \circ F = F$, и потому $i_{Y'} \circ p = f$ в *Reg*. Осталось проверить, что Y' — это действительно $f(X)$. Для этого мы заметим, что построенное нами p обладает тем свойством, что $\Phi(p) : A^\omega/R \to B^\omega/S'$ сюръективно, что непосредственно следует из равенства $S' = F \circ F^{-1}$, которое позволяет построить прообраз непустого S'-класса эквивалентности при помощи F^{-1}; поскольку $\Phi(i_{Y'})$ инъективно с образом $\Phi(Y') \subset \Phi(Y)$ и $\Phi(f) = \Phi(i_{Y'}) \circ \Phi(p)$, отсюда следует, что $\Phi(Y') = \Phi(f)(\Phi(X)) = \Phi(f(X))$, откуда $Y' = f(X)$ как регулярные подпространства Y.

Попутно мы доказали, что построенное разложение $f = i_{f(Y)} \circ p$ обладает тем свойством, что $\Phi(p)$ сюръективно, а $\Phi(i_{f(Y)})$ инъективно; поскольку Φ строг, отсюда следует, что p — эпиморфизм в *Reg*, а $i_{f(Y)}$ — мономорфизм.

6.4.9. (Критерий того, чтобы $f : X \to Y$ пропускался через $Y' \subset Y$.) Пусть $f : X \to Y$ — морфизм в *Reg* и $Y' \subset Y$ — регулярное подпространство. Тогда f *пропускается через мономорфизм* $i_{Y'} : Y' \hookrightarrow Y$ *в том и только том случае, если образ* $\Phi(f)$ *содержится в* $\Phi(Y') \subset \Phi(Y)$, *т.е. если* $\Phi(f)$ *пропускается через* $\Phi(i_{Y'})$. Это условие также равносильно тому, что $f(X) \subset Y'$ как регулярные подпространства Y, или что $f^{-1}(Y') = X$; это так из-за того, что образы и прообразы регулярных подпространств согласованы с функтором Φ. Ясно, что рассматриваемое условие необходимо; достаточность же следует из существования разложения $X \xrightarrow{p} f(X) \xrightarrow{i_{f(X)}} Y$ из **6.4.8**, поскольку при $f(X) \subset Y'$ автоматически $f(X)$ является также регулярным подпространством Y' (см. **6.4.4**), а значит, композиция $\bar{f} : X \xrightarrow{p} f(X) \hookrightarrow Y'$ даёт искомое разложение f.

6.4.10. (Критерий того, что регулярное отображение изоморфно вложению регулярного подпространства.) Кроме того, из **6.4.8** и консервативности функтора Φ немедленно следует, что *морфизм* $f : X \to Y$ *в Reg изоморфен каноническому вложению* $i_{Y'} : Y' \hookrightarrow Y$ *некоторого регулярного подпространства* $Y' \subset Y$ *в том и только том случае, если отображение* $\Phi(f)$ *инъективно.* Действительно, в этом случае морфизм p из разложения **6.4.8** будет таким, что $\Phi(p)$ одновременно инъективно и сюръективно, а значит, p — изоморфизм из-за консервативности Φ.

6.4.11. (Прообраз регулярного подобъекта определяет декартов квадрат.) Пусть теперь $f : X \to Y$ — регулярный морфизм, $Y' \subset Y$ — регулярное подпространство, $X' := f^{-1}(Y') \subset X$ — прообраз регулярного подпространства Y' относительно f в смысле **6.4.7**. Тогда следующий квадрат декартов:

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, tail, "i_{X'}"] \arrow[d, "\bar{f}"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, tail, "i_{Y'}"] & Y \end{tikzcd} \tag{6.4.11.1}$$

Более точно, существует единственный морфизм $\bar{f} : X' \to Y'$, такой, что $i_{Y'} \circ \bar{f} = f \circ i_{X'}$, после чего этот квадрат становится декартовым. Для доказательства достаточно заметить, что согласно критерию **6.4.9** морфизм $g : Z \to X$ обладает тем свойством, что $f \circ g : Z \to Y$ пропускается через $i_{Y'} : Y' \hookrightarrow Y$, в том и только том случае, если $(f \circ g)^{-1}(Y') = Z$, т.е. $g^{-1}(f^{-1}(Y')) = Z$, что равносильно $g^{-1}(X') = Z$, т.е. тому, что g пропускается через $i_{X'} : X' \hookrightarrow X$.

6.4.12. (Декартовы произведения регулярных пространств.) Заметим, что функтор $\otimes$ из *RegRel*, заданный $(A^\omega, R) \otimes (B^\omega, S) = ((A \times B)^\omega, R \times S)$ (см. **6.3.6**), определяет также прямое произведение в *Reg*. Доказательство этого факта про подкатегорию *Reg* $*$-автономной категории *RegRel* дословно такое же, как доказательство соответствующего факта про подкатегорию $Rel_+ \cong Sets$ $*$-автононономной категории *Rel*. В частности, если $X = (A^\omega, R)$, $Y = (B^\omega, S)$, $Z = (C^\omega, T)$, и $f : Z \to X$, $g : Z \to Y$ заданы регулярными соответствиями $F \subset C^\omega \times A^\omega$, $G \subset C^\omega \times B^\omega$, то $h = (f, g) : Z \to X \times Y$ задаётся $H := \mathrm{pr}_{12}^{-1}(F) \cap \mathrm{pr}_{13}^{-1}(G) \subset C^\omega \times A^\omega \times B^\omega$; существенным здесь является то, что H регулярно по **6.1.24** и **6.1.18**.

При этом $\Phi(X \times Y) \cong \Phi(X) \times \Phi(Y)$ и $|X \times Y| \cong |X| \times |Y|$.

6.4.13. (Диагональ $\Delta_X : X \to X \times X$ изоморфна вложению регулярного подпространства.) Пусть теперь X — произвольное регулярное пространство. Тогда диагональ $\Delta_X : X \to X \times X$ обладает тем свойством, что $\Phi(\Delta_X)$ инъективно (поскольку Δ_X — расщепляющийся мономорфизм), а значит, Δ_X изоморфна вложению регулярного подпространства $\Delta_X(X)$ в $X \times X$ согласно **6.4.10**.

6.4.14. (Расслоенные произведения существуют в *Reg* и сохраняются функторами Φ и $|\cdot|$.) Теперь мы можем доказать, что *в категории Reg существуют произвольные расслоенные произведения.* Действительно, если $p : X \to Z$ и $q : Y \to Z$ — произвольные морфизмы, то мы можем построить расслоенное произведение $X \times_Z Y$ с помощью вспомогательного декартова квадрата

$$\begin{tikzcd} X \times_Z Y \arrow[r] \arrow[d] & X \times Y \arrow[d, "p\times q"] \\ Z \arrow[r, "\Delta_Z"] & Z \times Z \end{tikzcd} \tag{6.4.14.1}$$

который существует согласно **6.4.11**, потому что нижняя стрелка изоморфна вложению регулярного подпространства по **6.4.13**. Кроме того, из этой конструкции следует, что *функторы* $\Phi : \mathit{Reg} \to \mathit{Sets}$ *и* $|\cdot| : \mathit{Reg} \to \mathit{Cpt}$ *сохраняют расслоенные произведения.* Поскольку они также сохраняют декартовы произведения и финальный объект, мы можем заключить, что *функторы* $\Phi : \mathit{Reg} \to \mathit{Sets}$ *и* $|\cdot| : \mathit{Reg} \to \mathit{Cpt}$ *точны слева.*

6.4.15. (Мономорфизмы регулярных пространств.) Поскольку морфизм $f : X \to Y$ в категории с расслоенными произведениями является мономорфизмом, если и только если $\Delta_f : X \to X \times_Y X$ изоморфизм, а функтор $\Phi : \mathit{Reg} \to \mathit{Sets}$ точен слева и консервативен, мы видим, что *морфизм регулярных пространств* $f : X \to Y$ *является мономорфизмом если и только если* $\Phi(f)$ *инъективно*, или, что одно и то же, *если его геометрическая реализация* $|f| : |X| \to |Y|$ *инъективна.*

6.4.16. (Регулярные подпространства $Y \subset X$ — это в точности подобъекты X в *Reg*.) Предыдущая классификация мономорфизмов в *Reg* вместе с критерием **6.4.10** показывают, что *подобъекты* X *в Reg — это в точности регулярные подпространства* $Y \subset X$ *вместе с их каноническими вложениями* $i_Y : Y \to X$. Таким образом, мы, наконец, завершили доказательство этого факта, начатое в **6.4.6**. Отсюда ввиду **6.4.5** следует, что *подобъекты* $Y \subset X$*, т.е. регулярные подпространства* $Y \subset X$*, образуют дистрибутивную решётку.*

6.4.17. (Копроизведения в *Reg* — это дизъюнктные объединения.) Отметим, что конечные копроизведения также существуют в *Reg* и совпадают с таковыми в *RegRel* (см. **6.3.7**). Иначе говоря, если $X = (A^\omega, R)$ и $Y = (B^\omega, S)$, то $X \sqcup Y = \big((A \sqcup B)^\omega, R \cup S\big)$, где объединение $R \cup S$ вычисляется внутри $(A \sqcup B)^\omega$ (см. **6.1.19**). Из этого описания немедленно следует, что $|X \sqcup Y| = |X| \sqcup |Y|$, т.е. *функтор геометрической реализации* $|\cdot| : \mathit{Reg} \to \mathit{Cpt}$*, равно как и функтор* $\Phi : \mathit{Reg} \to \mathit{Sets}$*, сохраняет конечные копроизведения.* Поэтому мы будем также называть конечные копроизведения в *Reg* дизъюнктными объединениями.

6.4.18. (Факторбъекты относительно отношений эквивалентности и группоидов в *Reg*.) Действуя подобным образом, можно доказать, что в *Reg* существуют факторобъекты относительно произвольных отношений эквивалентности (в категорном смысле) и даже группоидов (см. **6.5.19**), причём функторы Φ и $|\cdot|$ сохраняют эти факторобъекты. Здесь существенно то, что образ регулярного множества относительно регулярного соответствия регулярен. Кроме того, можно доказать, что морфизм $f : X \to Y$ является коуравнителем своей ядерной пары $X \times_Y X \rightrightarrows X$, т.е. эффективным эпиморфизмом, если и только если $\Phi(f)$, или, что одно и то же, $|f|$ сюръективно (см. **6.4.20** ниже). Таким образом, каноническое разложение $f = i \circ p$ из **6.4.8** — это в действительности разложение морфизма в композицию эффективного эпиморфизма и мономорфизма, и потому оно единственно.

Лемма 6.4.19 *(Критерий того, что g пропускается через f с сюръективным $\Phi(f)$.) Пусть $f : X \to Y$ и $g : X \to Z$ — морфизмы (стандартных) регулярных пространств, такие, что $\Phi(f)$ сюръективно, а $\Phi(g)$ пропускается через $\Phi(f)$. Тогда g пропускается через f.*

Доказательство. Пусть $X = (A^\omega, R)$, $Y = (B^\omega, S)$, $Z = (C^\omega, T)$ в *StdReg*; тогда f и g задаются регулярными соответствиями $F \subset A^\omega \times B^\omega$ и $G \subset A^\omega \times C^\omega$, такими, что $S \circ F \circ R = F$ (что равносильно $S \circ F = F = F \circ R$), $T \circ G \circ R = G$, $F^{-1} \circ F \supset R$, $F \circ F^{-1} \subset S$, $G^{-1} \circ G \supset R$, $G \circ G^{-1} \subset T$. Сюръективность $\Phi(f)$ означает, что $F \circ F^{-1} = S$. Кроме того, $\Phi(g)$ пропускается через $\Phi(f)$ в том и только том случае, если отношение эквивалентности на $\Phi(X) = A^\omega/R$, индуцированное $\Phi(f)$, слабее отношения эквивалентности, заданного $\Phi(g)$, т.е. $F^{-1} \circ F \subset G^{-1} \circ G$. Положим $H := G \circ F^{-1} \subset B^\omega \times C^\omega$; это регулярное соответствие по **6.1.27**. Мы хотим доказать, что H задаёт морфизм $h : Y \to Z$, такой, что $h \circ f = g$. Для этого надо проверить, что $T \circ H \circ S = H$, $H^{-1} \circ H \supset S$, $H \circ H^{-1} \subset T$ и что $H \circ F = G$. Действительно, из $F = S \circ F$ по симметрии получаем $F^{-1} = (S \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ S$, и потому $T \circ H \circ S = T \circ G \circ F^{-1} \circ S = G \circ F^{-1} = H$; далее, $H^{-1} \circ H = F \circ G^{-1} \circ G \circ F^{-1} \supset F \circ F^{-1} \circ F \circ F^{-1} = S \circ S = S$; $H \circ H^{-1} = G \circ F^{-1} \circ F \circ G^{-1} \subset G \circ G^{-1} \circ G \circ G^{-1} \subset T \circ T = T$; наконец, $H \circ F = G \circ F^{-1} \circ F \supset G \circ R = G$ и одновременно $H \circ F = G \circ F^{-1} \circ F \subset G \circ G^{-1} \circ G \subset T \circ G = G$, откуда $H \circ F = G$.

6.4.20. (Эффективные эпиморфизмы в *Reg*.) Докажем упомянутое выше утверждение, а именно, что $f : X \to Y$ *является эффективным эпимор-*

физмом (т.е. коуравнителем своей ядерной пары $p, q : X \times_Y X \rightrightarrows X$) *в том и только том случае, если отображение* $\Phi(f) : \Phi(X) \to \Phi(Y)$ *сюръективно*, или, что равносильно, *если* $|f| : |X| \to |Y|$ *сюръективно.* Проверим сначала достаточность этого условия. В самом деле, поскольку функтор Φ точен слева (см. **6.4.14**), он переводит ядерную пару f в ядерную пару $\Phi(f)$, а значит, $g \circ p = g \circ q$, равносильное $\Phi(g) \circ \Phi(p) = \Phi(g) \circ \Phi(q)$ по строгости Φ, оказывается равносильно также тому, что $\Phi(g)$ пропускается через $\Phi(f)$, что согласно лемме **6.4.19** равносильно тому, что g пропускается через f, необходимо единственным образом (снова по строгости Φ); это как раз означает, что $f = \mathrm{coeq}(p, q : X \times_Y X \rightrightarrows X)$, т.е. что f — эффективный эпиморфизм. После того, как достаточность доказана, мы видим, что каноническое разложение $f = i \circ p'$ из **6.4.8** является разложением в композицию эффективного эпиморфизма p' и мономорфизма i, поскольку $\Phi(p')$ сюръективно; если f — эффективный эпиморфизм, то ядерные пары p' и $f = i \circ p'$ совпадают, а потому p' совпадает с f и $\Phi(f)$ также сюръективно. Это доказывает необходимость сюръективности $\Phi(f)$.

6.4.21. (Регулярные соответствия $F \in \mathit{Reg}(X, Y)$ — это регулярные подпространства $F \subset X \times Y$.) Декартово произведение $X \times Y$ из **6.4.12** позволяет нам отождествить регулярные соответствия $F \in \mathit{Reg}(X, Y)$ с регулярными подпространствами $F \subset X \times Y$, или, что одно и то же, с подобъектами $F \subset X \times Y$ или с классами изоморфности диаграмм $X \xleftarrow{p} F \xrightarrow{q} Y$, таких, что пара морфизмов p и q мономорфна, т.е. что определенный ей морфизм $(p, q) : F \to X \times Y$ — мономорфизм.

Для доказательства этого факта положим $X = (A^\omega, R)$ и $Y = (B^\omega, S)$; тогда $F \in \mathit{RegRel}(X, Y)$ равносильно тому, что $F \subset A^\omega \times B^\omega$ — регулярное соответствие, такое, что $S \circ F \circ R = F$. Поскольку для любых соответствий $R \in \mathit{Rel}(X', X)$, $F \in \mathit{Rel}(X, Y)$ и $S \in \mathit{Rel}(Y, Y')$ выполнено равенство $S \circ F \circ R = (R^\perp \otimes S)(F)$, условие $S \circ F \circ R = F$ равносильно тому, что $(R \otimes S)(F) = F$, так как в нашем случае $R^\perp = R^{-1} = R$ по симметричности R. Иначе говоря, $F \in \mathit{RegRel}(X, Y)$ равносильно тому, что F — $(R \otimes S)$-насыщенное регулярное подмножество $A^\omega \times B^\omega$; согласно **6.4.3**, такие F находятся во взаимно однозначном соответствии с регулярными подпространствами в $X \otimes Y = \big((A \times B)^\omega, R \otimes S\big)$, т.е. с регулярными подпространствами прямого произведения $X \times Y$ в Reg.

6.5 Геометрическая категория регулярных пространств

Введём понятие регулярного представления компакта, или, что одно и тоже, регулярной структуры на топологическом пространстве. После этого изменим нашу точку зрения на регулярные пространства на более геометрическую: теперь это будут топологические пространства, наделённые регулярной структурой.

6.5.1. (Регулярное представление компакта K. Регулярно представленные компакты и регулярные отображения между ними.) Пусть K — компактное топологическое пространство. Определим *регулярное представление компакта* K или *регулярную структуру на топологическом пространстве* K как пару (θ, X), состоящую из стандартного регулярного пространства $X = (A^\omega, R)$ в смысле определения **6.3.9** и гомеоморфизма $\theta : |X| \xrightarrow{\sim} K$ между геометрической реализацией X (см. **6.3.15**) и топологическим пространством K. Таким образом, A — конечное множество, R — регулярное симметричное транзитивное отношение на A^ω, а θ — гомеоморфизм $|A^\omega/R| \xrightarrow{\sim} K$. Если регулярное представление (A, R, θ) компакта K зафиксировано, будем говорить, что K — *регулярно представленный компакт.* Если K и L — регулярно представленные компакты, то имеет смысл говорить о регулярных отображениях $f : K \to L$ и регулярных соответствиях $R \subset K \times L$.

Ясно, что если K допускает регулярное представление, то K — польский компакт. У одного и того же K, вообще говоря, могут быть неизоморфные регулярные представления. Любое из таких представлений может быть использовано для эффективного комбинаторного описания K (согласно **6.3.18**, в качестве такового можно взять минимальный конечный автомат, распознающий симметричное транзитивное регулярное отношение R), а также некоторых его непрерывных отображений в другие компактные пространства, допускающие регулярные представления. Таким образом, теория регулярно представленных компактов — это фрагмент конструктивной математики, позволяющий эффективно работать с некоторыми компактами.

6.5.2. (Регулярные пространства как топологические пространства с регулярной структурой.) Изменим нашу точку зрения на регулярные пространства. Будем говорить, что *регулярное пространство* $K = (K, \theta, X)$ *— это топологическое пространство* K*, снабжённое регулярной структурой* (θ, X)*. Морфизм регулярных пространств*, или *регулярный мор-*

физм, или *регулярное отображение* $f : K = (K, \theta_K, X) \to L = (L, \theta_L, Y)$ — это пара (f, φ), состоящая из непрерывного отображения $f : K \to L$ и морфизма $\varphi : X \to Y$ в $StdReg$, таких, что $f \circ \theta_K = \theta_L \circ |\varphi|$. Таким образом мы получаем новую категорию регулярных пространств Reg, которая, впрочем, эквивалентна старой, которую мы теперь будем обозначать $StdReg$ и называть *категорией стандартных регулярных пространств*.

Определённая таким образом категория регулярных пространств чуть более естественна с геометрической точки зрения. Можно сравнить Reg с категорией аффинных схем в алгебраической геометрии, а $StdReg$ — с категорией схем вида $\operatorname{Spec} R$, где R — коммутативное кольцо, или даже с категорией, противоположной категории коммутативных колец. Все эти категории эквивалентны, однако категория аффинных схем более естественна и удобна с геометрической точки зрения.

6.5.3. (Функтор геометрической реализации становится функтором забывания регулярной структуры.) Если $X = (X, \theta_X)$ — регулярное пространство в новом смысле, то можно считать, что $|X|$ — это топологическое пространство, полученное из X забыванием регулярной структуры. Новый функтор $|\cdot| : Reg \to Cpt \subset Top$ переходит в старый функтор геометрической реализации $|\cdot| : StdReg \to Cpt$, если взять его композицию с эквивалентностью категорий $StdReg \xrightarrow{\sim} Reg$, и потому их можно отождествить.

6.5.4. (Регулярный морфизм $f : X \to Y$ однозначно определяется соответствующим непрерывным отображением.) Отметим, что регулярный морфизм $f = (f, \varphi)$ однозначно определяется соответствующим непрерывным отображением $f : X \to Y$ (т.е. $|f| : |X| \to |Y|$), поскольку функтор геометрической реализации $|\cdot|$ строг и консервативен (на категории $StdReg$ по **6.3.16**, а значит, и на эквивалентной категории Reg). Поэтому можно говорить о регулярных морфизмах как о некоторых — а именно, регулярных — непрерывных отображениях соответствующих топологических пространств.

6.5.5. (Регулярные подпространства $Y \subset X$.) Пусть $X = (X, \theta_X : |X'| \xrightarrow{\sim} X)$ — регулярное пространство. Будем говорить, что замкнутое подмножество $Y \subset X$ является *регулярным подпространством*, если существует регулярное подпространство $Y' \subset X'$ в смысле **6.4.1**, такое, что $Y = \theta_X(|Y'|)$. В этом случае на Y возникает естественная регулярная структура $\theta_Y : |Y'| \xrightarrow{\sim} Y$, полученная ограничением регулярной структуры X, и мы всегда рассматриваем именно эту регулярную структуру на Y. Другими словами, индуцированная регулярная структура на замкнутом подмножестве $Y \subset X$ — это единственная регулярная структура, относительно которой замкнутое вложение $i_Y : Y \hookrightarrow X$ является регулярным морфизмом, и такая регулярная структура существует в том и только том случае, если Y — регулярное подпространство X. Результаты **6.4** показывают, что регулярные подпространства фиксированного регулярного пространства X образуют дистрибутивную решётку, которая отождествляется с подрешёткой решётки замкнутых подмножеств X, и что эта дистрибутивная решётка — это на самом деле решётка всех подобъектов X в категории регулярных пространств Reg.

