PDMI Preprint 10/2022

Примеры эффективных систем счисления

Н. В. Дуров[1]

[1] Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской Академии Наук

email: `douroff@pdmi.ras.ru`

Аннотация. Данная работа посвящена изучению нескольких конкретных примеров эффективных систем счисления, т.е. способов представления вещественных и других чисел, для которых проверка на равенство, сложение и вычитание могут быть реализованы с помощью конечных автоматов. В качестве первого из таких примеров рассматривается избыточная двоичная система, основанная на альтернативной конструкции вещественного отрезка из [AB3],**3.1.21**, и обсуждается, каким образом сложение в этой системе может быть реализовано с помощью локальных правил сложения, задействующих только конечное число цифр слагаемых для вычисления очередной цифры суммы. Такого рода конструкции интересны потому, что они проясняют аналогию между $\mathbb{Q}_p$ и $\mathbb{F}_p((T))$, т.е. между числовыми и функциональными глобальными полями. Затем эти результаты обобщаются на случай систем счисления с другими основаниями, а также чисел, бесконечных в обе стороны.

Ключевые слова: Абсолютная геометрия, поле из одного элемента, двоичная система счисления, избыточная двоичная система счисления, эффективные системы счисления, конечные автоматы, локальные правила сложения.

ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:
ЭЛ № ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г.
Выдано Федеральной службой по надзору
в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные:

191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны: (812) 312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www.pdmi.ras.ru/preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором В. Н. Симонова

4 Примеры эффективных систем счисления

Мы видели в [АВ3],**3.1.21**, что альтернативный отрезок $I' = [-1, 1]$ является более естественной коиндуктивной конструкцией отрезка вещественной прямой, чем стандартный отрезок I из [АВ3],**3.1.7**, поскольку позволяет конструктивно определить полусумму $h : I' \times I' \to I'$, $(x, y) \mapsto (x + y)/2$. Мы уже упоминали в [АВ3],**3.1.20**, что первые n двоичных цифр полусуммы $z = (0.z_0z_1z_2\ldots)_2 = (x+y)/2$ зависят только от первых $n+1$ цифр слагаемых, если использовать избыточную двоичную систему с цифрами $\{0, 1, 2\}$ (для $[0, 1]$) или $\{-1, 0, 1\}$ (для $[-1, 1]$), естественную для альтернативного отрезка. Оказывается, что верно даже большее: можно определить полусумму вещественных чисел таким образом, чтобы z_n зависело только от x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, y_{n-1}, y_n, y_{n+1}. Иначе говоря, сложение вещественных чисел оказывается заданным некоторым локальным правилом. При таком подходе сложение вещественных чисел оказывается похоже даже не на сложение p-адических чисел, а на сложение формальных степенных рядов Лорана из $\mathbb{F}_p((t)) = \mathbb{F}_p[[t]][t^{-1}]$. Впрочем, сложение p-адических чисел тоже допускает аналогичное локальное описание; в этом случае оно становится аналогично сложению рядов Лорана из $\mathbb{F}_p((t^{-1}))$. Такого рода аналогии представляются нам интересными, поскольку они могут прояснить сходство числовых и функциональных полей.

4.1 Классификация локальных сложений

4.1.1. (Постановка задачи.) Введём некоторые обозначения. Пусть $I' = [-1, 1]$ — симметричный отрезок вещественной прямой, построенный с помощью альтернативной коиндуктивной конструкции из **3.1.20** и **3.1.21** в [АВ3]. Пусть $D = \{-1, 0, 1\}$ — трёхэлементное множество цифр избыточной двоичной системы, и пусть D^ω есть множество бесконечных последовательностей цифр $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n\geq 0} = x_0x_1x_2\ldots$. Обозначим через $w : D^\omega \to I'$ непрерывное отображение $w : \boldsymbol{x} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} x_n 2^{-n-1}$; мы обычно также пишем $w(\boldsymbol{x}) = (0.x_0x_1x_2\ldots)_2$ или просто $0.x_0x_1x_2\ldots$.

Обозначим через $h : I' \times I' \to I'$ отображение полусуммы $h(x, y) = (x + y)/2$. Тогда мы утверждаем, что h (неоднозначно) поднимается до непрерывного и даже липшицева[1] отображения $\tilde{h} : D^\omega \times D^\omega \to D^\omega$, тако-

[1] Относительно расстояния $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := 2^{-\inf\{n : x_n \neq y_n\}}$ на D^ω.

го, что $h\circ(w\times w) = w\circ\tilde{h} : D^\omega\times D^\omega \to I'$. Более того, мы утверждаем, что такой подъём $\tilde{h}$ может быть задан с помощью локального правила, т.е. существует $\varphi : D^6 \to D$, такое, что отображение $h_\varphi : D^\omega \times D^\omega \to D^\omega$, заданное $h_\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{z}$ с $z_n = \varphi(x_{n-1}, x_n, x_{n+1}; y_{n-1}, y_n, y_{n+1})$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$, где мы полагаем $x_{-1} = y_{-1} = 0$, является подъёмом полусуммы h. Для удобства введём следующее определение:

Определение 4.1.2 *(Локальные правила сложения.) Пусть $D = \{-1, 0, 1\}$. Отображение $\varphi : D^6 \to D$ называется* **(локальным вещественным двоичным) правилом сложения**, *если для любых последовательностей $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ элементов D выполнено тождество*

$$\sum_{n=-2}^{\infty} \varphi(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}; y_n, y_{n+1}, y_{n+2})2^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}(x_n + y_n)2^{-n} \qquad (4.1.2.1)$$

где мы полагаем $x_{-2} = x_{-1} = y_{-2} = y_{-1} = 0$. Если задан некоторый элемент $\zeta \in D$, то мы говорим, что φ — **ζ-правило сложения**, *если φ является правилом сложения, таким, что*

$$\varphi(\zeta, \zeta, x; \zeta, \zeta, y) = \zeta \quad \text{для всех } x,\ y \in D \qquad (4.1.2.2)$$

Наконец, мы говорим, что φ — **универсальное правило сложения**, *если оно является ζ-правилом сложения для всех $\zeta \in D$.*