6.5.6. (Инъективность, биективность и сюръективность регулярных морфизмов.) Будем говорить, что регулярный морфизм $f : X \to Y$ инъективен, сюръективен или биективен, если он обладает этим свойством как непрерывное отображение топологических пространств (или, если угодно, если $|f|$ обладает этим свойством). Аналогично для свойства быть замкнутым отображением, гомеоморфизмом и прочих свойств непрерывных отображений топологических пространств. Тогда:

- f биективен $\Leftrightarrow$ f — гомеоморфизм $\Leftrightarrow$ f — изоморфизм в Reg (это следует из консервативности $|f|$, см. **6.3.16**, а также из компактности всех регулярных пространств).

- f инъективен $\Leftrightarrow$ f — замкнутое вложение топологических пространств $\Leftrightarrow$ f — мономорфизм в Reg $\Leftrightarrow$ f — изоморфизм с регулярным подпространством образа (первая эквивалентность снова следует из компактности, а остальные две — это **6.4.15** и **6.4.10**).

- f сюръективен $\Leftrightarrow$ f — эффективный эпиморфизм в Reg (см. **6.4.20**). В этом случае топология на Y является фактортопологией топологии X.

- Любой регулярный морфизм $f : X \to Y$ однозначно (с точностью до изоморфизма) раскладывается в композицию эффективного эпиморфизма (т.е. сюръективного регулярного морфизма) $p : X \twoheadrightarrow f(X)$ и мономорфизма (т.е. инъективного регулярного морфизма) $i : f(X) \hookrightarrow Y$ (см. **6.4.8**).

6.5.7. (Финальный объект **1** категории Reg. Единственная регулярная структура на одноточечном топологическом пространстве.) Поскольку в категории *StdReg* есть финальный объект $\mathbf{1}_{StdReg} = (\{*\}^{\omega}, \mathrm{id})$, это верно и в эквивалентной категории *Reg*. В качестве финального объекта *Reg* можно взять геометрическую реализацию $\mathbf{1} := |\mathbf{1}_{StdReg}|$. Тогда $\mathbf{1}$ — одноточечное топологическое пространство с некоторой регулярной структурой. Отсюда сразу следует, что *на любом одноточечном топологическом пространстве P существует единственная (с точностью до изоморфизма) регулярная структура, и после наделения этой структурой P становится финальным объектом категории Reg*. Действительно, существование следует из существования биекции $P \xrightarrow{\sim} \mathbf{1}$ с помощью переноса структуры; единственность следует из того, что если P — одноточечное регулярное пространство, то канонический морфизм $P \to \mathbf{1}$ из P в финальный объект биективен, и потому является изоморфизмом по **6.5.6**.

6.5.8. (Расслоенные и прямые произведения в *Reg*.) Напомним, что согласно **6.4.14**, в *StdReg*, а значит, и в эквивалентной категории *Reg*, существуют расслоенные произведения, причём они сохраняются функтором $|\cdot|$, т.е. $|X \times_Z Y| = |X| \times_{|Z|} |Y|$. Иначе говоря, для любых регулярных морфизмов $p : X \to Z$ и $q : Y \to Z$ на топологическом расслоенном произведении $X \times_Z Y$ существует единственная регулярная структура, превращающая его в расслоенное произведение X и Y над Z в *Reg*. Аналогичное утверждение верно и для бинарных прямых произведений (см. **6.4.12**), а также для финального объекта (см. **6.5.7**), откуда мы заключаем, что *в Reg существуют конечные пределы, причём они сохраняются забывающим функтором $|\cdot| : Reg \to Top$.*

6.5.9. (Образ и прообраз регулярных подпространств.) Пусть $f : X \to Y$ — регулярный морфизм. Если $Y' \subset Y$ — регулярное подпространство, то и $f^{-1}(Y') \subset X$ — регулярное подпространство, носитель которого совпадает с теоретико-множественным прообразом. При этом $f^{-1}(Y')$ отождествляется с расслоенным произведением $Y' \times_Y X$ (см. **6.4.11**). Кроме того, если $X' \subset X$ — регулярное подпространство, то согласно **6.4.7** $f(X') \subset Y$ — тоже регулярное подпространство, чей носитель совпадает с теоретико-множественным образом, и $f \circ i_{X'}$ пропускается через $i_{f(X')} : f(X') \hookrightarrow X$ согласно **6.4.8**.

6.5.10. (Дизъюнктные объединения регулярных пространств.) Если X и Y — регулярные пространства, то на их дизъюнктном объединении $X \sqcup Y$ существует единственная регулярная структура, относительно которой X и Y являются регулярными подпространствами $X \sqcup Y$, и тогда

$X \sqcup Y$ становится копроизведением X и Y в категории *Reg*. Последнее утверждение, равно как и существование такой регулярной структуры, следуют из **6.4.17**; единственность тогда следует из универсального свойства копроизведения и из того факта, что все регулярные биекции — изоморфизмы, см. **6.5.6**. Мы обычно будем наделять $X \sqcup Y$ этой регулярной структурой и называть его *дизъюнктным объединением регулярных пространств X и Y*.

6.5.11. (Пустое регулярное пространство $\varnothing$.) Отметим ещё, что на пустом множестве $\varnothing$ существует единственная структура регулярного пространства (определённая, например, с помощью стандартного регулярного пространства $(\varnothing^\omega, \varnothing)$; единственность снова следует из того, что все регулярные биекции — изоморфизмы). Тем самым определено *пустое регулярное пространство $\varnothing$*, очевидно, являющееся инициальным объектом *Reg* (например, потому что $(\varnothing^\omega, \varnothing)$ — инициальный объект *StdReg*). Отсюда и из **6.5.10** мы заключаем, что *в Reg существуют конечные копроизведения, причём они сохраняются забывающим функтором $|\cdot| : Reg \to Top$.*

6.5.12. (Геометрическая категория регулярных соответствий *RegRel*.) Поскольку мы изменили определение регулярных пространств на более геометрическое и тем самым заменили категорию стандартных регулярных пространств *StdReg* на эквивалентную ей, но более естественную категорию регулярных пространств *Reg*, естественно переопределить аналогичным образом и категорию регулярных соответствий *RegRel*. Для этого возьмём $\mathrm{Ob}\, RegRel = \mathrm{Ob}\, Reg$, т.е. объекты новой (геометрической) категории регулярных соответствий будут всё те же регулярные пространства в смысле определения **6.5.2**, и определим $RegRel(X, Y)$ как множество всех регулярных подпространств $R \subset X \times Y$; мы будем называть такие регулярные подпространства *регулярными соответствиями между X и Y*; можно также определить $RegRel(X, Y)$ как множество классов изоморфности диаграмм $X \xleftarrow{p} R \xrightarrow{q} Y$ в *Reg*, таких, что пара (p, q) мономорфна. Согласно **6.4.21**, мы получим таким образом категорию, эквивалентную старой категории регулярных соответствий. Композиция $S \circ R$ соответствий $R \subset X \times Y$ и $S \subset Y \times Z$ определяется обычным образом, а именно, $S \circ R = \mathrm{pr}_{13}\big(\mathrm{pr}_{12}^{-1}(R) \cap \mathrm{pr}_{23}^{-1}(S)\big)$, где пересечение регулярных подпространств $\mathrm{pr}_{12}^{-1}(R) \cap \mathrm{pr}_{23}^{-1}(S)$ вычисляется внутри $X \times Y \times Z$.

6.5.13. (Каноническая регулярная структура на регулярных подмножествах $X \subset A^\omega$.) Пусть A — конечное множество, $X \subset A^\omega$ — регулярное подмножество в смысле **6.1.4**. Напомним, что X — замкнутое подмножество компакта $A^\omega = A^{\mathbb{N}_0}$, так что на X уже есть естественная топология, и X является компактом относительно этой топологии. Более того, геометрическая реализация $|(A^\omega, \mathrm{id}_X)|$ стандартного регулярного пространства $(A^\omega, \mathrm{id}_X)$, где $\mathrm{id}_X = \Delta_X \subset X \times X \subset A^\omega \times A^\omega$ — диагональ X, отождествляется с самим X. Поэтому на X возникает каноническая регулярная структура. В действительности это его регулярная структура как регулярного подпространства $X \subset A^\omega$, и регулярные подпространства A^ω — это в точности регулярные подмножества $X \subset A^\omega$ (для доказательства последнего утверждения достаточно применить **6.4.3** к стандартному регулярному пространству $(A^\omega, \Delta_{A^\omega})$).

6.5.14. (Каноническое накрытие стандартного регулярного пространства.) Пусть $X = (A^\omega, R)$ — стандартное регулярное пространство, т.е. A — конечное множество, а $R \subset A^\omega \times A^\omega$ — симметричное транзитивное регулярное отношение. Тогда на геометрической реализации $|X| = A^\omega/R$ существует каноническая регулярная структура $\mathrm{id}_{|X|}$, которую мы будем всегда рассматривать впредь. Мы также обозначим $|X|$ той же буквой X.

Пусть теперь $X_0 := \operatorname{dom} R \subset A^\omega$ — регулярное множество, носитель отношения R. Тогда $X = X_0/R$, так что существует каноническая сюръекция $\pi : X_0 \twoheadrightarrow X$, и топология на X является фактортопологией топологии X_0, индуцированной с A^ω, просто по определению геометрической реализации **6.3.15**. Иначе говоря, $\pi : X_0 \twoheadrightarrow X$ — непрерывная сюръекция, и несложно видеть, что она является регулярным морфизмом, потому что R задаёт соответствующий морфизм из (A^ω, Δ_{X_0}) в (A^ω, R) в категории стандартных регулярных пространств.

Таким образом, мы получили канонический сюръективный регулярный морфизм $\pi : X_0 \twoheadrightarrow X$ из регулярного множества, т.е. регулярного подпространства $X_0 \subset A^\omega$, в стандартное регулярное пространство X, заданное (A^ω, R). Поскольку всякое регулярное пространство X изоморфно стандартному, *для всякого регулярного пространства X существует конечное множество A, регулярное подпространство $X_0 \subset A^\omega$ и сюръективный регулярный морфизм $\pi : X_0 \twoheadrightarrow X$.* В такой ситуации мы будем говорить, что $\pi : X_0 \twoheadrightarrow X$ *с* $X_0 \subset A^\omega$ — *регулярное накрытие* X. Отметим, однако, что изоморфные регулярные структуры могут соответствовать, вообще говоря, неизоморфным регулярным накрытиям.

6.5.15. (Накрытие $\pi : X_0 \twoheadrightarrow X$ однозначно определяет регулярную структуру на X.) Заметим, что сюръективное отображение $\pi : X_0 \twoheadrightarrow X$ вкупе с регулярной структурой регулярного подпространства $X_0 \subset A^\omega$, полностью определяет регулярную структуру на X. Более точно, если $X_0 \subset A^\omega$ — регулярное подпространство, и $\pi : X_0 \twoheadrightarrow X$ — сюръективное отображение, то на X существует не более одной регулярной структуры, для которой π является регулярным отображением. Действительно, если такая структура есть, то, во-первых, топология на X является фактор-топологией топологии компакта X_0 и потому однозначно определена; а во-вторых, $\pi : X_0 \twoheadrightarrow X$ тогда оказывается эффективным эпиморфизмом согласно **6.5.6**, и ядро π — это $R := X_0 \times_X X_0 \subset X_0 \times X_0 \subset A^\omega \times A^\omega$, которое оказывается регулярным подпространством $A^\omega \times A^\omega$ (так как $X_0 \times_X X_0 \hookrightarrow X_0 \times X_0 \hookrightarrow A^\omega \times A^\omega$ — мономорфизмы в $\mathcal{R}eg$), т.е. регулярным подмножеством. Далее, поскольку π — эффективный эпиморфизм, он является коуравнителем своей ядерной пары p, $q : R = X_0 \times_X X_0 \rightrightarrows X_0$, а значит, определён однозначно с точностью до изоморфизма. Иначе говоря, регулярная структура на X однозначно восстанавливается из изоморфизма $X \cong \mathrm{Coeq}(p, q : R \rightrightarrows X_0)$, где на регулярном подмножестве $R \subset X_0 \times X_0 \subset A^\omega \times A^\omega$ вводится регулярная структура, индуцированная с $A^\omega \times A^\omega$.

Более того, это рассуждение показывает, что *на X существует (необходимо единственная) регулярная структура, для которой $\pi : X_0 \twoheadrightarrow X$ является регулярным морфизмом, если и только если определённое π отношение эквивалентности $R \subset X_0 \times X_0 \subset A^\omega \times A^\omega$ является регулярным подмножеством.* Очевидно, в этом случае X изоморфно геометрической реализации $|(A^\omega, R)|$ стандартного регулярного пространства (A^ω, R).

6.5.16. (Регулярное представление компакта K однозначно определяется регулярным накрытием — сюръективным непрерывным отображением $\pi : X_0 \twoheadrightarrow K$.) Как следствие, регулярное представление θ_K некоторого компакта K (т.е. регулярная структура θ_K на компакте K) однозначно определяется непрерывным сюръективным отображением $\pi : X_0 \twoheadrightarrow K$, где $X_0 \subset A^\omega$ — регулярное подмножество A^ω для какого-нибудь конечного множества A. Более того, такое π действительно задаёт регулярное представление K в том и только том случае, если его ядро $\equiv_\pi$, т.е. отношение $\boldsymbol{x} \equiv_\pi \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \pi(\boldsymbol{x}) = \pi(\boldsymbol{y})$ на X_0 и на $A^\omega \supset X_0$, является регулярным. В этом случае регулярная структура имеет вид $\theta_K : |(X_0, \equiv_\pi)| \xrightarrow{\sim} K$.

6.5.17. (Регулярные накрытия $\pi : X_0 \twoheadrightarrow K$, $X_0 \subset A^\omega$, со значениями в произвольном компакте K.) Предыдущие рассуждения позволяют обобщить определение регулярного накрытия следующим образом. Если дано регулярное пространство X, то мы по-прежнему определяем регулярное накрытие $\pi : X_0 \twoheadrightarrow X$, $X_0 \subset A^\omega$ как сюръективный регулярный морфизм из некоторого регулярного подмножества $X_0 \subset A^\omega$ в X. С другой стороны, если изначально дан компакт (или отделимое топологическое пространство) K без регулярной структуры, то мы говорим, что *регулярное накрытие* $\pi : X_0 \twoheadrightarrow K$, $X_0 \subset A^\omega$ *— это сюръективное непрерывное отображение из некоторого подмножества* $X_0 \subset A^\omega$ *в* X, *такое, что его ядро* $R := X_0 \times_X X_0 \subset X_0 \times X_0 \subset A^\omega \times A^\omega$ *является регулярным (симметричным транзитивным) отношением на* A^ω. Отметим, что отсюда немедленно следует, что и $X_0 = \mathrm{pr}_1 R$ регулярно и, в частности, замкнуто в A^ω. Мы только что видели в **6.5.16**, что регулярное накрытие во втором смысле задаёт на K регулярную структуру $\theta : |(A^\omega, R)| \xrightarrow{\sim} K$, и после наделения K этой регулярной структурой π становится регулярным накрытием в первом смысле. Более того, рассуждения из **6.5.16** показывают, что нам не нужно даже изначально задавать топологию на K, поскольку она в итоге окажется фактортопологией топологии X_0, и потому мы можем даже говорить о *регулярных накрытиях* $\pi : X_0 \twoheadrightarrow K$, $X_0 \subset A^\omega$ **множества** K *без какой-либо дополнительной структуры*. В большинстве случаев, однако, топология K изначально задана, и мы требуем непрерывность π.

6.5.18. (Отношения эквивалентности на регулярном пространстве X.) Напомним, что отношение эквивалентности R на объекте X произвольной категории $\mathcal{C}$ определяется как подобъект $R \subset X \times X$ (который можно при желании задать с помощью мономорфной пары морфизмов $p, q : R \rightrightarrows X$), такой, что для любого объекта $S : \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ подмножество $R(S) \subset X(S) \times X(S)$ является отношением эквивалентности на множестве S-точек $X(S) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S, X)$. Несложно видеть, что отношение эквивалентности R на регулярном пространстве X в смысле этого общего категорного определения, применённого к $\mathcal{C} = \mathit{Reg}$ — это то же самое, что регулярное подпространство $R \subset X \times X$, являющееся также теоретико-множественным отношением эквивалентности на X (т.е. $|R| \subset |X| \times |X|$ — отношение эквивалентности на $|X|$). Ввиду **6.5.12**, это равносильно также тому, что $R \in \mathit{RegRel}(X, X)$ таково, что $\Delta_X \subset R$, $R \circ R = R$ и $R^\perp = R$. Поскольку все эти определения равносильны, мы определим *(регулярное) отношение эквивалентности* R *на регулярном* *пространстве X как регулярное подпространство $R \subset X \times X$, такое, что $|R|$ является отношением эквивалентности на множестве $|X|$.*

6.5.19. (Регулярное факторпространство X/R относительно регулярного отношения эквивалентности.) Пусть $R \subset X \times X$ — регулярное отношение эквивалентности на регулярном пространстве X. С категорной точки зрения, факторобъект X/R — это коуравнитель двух проекций $\mathrm{Coeq}(p, q : R \rightrightarrows X)$. Докажем, что *в категории регулярных пространств $\mathcal{R}eg$ существуют факторобъекты относительно произвольных отношений эквивалентности.* Иначе говоря, мы должны доказать существование $X/R = \mathrm{Coeq}(p, q : R \rightrightarrows X)$ для произвольного регулярного отношения эквивалентности R на произвольном регулярном пространстве X. Для этого выберем сюръективное регулярное накрытие $\pi : X_0 \twoheadrightarrow X$ с $X_0 \subset A^\omega$, как в **6.5.14**, и положим $R_0 := (\pi \times \pi)^{-1}(R) \subset X_0 \times X_0$. Поскольку R — (регулярное) отношение эквивалентности на X, R_0 — также (регулярное) отношение эквивалентности на регулярном множестве X_0. Мы уже видели в **6.5.15**, что в такой ситуации регулярное факторпространство X_0/R_0 существует (и по существу изоморфно стандартному регулярному пространству (A^ω, R_0)). Если теперь взять X/R в категории топологических пространств (с фактортопологией), то π индуцирует непрерывную биекцию $\bar{\pi} : X_0/R_0 \xrightarrow{\sim} X/R$, а значит, и гомеоморфизм, поскольку X_0/R_0 и X/R компактны. Введём регулярную структуру на X/R переносом структуры с X_0/R_0 вдоль $\bar{\pi}$. Тогда $\pi : X_0 \twoheadrightarrow X$ и $\varphi' : X_0 \twoheadrightarrow X \twoheadrightarrow X/R \cong X_0/R_0$ — эффективные эпиморфизмы, причём ядро второго из них содержится в ядре первого из них (поскольку второе отображение пропускается через первое на уровне множеств), и потому φ' пропускается через π и в $\mathcal{R}eg$, т.е. $\varphi : X \twoheadrightarrow X/R$ — сюръективный регулярный морфизм в $\mathcal{R}eg$, а значит, эффективный эпиморфизм по **6.5.6**. Его ядро — это в точности исходное R (потому что это так на уровне теории множеств, а регулярные подпространства $R \subset X \times X$ полностью определяются множеством своих точек). Поэтому $X/R = \mathrm{Coeq}(p, q : R \rightrightarrows X)$ в $\mathcal{R}eg$, т.е. X/R — искомый факторобъект.

6.5.20. (Эффективные факторобъекты регулярного пространства X.) Из существования факторобъектов X/R сразу следует, что *эффективные факторобъекты X'' регулярного пространства X, т.е. такие факторобъекты, что $X \twoheadrightarrow X''$ — эффективный эпиморфизм, находятся во взаимно однозначном соответствии с (регулярными) отношениями эквивалентности $R \subset X \times X$.* Кроме того, мы видим, что для любого регулярного пространства X и любого сюръективного отображения множеств $\pi : X \twoheadrightarrow Y$ существует не более одной регулярной структуры на Y, для которой π является регулярным отображением, причём такая регулярная структура существует в том и только том случае, если ядро $R := X \times_Y X \subset X \times X$ является регулярным отношением эквивалентности на X в смысле **6.5.18**, и тогда $Y \cong X/R$. В таком случае мы говорим, что *регулярная структура* Y *является факторструктурой регулярной структуры* X, или что Y *является регулярным факторпространством* X.

6.5.21. (A^ω играют роль аффинных пространств размерности $\log|A|$; все регулярные пространства — факторпространства подпространств A^ω.) Предыдущие результаты показывают, что любое регулярное пространство X является регулярным факторпространством некоторого регулярного подпространства $X_0 \subset A^\omega$. Это чем-то напоминает алгебраическую геометрию, где приведённые аффинные алгебраические многообразия над полем k изоморфны (приведённым) замкнутым подмногообразиям $Y \subset \mathbb{A}^n_k$ аффинных пространств $\mathbb{A}^n_k$. Правда, в нашем случае нужно брать не только подпространства A^ω, но и факторпространства таких подпространств, так что аналогия неполная. Кроме того, хотя регулярные пространства вида A^ω и замкнуты относительно декартова произведения, поскольку $A^\omega \times B^\omega \cong (A \times B)^\omega$, эта формула показывает, что если A^ω и аналогично аффинному пространству над каким-то полем $\mathbb{F}$ (вроде гипотетического поля из одного элемента или его алгебраического замыкания), то это скорее $\mathbb{A}_{\mathbb{F}}^{\log|A|}$, поскольку мы обычно ожидаем $\mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^n \cong \mathbb{A}^{m+n}$.

6.5.22. (Регулярных подпространств $X_0 \subset A^\omega$ недостаточно, надо брать факторпространства регулярных подпространств.) Отметим, что, в отличие от аффинных алгебраических многообразий, не все регулярные пространства X изоморфны регулярным подпространствам «аффинных пространств» A^ω, необходимо рассматривать факторпространства регулярных подпространств. Действительно, A^ω вполне несвязно, а значит, и все регулярные подпространства $X_0 \subset A^\omega$ вполне несвязны, но в то же время существуют связные регулярные пространства X, не сводящиеся к одной точке, например, отрезок $I = [0, 1]$, см. **6.6.3**.

6.5.23. (Всякое регулярное пространство изоморфно факторпространству некоторого A^ω.) Интересно, что вместо факторпространств всевозможных регулярных подпространств $X_0 \subset A^\omega$ достаточно сразу рассматривать факторпространства A^ω. Иначе говоря, *всякое регулярное пространство X может быть представлено как факторпространство некоторого A^ω*, или, что равносильно, *для всякого регулярного пространства X существует конечное множество A и сюръективный регулярный морфизм $\pi : A^\omega \twoheadrightarrow X$*. Это также означает, что любой объект $StdReg$ изоморфен объекту вида (A^ω, R), где R — регулярное отношение эквивалентности на A^ω. Правда, получающиеся представления не всегда удобны и неканоничны, так что мы не будем настаивать на том, чтобы обходиться исключительно факторпространствами A^ω.