Оказывается, что если φ является ζ-правилом сложения, то отображение $h_{\varphi,\zeta} : D^\omega \times D^\omega \to D^\omega$, заданное формулой $h_{\varphi,\zeta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{z}$ с $\boldsymbol{x} = x_0x_1\ldots$, $\boldsymbol{y} = y_0y_1\ldots$, $\boldsymbol{z} = z_0z_1\ldots$, $z_n := \varphi(x_{n-1}, x_n, x_{n+1}; y_{n-1}, y_n, y_{n+1})$, где мы полагаем $x_{-1} = y_{-1} = \zeta$, будет подъёмом отображения полусуммы $h(x,y) = (x+y)/2$ относительно $w : D^\omega \to [-1,1]$. Более точно:

Предложение 4.1.3 *(Локальный подъём полусуммы на D^ω.) Пусть $D = \{-1, 0, 1\}$, $\varphi : D^6 \to D$ и $\zeta \in D$. Определим отображение $h_{\varphi,\zeta} : D^\omega\times D^\omega \to D^\omega$ формулой $h_{\varphi,\zeta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{z}$, где $z_n = \varphi(x_{n-1}, x_n, x_{n+1}; y_{n-1}, y_n, y_{n+1})$ при $n \geq 1$ и $z_0 = \varphi(\zeta, x_0, x_1; \zeta, y_0, y_1)$. Тогда $h_{\varphi,\zeta}$ является подъёмом отображения полусуммы $h(x,y) = (x+y)/2$ относительно $w : D^\omega \to [-1,1]$, т.е. $w \circ h_{\varphi,\zeta} = h \circ (w \times w)$, если и только если φ — ζ-правило сложения.*

Доказательство. Проверим сначала достаточность этого условия. Пусть φ — ζ-правило сложения. Вычислим с его помощью сумму $(0.\zeta\zeta x_0x_1\ldots)_2$

и $(0.\zeta\zeta y_0 y_1 \ldots)_2$. Ясно, что она равна $(ab.\zeta z_0 z_1 z_2 \ldots)_2$, где $\boldsymbol{z} = (z_n)_{n\geq 0}$ построено по $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, как в формулировке предложения, и мы воспользовались (4.1.2.2) для вычисления цифры перед z_0. Здесь $a = \varphi(0,0,\zeta;0,0,\zeta)$ и $b = \varphi(0,\zeta,\zeta;0,\zeta,\zeta)$. Если мы докажем, что $2a+b=\zeta$, то из равенства

$$(0.\zeta\zeta x_0 x_1 \ldots)_2 + (0.\zeta\zeta y_0 y_1 \ldots)_2 = (ab.\zeta z_0 z_1 z_2 \ldots)_2 \tag{4.1.3.1}$$

будет следовать искомое равенство

$$(0.x_0 x_1 \ldots)_2 + (0.y_0 y_1 \ldots)_2 = (z_0.z_1 z_2 \ldots)_2 = 2 \cdot (0.z_0 z_1 \ldots)_2 \tag{4.1.3.2}$$

с помощью умножения обеих сторон (4.1.3.1) на четыре и вычитания 6ζ. Для проверки того, что $2a+b=\zeta$, просто положим все $x_n = y_n = \zeta$ в (4.1.3.1). Тогда по (4.1.2.2) все $z_n = \zeta$; поскольку $(0.\zeta\zeta\zeta\ldots)_2 = \zeta$, (4.1.3.1) превращается в $\zeta+\zeta = 2a+b+\zeta$, откуда $2a+b=\zeta$.

Проверим теперь необходимость условия. Предположим, (4.1.3.2) выполнено для любых $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y} \in D^\omega$, если определить $\boldsymbol{z} = (z_n)_{n\geq 0}$ с помощью φ и ζ. Применим (4.1.3.2) для вычисления полусуммы $(0.00x_0x_1\ldots)_2$ и $(0.00y_0y_1\ldots)_2$:

$$(0.00x_0 x_1 \ldots)_2 + (0.00y_0 y_1 \ldots)_2 = (c.dz'_0 z_1 \ldots)_2 \tag{4.1.3.3}$$

где $z'_0 = \varphi(0,x_0,x_1;0,y_0,y_1)$, $c = \varphi(\zeta,0,0;\zeta,0,0)$, $d = \varphi(0,0,x_0;0,0,y_0)$. Если мы докажем, что $2c+d=0$, т.е. что $c=d=0$, то отсюда будет следовать (4.1.2.1) с помощью умножения (4.1.3.3) на восемь, т.е. φ окажется правилом сложения. Если бы было $c=1$, то правая сторона (4.1.3.3) была бы неотрицательна для любых x_n и y_n, например, при $x_n = y_n = -1$, что приводит к противоречию. Аналогично, $c=-1$ тоже приводит к противоречию. Поэтому $c=0$. Далее, если $d=1$, то снова правая сторона (4.1.3.3) оказывается всегда неотрицательной, и мы снова приходим к противоречию при $x_n = y_n = -1$ для всех n. Случай $d=-1$ тоже невозможен. Таким образом, $c=d=0$, и φ — правило сложения. Докажем, что оно — ζ-правило сложения. Для этого снова вычислим сумму в (4.1.3.1) с помощью правила сложения φ. На этот раз правая сторона выглядит как $(ab.z_{-1}z_0z_1\ldots)_2$, где a и b постоянны, однако $z_{-1} = \varphi(\zeta,\zeta,x_0;\zeta,\zeta,y_0)$, вообще говоря, зависит от x_0 и y_0. Кроме того, поскольку $h_{\varphi,\zeta}$ — подъём h, выполнено и (4.1.3.2). Если теперь домножить (4.1.3.1) на два и вычесть половину (4.1.3.2), мы получим

$$3\zeta = 4a + 2b + \varphi(\zeta,\zeta,x_0;\zeta,\zeta,y_0) \tag{4.1.3.4}$$

Отсюда мы получаем, что $z_{-1} = \varphi(\zeta, \zeta, x_0; \zeta, \zeta, y_0)$ не зависит от выбора x_0 и y_0. Осталось проверить, что $z_{-1} = \zeta$. Для этого положим $x_n = y_n = \zeta$ для всех $n \geq 0$ в (4.1.3.2). Слева получим 2ζ, а справа — $2\varphi(\zeta, \zeta, \zeta; \zeta, \zeta, \zeta) = 2z_{-1}$, откуда $z_{-1} = \zeta$, так что (4.1.2.2) выполнено.

Сформулируем основную теорему:

Теорема 4.1.4 *(Существование универсальных правил сложения.) Универсальные правила сложения $\varphi : D^6 \to D$, где $D = \{-1, 0, 1\}$, существуют. Например, такое φ может быть построено следующим образом:*

$$\begin{aligned}\varphi(x_0, x_1, x_2; y_0, y_1, y_2) = \sigma_2\big(&\psi_0(x_1, y_1), \psi_1(x_2, y_2), [y_1 > 0]\big) \\ &+ m_2\big(\psi_0(x_0, y_0), \psi_1(x_1, y_1), [y_0 > 0]\big) - 1\end{aligned} \tag{4.1.4.1}$$

где

$$m_2(a, b, c) = a \oplus b \oplus c = (a + b + c) \bmod 2 \tag{4.1.4.2}$$

$$\sigma_2(a, b, c) = ab \vee ac \vee bc = ab + bc + ac - 2abc \tag{4.1.4.3}$$

$$\psi_0(x, y) = x + [y \geq 0] + 1 \bmod 2 \tag{4.1.4.4}$$

$$\psi_1(x, y) = [x + [y \geq 0] \geq 1] \tag{4.1.4.5}$$

Здесь a, b, $c \in \{0, 1\}$, x, $y \in D$, ψ_0, $\psi_1 : D^2 \to \{0, 1\}$, m_2, $\sigma_2 : \{0, 1\}^3 \to \{0, 1\}$. Кроме того, выражение $[E]$ означает 1, если E истинно, и 0, если E ложно.

4.1.5. (Функция избытка δ, определённая φ.) Прежде, чем доказывать теорему **4.1.4**, зададимся вопросом: как проверить, является ли данная функция $\varphi : D^6 \to D$ локальным правилом сложения? Если мы научимся это проверять, то мы в принципе сможем проверить за конечное число шагов, является ли, например, функция φ из (4.1.4.1) правилом сложения или нет.

Для этого определим *функцию избытка* $\delta = \delta_\varphi : D^4 \to \{-3, -2, \dots, 3\}$, ассоциированную с отображением $\varphi : D^6 \to D$, следующим образом:

$$\delta(x_0, x_1; y_0, y_1) = 2\varphi(0, 0, x_0; 0, 0, y_0) + \varphi(0, x_0, x_1; 0, y_0, y_1) \tag{4.1.5.1}$$

Отметим, что если φ является 0-правилом сложения, то (4.1.5.1) упрощается до

$$\delta(x_0, x_1; y_0, y_1) = \varphi(0, x_0, x_1; 0, y_0, y_1) \tag{4.1.5.2}$$

Например, φ из (4.1.4.1) соответствует функции избытка

$$\delta(x_0, x_1; y_0, y_1) = \sigma_2\big(\psi_0(x_0, y_0), \psi_1(x_1, y_1), [y_0 > 0]\big) + \psi_1(x_0, y_0) - 1 \tag{4.1.5.3}$$

Теорема 4.1.6 *(Критерий корректности правила сложения.)*

а) *Если $\varphi : D^6 \to D$ — правило сложения, то для соответствующей функции избытка $\delta = \delta_\varphi$, заданной (4.1.5.1), выполнены тождества*

$$\varphi(x_0, x_1, x_2; y_0, y_1, y_2) = x_0 + y_0 - 2\delta(x_0, x_1; y_0, y_1) + \delta(x_1, x_2; y_1, y_2) \tag{4.1.6.1}$$

$$\delta(0, 0; 0, 0) = 0 \tag{4.1.6.2}$$

б) *Наоборот, если для некоторых функций $\delta : D^4 \to \{-3, -2, \dots, 3\}$ и $\varphi : D^6 \to D$ выполнены тождества (4.1.6.1)–(4.1.6.2), то φ — правило сложения с функцией избытка δ.*

в) *При условиях а) или б) функция избытка δ принимает значения во множестве $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, и имеет место следующая альтернативная формула для δ:*

$$\begin{aligned}\delta(x_0, x_1; y_0, y_1) = {} & \frac{x_0 + y_0}{2} + \frac{x_1 + y_1}{4} \\ & - \frac{\varphi(x_0, x_1, 0; y_0, y_1, 0)}{2} - \frac{\varphi(x_1, 0, 0; y_1, 0, 0)}{4}\end{aligned} \tag{4.1.6.3}$$

г) *При условиях а) или б) φ является ζ-правилом сложения для некоторого $\zeta \in D$ если и только если*

$$\delta(\zeta, x_0; \zeta, y_0) = \zeta \tag{4.1.6.4}$$

для всех x_0, $y_0 \in D$, и тогда

$$\delta(x_0, x_1; y_0, y_1) = \varphi(\zeta, x_0, x_1; \zeta, y_0, y_1) \tag{4.1.6.5}$$

Доказательство. б) При подстановке (4.1.6.1) в левую часть (4.1.2.1) немедленно получаем требуемое, если учесть (4.1.6.2). Надо только проверить, что δ совпадает с δ_φ, т.е. что выполнено (4.1.5.1). Однако согласно (4.1.6.1) и (4.1.6.2), $\varphi(0, 0, x_0; 0, 0, y_0) = \delta(0, x_0; 0, y_0)$ и $\varphi(0, x_0, x_1; 0, y_0, y_1) = -2\delta(0, x_0; 0, y_0) + \delta(x_0, x_1; y_0, y_1)$, так что правая сторона (4.1.5.1) действительно равна $\delta(x_0, x_1; y_0, y_1)$.