Для доказательства этого факта достаточно заметить, что если $X = \varnothing$, оно изоморфно $\varnothing^\omega$; если же $X \neq \varnothing$, то оно накрывается $X_0 \twoheadrightarrow X$ для некоторого непустого регулярного подпространства $X_0 \subset A^\omega$, которое является ретрактом A^ω и потому накрывается $A^\omega \twoheadrightarrow X_0$ по следующей лемме:

Лемма 6.5.24 *(Непустые регулярные подпространства в A^ω являются ретрактами.) Если $X \subset A^\omega$ — непустое регулярное подпространство, то $i_X : X \hookrightarrow A^\omega$ — расщепляющийся мономорфизм. Иначе говоря, существует регулярный морфизм $p : A^\omega \twoheadrightarrow X$, такой, что $p \circ i_X = \mathrm{id}_X$.*

Доказательство. Поскольку X — регулярное подмножество A^ω, оно распознаётся некоторым конечным автоматом $G = (S, s_0, E)$, $s_0 \in S$, $E \subset S \times A \times S$, который мы будем считать минимальным (см. **6.1.12**). Рассмотрим для каждого $s \in S$ подмножество $A_s := \{x \in A \mid \exists t \in S\colon (s,x,t) \in E\} \subset A$. Иначе говоря, A_s — это множество меток всех переходов из состояния s. Поскольку автомат минимален и $X \neq \varnothing$, из каждого состояния начинается бесконечный путь и потому A_s непусто. Зафиксируем произвольную ретракцию $\pi_s : A \to A_s \subset A$, и построим новый автомат $G' = (S, s_0, E')$ над алфавитом $A \times A$ следующим образом. Его состояния и начальное состояние будут такими же, как у исходного автомата, и $(s, xy, t) \in E' \Leftrightarrow (s, y, t) \in E \;\&\; \pi_s(x) = y$. Иначе говоря, переход $s \xrightarrow{xy} t$ присутствует в новом автомате, если и только если $y = \pi_s(x)$ и переход $s \xrightarrow{y} t$ присутствовал в старом автомате. Пусть $P \subset A^\omega \times A^\omega$ — регулярное отношение, заданное G'. Несложно видеть, что для любого $\boldsymbol{x} = x_0 x_1 \cdots \in A^\omega$ существует единственное $\boldsymbol{y} = y_0 y_1 \cdots \in A^\omega$, для которого $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in P$, поскольку из каждого состояния автомата G' есть ровно один переход с заданной первой буквой $x \in A$. Иначе говоря, P является графиком некоторого регулярного отображения $p : A^\omega \to$

A^ω. Кроме того, очевидно, что $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in P \Rightarrow \boldsymbol{y} \in X$ (надо рассмотреть последовательность состояний автомата G' на вводе $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ и увидеть, что она совпадает с последовательностью состояний G на вводе $\boldsymbol{y}$), и что $\boldsymbol{x} \in X \Rightarrow (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \in P$ (поскольку $\pi_s : A \to A_s$ — ретракция, в G' есть переход $s \xrightarrow{xx} t$ для каждого перехода $s \xrightarrow{x} t$ в G). Иначе говоря, $p(A^\omega) \subset X$ и $p|_X = \mathrm{id}_X$. Это как раз и означает, что p — искомая регулярная ретракция A^ω на $X \subset A^\omega$.

6.5.25. (Возможная внутренняя характеризация регулярных пространств, вкладываемых в A^ω.) Интересно было бы получить какую-нибудь внутреннюю категорную или топологическую характеризацию регулярных пространств X, которые могут быть вложены в какое-нибудь A^ω, т.е. регулярно изоморфны регулярным подмножествам $X_0 \subset A^\omega$, или, что одно и то же, являются ретрактами какого-нибудь A^ω. Например, такие регулярные пространства должны быть вполне несвязны. Верно ли, что любое вполне несвязное регулярное пространство X изоморфно некоторому регулярному подмножеству $X_0 \subset A^\omega$?

6.5.26. (Граница и дополнение внутренности регулярного подпространства регулярны.) Пусть X — регулярное пространство. Поскольку регулярные подпространства $Y \subset X$ отождествляются с некоторыми замкнутыми подмножествами компакта X, можно задаться вопросом, какие из обычных топологических операций с замкнутыми подмножествами компакта сохраняют регулярность. Например, мы знаем, что конечные пересечения и конечные объединения регулярных подпространств регулярны (см. **6.4.5**), и что образ и прообраз регулярного подпространства относительно регулярного морфизма регулярны (см. **6.5.9**). Докажем, что *если $Y \subset X$ регулярно, то его граница $\partial Y = Y - \mathrm{Int}_X Y$ и дополнение его внутренности $X - \mathrm{Int}_X Y$ (т.е. замыкание дополнения $\overline{X - Y}$) регулярны в X*. Для доказательства зафиксируем регулярное пространство X и его регулярное подпространство $Y \subset X$, и выберем сюръективный регулярный морфизм $p : A^\omega \twoheadrightarrow X$, существующий по **6.5.23**; тогда лемма **6.5.27** показывает, что $\partial Y = p(\partial \tilde{Y})$ и $X - \mathrm{Int}_X Y = p(A^\omega - \mathrm{Int}\, \tilde{Y})$, где $\tilde{Y} := p^{-1}(Y) \subset A^\omega$. Поскольку взятие образа или прообраза относительно регулярного отображения сохраняет регулярные подпространства, тем самым достаточно доказать наше утверждение для регулярного множества $\tilde{Y} \subset A^\omega$, т.е. для частного случая $X = A^\omega$, для которого оно верно по **6.1.36**.

Лемма 6.5.27 *(Образ границы прообраза относительно сюръекции компактов.) Пусть $f : X \twoheadrightarrow Y$ — непрерывная сюръекция компактов, и пусть $T \subset Y$ — произвольное подмножество. Положим $S := f^{-1}(T) \subset X$. Тогда $Y - \operatorname{Int} T = f(X - \operatorname{Int} S)$ и $\bar{T} = f(\bar{S})$. Кроме того, если $T \subset Y$ замкнуто, то $\partial T = f(\partial S)$.*

Доказательство. Поскольку f сюръективно, $f(S) = T$, откуда $f(\bar{S}) \subset \bar{T}$ по непрерывности f. Помимо этого, $f(\bar{S})$ компактно, будучи непрерывным образом компакта $\bar{S} \subset X$, и потому $f(\bar{S})$ — замкнутое подмножество Y, содержащее $f(S) = T$, откуда $f(\bar{S}) \supset \bar{T}$ и $f(\bar{S}) = \bar{T}$. Формула с внутренностями получается отсюда заменой T на $Y - T$ и S на $X - S$, поскольку $X - \operatorname{Int} S = \overline{X - S}$ и $Y - \operatorname{Int} T = \overline{Y - T}$. Наконец, если T, а значит, и S замкнуто, то $\partial T = T - \operatorname{Int} T = T \cap (Y - \operatorname{Int} T) = T \cap f(X - \operatorname{Int} S) = f\big(S \cap (X - \operatorname{Int} S)\big) = f(S - \operatorname{Int} S) = f(\partial S)$.

6.6 Примеры регулярных представлений компактов

Приведём примеры регулярных структур в смысле **6.5.1** на некоторых интересных нам компактах, таких, как $\mathbb{Z}_p$ и $I = [0, 1]$

6.6.1. ($\mathbb{Z}_p$ допускает регулярное представление.) Целые p-адические числа $\mathbb{Z}_p$ допускают очень простое регулярное представление с помощью обычной p-ичной записи: можно взять $D = \{0, 1, \dots, p-1\}$ и $\theta : D^\omega \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p$, $\theta : \boldsymbol{x} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x_n p^n$. В этом случае регулярное отношение эквивалентности $\equiv$ на D^ω не нужно, т.е. $\equiv$ — это отношение равенства (или диагональ).

Если зафиксировать это регулярное представление, то сложение p-адических чисел $[+] : \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$, $(x, y) \mapsto x + y$, оказывается регулярным отображением. Иначе говоря, существует регулярное отображение $a : D^\omega \times D^\omega \cong (D \times D)^\omega \to D^\omega$, такое, что $\theta \circ a = [+] \circ (\theta \times \theta)$. В самом деле, график a распознаётся с помощью автомата с двумя состояниями $S = \{0, 1\}$, начальным состоянием $0 \in S$ и переходами $s \xrightarrow{xyz} t$ при $pt = s + x + y - z$, где s, $t \in S$, x, y, $z \in D$.

6.6.2. ($\mathbb{F}_q[[T]]$ допускает регулярное представление.) Кольцо формальных степенных рядов $\mathbb{F}_q[[T]]$ с коэффициентами в конечном поле $\mathbb{F}_q$ допускает ещё более простое регулярное представление: возьмём $D = \mathbb{F}_q$ и определим $\theta : \mathbb{F}_q^\omega \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_q[[T]]$ формулой $\theta(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n T^n$. Поскольку θ — гомеоморфизм, тем самым на $\mathbb{F}_q[[T]]$ определена регулярная структура. Очевидно, сложение является регулярным отображением относительно этой регулярной структуры: график сложения распознаётся совсем простым автоматом с единственным состоянием 0 и переходами $0 \xrightarrow{xyz} 0$ при $z = x + y$ в $\mathbb{F}_q$.

6.6.3. (Двоичная запись определяет регулярное представление $I = [0,1]$.) Отрезок вещественной прямой $I = [0,1]$ также допускает регулярное представление, например, с помощью обычной двоичной записи: $B = \{0,1\}$, $\theta_2 : B^\omega \to I = [0,1]$, $\boldsymbol{x} = x_0 x_1 \cdots \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x_n 2^{-n-1}$. В этом случае отношение эквивалентности $\equiv$ нетривиально и является ядром непрерывного отображения θ_2, т.е. $\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \theta_2(\boldsymbol{x}) = \theta_2(\boldsymbol{y})$. Поскольку $\theta_2 : B^\omega \twoheadrightarrow I$ — непрерывная сюръекция компактов, она индуцирует гомеоморфизм $\bar{\theta}_2 : B^\omega/\equiv \xrightarrow{\sim} I$, и надо только проверить, что $\equiv$ является регулярным отношением эквивалентности на B^ω. Это действительно так: $\equiv$ распознаётся конечным автоматом с тремя состояниями $S = \{-1, 0, 1\}$, начальным состоянием $0 \in S$ и переходами $s \xrightarrow{xy} t$ при $t = 2s + x - y$, где s, $t \in S$, x, $y \in B$, что проверяется так же, как в [AB4],**4.4.1**.

Интересно, что в данном случае мы не можем обойтись тривиальным отношением эквивалентности, поскольку любое A^ω и любое его регулярное подмножество вполне несвязно, а I связно и состоит более чем из одной точки. Кроме того, нам приходится рассматривать все двоичные записи, в том числе «некорректные» вроде $1/2 = (0.01111\ldots)_2 = \theta_2(01^\infty)$, поскольку корректные двоичные записи не образуют регулярного множества, см. **6.1.16**.

Тем не менее, сложение, вернее, отображение полусуммы $h : (x, y) \mapsto (x + y)/2$, $h : I \times I \to I$, оказывается регулярным. В самом деле, прообраз графика $\Gamma_h \subset I^3$ относительно отображения $\theta_2^3 : (B^\omega)^3 \twoheadrightarrow I^3$ задаётся конечным автоматом с состояниями $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, начальным состоянием $0 \in S$ и переходами $s \xrightarrow{xyz} t$ при $t = 2s + x + y - 2z$, где s, $t \in S$, x, y, $z \in B$. Мы можем определить и саму сумму $(x, y) \mapsto x + y$, но она будет только частично заданным регулярным отображением $I \times I \dashrightarrow I$.

6.6.4. (Избыточная двоичная запись определяет другое представление $I = [0,1]$.) Рассмотрим теперь избыточную двоичную запись вещественных чисел из $I = [0,1]$ с помощью трёх цифр $D = \{-1, 0, 1\}$. Для того, чтобы получился именно отрезок $[0,1]$, а не $[-1,1]$, будем считать, что первая цифра после запятой — это всегда единица. Таким образом, непрерывное сюръективное отображение $\theta : D^\omega \twoheadrightarrow I$ задано $\theta : \boldsymbol{x} \mapsto (0.1x_0x_1\ldots)_2 = 1/2 + \sum_{n=0}^{+\infty} x_n 2^{-n-2}$. Индуцированное им отношение эквивалентности $\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \theta(\boldsymbol{x}) = \theta(\boldsymbol{y})$ снова регулярно на D^ω, поскольку оно распознаётся конечным автоматом с состояниями $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, начальным состоянием $0 \in S$ и переходами $s \xrightarrow{xy} t$ при $t = 2s + x - y$, где s, $t \in S$, x, $y \in D$ (см. [AB4],**4.4.1**). Поэтому $\bar{\theta} : D^\omega/\equiv \xrightarrow{\sim} I$ — это регулярное представление.

6.6.5. (Представления $I = [0, 1]$ с помощью обычной и с помощью избыточной системы счисления регулярно изоморфны.) Однако это регулярное представление в действительности изоморфно предыдущему, построенному с помощью обычной (неизбыточной) двоичной системы. Действительно, соответствие $F \subset B^\omega \times D^\omega$, заданное условием $\boldsymbol{x} F \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \theta_2(\boldsymbol{x}) = \theta(\boldsymbol{y})$, является регулярным, так как оно распознаётся конечным автоматом с состояниями $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, начальным состоянием $0 \in S$ и переходами $s \xrightarrow{xy} t$ при $t = 2s + 2x - y - 1$, s, $t \in S$, $x \in B$, $y \in D$. Поэтому F задаёт изоморфизм между регулярными пространствами $B^\omega/\equiv$ и $D^\omega/\equiv$, индуцирующий id_I на I. Из изоморфности этих двух регулярных представлений, конечно же, сразу следует, что сложение $s : I^2 \dashrightarrow I$ и полусумма $h : I^2 \to I$, $(x, y) \mapsto (x + y)/2$ регулярны и в представлении, основанном на избыточной двоичной системе. Однако только в избыточной двоичной системе полусумма h может быть эффективно вычислена с помощью конечного автомата (точнее, трансдуктора). Поэтому эффективность отображений (понимаемая как их вычислимость с помощью конечных автоматов) — более сильное свойство, чем регулярность, и требует отдельного изучения.

6.6.6. (Троичное представление $I = [0, 1]$ не эквивалентно двоичному.) Можно также построить (неизбыточное) троичное представление чисел из отрезка $I = [0, 1]$, с помощью цифр из $T = \{0, 1, 2\}$ и отображения $\theta_3 : T^\omega \to I$, $\boldsymbol{x} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-n-1} x_n$. Как и прежде, равенство вещественных чисел легко проверяется по их троичным записям с помощью конечного автомата с тремя состояниями, и потому θ_3 задаёт ещё одно регулярное представление компакта $I = [0, 1]$. Однако это представление не изоморфно двум предыдущим, поскольку троичная запись числа не может быть преобразована в двоичную с помощью конечного автомата, для этого нужна полноценная машина Тьюринга. Мы отложим строе доказательство этого факта до **6.6.9**; неформально причина в том, что первые n цифр троичной записи числа x содержат гораздо больше информации об x, чем первые n цифр двоичной записи (примерно на $n(\log_2 3 - 1)$ битов), и конечному автомату негде хранить эту информацию (он может хранить информацию только в текущем состоянии, которое принимает значения в конечном множестве и потому содержит ограниченное количество информации).

6.6.7. (Четверичное представление чисел из $I = [0,1]$ тоже не эквивалентно двоичному, потому что мы используем только синхронные автоматы.) Можно рассмотреть также четверичное представление вещественных чисел, с $Q = \{0,1,2,3\}$ и $\theta_4 : Q^\omega \twoheadrightarrow I = [0,1]$, заданным $\boldsymbol{x} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x_n 4^{-n-1}$. Получаем ещё одно регулярное представление компакта $I = [0,1]$, не эквивалентное ни одному из предыдущих (например, по тем же неформальным «информационным» причинам, или по **6.6.9**). Однако интересно, что четверичная запись может быть легко преобразована в двоичную с помощью асинхронного конечного автомата (см. **6.1.2**), который на каждую прочитанную цифру $\boldsymbol{x} \in Q^\omega$ выводит две цифры $\boldsymbol{y} \in B^\omega$; обратное преобразование также может быть реализовано асинхронным конечным автоматом. Проверка на равенство $\theta_4(\boldsymbol{x})$ и $\theta_2(\boldsymbol{y})$ также реализуется асинхронным конечным автоматом, который в среднем читает по две цифры $\boldsymbol{y}$ на каждую цифру $\boldsymbol{x}$. Поэтому синхронность рассматриваемых конечных автоматов — это существенное ограничение, как мы указывали ранее в **6.1.2**.

6.6.8. (Неизбыточная m-ичная система счисления на $[0,1]$.) Конечно же, для любого натурального $m > 1$ мы можем определить неизбыточную m-ичную систему счисления на отрезке $I = [0,1]$: возьмём $D_m = \{0,1,\ldots,m-1\}$ и определим $\theta_m : D_m^\omega \twoheadrightarrow I$, $\boldsymbol{x} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x_n m^{-n-1}$; индуцированное отношение эквивалентности $\equiv_m$ на D_m окажется, как обычно, регулярным, оно распознаётся конечным автоматом с тремя состояниями. Такого рода m-ичные представления $I = [0,1]$ оказываются регулярно неизоморфны при разных $m > 1$, примерно по той же «информационной» причине, что и раньше (см. также **6.6.9**).

6.6.9. (m-ичные системы для различных m задают неизоморфные регулярные структуры на отрезке.) Докажем, что m-ичные регулярные структуры на отрезке $I = [0,1]$, заданные отображениями $\theta_m : D_m^\omega \twoheadrightarrow I$, $\boldsymbol{x} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x_n m^{-n-1}$, где $x_n \in D_m = \{0,1,\ldots,m-1\}$, регулярно неизоморфны при различных натуральных $m > 1$. Действительно, зафиксируем два различных m_1, $m_2 > 1$; не умаляя общности, можно считать, что $m_2 < m_1$. Регулярные структуры на отрезке, задаваемые θ_{m_1} и θ_{m_2}, изоморфны в том и только том случае, если соответствие R между $D_{m_1}^\omega$ и $D_{m_2}^\omega$, заданное $\boldsymbol{x}R\boldsymbol{y} \Leftrightarrow \theta_{m_1}(\boldsymbol{x}) = \theta_{m_2}(\boldsymbol{y})$, является регулярным. Для проверки того, является ли R регулярным, воспользуемся критерием **6.1.14**: для любой пары слов $\alpha \in D^\omega_{m_1}$, $\beta \in D^\omega_{m_2}$ одинаковой длины определим (замкнутое) соответствие $R_{\alpha,\beta} := (\alpha,\beta)\backslash R$ с помощью $\boldsymbol{x} R_{\alpha,\beta} \boldsymbol{y} \Leftrightarrow (\alpha\boldsymbol{x}) R (\beta\boldsymbol{y}) \Leftrightarrow \theta_{m_1}(\alpha\boldsymbol{x}) = \theta_{m_2}(\beta\boldsymbol{y})$; тогда R регулярно в том и только том случае, если множество всех соответствий вида $R_{\alpha,\beta}$ конечно. Рассмотрим частный случай $\alpha = \beta = 0^n$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\boldsymbol{x} R_{0^n,0^n} \boldsymbol{y} \Leftrightarrow m_1^{-n}\theta_{m_1}(\boldsymbol{x}) = m_2^{-n}\theta_{m_2}(\boldsymbol{y})$, поэтому $R_{0^n,0^n}$ — это прообраз относительно сюръективного отображения $\theta_{m_1} \times \theta_{m_2}$ отношения $\bar{R}_n \subset I \times I$, заданного $x\bar{R}_n y \Leftrightarrow m_1^{-n}x = m_2^{-n}y$. Все отношения $\bar{R}_n$ различны, поскольку являются графиками ограничений на $I = [0,1]$ линейных функций $x \mapsto (m_2/m_1)^n x$ с попарно различными наклонами. Поскольку $\theta_{m_1} \times \theta_{m_2}$ сюръективно, отсюда следует, что и все $R_{0^n,0^n}$ попарно различны, а значит, R действительно нерегулярно.

6.6.10. (Перепутанная троичная система счисления.) Может сложиться впечатление, что регулярные представления отрезка $I = [0,1]$ по существу ограничиваются m-ичными представлениями, избыточными или нет, причём избыточные представления оказываются регулярно изоморфны неизбыточным. В действительности ситуация несколько сложнее. Рассмотрим, например, «перепутанную» троичную систему счисления, использующую те же цифры $T = \{0,1,2\}$, что и обычная, но в которой после каждой единицы цифры 1 и 2 меняются ролями (формально говоря, это символы некоторого алфавита, и нет никакой причины, по которой они всегда должны означать одно и то же). Более точно, пусть $\varphi : T^\omega \xrightarrow{\sim} T^\omega$ — регулярная биекция, переводящая бесконечное слово $\boldsymbol{x}$ в бесконечное слово $\boldsymbol{y}$, такое, что $x_n = 0 \Leftrightarrow y_n = 0$ и $x_n + y_n = 3 \Leftrightarrow 2 \nmid \operatorname{card}\{m < n \colon x_m = 1\}$. Несложно видеть, что φ — действительно регулярная биекция, поскольку её график Γ_φ распознаётся конечным автоматом с двумя состояниями $S = \{0,1\}$, начальным состоянием $0 \in S$ и шестью переходами $0 \xrightarrow{00} 0$, $0 \xrightarrow{22} 0$, $0 \xrightarrow{11} 1$, $1 \xrightarrow{00} 1$, $1 \xrightarrow{12} 0$, $1 \xrightarrow{21} 1$. Ясно, что $\theta_3 \circ \varphi : T^\omega \twoheadrightarrow I$ задаёт несколько непривычное регулярное представление отрезка $I = [0,1]$, пусть и регулярно изоморфное обычному троичному. В частности, сумма является (частичным) регулярным отображением и в этом представлении, однако конечный автомат, распознающий график суммы, т.е. проверяющий равенство $x + y = z$ в перепутанной троичной системе, выглядит очень странно и запутанно, поскольку в нём гораздо больше состояний, чем обычно (в восемь раз). Тем не менее, нет никакой причины с самого начала «запретить» это регулярное представление; можно разве что сказать, что оно в конечном итоге бесполезно, поскольку изоморфно более естественному обычному троичному представлению.