а) Докажем сначала (4.1.6.2). Для этого заметим, что, если положить $x_n = y_n = 0$ для всех $n \geq 0$ в (4.1.2.1), мы получим $8\varphi(0, 0, 0; 0, 0, 0) = 0$, откуда $\varphi(0,0,0;0,0,0) = 0$ и $\delta(0,0;0,0) = 0$ согласно (4.1.5.1). Докажем теперь (4.1.6.1). Рассмотрим для этого частный случай (4.1.2.1), когда $x_n = y_n = 0$ для всех $n \geq 3$:

$$4\varphi(0,0,x_0;0,0,y_0) + 2\varphi(0,x_0,x_1;0,y_0,y_1) + \varphi(x_0,x_1,x_2;y_0,y_1,y_2) - x_0 - y_0$$
$$= -\frac{1}{2}\varphi(x_1,x_2,0;y_1,y_2,0) - \frac{1}{4}\varphi(x_2,0,0;y_2,0,0) + \frac{x_1+y_1}{2} + \frac{x_2+y_2}{4} \tag{4.1.6.6}$$

Заметим, что правая сторона этого равенства не зависит от x_0 и y_0. Поэтому левая сторона не изменится, если мы в ней заменим x_0 и y_0, например, на нули:

$$4\varphi(0,0,x_0;0,0,y_0) + 2\varphi(0,x_0,x_1;0,y_0,y_1) + \varphi(x_0,x_1,x_2;y_0,y_1,y_2) - x_0 - y_0$$
$$= 2\varphi(0,0,x_1;0,0,y_1) + \varphi(0,x_1,x_2;0,y_1,y_2) \tag{4.1.6.7}$$

или, с учётом (4.1.5.1),

$$2\delta(x_0,x_1;y_0,y_1) + \varphi(x_0,x_1,x_2;y_0,y_1,y_2) - x_0 - y_0 = \delta(x_1,x_2;y_1,y_2) \tag{4.1.6.8}$$

Это и есть (4.1.6.1). Кроме того, поскольку $\delta(x_1,x_2;y_1,y_2)$ равно правой стороне (4.1.6.6), мы получаем формулу (4.1.6.3), правая сторона которой не превосходит по модулю $1 + 1/2 + 1/2 + 1/4 = 9/4$, что доказывает в).

г) Ясно, что приведённое условие достаточно, поскольку (4.1.6.4) и (4.1.6.1) влекут за собой (4.1.2.2). Докажем его необходимость. Предположим, выполнено (4.1.2.2). Проверим вспомогательное утверждение

$$\delta(\zeta,\zeta;\zeta,\zeta) = \zeta \tag{4.1.6.9}$$

В самом деле, из (4.1.6.3) и (4.1.2.2) следует $\delta(\zeta,\zeta;\zeta,\zeta) = 3\zeta/2 - \zeta/2 - \varphi(0,0,\zeta;0,0,\zeta)/4$, так что разность правой и левой сторон (4.1.6.9) — целое число, не превосходящее по модулю $1/4$, т.е. ноль, и (4.1.6.9) доказано. Теперь из (4.1.6.1) сразу следует $\delta(\zeta,x_2;\zeta,y_2) = \varphi(\zeta,\zeta,x_2;\zeta,\zeta,y_2) = \zeta$ по (4.1.2.2), и мы получаем требуемое (4.1.6.4). Равенство (4.1.6.5) теперь следует из (4.1.6.1) и (4.1.6.4).

Следствие 4.1.7 *(Корректность φ проверяется при сложении трёхзначных чисел.) Пусть $\varphi : D^6 \to D$ — такая функция, что тождество* (4.1.2.1) *выполнено при дополнительном ограничении $x_n = y_n = 0$ при всех*

$n \geq 3$, т.е. φ корректно складывает трёхзначные числа $(0.x_0x_1x_200\ldots)_2 + (0.y_0y_1y_200\ldots)_2$. Тогда φ — правило сложения, т.е. (4.1.2.1) выполнено без каких-либо ограничений.

Доказательство. Достаточно заметить, что доказательство **4.1.6**,а) использовало тождество (4.1.2.1) только при $x_n = y_n = 0$ для всех $n \geq 3$. Поэтому для такого «ограниченного правила сложения» φ также верны (4.1.6.1) и (4.1.6.2), откуда по **4.1.6**,б) получаем требуемое.

4.1.8. (Корректные функции избытка $\delta : D^4 \to \{-2, \ldots, 2\}$.) В дальнейшем мы будем рассматривать только *корректные* функции избытка, т.е. такие функции $\delta : D^4 \to \{-2, \ldots, 2\}$, что $\delta(0, 0; 0, 0) = 0$, и правая сторона (4.1.6.1) принимает значения в $D = \{-1, 0, 1\}$ для всех значений переменных:

$$\left|x_0 + y_0 - 2\delta(x_0, x_1; y_0, y_1) + \delta(x_1, x_2; y_1, y_2)\right| \leq 1 \quad \forall x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2 \in D \tag{4.1.8.1}$$

Теорема **4.1.6** устанавливает взаимно однозначное соответствие между локальными правилами сложения φ и корректными функциями избытка δ; это соответствие задаётся формулами (4.1.5.1) и (4.1.6.1).

4.1.9. (Более точное неравенство для δ.) Формула (4.1.6.3) показывает, что функция избытка $\delta(x_0, x_1; y_0, y_1)$ по существу является целочисленным приближением к $(x_0 + y_0)/2 + (x_1 + y_1)/4$. Более того, можно уточнить эту формулу следующим образом. Применим (4.1.2.1) для вычисления суммы $(0.x_0x_1\eta00\ldots)_2 + (0.y_0y_1\eta00\ldots)_2$, т.е. в ситуации, когда $x_2 = y_2 = \eta \in D$, $x_n = y_n = 0$ для всех $n \geq 3$. Учитывая (4.1.5.1) и (4.1.6.2), получаем

$$\begin{aligned} 4\delta(x_0, x_1; y_0, y_1) - 2(x_0 + y_0) - (x_1 + y_1) = \eta - 2\varphi(x_0, x_1, \eta; y_0, y_1, \eta) \\ - \varphi(x_1, \eta, 0; y_1, \eta, 0) - \varphi(\eta, 0, 0; \eta, 0, 0)/2 \end{aligned} \tag{4.1.9.1}$$

При $\eta = 0$ снова получаем (4.1.6.3). При $\eta = -1$ правая сторона (4.1.9.1) не превосходит $5/2$, а значит, двух, поскольку левая сторона должна быть целой. Аналогично, при $\eta = 1$ получаем, что обе стороны (4.1.9.1) не меньше -2. Отсюда

$$\left|\delta(x_0, x_1; y_0, y_1) - \frac{x_0 + y_0}{2} - \frac{x_1 + y_1}{4}\right| \leq \frac{1}{2} \tag{4.1.9.2}$$

4.1.10. (Возможные значения функции избытка δ.) Таким образом, функция избытка $\delta : \{-1,0,1\}^4 \to \{-2,-1,0,1,2\}$ может принимать не так много значений: согласно (4.1.9.2), допустимые значения $\delta(x_0,x_1;y_0,y_1)$ лежат на замкнутом отрезке вещественной прямой единичной длины, на котором есть только одна или две целых точки, т.е. $\delta(x_0,x_1;y_0,y_1)$ либо однозначно определено, либо является одним из двух соседних целых чисел. Точнее говоря, если $(x_0+y_0)/2+(x_1+y_1)/4$ не является полуцелым числом, то $\delta(x_0,x_1;y_0,y_1)$ однозначно определено и равно ближайшему целому числу. В противном случае $\delta(x_0,x_1;y_0,y_1)$ совпадает с одним из двух ближайших целых:

$$\left\lfloor \frac{x_0+y_0}{2}+\frac{x_1+y_1+1}{4}\right\rfloor \le \delta(x_0,x_1;y_0,y_1) \le \left\lfloor \frac{x_0+y_0}{2}+\frac{x_1+y_1+2}{4}\right\rfloor \tag{4.1.10.1}$$

Ясно, что $(x_0+y_0)/2+(x_1+y_1)/4$ полуцелое, если и только если $2y_0+y_1 \equiv 2-(2x_0+x_1) \pmod 4$, т.е. при $(2x_0+x_1, 2y_0+y_1) \in \{(-3,-3), (-3,1), (-2,0), (-1,-1), (-1,3), (0,-2), (0,2), (1,-3), (1,1), (2,0), (3,-1), (3,3)\}$. Поскольку $2x_0+x_1$ принимает значения ± 1 два раза, а остальные значения из $\{-3,-2,0,2,3\}$ по одному разу, мы видим, что $\delta(x_0,x_1;y_0,y_1)$ не определено однозначно в $1+2+1+2^2+2+1+1+2+2^2+1+2+1=22$ точках $\{-1,0,1\}^4$ из 81, и фиксировано в $81-22=59$ точках. Это оставляет 2^{22} вариантов для δ. Из них подходят только те, для которых

$$\Big|\delta(x_1,x_2;y_1,y_2)-\big(2\delta(x_0,x_1;y_0,y_1)-x_0-y_0\big)\Big| \le 1 \tag{4.1.10.2}$$

поскольку только в этом случае (4.1.6.1) задаёт функцию φ со значениями в $\{-1,0,1\}$.

4.1.11. (Таблица допустимых значений δ.) Из (4.1.10.1) мы получаем следующие ограничения на возможную таблицу значений δ:

x_0x_1	$\bar1\bar1$	$\bar10$	$\bar11$	$0\bar1$	00	01	$1\bar1$	10	11
$\bar1\bar1$	$-2\|-1$	-1	-1	-1	-1	$-1\|0$	$-1\|0$	0	0
$\bar10$	-1	-1	-1	-1	$-1\|0$	0	0	0	0
$\bar11$	-1	-1	$-1\|0$	$-1\|0$	0	0	0	0	$0\|1$
$0\bar1$	-1	-1	$-1\|0$	$-1\|0$	0	0	0	0	$0\|1$
00	-1	$-1\|0$	0	0	0	0	0	$0\|1$	1
01	$-1\|0$	0	0	0	0	$0\|1$	$0\|1$	1	1
$1\bar1$	$-1\|0$	0	0	0	0	$0\|1$	$0\|1$	1	1
10	0	0	0	0	$0\|1$	1	1	1	1
11	0	0	$0\|1$	$0\|1$	1	1	1	1	$1\|2$

Если δ соответствует универсальному правилу сложения, то согласно **4.1.6**,г), в верхнем левом квадрате 3×3 все элементы должны быть равны -1, в центральном — нулю, а в правом нижнем — единице, что оставляет только 2^{16} вариантов выбора δ. Мы вскоре увидим, что из этих 2^{16} вариантов корректны только $16 \cdot 18^2 = 5184$.

4.1.12. (Функция избытка δ для правила сложения из **4.1.4**.) В качестве примера приведём таблицу функции избытка δ для правила сложения φ из **4.1.4** согласно (4.1.5.3). Строки соответствуют x_0x_1, столбцы — y_0y_1, и мы пишем $\bar1$ вместо -1:

x_0x_1	$\bar1\bar1$	$\bar10$	$\bar11$	$0\bar1$	00	01	$1\bar1$	10	11
$\bar1\bar1$	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0
$\bar10$	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0
$\bar11$	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0
$0\bar1$	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0
00	-1	0	0	0	0	0	0	1	1
01	0	0	0	0	0	0	1	1	1
$1\bar1$	0	0	0	0	0	0	1	1	1
10	0	0	0	0	1	1	1	1	1
11	0	0	0	1	1	1	1	1	1

Можно проверить — например, на компьютере — что эта функция δ действительно соответствует φ из (4.1.4.1) согласно формуле (4.1.6.1), что доказывает теорему **4.1.4**. Универсальность этого правила сложения следует из **4.1.6**,г).

4.1.13. (δ и φ зависят от всех своих аргументов.) Заметим, что ограничения на функцию избытка $\delta(x_0, x_1; y_0, y_1)$, приведённые в таблице **4.1.11**, показывают, что δ действительно зависит от каждого из своих аргументов. Например, $\delta(0,0;-1,-1) = -1 \neq \delta(0,0;-1,1) = 0$ доказывает, что δ зависит от y_1. Отсюда следует, что правило сложения $\varphi(x_0, x_1, x_2; y_0, y_1, y_2)$ тоже зависит от каждого из своих аргументов. Для x_1, x_2, y_1 и y_2 это следует из (4.1.5.1): например, если бы φ не зависела от y_2, то δ не зависела бы от y_1, а мы только что видели, что это невозможно. Для x_0 и y_0 это следует из (4.1.6.3): например, если бы φ не зависела от y_0, то и $\delta(x_0, x_1; y_0, y_1) - y_0/2$ не зависела бы от y_0, что невозможно, поскольку y_0 принимает значения разной чётности.