6.6.11. (Регулярное представление отрезка, использующее покрытие отрезками разной длины.) Все предыдущие рассмотренные нами представления основаны на покрытии отрезка $I = [0,1]$ несколькими меньшими отрезками, которые соответствуют числам, чья запись начинается с одной и той же цифры. Например, обычная троичная система основана на покрытии I отрезками $I_0 = [0,1/3]$, $I_1 = [1/3,2/3]$ и $I_2 = [2/3,1]$, а избыточная двоичная система — на покрытии отрезками $I'_{-1} = [0,1/2]$, $I'_0 = [1/4,3/4]$, $I'_1 = [1/2,1]$. Однако во всех наших примерах все отрезки из покрытия имели одну и ту же длину (а именно, $1/m$ для m-ичной системы). Насколько это обязательно?

Рассмотрим, например, систему с тремя цифрами $D = \{-1,0,1\}$, основанную на покрытии отрезка $I = [0,1]$ отрезками разной длины $I''_{-1} = [0,1/4]$, $I''_0 = [1/4,3/4]$, $I''_1 = [3/4,1]$; затем каждый из этих отрезков подразбивается подобным образом ещё на три и т.д. до бесконечности, примерно как при арифметическом кодировании слов над трёхбуквенным алфавитом D с неравномерным распределением вероятностей $P(-1) = P(1) = 1/4$, $P(0) = 1/2$. Таким образом, $\theta_u : D^\omega \twoheadrightarrow I$ отображает $\boldsymbol{x} \in D^\omega$ в $\lim_{n\to+\infty}(\sigma_{x_0} \circ \sigma_{x_1} \circ \cdots \circ \sigma_{x_n})(0)$, где $\{\sigma_k : I \to I\}_{k\in D}$ — аффинные отображения, заданные $\sigma_{-1}(x) = x/4$, $\sigma_0(x) = 1/4 + x/2$, $\sigma_1(x) = 3/4 + x/4$. Ясно, что $\theta_u : D^\omega \twoheadrightarrow I$ — непрерывная сюръекция компактов, поэтому $\bar\theta_u : D^\omega/\equiv \to I$ — гомеоморфизм, где $\equiv$ — отношение эквивалентности на D^ω, индуцированное θ_u. Более того, удивительным образом *отношение эквивалентности $\equiv$ оказывается регулярным*, поскольку оно распознаётся тем же конечным автоматом, что и равенство чисел в обычной троичной системе **6.6.6** (в избыточной системе счисления, где соседние отрезки покрытия обязаны хотя бы немного перекрываться, этот трюк не сработал бы и отношение эквивалентности оказалось бы нерегулярным). Иначе говоря, мы получаем то же регулярное пространство $D^\omega/\equiv$, но с другим гомеоморфизмом $\bar\theta_u : |D^\omega/\equiv| \xrightarrow{\sim} I$.

Тем не менее, такое неравномерное представление вещественных чисел не очень подходит для наших целей, поскольку *сложение не является регулярным отображением в регулярном представлении* $(D^\omega, \equiv, \bar\theta_u)$ *отрезка* $[0,1]$. Неформальная причина этого по-прежнему информационная: цифры 1 и -1 несут гораздо больше информации о вещественном числе, чем цифра 0 (два бита против одного), поэтому, например, при сложении чисел вида $0^{n+2}\boldsymbol{x}$ и $001^n\boldsymbol{y}$ при $n \gg 1$ неизбежно возникнут проблемы из-за того, что синхронному конечному автомату негде хранить накапливающуюся дополнительную информацию о втором слагаемом. Строгое же доказательство может быть построено аналогично **6.6.9**. Отсюда, кстати, следует, что это регулярное представление отрезка регулярно неизоморфно ни одному из рассмотренных ранее (несмотря на то, что равенство числа в таком представлении и числа в обычной двоичной записи может быть проверено с помощью *асинхронного* автомата). Интересно, однако, что «забраковать» такое представление отрезка без отсылки к сложению не получается.

6.6.12. (Система с двумя цифрами и нецелым основанием a, $1 < |a| < 2$.) Рассмотрим теперь систему счисления с двумя цифрами $B = \{0, 1\}$ и вещественным основанием $a \in \mathbb{R}$, $|a| > 1$. Тогда $\theta_a : B^\omega \to \mathbb{R}$ — это непрерывное отображение $\boldsymbol{x} \mapsto (0.x_0x_1\ldots)_a = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n a^{-n-1}$, $x_n \in B = \{0, 1\}$. Это отображение корректно определено и непрерывно при $|a| > 1$; его образ — это некоторый компакт $\theta_a(B^\omega) \subset \mathbb{R}$. Однако при $|a| > 2$ отображение θ_a инъективно, и этот компакт оказывается чем-то вроде канторова множества; в частности, он не обладает ни одной внутренней точкой, и существуют сколь угодно малые положительные вещественные числа, не обладающие a-ичным представлением, т.е. не попадающие в $\theta_a(B^\omega)$. Поэтому значения $|a| > 2$ не задают представления вещественных чисел или хотя бы какого-либо интервала вещественных чисел, так что мы не будем их рассматривать. Далее, $a = 2$ соответствует обычной двоичной системе **6.6.3**, которая, как мы знаем, действительно задаёт регулярное представление отрезка $[0, 1]$; случай $a = -2$ («нега-двоичная система счисления») в общем аналогичен и задаёт регулярное представление отрезка $[-2/3, 1/3]$. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся случаем $1 < |a| < 2$. Тогда $I_a := \theta_a(B^\omega)$ — это некоторый отрезок вещественной прямой, а именно, $[0, 1/(a-1)]$ при $1 < a < 2$ и $[a/(a^2-1), 1/(a^2-1)]$ при $-2 < a < -1$, и θ_a задаёт регулярное представление этого отрезка в том и только том случае, если отношение эквивалентности $\equiv_a$ на B^ω, заданное $\boldsymbol{x} \equiv_a \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \theta_a(\boldsymbol{x}) = \theta_a(\boldsymbol{y})$, является регулярным.

6.6.13. (Критерий регулярности $\equiv_a$: конечность вспомогательного множества S_a.) Попробуем выяснить, для каких a отношение эквивалентности $\equiv_a$ на B^ω является регулярным. Для этого воспользуемся критерием **6.1.14**: для любой пары двоичных слов α, $\beta \in B^*$ одинаковой длины построим (замкнутое) отношение $R_{\alpha,\beta} := (\alpha, \beta)\backslash\equiv_a$ на B^ω, заданное условием $\boldsymbol{x}R_{\alpha,\beta}\boldsymbol{y} \Leftrightarrow \alpha\boldsymbol{x} \equiv_a \beta\boldsymbol{y}$. Тогда $\equiv_a$ регулярно в том и только том случае, если множество всех отношений такого вида конечно (и тогда можно использовать это множество в качестве состояний минимального конечного автомата, распознающего $\equiv_a$). Заметим, что $\boldsymbol{x} R_{\alpha,\beta} \boldsymbol{y}$ равносильно $\theta_a(\alpha\boldsymbol{x}) = \theta_a(\beta\boldsymbol{y})$, т.е. $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k a^{-k-1} + a^{-n}\theta_a(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k a^{-k-1} + a^{-n}\theta_a(\boldsymbol{y})$, где $n = |\alpha| = |\beta|$. Поэтому $R_{\alpha,\beta}$ — это прообраз относительно $\theta_a \times \theta_a$ отношения $\bar{R}_\delta \subset I_a \times I_a$, заданного $x\bar{R}_\delta y \Leftrightarrow y - x = \delta$, где $\delta = \delta_{\alpha,\beta} := \sum_{k=0}^{n-1}(\alpha_k - \beta_k)a^{n-k-1}$. Поскольку $\theta_a : B^\omega \twoheadrightarrow I_a$ сюръективно, $R_{\alpha,\beta} = R_{\alpha',\beta'}$ в том и только том случае, если $\bar{R}_\delta = \bar{R}_{\delta'}$, где $\delta' = \delta_{\alpha',\beta'}$. В свою очередь, это условие выполнено в том и только случае, если либо оба $\bar{R}_\delta$, $\bar{R}_{\delta'}$ пусты, что равносильно $|\delta|, |\delta'| > L := 1/(|a| - 1)$ (где $L = 1/(|a| - 1)$ — длина отрезка I_a), либо $\delta = \delta'$.

Пусть теперь S_a — это множество всех чисел вида $\delta = \delta_{\alpha,\beta}$, принадлежащих отрезку $[-L, L]$. Иначе говоря, S_a состоит из всех $\delta \in [-L, L]$, представимых в виде $\sum_{k=0}^{n-1} c_k a^k$ для некоторых $n \in \mathbb{N}_0$ и $c_k \in \{-1, 0, 1\}$, где $L = 1/(|a| - 1)$. Мы видим, что *отношение эквивалентности* $\equiv_a$ *на* B^ω *регулярно в том и только том случае, если множество* S_a *конечно.*

6.6.14. (Необходимое условие конечности S_a: a должно быть целым алгебраическим небольшой нормы.) В качестве первого следствия отметим, что, очевидно, $S_{-a} = S_a$, так что $\equiv_a$ регулярно в том и только том случае, если $\equiv_{-a}$ регулярно, и мы можем ограничиться изучением случая $1 < a < 2$. Далее, заметим, что для любого $x \in [-L, L]$, где $L = 1/(a - 1)$, хотя бы одно из чисел $ax \pm 1 \in [-L, L]$. Например, если $x \geq 0$, то $ax - 1 \in [-1, aL - 1] = [-1, L] \subset [-L, L]$; если же $x \leq 0$, то $ax + 1 \in [-L, L]$. Отсюда немедленно следует, что *если* $x \in S_a$, *то как минимум одно из чисел* $ax \pm 1 \in S_a$. Кроме того, мы знаем, что $0 \in S_a$. Поэтому мы можем построить цепочку чисел $x_0 = 0$, $x_{n+1} = ax_n + \varepsilon_n$, $\varepsilon_n = \pm 1$, таких, что все $x_n \in S_a$. Мы можем выбрать $\varepsilon_0 = 1$; для остальных n мы можем использовать $\varepsilon_n = -1$ при $x_n > 0$ и $\varepsilon_n = 1$ при $x_n \leq 0$. Если множество S_a конечно, то эта последовательность должна зациклиться, т.е. $x_{n+\ell} = x_n$ для некоторых $n \geq 0$, $\ell > 0$. Однако $x_n = \varepsilon_0 a^{n-1} + \varepsilon_1 a^{n-2} + \cdots + \varepsilon_{n-1}$ является значением в точке a унитарного многочлена $P_n(T)$ степени $n-1$, все коэффициенты которого равны ± 1. Аналогичное утверждение верно и для $x_{n+\ell} = P_{n+\ell}(a)$, и потому a является корнем унитарного многочлена $P_{n+\ell}(T) - P_n(T) \in \mathbb{Z}[T]$ степени $n + \ell - 1$, а значит, *для конечности* S_a *и регулярности* $\equiv_a$ *необходимо, чтобы* a *было целым алгебраическим числом.* Кроме того, все коэффициенты унитарного многочлена $P_{n+\ell}(T) - P_n(T)$ — целые числа, не превосходящие по модулю двух. Поскольку минимальный многочлен алгебраического числа $a \neq 0$ обязан быть делителем этого многочлена, мы видим, что *свободный член минимального многочлена a равен ± 1 или ± 2;* иначе говоря, $|N_{\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}}(a)| \leq 2$. Это утверждение несколько слабее, чем анонсированное в [AB4],**4.6.1** (мы пока не исключили случай $N_{\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}}(a) = \pm 2$ и не можем утверждать, что a — единица в $\mathbb{Z}[a]$ или в максимальном порядке числового поля $\mathbb{Q}(a)$), зато мы его строго доказали относительно элементарными методами.

6.6.15. (Рациональные и трансцендентные a не подходят.) В частности, мы получаем, что $\equiv_a$ *не является регулярным отношением эквивалентности ни для какого рационального a с* $1 < |a| < 2$, т.е. такие a не годятся для эффективного представления вещественных чисел в системе счисления с двумя цифрами. Этот результат был анонсирован и неформально объяснён ранее в [AB4],**4.5.12**. Мы также видим, что трансцендентные a заведомо не подходят, что было ранее неформально пояснено в [AB4],**4.5.4**.

6.6.16. (Альтернативное описание S_a и минимальный конечный автомат, распознающий $\equiv_a$.) Напомним, что S_a состоит из всех чисел $x \in [-L, L]$, представимых в виде $x = \sum_{k=0}^{n} c_k a^k$ с $c_k \in \{-1, 0, 1\}$ и $n \in \mathbb{N}_0$. Если x представимо в таком виде, то и $y := (x - c_0)/a = \sum_{k=0}^{n-1} c_{k+1} a^k$ представимо в таком виде, причём с меньшим n, и $|y| \leq (L+1)/|a| = L$, поскольку $L = 1/(|a| - 1)$, что означает, что $y \in S_a$. Отсюда по индукции получаем, что все числа $x \in S_a$ получаются последовательным применением следующих двух правил:

- $0 \in S_a$
- Если $s \in S_a$, $c \in \{-1, 0, 1\}$ и $t := as + c \in [-L, L]$, то $t \in S_a$.

Мы можем также описать S_a следующим образом. Рассмотрим (бесконечный) автомат с множеством состояний $[-L, L]$, начальным состоянием $s_0 = 0$ и переходами $s \xrightarrow{xy} t$ при $t = as + x - y$, s, $t \in [-L, L]$, x, $y \in B = \{0, 1\}$. Тогда S_a — это в точности множество всех достижимых состояний этого автомата. Если оно конечно, то ограничение этого автомата на множество S_a — это по построению минимальный автомат, распознающий $\equiv_a$ (см. **6.6.13** и **6.1.14**). Таким образом, у нас возникает критерий, позволяющий доказать конечность S_a и регулярность $\equiv_a$, а заодно и построить минимальный автомат, распознающий $\equiv_a$: надо построить множество S_a, начав с $\{0\}$ и последовательно добавляя к нему все элементы, получающиеся по второму правилу. Если этот процесс расширения завершится через конечное число шагов, то мы получим всё множество S_a, оно окажется конечным, и заодно мы построим минимальный конечный автомат. Если же $\equiv_a$ нерегулярно, а S_a бесконечно, процесс никогда не завершится.

6.6.17. (Случай квадратичной иррациональности a: $a = \varphi$ или $a = \sqrt{2}$.) Рассмотрим теперь случай, когда $1 < a < 2$ — квадратичная иррациональность с минимальным многочленом $P(T) = T^2 - pT + q$; тогда p, $q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ и $|q| \leq 2$ по **6.6.14**. Пусть $a' = q/a$ — второй корень этого многочлена; поскольку $1 < a < 2$ и $|q| \leq 2$, мы знаем, что $|a'| < 2$, откуда $-1 < p = a + a' < 4$ и $p \in \{0, 1, 2, 3\}$. Это уже оставляет конечное множество вариантов для $P(T)$. Мы можем сузить его дальше: случай $a' > 1$ невозможен, поскольку тогда из $1 < a, a' < 2$ следовало бы $q = aa' > 1$ и $2 < p = a + a' < 4$, откуда $q = 2$ и $p = 3$, однако соответствующий многочлен $T^2 - 3T + 2 = (T-2)(T-1)$ приводим. Поэтому $a' < 1 < a$, откуда $P(1) = (1-a)(1-a') < 0$ и $P(2) > 0$, т.е. $1 - p + q = P(1) \leq -1$ и $4 - 2p + q = P(2) \geq 1$, откуда $q + 2 \leq p \leq (q+3)/2$, что возможно только при $q \leq -1$, т.е. $q \in \{-1, -2\}$, и в обоих случаях $p = q + 2$, что оставляет только два варианта: $P(T) = T^2 - T - 1$ и $P(T) = T^2 - 2$. В первом случае $a = \varphi = (1 + \sqrt{5})/2$, а во втором $a = \sqrt{2}$.

6.6.18. (Случай $a = \pm\varphi$.) При $a = \varphi$ процесс построения множества $S_\varphi \subset I_\varphi = [-\varphi, \varphi]$ с помощью метода **6.6.16** действительно завершается за конечное число шагов, и мы получаем конечный автомат с семью состояниями $S_\varphi = \{-\varphi,\ -1,\ -\varphi^{-1},\ 0,\ \varphi^{-1},\ 1,\ \varphi\}$ из **4.6.8** и **4.6.9** в работе [AB4], распознающий $\equiv_\varphi$. Аналогично для $a = -\varphi$ с тем же множеством $S_{-\varphi} = S_\varphi$. Таким образом, $\equiv_\varphi$ регулярно, а отображение $\theta_\varphi : B^\omega \twoheadrightarrow [0, \varphi]$ задаёт регулярную структуру на отрезке $[0, \varphi]$, равно как и $\theta_{-\varphi} : B^\omega \twoheadrightarrow [-1, \varphi^{-1}]$.

6.6.19. (Случай $a = \pm\sqrt{2}$.) При $a = \sqrt{2}$ процесс построения множества $S_{\sqrt{2}} = S_{-\sqrt{2}}$ по правилам **6.6.16** никогда не завершается, множество $S_{\sqrt{2}}$ бесконечно, а отношение эквивалентности $\equiv_{\sqrt{2}}$ нерегулярно, так что $a = \pm\sqrt{2}$ не годится в качестве основания регулярной (и тем более эффективной) системы счисления с двумя цифрами. Таким образом, единственная квадратичная иррациональность a, для которой $\equiv_a$ регулярно — это $a = \pm\varphi$, как и было анонсировано в [AB4],**4.6.2**.

Для доказательства бесконечности множества $S_{\sqrt{2}}$ проверим, что $(1-\sqrt{2})^n \in S_{\sqrt{2}}$ для всех натуральных n. Для этого докажем, что если $\alpha = a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ таково, что $|\alpha| \leq L = 1/(\sqrt{2}-1) = 1+\sqrt{2}$, то $\alpha \in S_{\sqrt{2}}$; иначе говоря, $S_{\sqrt{2}} = [-1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}] \cap \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Пусть $\alpha' = a - b\sqrt{2}$ — сопряженное число; тогда $|\alpha'| \leq 2^{n/2}$ для достаточно большого целого $n \geq -1$, и мы докажем наше вспомогательное утверждение индукцией по n. Для перехода выберем $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$ следующим образом: если $\sqrt{2} \mid \alpha$, т.е. $2 \mid a$, то $\varepsilon = 0$; иначе $\varepsilon = 1$ при $\alpha' \geq 0$ и $\varepsilon = -1$ при $\alpha' < 0$. Положим $\beta := (\alpha - \varepsilon)/\sqrt{2} = b + \frac{a-\varepsilon}{2}\sqrt{2}$. Тогда $\beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $|\beta| \leq (L+1)/\sqrt{2} = L$ и $\beta' = -(\alpha' - \varepsilon)/\sqrt{2}$, так что $|\beta'| \leq \max(1, |\alpha'|)/\sqrt{2} \leq 2^{(n-1)/2}$ при $n \geq 0$. По предположению индукции $\beta \in S_{\sqrt{2}}$, а значит, и $\alpha = \beta\sqrt{2} + \varepsilon \in S_{\sqrt{2}}$ по второму правилу из **6.6.16**. Осталось доказать базу индукции $n = -1$, т.е. рассмотреть случай $|\alpha| \leq 1+\sqrt{2}$, $|\alpha'| \leq \sqrt{2}/2$. Поскольку $a = (\alpha+\alpha')/2 \in \mathbb{Z}$, отсюда следует $|a| \leq 1/2 + 3\sqrt{2}/4 < 2$ и $a \in \{-1, 0, 1\}$; кроме того, $b = (\alpha - \alpha')/(2\sqrt{2}) \in \mathbb{Z}$, откуда $|b| \leq 3/4 + \sqrt{2}/4 < 2$ и $b \in \{-1, 0, 1\}$. Это оставляет не более девяти вариантов для α, из которых подходят только $-1-\sqrt{2}$, 0 и $1+\sqrt{2}$; несложно видеть, что они действительно принадлежат $S_{\sqrt{2}}$, что и завершает доказательство нашего вспомогательного утверждения.

6.7 Регулярные точки регулярных пространств

Определение 6.7.1 *(Категорное определение регулярных точек.) Пусть $X = (X, \theta_X)$ — регулярное пространство, т.е. объект категории Reg из* **6.5.2**. *Назовём* **регулярной точкой** *или* **глобальным сечением** *регулярного пространства X любой морфизм $p : \mathbf{1} \to X$, где $\mathbf{1}$ — финальный объект категории Reg, т.е. одноточечное регулярное пространство (см.* **6.5.7***). Обозначим через $X^\sharp := Reg(\mathbf{1}, X)$ множество всех регулярных точек X.*

6.7.2. (Геометрическое определение: регулярные точки как одноточечные регулярные подмножества.) Заметим, что любой морфизм $p : \mathbf{1} \to X$ инъективен, а значит, является изоморфизмом $\mathbf{1} = \{*\}$ на свой образ — одноточечное регулярное подпространство $\{p(*)\} \subset X$ (см. **6.5.6**). Наоборот, если $\{x\} \subset X$ — одноточечное регулярное подпространство, то $\mathbf{1} \cong \{x\}$, потому что на одноточечном множестве есть только одна регулярная структура (см. **6.5.7**), и мы получаем точку $p_x : \mathbf{1} \cong \{x\} \stackrel{i_{\{x\}}}{\hookrightarrow} X$ с образом $\{x\}$. Таким образом, регулярные точки $p : \mathbf{1} \to X$ регулярного пространства X находятся во взаимно однозначном соответствии с одноточечными регулярными подпространствами $\{x\} \subset X$. Мы можем отождествить p с соответствующей точкой $x \in X$ (т.е. образом p) и определить регулярную точку регулярного пространства X как такую точку $x \in X$, для которой замкнутое подмножество $\{x\} \subset X$ является регулярным подпространством в смысле **6.5.5**. Тогда $X^\sharp = \mathrm{Hom}_{\mathit{Reg}}(\mathbf{1}, X)$ отождествляется с подмножеством $X^\sharp \subset X$, состоящим из всех регулярных точек.

6.7.3. (Действие регулярных отображений и регулярных соответствий на регулярных точках.) Ясно, что $X \rightsquigarrow X^\sharp$ является функтором $\mathit{Reg} \to \mathit{Sets}$ (а именно, $h^{\mathbf{1}} = \mathit{Reg}(\mathbf{1}, -)$), принимающим значения в счётных множествах (поскольку все $\mathit{Reg}(X, Y)$ счётны). Иначе говоря, любое регулярное отображение $f : X \to Y$ индуцирует отображение множеств $f^\sharp : X^\sharp \to Y^\sharp$. Если мы отождествляем $X^\sharp$ с подмножеством в X, и аналогично с $Y^\sharp$, то $f(X^\sharp) \subset Y^\sharp$, т.е. *регулярный образ регулярной точки регулярен*, и $f^\sharp$ есть ограничение f (как непрерывного отображения топологических пространств). Кроме того, любое регулярное соответствие $R \in \mathit{RegRel}(X, Y)$ (см. **6.5.12**) определяет соответствие $R^\sharp$ между множествами $X^\sharp$ и $Y^\sharp$ с помощью ограничения $R \subset X \times Y$ на подмножество $X^\sharp \times Y^\sharp \subset X \times Y$.

6.7.4. (Регулярные точки в регулярно представленных компактах.) Если K — некоторый регулярно представленный компакт, это означает, что на K есть регулярная структура, т.е. K является регулярным пространством. Поэтому в K появляется счётное подмножество регулярных точек $K^\sharp \subset K$, вообще говоря, зависящее от выбора регулярного представления (регулярной структуры) компакта K.

6.7.5. (Регулярные точки в прямых и расслоенных произведениях.) Поскольку $X^\sharp = \mathit{Reg}(\mathbf{1}, X)$, функтор $X \rightsquigarrow X^\sharp$ сохраняет все пределы, существующие в Reg, и, в частности, прямые и расслоенные произведения, существующие согласно **6.5.8**:

$$(X \times Y)^\sharp = X^\sharp \times Y^\sharp \tag{6.7.5.1}$$

и

$$(X \times_Z Y)^\sharp = X^\sharp \times_{Z^\sharp} Y^\sharp \tag{6.7.5.2}$$

для любых морфизмов $p : X \to Z$, $q : Y \to Z$ в Reg. Иначе говоря, *функтор $X \rightsquigarrow X^\sharp$ точен слева.*

6.7.6. (Регулярные точки в стандартном регулярном пространстве $X = (A^\omega, R)$ — это классы периодических слов $\operatorname{mod} R$.) Пусть $X = (A^\omega, R)$ — стандартное регулярное пространство, т.е. R — симметричное транзитивное регулярное отношение на A^ω (см. **6.3.9**). Обозначим $X_0 := \operatorname{dom} R \subset A^\omega$; тогда $X_0 \subset A^\omega$ — регулярное подмножество, и у нас есть эпиморфизм $\pi : X_0 \twoheadrightarrow X$ в *Reg*, который мы отождествим с сюръекцией $X_0 \twoheadrightarrow X_0/R$. Докажем, что *регулярные точки* $p \in X_0/R$ *— это в точности образы (нестрого) периодических слов* $\boldsymbol{x} \in X_0 \subset A^\omega$ *относительно* $\pi : X_0 \twoheadrightarrow X_0/R$. В данном случае мы называем бесконечное слово $\boldsymbol{x} = x_0x_1 \cdots \in A^\omega$ (нестрого) периодическим, если существуют $n_0 \geq 0$ и $\ell \geq 1$, такие, что $x_{n+\ell} = x_n$ для всех $n \geq n_0$. Это равносильно тому, что $\tau^{n_0+\ell}(\boldsymbol{x}) = \tau^{n_0}(\boldsymbol{x})$, где $\tau : A^\omega \to A^\omega$ — отображение отбрасывания первого символа из **6.1.34**.

Прежде всего, если бесконечное слово $\boldsymbol{x} \in X_0 \subset A^\omega$ периодическое, оно распознаётся некоторым конечным автоматом с $n_0+\ell$ состояниями в предыдущих обозначениях, т.е. подмножество $\{\boldsymbol{x}\} \subset A^\omega$ является регулярным, или, что одно и то же, отображение $p_{\boldsymbol{x}} : \mathbf{1} \to A^\omega$ с образом $\boldsymbol{x}$ является регулярным. Если теперь мы рассмотрим $\pi \circ p_{\boldsymbol{x}} : \mathbf{1} \to X = X_0/R$, мы получим некоторую регулярную точку X, которая как раз является классом $\pi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \bmod R$.

Наоборот, предположим, $p \in X$ — регулярная точка, что согласно определению **6.7.1** означает, что $p \in \mathit{StdReg}(\mathbf{1}, X)$. По определению категории *StdReg* (см. **6.3.9** и (6.3.5.1)) такой морфизм p — это некоторое регулярное подмножество $P \subset A^\omega \cong \{*\}^\omega \times A^\omega$, являющееся также классом эквивалентности относительно R; в частности, P непусто. Согласно лемме **6.7.7** ниже, P содержит хотя бы одно периодическое бесконечное слово $\boldsymbol{x} \in P$; тогда $p = \pi(\boldsymbol{x})$, что и требовалось доказать.

Лемма 6.7.7 *(Периодические слова плотны в регулярных множествах.) Периодические слова плотны в любом регулярном подмножестве* $X_0 \subset A^\omega$.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{x} \in X_0$ — произвольное бесконечное слово из X_0, и пусть $N \in \mathbb{N}_0$. Докажем, что существует периодическое бесконечное слово $\boldsymbol{y} \in X_0$, совпадающее с $\boldsymbol{x}$ по первым N символам. Пусть $G = (S, s_0, E)$ — конечный автомат, распознающий X_0. Рассмотрим последовательность его переходов $s_n \xrightarrow{x_n} s_{n+1}$ на входе $\boldsymbol{x}$. Поскольку множество состояний S конечно, неизбежно $s_n = s_{n+\ell}$ для некоторых $N \leq$

$n < n+\ell \le N+|S|$. Тогда слово $\boldsymbol{y}$, совпадающее с $\boldsymbol{x}$ по первым $n+\ell$ символам и затем ℓ-периодическое (т.е. $y_k = x_k$ при $0 \le k < n+\ell$, $y_k = y_{k-\ell}$ при $k \ge n+\ell$), принадлежит X_0 и при этом совпадает с $\boldsymbol{x}$ по первым $n+\ell \ge N$ символам.

Следствие 6.7.8 *(Регулярные точки плотны в любом регулярном пространстве.) Множество регулярных точек $X^\sharp \subset X$ плотно в любом регулярном пространстве X. В частности, если $X \neq \varnothing$, то и $X^\sharp \neq \varnothing$.*

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать регулярное пространство X стандартным, т.е. $X = (A^\omega, R)$ для некоторого конечного множества A и симметричного транзитивного регулярного отношения $R \subset A^\omega \times A^\omega$. Пусть $X_0 := \operatorname{dom} R \subset A^\omega$ — носитель R, а $\pi : X_0 \twoheadrightarrow X_0/R = X$ — канонический эпиморфизм. Мы доказали в **6.7.6**, что $X_0^\sharp \subset X_0$ — это в точности периодические слова, попадающие в регулярное подмножество X_0, и потому $X_0^\sharp$ плотно в X_0 по лемме **6.7.7**. Далее, $X^\sharp = \pi(X_0^\sharp)$ снова по **6.7.6**, и непрерывное отображение $|\pi| : |X_0| \to |X|$ сюръективно; поэтому $X^\sharp$ плотно в компакте $|X|$.

6.7.9. ($X^\sharp$ — выделенное счётное всюду плотное множество в польском компакте X.) Мы видим, что множество регулярных точек $X^\sharp \subset X$ является счётным всюду плотным множеством в компакте $X = |X|$. В самом существовании такого подмножества нет ничего удивительного, поскольку компакт $|X|$ — польский. Тем не менее, выбор именно $X^\sharp$ в качестве такого счётного всюду плотного множества очень естествен и удобен. Например, любое регулярное отображение $f : X \to Y$ переводит $X^\sharp$ в $Y^\sharp$.

6.7.10. (Функтор $X \rightsquigarrow X^\sharp$ строг.) Отсюда и из строгости функтора геометрической реализации $|\cdot|$ следует, что *функтор $X \rightsquigarrow X^\sharp$ строг (инъективен на морфизмах).* В самом деле, если $f^\sharp = g^\sharp$ для некоторых $f, g : X \to Y$, то непрерывные отображения f и g совпадают на плотном подмножестве $X^\sharp \subset X$, а значит, равны. Мы вскоре увидим, что функтор $X \rightsquigarrow X^\sharp$ ещё и консервативен, т.е. из биективности $f^\sharp$ следует, что $f : X \to Y$ изоморфизм (см. **6.7.21**). Более того, f мономорфизм в том и только том случае, если $f^\sharp$ инъективно (см. **6.7.20**), и эффективный эпиморфизм в том и только том случае, если $f^\sharp$ сюръективно (см. **6.7.22**).

6.7.11. ($X^\sharp$ как счётное равномерное пространство. Восстановление $|X|$ по $X^\sharp$.) Ясно, что на счётном подмножестве $X^\sharp \subset X$ возникает топология, индуцированная топологией компакта X. Более того, поскольку на компакте X существует единственная равномерная структура, согласованная с его топологией, естественно рассматривать $X^\sharp$ как равномерное пространство относительно индуцированной равномерной структуры. Эта равномерная структура метризуема, однако, вообще говоря, расстояние, задающее её, неканонично. Далее, поскольку $X^\sharp$ плотно в компакте $X = |X|$, мы можем восстановить компакт $|X|$ как пополнение $\widehat{X^\sharp}$ равномерного пространства $X^\sharp$. Непрерывное отображение $|f| : |X| \to |Y|$, индуцированное регулярным отображением $f : X \to Y$, может быть также восстановлено по $f^\sharp : X^\sharp \to Y^\sharp$ как $\widehat{f^\sharp}$, при этом $f^\sharp$ всегда равномерно непрерывно.

6.7.12. (Пример: регулярные точки $\mathbb{Z}_p$ — это рациональные числа.) Рассмотрим в качестве примера регулярные точки $\mathbb{Z}_p^\sharp \subset \mathbb{Z}_p$ относительно регулярного представления $\mathbb{Z}_p$ из **6.6.1**. Согласно **6.7.6**, $\mathbb{Z}_p^\sharp$ — это множество всех целых p-адических чисел $x = (\ldots x_2x_1x_0)_0$, обладающих периодической записью. Однако это в точности рациональные числа, т.е. $\mathbb{Z}_p^\sharp = \mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}_{(p)} = \{m/n \colon p \nmid n\}$; равномерная структура на этом множестве рациональных чисел индуцирована обычным p-адическим расстоянием $|x-y|_p$. Отметим, что сложение $[+]_{\mathbb{Z}_p} : \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$, $(x, y) \mapsto x+y$, будучи регулярным отображением, действительно переводит регулярные точки в регулярные точки, поскольку сумма двух рациональных чисел снова рациональна.

6.7.13. (Пример: регулярные точки $\mathbb{F}_q[[T]]$ — это рациональные функции.) Аналогично, регулярные точки $\mathbb{F}_q[[T]]^\sharp$ относительно регулярной структуры **6.6.2** — это рациональные функции, т.е.

$$\mathbb{F}_q[[T]]^\sharp = \mathbb{F}_q(T) \cap \mathbb{F}_q[[T]] = \mathbb{F}_q[T]_{(T)} = \{\varphi \in \mathbb{F}_q(T) \colon \varphi(0) \neq \infty\} \quad (6.7.13.1)$$

Конечно же, сумма двух рациональных функций, конечных в нуле — снова такая рациональная функция.

6.7.14. (Пример: регулярные точки $I = [0, 1]$ — это рациональные числа.) Аналогичным образом, регулярные точки отрезка $I = [0, 1]$ относительно любого из регулярных представлений **6.6.3**—**6.6.11** — это рациональные числа, т.е. $I^\sharp = I \cap \mathbb{Q}$ с равномерной структурой, заданной обычным вещественным расстоянием $|x - y|$, поскольку согласно **6.7.6** это должны быть вещественные числа, обладающие периодичной записью в m-ичной системе счисления. Для избыточной двоичной системы счисления **6.6.4**

и перепутанной троичной системы **6.6.10** это тоже верно, поскольку они регулярно изоморфны обычной двоичной и троичной системе, соответственно. Более того, это верно и для «неравномерной» системы из **6.6.11**, например, потому что числа могут быть преобразованы из такого представления в обычную двоичную запись и обратно конечным автоматом, пусть и асинхронным, а такие преобразования сохраняют периодичность бесконечных слов.

Отметим, что во всех этих случаях частично определённое сложение $s : I \times I \dashrightarrow I$ и полусумма $h : I \times I \to I$ действительно переводят регулярные точки в регулярные, т.е. рациональные числа в рациональные. При этом во всех этих примерах, за исключением последнего, сложение является регулярным отображением (а последний пример показывает, что непрерывное отображение, переводящее регулярные точки в регулярные, всё-таки не обязано быть регулярным).

6.7.15. (Пример: отображение $x \mapsto \sqrt{x}$ не является регулярным на I.) В качестве простого приложения отметим, что отображение $x \mapsto \sqrt{x}$, $I \to I$, не является регулярным ни для какого регулярного представления отрезка $I = [0,1]$ из **6.6**, потому что оно не переводит рациональные числа в рациональные числа.

6.7.16. (Отображения $q : x \mapsto x^2$ и $m : (x,y) \mapsto xy$ не являются регулярными.) Чуть менее очевидно, что отображение возведения в квадрат $q : I \xrightarrow{\sim} I$, $q : x \mapsto x^2$ не является регулярным. Дело в том, что q — гомеоморфизм, а функтор геометрической реализации консервативен; поэтому, если бы q было регулярным, то и $q^{-1} : x \mapsto \sqrt{x}$ также было бы регулярным, а это не так. Отсюда также следует, что отображение умножения $m : (x,y) \mapsto xy$, $I^2 \to I$, не может быть регулярным, поскольку тогда его композиция с диагональю $m \circ \Delta_I = q$ была бы регулярна.

6.7.17. (Пример: регулярные точки отрезка $[0,\varphi]$ в системе с основанием φ.) Система счисления с двумя цифрами $B = \{0,1\}$ и основанием $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ из **6.6.18** определяет несколько необычную регулярную структуру на отрезке $[0,\varphi]$: в этом случае оказывается, что $[0,\varphi]^\sharp = [0,\varphi] \cap \mathbb{Q}(\varphi)$, т.е. не только рациональные числа оказываются регулярными, но и некоторые квадратичные иррациональности.

6.7.18. (Регулярные точки регулярных подпространств $Y \subset X$.) Пусть $Y \subset X$ — регулярное подпространство регулярного пространства X. Поскольку одноточечное замкнутое подмножество $\{x\}$ является регулярным подпространством Y в том и только том случае, если оно регулярное подпространство X и содержится в Y (см. **6.5.5** и **6.4.4**), мы немедленно получаем, что

$$Y^\sharp = Y \cap X^\sharp \quad \text{для любого регулярного } Y \subset X \tag{6.7.18.1}$$

Кроме того, поскольку $Y^\sharp$ плотно в замкнутом подпространстве $Y \subset X$, мы можем также написать

$$Y = \overline{Y^\sharp} \quad \text{для любого регулярного } Y \subset X \tag{6.7.18.2}$$

Последняя формула показывает, что для регулярных Y, $Z \subset X$ равенство $Y^\sharp = Z^\sharp$ влечёт $Y = Z$; поэтому отображение $Y \mapsto Y^\sharp = Y \cap X^\sharp$ является изоморфизмом дистрибутивной решётки $\mathrm{Sub}(X)$ регулярных подпространств X (т.е. подобъектов X в *Reg*) с некоторой (счётной) подрешёткой решётки $\mathfrak{P}(X^\sharp)$ всех подмножеств счётного множества $X^\sharp$. В частности, $Y \subset Z \Leftrightarrow Y^\sharp \subset Z^\sharp$, $(Y \cap Z)^\sharp = Y^\sharp \cap Z^\sharp$ и $(Y \cup Z)^\sharp = Y^\sharp \cup Z^\sharp$.

6.7.19. (Если f — мономорфизм и $f^\sharp$ биективно, то f — изоморфизм.) Поскольку любой мономорфизм $f : Y \to X$ в *Reg* изоморфен каноническому вложению регулярного подпространства $i_Y : Y \hookrightarrow X$ (см. **6.5.6**), и для $Y \subset X$ равенство $Y^\sharp = X^\sharp$ равносильно $Y = X$ согласно **6.7.18**, мы видим, что *если для мономорфизма $f : Y \to X$ отображение $f^\sharp$ биективно, то f — изоморфизм.*

6.7.20. (f — мономорфизм, если и только если $f^\sharp$ инъективно.) Докажем теперь, что *регулярный морфизм $f : X \to Y$ — мономорфизм в том и только том случае, если $f^\sharp : X^\sharp \to Y^\sharp$ инъективно.* Для этого заметим, что диагональный морфизм $\Delta_f : X \to X \times_Y X$ всегда является мономорфизмом, и он изоморфизм если и только если f — мономорфизм. Поскольку функтор $X \rightsquigarrow X^\sharp$ точен слева, он переводит Δ_f в $\Delta_{f^\sharp}$; теперь **6.7.19** показывает, что Δ_f изоморфизм в том и только том случае, если $\Delta_{f^\sharp}$ биекция, т.е. если и только если отображение $f^\sharp$ инъективно.

6.7.21. (Если $f^\sharp$ биективно, то $f : X \to Y$ — изоморфизм. Консервативность $X \rightsquigarrow X^\sharp$.) Пусть теперь $f : X \to Y$ — произвольный морфизм в *Reg*, такой, что $f^\sharp$ биективно. Тогда оно, в частности, инъективно, и потому f — мономорфизм по критерию **6.7.20**. Поэтому к f применимо **6.7.19**, и из биективности $f^\sharp$ следует, что f — изоморфизм. Таким образом, *функтор $X \rightsquigarrow X^\sharp$ консервативен.*

6.7.22. (f — эффективный эпиморфизм, если и только если $f^\sharp$ сюръективно.) Докажем теперь, что $f : X \to Y$ — эффективный эпиморфизм, т.е. сюръективное регулярное отображение (см. **6.5.6**), если и только если $f^\sharp : X^\sharp \to Y^\sharp$ сюръективно. Поскольку $f(X)$ замкнуто в Y (будучи регулярным подпространством) и содержит $f^\sharp(X^\sharp)$, а $Y^\sharp$ плотно в Y, сюръективность $f^\sharp$ достаточна для сюръективности f. Наоборот, предположим, что $f : X \to Y$ сюръективно, и пусть $y \in Y^\sharp$, т.е. $\{y\} \subset Y$ — регулярное подпространство. Тогда $f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\})$ — непустое регулярное подпространство в X, а значит, в нём есть хотя бы одна регулярная точка $\{x\} \subset f^{-1}(y)$ согласно **6.7.8**. В итоге $x \in X^\sharp$ и $f(x) = y$, и мы доказали, что $f^\sharp(X^\sharp) = Y^\sharp$ ввиду произвольности выбора $y \in Y^\sharp$.

6.7.23. (Образ $\Phi(Z)^\sharp = \Phi^\sharp(Z^\sharp)$ для регулярных $\Phi \subset X \times Y$ и $Z \subset X$.) Пусть теперь $\Phi \in \mathit{RegRel}(X, Y)$ — регулярное соответствие, т.е. регулярное подпространство $\Phi \subset X \times Y$ (см. **6.5.12**), и пусть $Z \subset X$ — регулярное подпространство. Согласно **6.7.18** и (6.7.5.1), этому Φ соответствует некоторое подмножество $\Phi^\sharp \subset X^\sharp \times Y^\sharp = (X \times Y)^\sharp$, т.е. некоторое соответствие между $X^\sharp$ и $Y^\sharp$, причём Φ однозначно определяется $\Phi^\sharp$; кроме того, $\Phi^\sharp = \Phi \cap (X^\sharp \times Y^\sharp)$ согласно (6.7.18.1). Рассмотрим образ $\Phi(Z) := \mathrm{pr}_2\big((Z \times Y) \cap \Phi\big) \subset Y$. Поскольку pr_2 индуцирует сюръективный регулярный морфизм $\pi : (Z \times Y) \cap \Phi \twoheadrightarrow \Phi(Z)$, мы имеем $\Phi(Z)^\sharp = \pi^\sharp((Z^\sharp \times Y^\sharp) \cap \Phi^\sharp) = \Phi^\sharp(Z^\sharp)$ по **6.7.22** и **6.7.5**. Таким образом, $X \rightsquigarrow X^\sharp$ сохраняет образы регулярных подпространств относительно регулярных соответствий.

6.7.24. (Регулярные точки образа и прообраза регулярного подмножества.) Предыдущее наблюдение применимо, в частности, когда $\Phi = f$ или f^{-1} для некоторого регулярного морфизма $f : X \to Y$. Таким образом, если $Y' \subset Y$ — регулярное подпространство, то $f^{-1}(Y')^\sharp = (f^\sharp)^{-1}(Y'^\sharp) \subset X^\sharp$; если $X' \subset X$ — регулярное подпространство, то $f(X')^\sharp = f^\sharp(X'^\sharp) \subset Y^\sharp$.

6.7.25. (Функтор $X \rightsquigarrow X^\sharp$ из *RegRel* в *Rel*.) Аналогичным образом мы легко доказываем, что $(\Psi \circ \Phi)^\sharp = \Psi^\sharp \circ \Phi^\sharp$ для любых регулярных соответствий $\Phi \in \mathit{RegRel}(X, Y)$ и $\Psi \in \mathit{RegRel}(Y, Z)$, поскольку $\Psi \circ \Phi = \mathrm{pr}_{13}\big(\mathrm{pr}_{12}^{-1}(\Phi) \cap \mathrm{pr}_{23}^{-1}(\Psi)\big)$, где пересечение вычисляется внутри $X \times Y \times Z$. Это означает, что $X \rightsquigarrow X^\sharp$, $\Phi \mapsto \Phi^\sharp$, определяют функтор $\mathit{RegRel} \to \mathit{Rel}$ из категории регулярных соответствий в категорию соответствий между (счётными) множествами.