4.1.14. (Локальные правила сложения должны задействовать по три цифры из каждого из слагаемых.) Как следствие, мы видим, что не существует локального правила сложения, задействующего, например, три цифры из первого слагаемого и только две цифры из второго слагаемого для получения очередной цифры (полу)суммы.

4.1.15. (Минимальная и максимальная функции избытка $\delta_{\min}$ и $\delta_{\max}$ и соответствующие правила сложения $\varphi_{\min}$, $\varphi_{\max}$.) Положим

$$\delta_{\min}(x_0, x_1; y_0, y_1) := \left\lfloor \frac{x_0 + y_0}{2} + \frac{x_1 + y_1 + 1}{4} \right\rfloor \tag{4.1.15.1}$$

$$\delta_{\max}(x_0, x_1; y_0, y_1) := \left\lfloor \frac{x_0 + y_0}{2} + \frac{x_1 + y_1 + 2}{4} \right\rfloor \tag{4.1.15.2}$$

так что согласно (4.1.10.1)

$$\delta_{\min}(x_0, x_1; y_0, y_1) \leq \delta(x_0, x_1; y_0, y_1) \leq \delta_{\max}(x_0, x_1; y_0, y_1) \tag{4.1.15.3}$$

для любой корректной функции избытка δ. Иначе говоря, $\delta_{\min}$ и $\delta_{\max}$ — это нижняя и верхняя границы для всевозможных функций избытка δ. Будем говорить, что $\delta_{\min}$ — это *минимальная* функция избытка, а $\delta_{\max}$ — *максимальная* функция избытка. Пусть $\varphi_{\min}$ и $\varphi_{\max}$ — соответствующие функции на D^6, определённые формулой (4.1.6.1):

$$\varphi_{\min}(x_0, x_1, x_2; y_0, y_1, y_2) = x_0 + y_0 - 2\delta_{\min}(x_0, x_1; y_0, y_1) + \delta_{\min}(x_1, x_2; y_1, y_2) \tag{4.1.15.4}$$

$$\varphi_{\max}(x_0, x_1, x_2; y_0, y_1, y_2) = x_0 + y_0 - 2\delta_{\max}(x_0, x_1; y_0, y_1) + \delta_{\max}(x_1, x_2; y_1, y_2) \tag{4.1.15.5}$$

Несложно проверить, что

$$\varphi_{\min}(x_0,x_1,x_2;y_0,y_1,y_2)=\left\lfloor\frac{2\big((2x_0+2y_0+x_1+y_1+1)\bmod 4\big)+x_2+y_2-1}{4}\right\rfloor \tag{4.1.15.6}$$

и

$$\varphi_{\max}(x_0,x_1,x_2;y_0,y_1,y_2)=\left\lfloor\frac{2\big((2x_0+2y_0+x_1+y_1+2)\bmod 4\big)+x_2+y_2-2}{4}\right\rfloor \tag{4.1.15.7}$$

и потому все значения $\varphi_{\min}$ действительно принадлежат $\{-1,0,1\}$, так что $\varphi_{\min}$ — локальное правило сложения, которое логично называть *минимальным правилом сложения*, а $\delta_{\min}$ — корректная функция избытка. Поскольку $\delta_{\max}$ получается из $\delta_{\min}$ отражением, т.е. $\delta_{\max}(x_0,x_1;y_0,y_1)=-\delta_{\min}(-x_0,-x_1;-y_0,-y_1)$, аналогичное утверждение верно и для $\varphi_{\max}$ с $\delta_{\max}$, так что $\varphi_{\max}$ — тоже правило сложения, которое мы назовём *максимальным правилом сложения*, а $\delta_{\max}$ — *максимальная функция избытка.*

4.1.16. (Дальнейшие ограничения на δ: минимумы и максимумы на квадратах 3×3.) Для любых x_0, $y_0\in D$ положим

$$m(x_0,y_0):=\min_{x_1,y_1\in D}\delta(x_0,x_1;y_0,y_1) \tag{4.1.16.1}$$

$$M(x_0,y_0):=\max_{x_1,y_1\in D}\delta(x_0,x_1;y_0,y_1) \tag{4.1.16.2}$$

$$R(x_0,y_0):=\big(m(x_0,y_0),M(x_0,y_0)\big) \tag{4.1.16.3}$$

Ясно, что $-2\le m(x_0,y_0)\le M(x_0,y_0)\le 2$. Кроме того, по определению выполнены неравенства

$$m(x_0,y_0)\le\delta(x_0,x_1;y_0,y_1)\le M(x_0,y_0)\quad\text{для всех } x_0,\ x_1,\ y_0,\ y_1\in D \tag{4.1.16.4}$$

Неравенство (4.1.10.2) теперь равносильно

$$M(x_1,y_1)-1\le 2\delta(x_0,x_1;y_0,y_1)-x_0-y_0\le m(x_1,y_1)+1 \tag{4.1.16.5}$$

Отсюда сразу видно, что $0\le M(x_1,y_1)-m(x_1,y_1)\le 2$. Более того, если $M(x_1,y_1)-m(x_1,y_1)=2$, то оба неравенства в (4.1.16.5) превращаются в равенства, т.е. $2\delta(x_0,x_1;y_0,y_1)-x_0-y_0=m(x_1,y_1)+1$ для таких x_1 и y_1 не зависит от выбора x_0 и y_0, что невозможно по соображениям чётности. Поэтому

$$0 \le M(x_1, y_1) - m(x_1, y_1) \le 1 \quad \text{для всех } x_1,\ y_1 \in D \tag{4.1.16.6}$$

Если эта разность равна единице, то верхняя и нижняя граница в (4.1.16.5) тоже отличаются на единицу, откуда

$$\delta(x_0, x_1; y_0, y_1) = \left\lfloor \frac{x_0 + y_0 + M(x_1, y_1)}{2} \right\rfloor \quad \text{при } M(x_1, y_1) > m(x_1, y_1) \tag{4.1.16.7}$$

Если же $M(x_1, y_1) = m(x_1, y_1)$, то в принципе возможны два варианта:

$$\left\lfloor \frac{x_0 + y_0 + M(x_1, y_1)}{2} \right\rfloor \le \delta(x_0, x_1; y_0, y_1) \le \left\lfloor \frac{x_0 + y_0 + M(x_1, y_1) + 1}{2} \right\rfloor \tag{4.1.16.8}$$

4.1.17. (Возможные значения для $m(x, y)$ и $M(x, y)$.) Перечислим возможные значения для $R(x, y) = \big(m(x, y), M(x, y)\big)$, исходя из ограничений на δ, указанных в **4.1.11**, и неравенства (4.1.16.6):

R	-1	0	1
-1	$(-2,-1)_a$, $(-1,-1)_b$, $(-1,0)_c$	$(-1,0)$	$(-1,0)_d$, $(0,0)_e$, $(0,1)_f$
0	$(-1,0)$	$(-1,0)_g$, $(0,0)_h$, $(0,1)_i$	$(0,1)$
1	$(-1,0)_j$, $(0,0)_k$, $(0,1)_l$	$(0,1)$	$(0,1)_m$, $(1,1)_n$, $(1,2)_o$

Для удобства мы пометили различные варианты буквами латинского алфавита, чтобы было проще на них потом ссылаться.

4.1.18. (Дополнительные ограничения на значения δ.) Выбор одного из вариантов значений $R(x, y) = \big(m(x, y), M(x, y)\big)$ из таблицы **4.1.17** накладывает два вида дополнительных ограничений на значения δ. Во-первых, неравенства (4.1.16.4) ограничивают диапазон допустимых значений в соответствующем квадрате $3{\times}3$. Например, $R(-1, -1) = (-1, -1)$ (вариант b) форсирует равенство всех элементов левого верхнего квадрата минус единице. В то же время вариант a: $R(-1, -1) = (-2, -1)$ форсирует $\delta(-1, -1; -1, -1) = -2$, потому что это единственный элемент этого квадрата 3×3, который мог бы равняться -2, а минимум должен где-то достигаться. Во-вторых, у нас есть ограничения (4.1.16.5), или, что равносильно, (4.1.16.7) и (4.1.16.8). Они накладывают условия на один элемент в каждом квадрате 3×3, или даже полностью определяют его значение. Например, $R(-1,-1) = (-2,-1)$ однозначно определяет значения в левом верхнем угле каждого квадрата 3×3 по формуле $\delta(x_0,-1;y_0,-1) = \lfloor (x_0 + y_0 - 1)/2 \rfloor$, получающейся из (4.1.16.7). Впрочем, из этих ограничений нетривиальны только те, что получаются по (4.1.16.7) при $M(x,y) - m(x,y) = 1$; ограничения (4.1.16.8) не дают ничего нового по сравнению с (4.1.10.1), т.е. по сравнению с таблицей **4.1.11**.

4.1.19. (Таблица дополнительных ограничений на δ.) Перечислим дополнительные ограничения на δ, описанные в предыдущем пункте, в зависимости от того, какие варианты значений R были выбраны из таблицы **4.1.17**:

	$\bar1\bar1$	$\bar10$	$\bar11$	$0\bar1$	00	01	$1\bar1$	10	11
$\bar1\bar1$	$-2_a\vert-1_{bc}$	-1	-1	-1	-1	$-1_d\vert 0_f$	$-1_{ad}\vert 0_{cef}$	0	0
$\bar10$	-1	-1	-1	-1	$-1_g\vert 0_i$	0	0	0	0
$\bar11$	-1	-1	$-1_{abm}\vert 0_{co}$	$-1_j\vert 0_l$	0	0	0	0	$0_{dem}\vert 1_{fo}$
$0\bar1$	-1	-1	$-1_d\vert 0_f$	$-1_{ag}\vert 0_{chi}$	0	0	0	0	$0_d\vert 1_f$
00	-1	$-1_g\vert 0_i$	0	0	0	0	0	$0_g\vert 1_i$	1
01	$-1_j\vert 0_l$	0	0	0	0	$0_{ghm}\vert 1_{io}$	$0_j\vert 1_l$	1	1
$1\bar1$	$-1_{aj}\vert 0_{ckl}$	0	0	0	0	$0_d\vert 1_f$	$0_{am}\vert 1_{cno}$	1	1
10	0	0	0	0	$0_g\vert 1_i$	1	1	1	1
11	0	0	$0_{jkm}\vert 1_{lo}$	$0_j\vert 1_l$	1	1	1	1	$1_{mn}\vert 2_o$

Буквенный индекс у одного из вариантов значений δ в этой таблице означает, что соответствующий выбор минимума и максимума из **4.1.17** форсирует выбор именно этого варианта в данной клетке.

После того, как учтены все ограничения, указанные в этой таблице — т.е. все ограничения, происходящие из (4.1.16.4) и (4.1.16.7) — мы вольны выбирать оставшиеся значения δ в таблице произвольным образом. В самом деле, такой выбор будет соответствовать выбору функций m, $M : D^2 \to \{-2,\ldots,2\}$ и $\delta : D^4 \to \{-2,\ldots,2\}$, удовлетворяющих неравенствам (4.1.16.4) и (4.1.16.5), а значит, и неравенствам (4.1.10.2), т.е. (4.1.8.1). Поскольку $\delta(0,0;0,0) = 0$, этого достаточно для корректности функции избытка δ, см. **4.1.8**, а значит, такое δ определяет некоторое правило сложения φ по формуле (4.1.6.1).