6.7.26. ($X^\sharp$ аналогично множеству рациональных точек многообразия над алгебраически замкнутым полем.) В рамках аналогии **6.5.21** между категорией регулярных пространств *Reg* и категорией приведённых аффинных алгебраических многообразий над полем $\mathbb{F}$ финальному объекту $\mathbf{1}$ соответствует точка $\mathbb{A}^0_{\mathbb{F}} = \operatorname{Spec} \mathbb{F}$, а значит, $X^\sharp = \operatorname{Hom}_{Reg}(\mathbf{1}, X)$ — это нечто вроде $X(\mathbb{F})$, множества $\mathbb{F}$-значных точек алгебраического многообразия X. Как мы знаем, если $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто, то множество $\mathbb{F}$-значных точек очень плотно в X, например, оно плотно в топологии Зариского в любом подмногообразии, и обладает свойствами, аналогичными полученным нами для регулярных пространств (например, если $f : X \to Y$ — сюръективный морфизм алгебраических многообразий над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{F}$, то $f_{\mathbb{F}} : X(\mathbb{F}) \to Y(\mathbb{F})$ сюръективно). Поэтому можно попробовать думать про регулярные пространства как про нечто вроде алгебраических многообразий над алгебраическим замыканием поля из одного элемента. Тот факт, что регулярные точки заданы ℓ-периодическими словами следует тогда интерпретировать так, что соответствующие точки $X(\bar{\mathbb{F}}_1)$ определены уже над некоторым конечным расширением $\mathbb{F}_{1^\ell}$ поля из одного элемента. Впрочем, в наших регулярных пространствах слишком много точек (континуум, а не счётное множество), что можно считать некоторым свидетельством в пользу того, что на самом деле более правильная аналогия — не сами алгебраические многообразия над полем $\mathbb{F}$, а их формальные пополнения.

6.8 Конструктивные подмножества регулярных пространств

Мы можем определить *(регулярно) конструктивные (под)множества* (множества точек) регулярного пространства X как элементы алгебры множеств, порожденной регулярными подпространствами $Y \subset X$, аналогично тому, как это делается в алгебраической геометрии. Мы начнём с обсуждения общих свойств конструктивных множеств, а затем перейдём к изучению конструктивных подмножеств в A^ω. Регулярно конструктивные множества оказываются тесно связанными с *предрегулярными подмножествами,* ранее определёнными в **6.1.15**.

6.8.1. (Конструктивные подмножества C в регулярном пространстве X.) Мы будем говорить, что подмножество $C \subset X$ *(регулярно) конструктивно*, если оно принадлежит алгебре множеств, порождённой регулярными подпространствами $Y \subset X$, иначе говоря, если оно может быть построено с помощью операций объединения, пересечения и дополнения из конечного числа регулярных подпространств $Y_1, \ldots, Y_n \subset X$, рассматриваемых как их множества точек, т.е. некоторые замкнутые подмножества в X, которые иногда удобно называть *регулярными подмножествами* в X. Поскольку регулярные подпространства замкнуты относительно конечных объединений и пересечений (см. **6.4** и **6.5.5**), конструктивные подмножества $C \subset X$ — это в точности те подмножества, которые могут быть представлены в виде

$$C = \bigcup_{i=1}^{n} (Y_i - Z_i) \tag{6.8.1.1}$$

где $n \in \mathbb{N}_0$ и Y_i, $Z_i \subset X$ — регулярные подпространства. Заменив Z_i на $Z_i \cap Y_i$, можно считать, что $Z_i \subset Y_i$ для всех $1 \leq i \leq n$.

Это определение применимо в частности при $X = A^\omega$, и потому мы можем говорить о *(регулярно) конструктивных подмножествах в* A^ω. Это в точности элементы алгебры множеств, порождённой всеми регулярными подмножествами $R \subset A^\omega$.

6.8.2. (Регулярность замыкания конструктивного множества.) Пусть $C \subset X$ — конструктивное подмножество в регулярном пространстве X. Тогда *замыкание* $\bar{C}$ *конструктивного* $C \subset X$ *является регулярным подпространством в* X. Действительно, представим C в виде (6.8.1.1). Поскольку замыкание перестановочно с конечными объединениями, и конечное объединение регулярных подпространств снова регулярно, достаточно доказать регулярность $\bar{C}$ в частном случае $C = Y - Z$, где $Z \subset Y \subset X$ регулярны. Однако в этом случае $\bar{C} = \overline{Y - Z}$ оказывается регулярным в Y, а значит, и в X, по **6.5.26**.

6.8.3. (Замкнутые конструктивные множества регулярны. Локально замкнутые конструктивные множества и их каноническое представление $C = Y - Z$.) Отметим, что *замкнутые конструктивные множества* $C \subset X$ *регулярны в* X, поскольку тогда $C = \bar{C}$, и $\bar{C}$ регулярно по **6.8.2**. Далее, если конструктивное множество C локально замкнуто, то его можно записать в виде $C = Y - Z$ с замкнутыми $Y := \bar{C}$ и $Z := \bar{C} - C$. Тогда Y регулярно по **6.8.2**, а значит, и конструктивно; потому конструктивно и $Z = Y - C$, но оно при этом замкнуто ввиду локальной замкнутости C. Поэтому $Z = \bar{Z}$ снова оказывается регулярным, и мы видим, что *любое локально замкнутое конструктивное множество C имеет вид $Y-Z$ для регулярных $Z \subset Y \subset X$*. Среди всех таких представлений можно выбрать *минимальное* или *каноническое* — то, в котором Y настолько мало́, насколько это возможно, т.е. $Y = \bar{C}$ и $Z = Y - C$.

6.8.4. (Образ и прообраз конструктивного множества.) Поскольку прообраз регулярного множества относительно регулярного отображения регулярен, мы видим, что *прообраз $f^{-1}(C) \subset X$ конструктивного подмножества $C \subset Y$ относительно регулярного отображения $f : X \to Y$ конструктивен.* В алгебраической геометрии подобное утверждение верно и для образов конструктивных множеств. К сожалению, в нашем случае это не так, см. **6.8.36**.

6.8.5. (Конструктивное представление конструктивных множеств с помощью наборов конечных автоматов.) Предположим, регулярное пространство X задано с помощью конкретной регулярной структуры $\theta : |(A^\omega, R)| \xrightarrow{\sim} X$, где R — регулярное симметричное транзитивное отношение на A^ω, которое можно явно описать с помощью минимального конечного автомата, и мы хотим производить вычисления с конструктивными подмножествами $C \subset X$. Для этого заметим, что θ определяет регулярное накрытие $p : X_0 \twoheadrightarrow X$, $X_0 \subset A^\omega$, где $p(\boldsymbol{x}) = \theta(\boldsymbol{x} \bmod R)$, после чего p^{-1} устанавливает изоморфизм между алгеброй подмножеств в $\mathfrak{P}(X)$ и подалгеброй R-устойчивых подмножеств в $\mathfrak{P}(A^\omega)$. При этом p^{-1} переводит конструктивные подмножества в конструктивные, так что можно производить вычисления с прообразами конструктивных множеств $p^{-1}(C) \subset A^\omega$ вместо самих C. Далее, конструктивное подмножество $C' \subset A^\omega$ может быть представлено в виде (6.8.1.1), где мы можем предполагать, что регулярные $Z_i \subset Y_i \subset A^\omega$ минимальны, т.е. $Y_i = \overline{Y_i - Z_i}$. После этого регулярные подмножества $Y_i, Z_i \subset A^\omega$ представляются конечными автоматами, распознающими их, и почти все операции с конструктивными множествами в итоге сводятся к операциям над регулярными множествами Y_i, Z_i, которые могут быть явно реализованы с помощью простых операций с конечными автоматами, см., например, **6.1.18** и **6.1.19**. Вычисление $\overline{Y - Z}$ и минимизация представлений $Y_i - Z_i$ чуть менее тривиальная операция, но она также может быть выполнена с помощью конечных автоматов. Таким образом, вычисления с конструктивными множествами в X сводятся к вычислениям с конструктивными множествами в A^ω, где они могут быть представлены с помощью наборов конечных автоматов. Мы вскоре увидим, что можно задавать конструктивные подмножества $C \subset A^\omega$ с помощью одного автомата и некоторого набора множеств его состояний.

Теперь перейдём к более подробному изучению конструктивных множеств в A^ω. Для этого нам будет полезно алгебраическое описание конечных автоматов как конечных правых A^*-множеств с отмеченной точкой.

6.8.6. (Детерминированные конечные автоматы с полностью определённой функцией переходов.) Напомним, что мы обычно рассматриваем (детерминированные) конечные автоматы $G = (S, s_0, E)$, $s_0 \in S$, $E \subset S \times A \times S$ с *частично определённой* функцией переходов $\gamma : S \times A \dashrightarrow S$, т.е. $E = \Gamma_\gamma$ для некоторой такой частично определённой функции, см. **6.1.1**. В этом параграфе нам будет удобно рассматривать в основном конечные автоматы с полностью определённой функцией переходов, т.е. $E = \Gamma_\gamma$ для некоторой функции $\gamma : S \times A \to S$. Поскольку любой детерминированный конечный автомат G можно пополнить с помощью дополнительного «ошибочного» состояния $\perp$ до пополненного автомата $G_\perp$ с полностью определённой функцией переходов (см. **6.1.10**), такое ограничение на класс рассматриваемых автоматов непринципиально. Если G — конечный автомат с полностью определённой функцией переходов, мы будем его также записывать как тройку $G = (S, s_0, \gamma)$, где $s_0 \in S$ и $\gamma : S \times A \to S$; можно сказать, что γ *— это правое действие множества (алфавита) A на множестве состояний S*. Таким образом, конечный автомат над алфавитом A оказывается конечным множеством S с правым действием множества A и выделенной точкой $s_0 \in S$.

6.8.7. (Расширение функции переходов до правого действия моноида A^*.) Функция $\gamma : S \times A \to S$ единственным образом продолжается до правого действия $\gamma : S \times A^* \to S$ моноида A^* на множестве S, которое мы обозначим тем же символом γ. Иначе говоря, продолжение γ задаётся формулами

$$\gamma(s, \emptyset) = s \tag{6.8.7.1}$$

$$\gamma(s, \alpha x) = \gamma\bigl(\gamma(s, \alpha), x\bigr) \tag{6.8.7.2}$$

для всех $s \in S$, $\alpha \in A^*$ и $x \in A$. Таким образом, $\gamma(s, \alpha)$ — это состояние, в которое переходит конечный автомат из состояния $s \in S$ после обработки конечной строки α. Поскольку расширенное $\gamma : S \times A^* \to S$ — это правое действие моноида A^* на множестве S, мы можем писать $s \cdot \alpha$ или

$s\alpha$ вместо $\gamma(s, \alpha)$ для $s \in S$, $\alpha \in A^*$. Теперь мы можем переформулировать наше определение конечного автомата (с полностью определённой функцией перехода над алфавитом A), сказав, что это конечное правое A^*-множество S с выделенной точкой $s_0 \in S$.

6.8.8. (Отображение $s_G : A^* \to S$. Конечные автоматы без недостижимых состояний как конечные A^*-фактормножества A^*_d.) Конечный автомат $G = (S, s_0, \gamma)$ определяет отображение $s = s_G : A^* \to S$, переводящее $\alpha \in A^*$ в $\gamma(s_0, \alpha) = s_0 \cdot \alpha$. Иначе говоря, $s_G(\alpha) \in S$ — это состояние, в котором оказывается конечный автомат G после обработки конечной входной строки α. Множество всех состояний, достижимых из начального — это $s_G(A^*) = s_0 A^*$. В большинстве случаев мы можем выкинуть из конечного автомата все состояния, недостижимые из начального, что соответствует замене правого A^*-множества S на его A^*-подмножество $s_0 A^* \subset A$. Если рассматривать только конечные автоматы, все состояния которых достижимы, т.е. такие, что $S = s_0 A^*$ и $s_G : A^* \twoheadrightarrow S$ сюръективно, то их можно описать как конечные правые A^*-фактормножества A^*_d, т.е. факторобъекты A^*_d в категории правых A^*-множеств, где A^*_d обозначает A^*, рассматриваемое как правое A^*-множество. Таким образом, *с алгебраической точки зрения, конечные автоматы над алфавитом A с полностью определённой функцией переходов и без недостижимых состояний — это в точности конечные правые A^*-фактормножества A^*_d.*

6.8.9. (Морфизмы конечных автоматов. Категория конечных автоматов над заданным алфавитом.) Пусть $G = (S, s_0, \gamma)$ и $G' = (S', s'_0, \gamma')$ — два конечных автомата над алфавитом A. Алгебраическая точка зрения на конечные автоматы, изложенная выше, подсказывает, что *морфизм* или *гомоморфизм* $f : G \to G'$ следует определить как морфизм правых A^*-множеств $f : S \to S'$, сохраняющий отмеченные точки. Иначе говоря, морфизм f — это отображение $f : S \to S'$, такое, что $f(s_0) = s'_0$ и $\gamma'\big(f(s), a\big) = f\big(\gamma(s, a)\big)$ для всех $s \in S$, $a \in A$. Последнее условие может быть также записано в виде $f(s \cdot \alpha) = f(s) \cdot \alpha$ для любых $s \in S$ и $\alpha \in A^*$, или только для $\alpha \in A$. Ясно, что композиция морфизмов конечных автоматов является морфизмом, и потому конечные автоматы над фиксированным алфавитом A образуют некоторую категорию. Конечные автоматы без недостижимых состояний образуют полную подкатегорию в этой категории, а именно, категорию конечных правых A^*-фактормножеств A^*-множества A^*_d. Впрочем, в этой категории существует не более одного морфизма между каждыми двумя объектами, и потому она эквивалентна частично упорядоченному множеству. Поэтому мы пишем $G \leq G'$ или $S \leq S'$ в том случае, если из конечного правого A^*-фактормножества S есть морфизм в такое же S'. Отметим, что если $f : G \to G'$ — морфизм конечных автоматов, то $f \circ s_G = s_{G'} : A^* \to S'$, поскольку $f(s_G(\alpha)) = f(s_0 \cdot \alpha) = f(s_0) \cdot \alpha = s'_0 \cdot \alpha = s_{G'}(\alpha)$.

6.8.10. (Прямое произведение конечных автоматов. Нижняя грань $S \wedge S'$ конечных A^*-фактормножеств A^*_d.) Ясно, что прямое произведение двух конечных автоматов $G = (S, s_0, \gamma_G)$ и $G' = (S', s'_0, \gamma_{G'})$, т.е. конечный автомат $G \times G' = (S \times S', (s_0, s'_0), \gamma_{G \times G'})$ с $\gamma_{G\times G'}\big((s, s'), a\big) = \big(\gamma_G(s, a), \gamma_G(s', a)\big)$, является прямым произведением в категории конечных автоматов над алфавитом A. В частности, для любых двух автоматов G и G' существует автомат G'' с морфизмами $p : G'' \to G$ и $q : G'' \to G'$, поскольку можно взять $G'' := G \times G'$, $p := \mathrm{pr}_1$, $q := \mathrm{pr}_2$. Если же ограничиться конечными автоматами без недостижимых состояний, т.е. конечными правыми A^*-фактормножествами A^*_d, то в этой категории также есть категорное произведение, а именно, надо взять в прямом произведении $S \times S'$ орбиту $(s_0, s'_0)A^*$; в этом случае мы будем обозначать полученный автомат через $S \wedge S'$ или $G \wedge G'$, он является нижней гранью S и S' в частично упорядоченном множестве, эквивалентном данной категории. Таким образом, конечные автоматы без недостижимых состояний, т.е. конечные правые A^*-фактормножества A^*_d, образуют фильтрующуюся проективную систему.

6.8.11. (Отображение $\sigma_G : A^\omega \to \mathfrak{P}(S)$ и его образ $T_G \subset \mathfrak{P}(S)$.) Пусть $G = (S, s_0, \gamma)$ — конечный автомат, как выше, и пусть $s_G : A^* \to S$ — построенное в **6.8.8** отображение $\alpha \mapsto s_0\alpha$. Продолжим s_G до отображения $\sigma_G : A^\omega \to \mathfrak{P}(S)$ следующим образом:

$$\sigma_G(\boldsymbol{x}) = \{s_G(x_0x_1 \ldots x_{n-1}) \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{s_0 \cdot x_0x_1 \ldots x_{n-1} \mid n \in \mathbb{N}_0\} \tag{6.8.11.1}$$

Иначе говоря, $\sigma_G(\boldsymbol{x})$ состоит из всех состояний автомата G, в которых он оказывается в процессе обработки бесконечного слова $\boldsymbol{x} \in A^*$. Обозначим через $T_G := \sigma_G(A^\omega) \subset \mathfrak{P}(S)$ образ отображения σ_G.

В тех случаях, когда мы используем алгебраическое описание конечного автомата G как конечное правое A^*-множество S с отмеченной точкой $s_0 \in S$ или как конечное правое A^*-фактормножество $A^*_d \twoheadrightarrow S$, мы можем использовать обозначения σ_S и T_S вместо σ_G и T_G.

Отметим, что если $f : G \to G'$ (т.е. $f : S \to S'$) — морфизм конечных автоматов, то $\sigma_{G'} = f_* \circ \sigma_G : A^\omega \to \mathfrak{P}(S')$, где $f_* : \mathfrak{P}(S) \to \mathfrak{P}(S')$

обозначает отображение $a \mapsto f(a)$ взятия образа подмножества $a \subset S$ относительно отображения $f : S \to S'$. Отсюда немедленно следует, что $f_*(T_G) = T_{G'}$, поскольку $T_G = \sigma_G(A^\omega)$ и $T_{G'} = \sigma_{G'}(A^\omega)$.

6.8.12. (Топология на $\mathfrak{P}(S)$ и $T_G \subset \mathfrak{P}(S)$.) Для любого конечного множества S введём на $\mathfrak{P}(S)$ топологию, замкнутые множества относительно которой — это подмножества $F \subset \mathfrak{P}(S)$, являющиеся идеалами относительно включения, т.е. такие, что $a \subset b$ и $b \in F$ влечёт $a \in F$. Соответственно, подмножество $U \subset \mathfrak{P}(S)$ открыто в том и только том случае, если $a \subset b \subset S$ и $a \in U$ влекут $b \in U$. Несложно видеть, что объединение и пересечение замкнутых множеств замкнуто, так что $\mathfrak{P}(S)$ действительно становится топологическим пространством, очевидно, квазикомпактным, поскольку оно конечно. В этом топологическом пространстве $\overline{\{a\}} = \mathfrak{P}(a) = \{b \mid b \subset a\} \subset \mathfrak{P}(S)$ для любой точки $a \in \mathfrak{P}(S)$, и любое замкнутое подмножество F является конечным объединением замыканий одноточечных множеств $\overline{\{a\}}$ (например, можно написать $F = \bigcup_{a \in F} \overline{\{a\}}$). Несложно видеть, что замкнутое подмножество $F \subset \mathfrak{P}(S)$ неприводимо в том и только том случае, если $F = \overline{\{a\}}$; таким образом, $\mathfrak{P}(S)$ является *трезвым* топологическим пространством (т.е. любое его неприводимое замкнутое подмножество обладает единственной общей точкой), и, в частности, оно колмогоровское (в нём выполнена аксиома отделимости T_0); в этом плане $\mathfrak{P}(S)$ похоже на аффинные схемы и другие топологические пространства, возникающие в алгебраической геометрии.

Если $T \subset \mathfrak{P}(S)$ — произвольное подмножество (например, $T_G = \sigma_G(A^\omega)$, построенное в **6.8.11**), то мы будем рассматривать на нём индуцированную топологию. Несложно видеть, что неприводимые замкнутые подмножества T — это по-прежнему замыкания (в T) одноточечных множеств, так что T — по-прежнему трезвое, колмогоровское, квазикомпактное и нётерово топологическое пространство. Впрочем, любое колмогоровское конечное топологическое пространство обладает всеми этими свойствами.

6.8.13. (Непрерывность отображения $f_* : \mathfrak{P}(S) \to \mathfrak{P}(S')$.) Пусть $f : S \to S'$ — произвольное отображение конечных множеств. Тогда индуцированное отображение $f_* : \mathfrak{P}(S) \to \mathfrak{P}(S')$, $a \mapsto f(a)$, непрерывно относительно описанной выше топологии, поскольку любое замкнутое подмножество $F \subset \mathfrak{P}(S')$ является конечным объединением множеств вида $\overline{\{b\}}$, и $(f_*)^{-1}(\overline{\{b\}}) = \overline{\{f^{-1}(b)\}}$ для любого $b \subset S'$. Действительно, $\overline{\{b\}} = \mathfrak{P}(b)$ и потому $a \in (f_*)^{-1}(\overline{\{b\}}) \Leftrightarrow f(a) \in \overline{\{b\}} \Leftrightarrow f(a) \subset b \Leftrightarrow a \subset f^{-1}(b) \Leftrightarrow$

$a \in \overline{\{f^{-1}(b)\}}$. Кроме того, если $T \subset \mathfrak{P}(S)$ и $T' \subset \mathfrak{P}(S')$ — произвольные подмножества, такие, что $f_*(T) \subset T'$, то индуцированное отображение $f_* : T \to T'$ также непрерывно относительно индуцированных топологий на T и T'.

6.8.14. (Непрерывность отображения σ_G. Характеризация регулярных множеств $R \subset A^\omega$ как прообразов замкнутых множеств $F \subset T_G$.) Докажем, что *отображение $\sigma_G : A^\omega \to T_G \subset \mathfrak{P}(S)$, построенное в* **6.8.11**, *непрерывно.* Действительно, поскольку любое замкнутое подмножество $F \subset \mathfrak{P}(S)$ является конечным объединением неприводимых замкнутых множеств вида $\overline{\{a\}}$ для некоторых $a \in \mathfrak{P}(S)$, достаточно доказать, что $\sigma_G^{-1}(\overline{\{a\}})$ замкнуто в A^ω. Мы докажем большее, а именно, *прообраз $\sigma_G^{-1}(\overline{\{a\}})$ является регулярным подмножеством A^ω*. Поскольку конечное объединение регулярных множеств регулярно, отсюда будет следовать, что σ_G^{-1} *переводит замкнутые подмножества $F \subset \mathfrak{P}(S)$ в регулярные подмножества $\sigma_G^{-1}(F) \subset A^\omega$*. Конечно же, это верно и в том случае, если рассматривать σ_G как отображение $A^\omega \twoheadrightarrow T_G$.

Для доказательства того факта, что $R := \sigma_G^{-1}(\overline{\{a\}})$ регулярно, достаточно заметить, что $\overline{\{a\}} = \mathfrak{P}(a)$, и потому R состоит из тех бесконечных слов $\boldsymbol{x} \in A^\omega$, для которых $\sigma_G(\boldsymbol{x}) \subset a$, т.е. конечный автомат G никогда не оказывается в состояниях из $S - a$ в процессе чтения бесконечного слова $\boldsymbol{x}$. Если обозначить через G_a конечный автомат, получающийся из G выбрасыванием всех состояний из $S - a$, а также всех переходов, ведущих в них или из них, то получится, что $\boldsymbol{x} \in R$ в том и только том случае, если G_a никогда не останавливается на $\boldsymbol{x}$, что по определению означает регулярность R.

6.8.15. (Все регулярные подмножества $R \subset A^\omega$ G-регулярны, т.е. имеют вид $\sigma_G^{-1}(F)$.) Отметим, что *все регулярные подмножества $R \subset A^\omega$ возникают как $\sigma_G^{-1}(F)$ для подходящего конечного автомата $G = (S, s_0, \gamma)$ над алфавитом A и замкнутого подмножества $F \subset \mathfrak{P}(S)$*. В тех случаях, когда R имеет такой вид, мы будем говорить, что *R G-регулярно.* Таким образом, *подмножество $R \subset A^\omega$ регулярно в том и только том случае, если оно G-регулярно для некоторого конечного автомата G.* Действительно, если R регулярно, оно распознаётся некоторым конечным автоматом $G' = (S', s_0, E)$ над A (с частично определённой функцией переходов). Возьмём тогда в качестве G пополненный автомат $G'_\perp$, а в качестве F — замкнутое подмножество $\mathfrak{P}(S') = \overline{\{S'\}}$ в $\mathfrak{P}(S' \cup \{\perp\})$.

6.8.16. (G-предрегулярные множества. Любое предрегулярное множество G-предрегулярно для некоторого G.) Будем говорить, что множество $X \subset A^\omega$ *G-предрегулярно* для некоторого конечного автомата $G = (S, s_0, \gamma)$, если для любых $\alpha, \beta \in A^*$ из $s_0\alpha = s_0\beta$ следует $\alpha\backslash X = \beta\backslash X$. Поскольку S конечно, отсюда следует конечность множества $S_X = \{\alpha\backslash X \mid \alpha \in A^*\}$, т.е. предрегулярность X (см. **6.1.15**). Наоборот, если $X \subset A^\omega$ предрегулярно, т.е. S_X конечно, то мы можем построить конечный автомат $G_X = (S_X, X, \gamma)$ с множеством состояний S_X, переходами $X' \xrightarrow{a} X''$ при $a\backslash X' = X''$ и начальным состоянием $s_0 := X$; в этом автомате $s_0 \cdot \alpha = \alpha\backslash X$ и потому $s_0 \cdot \alpha = s_0 \cdot \beta$ равносильно $\alpha\backslash X = \beta\backslash X$, так что X — *G_X-предрегулярное множество.* Таким образом, *подмножество $X \subset A^\omega$ предрегулярно в том и только том случае, если оно G-предрегулярно для некоторого конечного автомата G над алфавитом A.* При этом, очевидно, G_X — наименьший из конечных автоматов без недостижимых состояний с этим свойством, т.е. для любого такого G существует гомоморфизм $\varphi : G \to G_X$ (т.е. морфизм правых A^*-множеств $\varphi : S \to S_X$, сохраняющий отмеченные точки).

6.8.17. (G-предрегулярные множества образуют алгебру подмножеств A^ω.) Отметим, что *G-предрегулярные подмножества в A^ω образуют алгебру подмножеств, т.е. объединение, пересечение, разность и дополнение G-предрегулярных множеств G-предрегулярны.* Действительно, для любых X_1, $X_2 \subset A^\omega$ и любого $\alpha \in A^*$ выполнены равенства $\alpha\backslash(X_1 \cup X_2) = (\alpha\backslash X_1) \cup (\alpha\backslash X_2)$ и аналогичные равенства для $\alpha\backslash(X_1 \cap X_2)$ и $\alpha\backslash(X_1 - X_2)$, поскольку $\alpha\backslash X = \sigma_\alpha^{-1}(X)$, где $\sigma_\alpha : A^\omega \to A^\omega$ — отображение конкатенации $\boldsymbol{x} \mapsto \alpha\boldsymbol{x}$. Если X_1 и X_2 G-предрегулярны для некоторого фиксированного $G = (S, s_0, \gamma)$, то из $s_0 \cdot \alpha = s_0 \cdot \beta$ следует $\alpha\backslash X_i = \beta\backslash X_i$ для $i = 1$, 2, откуда $\alpha\backslash(X_1 \cup X_2) = \beta\backslash(X_1 \cup X_2)$, и аналогично для $X_1 \cap X_2$, $X_1 - X_2$ и $A^\omega - X_1$. Отсюда следует G-предрегулярность всех этих множеств.

6.8.18. (G-конструктивные множества и их конструктивность.) Пусть $G = (S, s_0, \gamma)$ — как и раньше, конечный автомат над алфавитом A. Будем говорить, что подмножество $X \subset A^\omega$ *G-конструктивно*, если оно имеет вид $\sigma_G^{-1}(C)$ для некоторого подмножества $C \subset \mathfrak{P}(S)$ (или $C \subset T_G$). Отметим, что все подмножества $C \subset \mathfrak{P}(S)$ конструктивны, т.е. записываются в виде $C = \bigcup_{i=1}^n (Y_i - Z_i)$ для некоторых замкнутых подмножеств $Y_i, Z_i \subset \mathfrak{P}(S)$, например, потому что все одноточечные множества $\{a\} = \overline{\{a\}} - \bigcup_{b \subsetneq a} \overline{\{b\}}$ конструктивны. Поскольку σ_G^{-1} переводит замкнутые подмножества $Y \subset \mathfrak{P}(S)$ в регулярные (см. **6.8.14**), отсюда следует, что *G-конструктивные подмножества $X \subset A^\omega$ (регулярно) конструк-*

тивны в смысле **6.8.1**.

6.8.19. (Вспомогательный конечный автомат G^+, построенный по G.) Пусть $G = (S, s_0, \gamma)$ — конечный автомат над алфавитом A. Построим по нему некоторый вспомогательный конечный автомат $G^+ = (S^+, s_0^+, \gamma^+)$ и морфизм $\pi : G^+ \to G$ следующим образом. Положим $S^+ := S \times \mathfrak{P}(S)$, $s_0^+ := (s_0, \{s_0\})$ и

$$\gamma^+\bigl((s, \tau), a\bigr) = \bigl(\gamma(s, a), \tau \cup \{\gamma(s, a)\}\bigr) \tag{6.8.19.1}$$

для всех $(s, \tau) \in S^+ = S \times \mathfrak{P}(S)$ и $a \in A$. Определим $\pi : G^+ \to G$ как отображение $\pi := \mathrm{pr}_1 : S^+ = S \times \mathfrak{P}(S) \to S$; по построению, π — морфизм конечных автоматов. Если мы хотим работать только с конечными автоматами без недостижимых состояний, так что изначально $S = s_0 A^*$, то мы можем заменить S^+ на меньшее множество $s_0^+ A^*$.

Построенный таким образом автомат G^+ обладает тем свойством, что

$$s_{G^+}(\alpha) = s_0^+ \cdot \alpha = \bigl(s_0 \cdot \alpha, \sigma'_G(\alpha)\bigr) = \bigl(s_G(\alpha), \sigma'_G(\alpha)\bigr) \tag{6.8.19.2}$$

где $\sigma'_G(\alpha)$ обозначает множество всех состояний, в которых оказывается исходный автомат G в процессе чтения конечного слова $\alpha \in A^*$:

$$\sigma'_G(\alpha) = \{s_0 \cdot \beta \mid \beta\gamma = \alpha\} \tag{6.8.19.3}$$

Иначе говоря, автомат G^+ отличается от автомата G тем, что он помнит не только текущее состояние, но и то, какие состояния были посещены до этого (без учёта порядка и кратности их посещения).

6.8.20. (Связь G-регулярности, G-конструктивности и G^+-предрегулярности.) Отметим, что *всякое G-регулярное множество G-конструктивно.* Действительно, G-регулярные множества — это в точности множества вида $\sigma_G^{-1}(F)$ для замкнутых $F \subset T_G$ (см. **6.8.15**). Далее, *всякое G-конструктивное множество G^+-предрегулярно,* где G^+ — вспомогательный конечный автомат, построенный по G в **6.8.19**. Действительно, мы только что видели в **6.8.18**, что алгебра G-конструктивных множеств порождается G-регулярными множествами вида $\sigma_G^{-1}(\overline{\{a\}})$ для всевозможных $a \subset S$, и G^+-предрегулярные множества также образуют алгебру по **6.8.17**. Поэтому достаточно доказать G^+-предрегулярность $X = \sigma_G^{-1}(\overline{\{a\}})$ для каждого $a \subset S$. В этом случае

$$\alpha \backslash X = \begin{cases} \sigma^{-1}_{(S, s_0 \cdot \alpha, \gamma)}(\overline{\{a\}}) & \text{если } s_G(\beta) \in a \text{ для всех } \beta\gamma = \alpha \\ \varnothing & \text{иначе} \end{cases} \tag{6.8.20.1}$$

или, в обозначениях (6.8.19.3),

$$\alpha\backslash X = \begin{cases} \sigma^{-1}_{(S,s_0\cdot\alpha,\gamma)}(\overline{\{a\}}) & \text{если } \sigma'_G(\alpha) \subset a \\ \varnothing & \text{иначе} \end{cases} \tag{6.8.20.2}$$

где $(S, s_0 \cdot \alpha, \gamma)$ — тот же автомат, что и исходный $G = (S, s_0, \gamma)$, но с другим начальным состоянием $s_0 \cdot \alpha$. Поэтому из $s_0 \cdot \alpha = s_0 \cdot \beta$ и $\sigma'_G(\alpha) = \sigma'_G(\beta)$ следует $\alpha\backslash X = \beta\backslash X$, что согласно (6.8.19.2) как раз и означает G^+-предрегулярность X.

6.8.21. (Сравнение G-регулярных, G-предрегулярных и G-конструктивных множеств для разных G.) Если $f : G' \to G$ — морфизм конечных автоматов, где $G = (S, s_0, \gamma)$, $G' = (S', s'_0, \gamma')$, то $f_* : \mathfrak{P}(S') \to \mathfrak{P}(S)$ или $f_* : T_{G'} \to T_G$ — непрерывное отображение, такое, что $f_* \circ \sigma_{G'} = \sigma_G$, см. **6.8.11** и **6.8.13**. Отсюда $\sigma^{-1}_{G'}((f_*)^{-1}(C)) = \sigma^{-1}_G(C)$ для любого подмножества $C \subset \mathfrak{P}(S)$ или $C \subset T_G$. Поэтому *если существует морфизм конечных автоматов $f : G' \to G$, то любое G-регулярное множество $X \subset A^\omega$ является также G'-регулярным, а любое G-конструктивное — и G'-конструктивным. Более того, если X G-предрегулярно, то оно и G'-предрегулярно.* Для последнего утверждения достаточно заметить, что $s'_0 \cdot \alpha = s'_0 \cdot \beta$ влечёт $s_0 \cdot \alpha = s_0 \cdot \beta$ и затем $\alpha\backslash X = \beta\backslash X$, если X G-предрегулярно.

Во всех этих определениях можно ограничиться рассмотрением конечных автоматов без недостижимых состояний. В этом случае из $G' \leq G$ следует, что G-регулярные, G-предрегулярные или G-конструктивные множества являются также G'-регулярными, G'-предрегулярные или G'-конструктивными, соответственно.

Наконец, если X_i G_i-конструктивно (соответственно, G_i-регулярно или G_i-предрегулярно) при $1 \leq i \leq n$, то все X_i будут G-конструктивны (соотв., G-регулярны, G-предрегулярны) для подходящего G, а именно, для $G = \prod_{i=1}^n G_i$; если мы рассматриваем только конечные автоматы без недостижимых состояний, то надо взять $G = \bigwedge_{i=1}^n G_i$ из **6.8.10**. Про такое G можно думать, как про некоторый «общий знаменатель» для набора множеств $\{X_i\}_{1\leq i\leq n}$.

6.8.22. (Все конструктивные множества G-конструктивны для подходящего G.) Заметим, что G-конструктивные множества для фиксированного G образуют алгебру множеств, т.е. объединение, пересечение, дополнение и разность двух G-конструктивных множеств G-конструктивны, поскольку $\sigma_G^{-1} : \mathfrak{P}(T_G) \to \mathfrak{P}(A^\omega)$ сохраняет все эти операции. Далее, если $C \subset A^\omega$ — произвольное конструктивное множество, то выполнено равенство (6.8.1.1) для некоторого $n \geq 0$ и некоторых регулярных Y_i, Z_i при $1 \leq i \leq n$. Согласно **6.8.15** и **6.8.21**, можно найти конечный автомат G, для которого все Y_i и Z_i G-регулярны, а потому и G-конструктивны по **6.8.20**. Отсюда следует, что и C G-конструктивно. Сочетая этот результат с **6.8.18**, мы получаем, что *подмножество $C \subset A^\omega$ конструктивно в том и только том случае, если оно G-конструктивно для некоторого конечного автомата G.* Аналогичные утверждения для регулярных и предрегулярных множеств были доказаны ранее в **6.8.15** и **6.8.16**.

6.8.23. (Замыкание G-предрегулярного множества G-предрегулярно и одновременно G-регулярно.) Докажем, что *замыкание G-предрегулярного множества G-регулярно и G-предрегулярно.* Как следствие, *замкнутые G-предрегулярные множества G-регулярны.* Действительно, пусть $G = (S, s_0, \gamma)$ и пусть $X \subset A^\omega$ G-предрегулярно, т.е. $s_0 \cdot \alpha = s_0 \cdot \beta \Rightarrow \alpha\backslash X = \beta\backslash X$. Поскольку αA^ω одновременно открыто и замкнуто в A^ω, выполнено равенство $\bar{X} \cap \alpha A^\omega = \overline{X \cap \alpha A^\omega}$, откуда применением σ_α^{-1} для отображения конкатенации $\sigma_\alpha : \boldsymbol{x} \mapsto \alpha\boldsymbol{x}$ получаем $\alpha\backslash\bar{X} = \overline{\alpha\backslash X}$ для любых $X \subset A^\omega$ и $\alpha \in A^*$. Поэтому из G-предрегулярности X следует G-предрегулярность $\bar{X}$. Обозначим через $a \subset S$ множество всех состояний $s_0 \cdot \alpha$, для которых $\alpha\backslash X \neq \varnothing$, что равносильно $\alpha\backslash\bar{X} = \overline{\alpha\backslash X} \neq \varnothing$. Тогда рассуждение **6.1.14** показывает, что конечный автомат G_a, полученный выкидыванием из G всех состояний не из a, распознаёт множество $\bar{X}$. Поэтому $\bar{X} = \sigma_G^{-1}(\overline{\{a\}})$ является прообразом относительно σ_G некоторого замкнутого подмножества и потому G-регулярно (см. **6.8.15**).

6.8.24. (Замыкание G-конструктивного G-предрегулярного множества.) Поскольку всякое G-конструктивное множество G^+-предрегулярно согласно **6.8.20**, предыдущий результат доказывает, что *замыкание G-конструктивного множества G^+-регулярно.* Кроме того, *если X является одновременно G-конструктивным и G-предрегулярным, то его замыкание $\bar{X}$ G-предрегулярно, G-регулярно и как следствие G-конструктивно* (см. **6.8.20**), поскольку это верно и без предположения о G-конструктивности (см. **6.8.23**). Докажем следующий более точный результат: *если G-предрегулярное X имеет вид $X = \sigma_G^{-1}(C)$ для некоторого $C \subset T_G$, то $\bar{X} = \sigma_G^{-1}(\bar{C})$, где $\bar{C}$ обозначает замыкание C в топологическом пространстве T_G.* Для доказательства нашего утверждения заметим, что если $Y \subset A^\omega$ G-регулярно, то $Y = \sigma_G^{-1}(F)$ для некоторого замкнутого $F \subset T_G$, причём это F однозначно определено, будучи равным $\sigma_G(Y)$, поскольку $\sigma_G : A^\omega \twoheadrightarrow T_G$ сюръективно по определению T_G. Если G-предрегулярное X имеет вид $X = \sigma_G^{-1}(C)$ для некоторого $C \subset T_G$, т.е. X G-конструктивно, то мы уже знаем, что $\bar{X}$ G-регулярно (см. **6.8.23**), т.е. имеет вид $\sigma_G^{-1}(F)$ для некоторого замкнутого $F \subset T_G$, и потому $\bar{X}$ — это наименьшее множество вида $\sigma_G^{-1}(F)$ с замкнутым $F \subset T_G$, содержащее $X = \sigma_G^{-1}(C)$. Поскольку σ_G сюръективно, $\sigma_G^{-1}(C) \subset \sigma_G^{-1}(F)$ равносильно $C \subset F$, так что F должно быть наименьшим замкнутым подмножеством T_G, содержащим C, откуда $F = \bar{C}$ и $\bar{X} = \sigma_G^{-1}(\bar{C})$.

6.8.25. (Замыкание произвольного G-конструктивного множества.) Предыдущий результат может быть обобщён следующим образом. Если G — конечный автомат и $\pi : G^+ \to G$ — морфизм, построенный в **6.8.19**, то для любого $C \subset T_G$ выполнено равенство

$$\overline{\sigma_G^{-1}(C)} = \sigma_{G^+}^{-1}\bigl(\overline{\pi_*^{-1}(C)}\bigr) \tag{6.8.25.1}$$

где $\pi_* : T_{G^+} \to T_G$ — непрерывное отображение, индуцированное $\pi : G^+ \to G$, а $\overline{\pi_*^{-1}(C)}$ обозначает замыкание подмножества $\pi_*^{-1}(C)$ в топологическом пространстве T_{G^+}. Для доказательства этой формулы достаточно заметить, что $\sigma_G^{-1}(C) = \sigma_{G^+}^{-1}(\pi_*^{-1}(C))$ одновременно G^+-конструктивно и G^+-предрегулярно по **6.8.20**, так что к нему применимо рассуждение **6.8.24** с G^+ вместо G.

Лемма 6.8.26 *(Непустота относительной внутренности конструктивного множества.) Пусть $\varnothing \neq Q \subset A^\omega$ — непустое конструктивное множество. Тогда его относительная внутренность $U := \mathrm{Int}_{\bar{Q}}\, Q$ также конструктивна и непуста.*

Доказательство. Согласно **6.8.22**, мы можем зафиксировать конечный автомат G, такой, что Q G-конструктивно. Заменив при необходимости G на G^+, можно считать, что Q не только G-конструктивно, но и G-предрегулярно (см. **6.8.20**). Тогда $Y := \bar{Q}$, $S := Y - Q$, $Z := \bar{S}$ и $U := Y - Z$ также G-предрегулярны и G-конструктивны (см. **6.8.17**, **6.8.23** и **6.8.24**), при этом $U = \mathrm{Int}_{\bar{Q}}\, Q$ — это в точности множество из формулировки леммы; в частности, мы доказали, что оно конструктивно. Положим $Q' := \sigma_G(Q) \subset T_G$, $Y' := \overline{Q'}$, $S' := Y' - Q'$, $Z' := \overline{S'}$ и $U' := Y' - Z' \subset T_G$. Тогда $Q = \sigma_G^{-1}(Q')$ по G-конструктивности Q и далее $Y = \sigma_G^{-1}(Y')$ по **6.8.24**, $S = \sigma_G^{-1}(S')$, $Z = \sigma_G^{-1}(Z')$ снова по **6.8.24** и

$U = \sigma_G^{-1}(U')$. Поскольку $U' = \operatorname{Int}_{\bar{Q}'} Q'$, достаточно доказать, что непустое подмножество Q' конечного топологического пространства T_G обладает непустой относительной внутренностью U'. Элементы $\varnothing \neq Q' \subset T_G \subset \mathfrak{P}(S)$ — это подмножества $a \subset S$; выберем элемент $a \in Q'$ наибольшей мощности $\operatorname{card} a$. Тогда a — это внутренняя точка замыкания Q' и потому $a \in U'$ и $U' \neq \varnothing$. Действительно, $\bar{Q}' = \{b \in T_G \mid \exists c \in Q' \colon b \subset c\}$ и потому $\operatorname{card} b \leq \operatorname{card} a$ для всех $b \in \bar{Q}'$ с равенством только при $b = a$. С другой стороны, $V := \{b \in T_G \mid b \supset a\}$ — это открытая окрестность точки a в T_G, все элементы которой, за исключением a, обладают большей мощностью, чем a. Отсюда $V \cap \bar{Q}' = \{a\} \subset \bar{Q}'$, так что a — внутренняя точка $\bar{Q}'$.

6.8.27. (Пример предрегулярного, но не конструктивного множества: корректные двоичные записи.) Пусть $B = \{0, 1\}$, и пусть $Q \subset B^\omega$ — это множество всех бесконечных двоичных слов, содержащих только конечное число единиц:

$$Q := \{\alpha 0^\infty \mid \alpha \in B^*\} = \{\boldsymbol{x} = x_0 x_1 \ldots \in B^\omega \mid \lim_{n \to +\infty} x_n = 0\} \qquad (6.8.27.1)$$

Поскольку $\alpha \backslash Q = Q$ для любого конечного слова $\alpha \in B^*$, множество Q предрегулярно. При этом $\bar{Q} = B^\omega$ и $\operatorname{Int}_{\bar{Q}} Q = \operatorname{Int} Q = \varnothing$, что невозможно для непустого конструктивного множества согласно **6.8.26**. Таким образом, *Q регулярно, но не конструктивно.* Поскольку множество некорректных двоичных записей получается из Q заменой символов $0 \leftrightarrow 1$ алфавита B, это множество также предрегулярно, но не конструктивно. Это же верно и для его дополнения — предрегулярного множества корректных двоичных записей, рассмотренного в **6.1.16**.

6.8.28. (Ещё один пример предрегулярного, но не конструктивного множества: регулярные точки A^ω.) Пусть $R := A^{\omega\sharp} = (A^\omega)^\sharp \subset A^\omega$ — счётное множество регулярных точек A^ω, т.е. (нестрого) периодических слов $\boldsymbol{x} \in A^\omega$ (см. **6.7.6**). Несложно видеть, что $\alpha \backslash R = R$ для любого конечного слова $\alpha \in A^*$, и потому R предрегулярно. Тем не менее, R не конструктивно, поскольку $\bar{R} = A^\omega$ (см. **6.7.7**) и $\operatorname{Int}_{\bar{R}} R = \operatorname{Int} R = \varnothing$, что невозможно для непустого конструктивного множества согласно **6.8.26**.

6.8.29. (Регулярные точки конструктивных множеств.) Пусть A — конечный алфавит. Для любого конструктивного подмножества $C \subset A^\omega$ обозначим через $C^\sharp$ множество регулярных точек, принадлежащих C:

$$C^\sharp := C \cap (A^\omega)^\sharp \qquad (6.8.29.1)$$

Будем говорить, что $C^\sharp$ — *множество регулярных точек конструктивного множества* X, а элементы $\boldsymbol{x} \in C^\sharp$ будем называть *регулярными точками конструктивного множества* C. Кроме того, будем говорить, что подмножество $Q \subset A^{\omega\sharp} = (A^\omega)^\sharp$ *конструктивно*, если оно имеет вид $Q = C^\sharp$ для некоторого конструктивного $C \subset A^\omega$. Ясно, что подмножество $Q \subset A^{\omega\sharp}$ конструктивно в том и только том случае, если оно может быть записано в виде $Q = \bigcup_{i=1}^n (Y_i - Z_i)$ для некоторых регулярных Y_i, $Z_i \subset A^{\omega\sharp}$ (т.е. следов на $A^{\omega\sharp}$ регулярных подмножеств A^ω). Согласно предложению **6.8.30** ниже, C однозначно определяется $C^\sharp$, т.е. *отображение* $C \mapsto C^\sharp$ *определяет изоморфизм между алгебрами конструктивных подмножеств в* A^ω *и в* $A^{\omega\sharp}$.

Предложение 6.8.30 *(Конструктивное множество определяется регулярными точками.) Пусть* A *— конечный алфавит. Тогда:*

a) *Если* $\varnothing \neq C \subset A^\omega$ *— непустое конструктивное множество, то* $C^\sharp \neq \varnothing$*, т.е. любое непустое конструктивное множество содержит хотя бы одну регулярную точку.*

b) *Если* C_1, $C_2 \subset A^\omega$ *— конструктивные подмножества, то* $C_1 = C_2$ *в том и только том случае, если* $C_1^\sharp = C_2^\sharp$.

c) *Если* C_1, $C_2 \subset A^\omega$ *— конструктивные подмножества, то* $C_1 \subset C_2$ *в том и только том случае, если* $C_1^\sharp \subset C_2^\sharp$

Доказательство. Пусть $C \subset A^\omega$ — непустое конструктивное множество. Согласно лемме **6.8.26**, $U := \operatorname{Int}_{\bar{C}} C \neq \varnothing$. Положим $Y := \bar{C}$, $Z := \overline{Y - C}$. Тогда $Z \subset Y$ — регулярные подмножества (см. **6.8.24**), такие, что $U = Y - Z$. Поскольку $U \neq \varnothing$, $Z \neq Y$, откуда $Z^\sharp \subsetneq Y^\sharp$, т.к. $Y^\sharp$ плотно в Y (см. **6.7.8**). Отсюда получаем $\varnothing \neq Y^\sharp - Z^\sharp = U^\sharp \subset C^\sharp$, что доказывает a). Ясно, что b) немедленно следует из c), и что условие в c) необходимо. Для доказательства его достаточности применим a) к конструктивному множеству $C := C_1 - C_2$.

Следствие 6.8.31 *(Регулярные точки плотны в любом конструктивном множестве.) Если* $C \subset A^\omega$ *конструктивно, то подмножество* $C^\sharp := C \cap (A^\omega)^\sharp$ *плотно в* C.

Доказательство. Если это не так, то существует точка $\boldsymbol{x} = x_0 x_1 \ldots \in C$ и её открытая окрестность $U \ni \boldsymbol{x}$, такие, что $U \cap C^\sharp = \varnothing$. При необходимости уменьшив U, можно предполагать, что $U = x_0 \ldots x_{n-1} A^\omega$. Тогда U — регулярное, а потому и конструктивное подмножество A^ω, причём $U \cap C$ непусто, поскольку оно содержит $\boldsymbol{x}$. Поэтому $(U \cap C)^\sharp = U^\sharp \cap C^\sharp \neq \varnothing$ согласно **6.8.30**,a), что противоречит выбору U.

6.8.32. (Предрегулярные множества не задаются своими регулярными точками.) Отметим, что *предрегулярные множества* $Q \subset A^\omega$ *не задаются своими предрегулярными точками* $Q^\sharp := Q \cap A^{\omega\sharp}$, в отличие от конструктивных множеств. Например, множество регулярных точек $R = A^{\omega\sharp} \subset A^\omega$ из **6.8.28** предрегулярно, но при этом $R^\sharp = R = (A^\omega)^\sharp$, несмотря на то, что $R \neq A^\omega$. В данном случае след предрегулярного множества на $A^{\omega\sharp}$ совпал со следом некоторого (однозначно определённого по **6.8.30**,b)) конструктивного множества, но и это не всегда так. Например, предрегулярное множество $Q \subset B^\omega$ из (6.8.27.1), где $B = \{0, 1\}$, состоит только из регулярных точек, так что $Q^\sharp = Q$, однако $Q \neq C^\sharp$ ни для какого конструктивного $C \subset B^\omega$. В самом деле, если было бы $Q = C^\sharp$, то $\bar{C} = \overline{C^\sharp} = \bar{Q} = B^\omega$, и потому $\operatorname{Int} C \neq \varnothing$ по **6.8.26**. Тогда $C \supset \operatorname{Int} C \supset \alpha B^\omega$ для некоторого конечного слова $\alpha \in B^\omega$, откуда $\alpha 1^\infty \in \alpha B^{\omega\sharp} = (\alpha B^\omega)^\sharp \subset C^\sharp = Q$, что неверно.

Предложение 6.8.33 *(Критерий конструктивности предрегулярного множества.) Пусть $Q \subset A^\omega$ — предрегулярное множество. Определим последовательность предрегулярных множеств $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ и последовательность регулярных множеств $\{Y_n\}_{n \geq 0}$ следующим образом:*

$$Q_0 := Q \tag{6.8.33.1}$$

$$Q_{n+1} := \bar{Q}_n - Q_n \quad \text{для всех } n \geq 0 \tag{6.8.33.2}$$

$$Y_n := \bar{Q}_n \quad \text{для всех } n \geq 0 \tag{6.8.33.3}$$

Тогда $\{Y_n\}_{n \geq 0}$ — убывающая последовательность регулярных множеств, поскольку $Y_{n+1} = \overline{Y_n - Q_n} \subset \bar{Y}_n = Y_n$. Кроме того:

a) *Если Q G-предрегулярно для некоторого конечного автомата G, то все Q_n и Y_n G-предрегулярны, а Y_n ещё и G-регулярны. Кроме того, в этом случае убывающая последовательность Y_n стабилизируется на некотором Y_∞.*

b) *Множество Q конструктивно в том и только том случае, если $Y_n = \varnothing$ для некоторого $n \geq 0$ (что равносильно $Q_n = \varnothing$, поскольку $Y_n = \bar{Q}_n$), т.е. если Y_∞ из пункта a) пусто.*

Доказательство. Поскольку всякое предрегулярное множество является G-предрегулярным для подходящего G, мы можем зафиксировать такое G для данного Q. Общие свойства последовательностей $\{Q_n\}$ и $\{Y_n\}$ будут тогда следовать из пункта a), к доказательству которого мы и переходим. Ясно, что если $Q_0 = Q$ G-предрегулярно, то все Q_n и Y_n также будут G-предрегулярны по **6.8.17** и **6.8.23**; кроме того, **6.8.23** показывает, что все $Y_n = \bar{Q}_n$ одновременно и G-регулярны. Поэтому $Y_n = \sigma_G^{-1}(Y_n')$ для некоторой убывающей последовательности замкнутых подмножеств $Y_n' := \sigma_G(Y_n) \subset T_G$. Поскольку топологическое пространство T_G конечно, эта убывающая последовательность стабилизируется, а значит, стабилизируется и $\{Y_n\}$.

Докажем теперь необходимость условия b). Если Q конструктивно, то и все Q_n также конструктивны. Если при этом $Y_\infty \neq \varnothing$, то выберем $n \geq 0$, такое, что $Y_n = Y_{n+1} = Y_\infty \neq \varnothing$ и посмотрим на конструктивное множество Q_n. Поскольку $\bar{Q}_n = Y_n \neq \varnothing$, то и $Q_n \neq \varnothing$, а значит, относительная внутренность $\mathrm{Int}_{\bar{Q}_n} Q_n = \mathrm{Int}_{Y_n} Q_n = Y_n - \overline{Y_n - Q_n} = Y_n - Y_{n+1}$ также непуста по лемме **6.8.26**, что противоречит равенству $Y_n = Y_{n+1}$. Наконец, докажем достаточность условия b). Если некоторое Y_n пусто, то и $Q_n \subset Y_n$ пусто, а потому и конструктивно, откуда убывающей индукцией по $0 \leq m \leq n$ получаем, что все $Q_m = Y_m - Q_{m+1}$ также конструктивны. В частности, $Q = Q_0$ оказывается конструктивным.

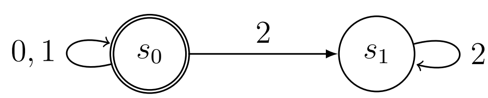
Следствие 6.8.34 *(Конструктивные G-предрегулярные множества.) Если G-предрегулярное множество Q конструктивно, то оно G-конструктивно.*

Доказательство. Действительно, в этом случае все множества Y_n из **6.8.33** G-регулярны по **6.8.33**,a), а значит, они и G-конструктивны. Отсюда по критерию **6.8.33**,b) получаем G-конструктивность всех $Q_m = Y_m - Q_{m+1}$ убывающей индукцией по m, а значит, и $Q = Q_0$.

6.8.35. (Вычисления в алгебре конструктивных G-предрегулярных множеств.) Рассмотрим семейство $\mathcal{C}_G$ всех G-предрегулярных конструктивных множеств. Ясно, что это — некоторая подалгебра алгебры всех G-конструктивных множеств. Иначе говоря, это семейство состоит из G-

конструктивных множеств и при этом замкнуто относительно объединений, пересечений, дополнений и разностей множеств. Кроме того, $\mathcal{C}_G$ устойчиво относительно топологических операций взятия замыкания, внутренности и границы — что неверно для алгебры всех G-конструктивных множеств — и потому может быть более удобно. Поскольку все $Q \in \mathcal{C}_G$ G-конструктивны, они имеют вид $\sigma_G^{-1}(Q')$ для подходящих подмножеств $Q' \subset T_G$ (а именно, $Q' = \sigma_G(Q)$), образующих некоторую подалгебру множеств $\mathcal{C}'_G \subset \mathfrak{P}(T_G)$. Отображение σ_G^{-1} задаёт некоторый изоморфизм между алгебрами множеств $\mathcal{C}'_G$ и $\mathcal{C}_G$, т.е. является биекцией и сохраняет все теоретико-множественные операции. Более того, $\sigma_G^{-1} : \mathcal{C}'_G \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_G$ сохраняет и топологические операции, такие, как замыкание (см. **6.8.24**), а значит, и внутренность с границей. Поэтому все вычисления с конструктивными G-предрегулярными множествами могут быть «промоделированы» внутри $\mathcal{C}'_G$, т.е. с помощью некоторых подмножеств конечного топологического пространства T_G. В действительности доказательство леммы **6.8.26** является примером такого вычисления.

6.8.36. (Регулярный образ конструктивного множества не обязан быть конструктивным.) Важность конструктивных множеств в алгебраической геометрии основана на том факте, что образ конструктивного множества относительно любого конечно представимого морфизма схем конструктивен. К сожалению, это не так в нашем случае: *образ конструктивного множества относительно регулярного отображения не всегда конструктивен.* Для построения контрпримера зафиксируем $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1\}$ и рассмотрим регулярное подмножество $Y \subset A^\omega$, заданное (непополненным) автоматом



Иначе говоря, Y состоит из тех бесконечных слов (или троичных записей), в которых после первого вхождения цифры 2 в дальнейшем встречаются только двойки:

$$Y = \{\boldsymbol{x} = x_0 x_1 \ldots \in A^\omega \mid \forall m, n \in \mathbb{N}_0 : (m < n) \wedge (x_m = 2) \Rightarrow x_n = 2\} \tag{6.8.36.1}$$

Далее, пусть $Z := \{0, 1\}^\omega \subset Y$ — регулярное подмножество Y, состоящие из тех слов, в которых встречаются только цифры 0 и 1. Таким образом, конструктивное множество $Y - Z$ состоит из бесконечных слов вида $\alpha 2^\infty$

для всевозможных $\alpha \in \{0,1\}^*$. Рассмотрим отображение $\varphi : A \to B$, заданное $\varphi(0) = \varphi(2) = 0$, $\varphi(1) = 1$, и продолжим его до регулярного отображения $\varphi^\omega : A^\omega \to B^\omega$. Тогда

$$\varphi^\omega(Y - Z) = Q = \{\alpha 0^\infty \mid \alpha \in B^*\} = \{\boldsymbol{y} = y_0 y_1 \ldots \in B^\omega \mid \lim_{n\to+\infty} y_n = 0\} \tag{6.8.36.2}$$

т.е. образ конструктивного множества $Y - Z \subset A^\omega$ относительно регулярного отображения φ^ω — это предрегулярное, но не конструктивное множество $Q \subset B^\omega$, рассмотренное в **6.8.27**.

Если расширить A до большего множества $A' = A \cup \{3\} = \{0,1,2,3\}$ и отождествить его с $B^2 = \{00, 01, 10, 11\}$, то A'^ω отождествляется с $B^\omega \times B^\omega$, а φ^ω — с ограничением проекции $\mathrm{pr}_2 : B^\omega \times B^\omega \to B^\omega$. Таким образом, *даже проекция* $\mathrm{pr}_2 : B^\omega \times B^\omega \to B^\omega$ *не сохраняет конструктивные подмножества.*

6.8.37. (Регулярный образ предрегулярного множества предрегулярен.) Докажем более слабое утверждение: *образ любого предрегулярного множества* $Q \subset X_0 \subset A^\omega$ *относительно регулярного отображения* $f : X_0 \to B^\omega$ *предрегулярен.* Для этого докажем чуть более общий (но в действительности эквивалентный) факт: *образ* $R(Q)$ *любого предрегулярного подмножества* $Q \subset A^\omega$ *относительно любого предрегулярного соответствия* $R \subset A^\omega \times B^\omega$ *предрегулярен.* Действительно, для любого $\beta \in B^n$ выполнено

$$R(Q) \cap \beta B^\omega = \bigcup_{\alpha \in A^n} \big(R \cap (\alpha A^\omega \times \beta B^\omega)\big)(Q \cap \alpha A^\omega) \tag{6.8.37.1}$$

откуда

$$\beta \backslash R(Q) = \bigcup_{\alpha \in A^n} \big((\alpha,\beta)\backslash R\big)(\alpha \backslash Q) \tag{6.8.37.2}$$

Поскольку R и Q предрегулярны, $(\alpha,\beta)\backslash R$ и $\alpha\backslash Q$ могут принимать только конечное число значений. Сопоставим каждому $\beta \in B^*$ множество P_β всех пар $\big((\alpha,\beta)\backslash R, \alpha\backslash Q\big)$, возникающих, когда α пробегает все конечные слова из A^* той же длины. Есть только конечное множество различных P_β, поскольку P_β должно быть подмножеством прямого произведения двух фиксированных конечных множеств. При этом $\beta\backslash R(Q)$ полностью определяется P_β:

$$\beta \backslash R(Q) = \bigcup_{(R',Q') \in P_\beta} R'(Q') \tag{6.8.37.3}$$

и потому существует только конечное число различных $\beta\backslash R(Q)$, т.е. $R(Q)$ предрегулярно.

6.8.38. (Предрегулярные подмножества в произвольном регулярном пространстве X. Их устойчивость относительно теоретико-множественных операций, а также образов и прообразов относительно регулярных отображений.) Предыдущий результат позволяет определить *предрегулярные подмножества в (произвольном) регулярном пространстве* X. Сначала рассмотрим случай стандартного регулярного пространства $X = (A^\omega, R)$. Подмножества $Q \subset |X|$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с R-насыщенными подмножествами $\tilde{Q} \subset A^\omega$ (т.е. такими, что $R(\tilde{Q}) = \tilde{Q}$). Будем говорить, что Q предрегулярно (в X), если $\tilde{Q}$ предрегулярно в A^ω. Ясно, что предрегулярные подмножества в $|X|$ образуют алгебру множеств. Далее, образы и прообразы относительно регулярных морфизмов $f : X = (A^\omega, R) \to Y = (B^\omega, S)$ сохраняют предрегулярность, т.е., например, если $Q \subset |X|$ предрегулярно, то $|f|(Q) \subset |Y|$ также предрегулярно. Для доказательства заметим, что по определению f задаётся некоторым регулярным соответствием $F \subset A^\omega \times B^\omega$, таким, что $S \circ F \circ R = F$, и что если $Q \subset |X|$ соответствует R-насыщенному $\tilde{Q} \subset A^\omega$, то $|f|(Q) \subset |Y|$ соответствует S-насыщенному $F(\tilde{Q})$. Однако из предрегулярности $\tilde{Q} \subset A^\omega$ следует предрегулярность $F(\tilde{Q})$ согласно **6.8.37**, что доказывает требуемое. Для доказательства предрегулярности прообразов предрегулярных множеств относительно регулярного морфизма f, заданного F, надо аналогичным образом применить **6.8.37** к регулярному соответствию F^{-1}.

В частности, если f — регулярный изоморфизм, то гомеоморфизм $|f| : |X| \xrightarrow{\sim} |Y|$ переводит предрегулярные подмножества в предрегулярные, и потому корректно говорить о предрегулярных подмножествах в регулярно представленном компакте или в регулярном пространстве $X = (X, \theta_X)$: предрегулярность подмножества $Q \subset X$ не меняется при замене регулярной структуры $\theta_X : |(A^\omega, R)| \xrightarrow{\sim} X$ на изоморфную. Это позволяет перенести предыдущие результаты со стандартных регулярных пространств на произвольные, т.е. *предрегулярные подмножества* $Q \subset X$ *образуют алгебру множеств*, все конструктивные подмножества предрегулярны, *образы и прообразы предрегулярных подмножеств относительно регулярных морфизмов или соответствий предрегулярны*, если $Q \subset X$ и $Q' \subset Y$ предрегулярны, то предрегулярно и их прямое произведение $Q \times Q' \subset X \times Y$ и т.д.

6.8.39. (Устойчивость предрегулярных подмножеств $Q \subset X$ относительно замыканий и других топологических операций.) Отметим, что *замыкание* $\bar{Q}$ *предрегулярного* $Q \subset X$ *регулярно (а значит, также конструктивно и предрегулярно) в* X. Для доказательства выберем регулярное накрытие $f : X_0 \twoheadrightarrow X$, $X_0 \subset A^\omega$, и заметим, что $\bar{Q} = f\big(\overline{f^{-1}(Q)}\big)$ ввиду собственности и сюръективности f (или просто потому что f — непрерывная сюръекция компактов; см. **6.5.27**), после чего утверждение следует из аналогичного утверждения для предрегулярного $f^{-1}(Q) \subset A^\omega$, доказанного в **6.1.15**. Отсюда следует, что *замкнутое предрегулярное* $Q \subset X$ *регулярно.* Кроме того, *внутренность* $\operatorname{Int} Q$ *и граница* ∂Q *предрегулярного* $Q \subset X$ *предрегулярны*, поскольку эти операции выражаются с помощью замыкания и теоретико-множественных операций. Поскольку граница ∂Q всегда замкнута, это означает, что *граница* ∂Q *предрегулярного* $Q \subset X$ *всегда регулярна.*

Список литературы

[GHS] Svante Janson, *Gaussian Hilbert spaces*, Cambridge Tracts in Mathematics **129**, Cambridge University Press, 1997.

[DS] Alexander S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Graduate Texts in Mathematics **156**, Springer-Verlag, 1995.

[TG] Nicolas Bourbaki, *Topologie Générale*, Hermann, Paris, 1971 (chap. 1–4), 1974 (chap. 5–10).

[OP] Gabor Szegö, *Orthogonal polynomials*, AMS, 1978.

[TT] Peter Johnstone, *On a topological topos*, Proc. London Math. Soc. (3) **38** (1979) pp. 237–271.

[CH1] Th. Coquand, G. Huet, *Constructions: A higher order proof system for mechanizing mathematics.* In EUROCAL'85, volume **203**, Linz, 1985. Springer-Verlag.

[CH2] Th. Coquand, G. Huet, *The Calculus of Constructions,* Information and Computation, **76** (2/3), 1988.

[CP] Th. Coquand, C. Paulin-Mohring. *Inductively defined types,* in P. Martin-Löf and G. Mints, editors, Proceedings of Colog'88, **417**. Springer-Verlag, 1990.

[SP] Thierry de la Rue, *Espaces de Lebesgue*, Séminaire de Probabilités XXVII, Lecture Notes in Mathematics **1557**, Springer, 1993, pp. 15–21.

[DF] Bruno de Finetti, *La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives*, Annales de l'institut Henri Poincaré, **7** (1937) no. 1, pp. 1–68.

[AB1] Дуров Н.В., *Обзор подходов построения абсолютной геометрии*, Препринт ПОМИ 8 (2022).

[AB3] Дуров Н.В., *Индуктивные и коиндуктивные конструкции в математике*, Препринт ПОМИ 9 (2022).

[AB4] Дуров Н.В., *Примеры эффективных систем счисления*, Препринт ПОМИ 10 (2022).

[AB5] Дуров Н.В., *Вероятностные свойства избыточных систем счисления*, Препринт ПОМИ 11 (2022).

[AB6] Дуров Н.В., *Регулярные пространства и регулярные отображения*, Препринт ПОМИ 12 (2022).