4.1.20. ($\delta_{\min}$ — это единственная корректная функция избытка, принимающая значение -2.) Покажем, как можно использовать таблицу из **4.1.19**. Для этого докажем, что единственная функция избытка δ, принимающая значение -2 — это $\delta_{\min}$ из (4.1.15.1), которая соответствует выбору минимальных значений во всех клетках **4.1.19**. В самом деле, если δ принимает значение -2, то $\delta(-1,-1;-1,-1)=-2$, поскольку это значение допустимо только в верхнем левом углу. Это форсирует выбор a: $R(-1,-1)=(-2,-1)$ в верхнем левом углу таблицы **4.1.17**. В свою очередь, выбор a фиксирует выбор минимального значения во всех верхних левых углах квадратов 3×3 таблицы **4.1.19**, в конечном итоге по (4.1.16.7). Далее, это определяет значение минимумов в каждом квадрате 3×3, откуда мы видим, что **4.1.17** должна в данном случае соответствовать выбору a, d, g, j, m:

R	-1	0	1
-1	$(-2,-1)_a$	$(-1,0)$	$(-1,0)_d$
0	$(-1,0)$	$(-1,0)_g$	$(0,1)$
1	$(-1,0)_j$	$(0,1)$	$(0,1)_m$

Поскольку в каждой клетке минимум и максимум отличаются на единицу, это фиксирует все неопределённые значения в **4.1.19** в их минимальные значения, в конечном итоге по формуле (4.1.16.7). В итоге мы получаем $\delta=\delta_{\min}$. Кроме того, таблица **4.1.19** показывает, что такой выбор не приводит к противоречию с a, d, g, j, m, и потому $\delta_{\min}$ — корректная функция избытка.

4.1.21. (Альтернатива: $\delta=\delta_{\min}$, $\delta_{\max}$, либо δ принимает только значения $\{-1,0,1\}$.) Аналогичным образом можно доказать, что если δ принимает значение 2, то это возможно только в правом нижнем углу, что форсирует выбор варианта o, что фиксирует выбор максимального из двух возможных значений в правых нижних углах всех квадратов 3×3, что означает выбор c, f, i, l, o и в итоге фиксирует максимальный выбор $\delta=\delta_{\max}$ во всех клетках. Таким образом, для любой корректной функции избытка δ выполнено ровно одно из трёх утверждений:

- Либо $\delta=\delta_{\min}$
- Либо $\delta=\delta_{\max}$

- Либо δ принимает значения в $D = \{-1, 0, 1\}$.

Отметим, что правила сложения, соответствующие $\delta_{\min}$ и $\delta_{\max}$, не являются ζ-правилами сложения ни при каком ζ.

В дальнейшем нас будут в основном интересовать функции δ, отличные от $\delta_{\min}$ и $\delta_{\max}$, т.е. такие, что δ принимает значения $\{-1, 0, 1\}$, или, что равносильно, такие, что $\delta(\zeta, \zeta; \zeta, \zeta) = \zeta$ для всех $\zeta \in D$. Это исключает варианты a и o из **4.1.17**.

4.1.22. (Случай c: $\delta(-1, 1; -1, 1) = 0$.) Предположим, $\delta \neq \delta_{\min}, \delta_{\max}$. Тогда есть два подслучая в зависимости от значения $\delta(-1, 1; -1, 1)$:

- Либо $\delta(-1, 1; -1, 1) = -1$; тогда $R(-1, -1) = (-1, -1)$ (вариант b), и δ соответствует некоторому (-1)-правилу сложения φ.

- Либо $\delta(-1, 1; -1, 1) = 0$; тогда φ не является (-1)-правилом сложения, и $R(-1, -1) = (-1, 0)$ (вариант c), что форсирует выбор максимального из двух возможных значений во всех верхних левых углах квадратов 3×3.

Рассмотрим второй подслучай более подробно. Отметим, что тогда $\delta(1, -1; 1, -1)$ оказывается равно 1, и потому соответствующее φ является 1-правилом сложения, но не является (-1)-правилом сложения. После этого у нас остаётся выбор только в следующих клетках:

	$\bar1\bar1$	$\bar10$	$\bar11$	$0\bar1$	00	01	$1\bar1$	10	11
$\bar1\bar1$	-1	-1	-1	-1	-1	$-1 \mid 0_f$	0	0	0
$\bar10$	-1	-1	-1	-1	$-1 \mid 0_i$	0	0	0	0
$\bar11$	-1	-1	0	$-1 \mid 0_l$	0	0	0	0	$0_e \mid 1_f$
$0\bar1$	-1	-1	$-1 \mid 0_f$	0	0	0	0	0	$0 \mid 1_f$
00	-1	$-1 \mid 0_i$	0	0	0	0	0	$0 \mid 1_i$	1
01	$-1 \mid 0_l$	0	0	0	0	$0_h \mid 1_i$	$0 \mid 1_l$	1	1
$1\bar1$	0	0	0	0	0	$0 \mid 1_f$	1	1	1
10	0	0	0	0	$0 \mid 1_i$	1	1	1	1
11	0	0	$0_k \mid 1_l$	$0 \mid 1_l$	1	1	1	1	1

Основная интрига здесь — выбор трёх значений $v_\alpha = \delta(\alpha, 1; -\alpha, 1) \in \{0, 1\}$. Каждое из этих значений контролирует четыре зависимых значения $\delta(x_0, \alpha; y_0, -\alpha)$ при $|x_0| + |y_0| = 1$: если $v_\alpha = 1$, то все эти четыре значения фиксируются в максимально возможное значение; если же

$v_\alpha = 0$, то они могут выбираться произвольно $2^4 = 16$ способами. Итого получаем $(2^4+1)^3 = 17^3 = 4913$ вариантов выбора δ, соответствующих 1-правилам сложения φ, не являющимся (-1)-правилами сложения. Аналогично, существует $(2^4+1)^3 = 17^3$ (-1)-правил сложения, не являющихся 1-правилами; они характеризуются условием $\delta(1,-1;1,-1) = 0$.

Все остальные корректные функции избытка δ соответствуют правилам сложения φ, являющимся одновременно 1-правилами и (-1)-правилами.

4.1.23. (Альтернативное описание ограничений на δ.) Ограничения на корректную функцию избытка δ могут быть выражены другим эквивалентным образом. Пусть $\delta_{\min}$ и $\delta_{\max}$ — минимальная и максимальная функции избытка, заданные (4.1.15.1) и (4.1.15.2). Тогда $\delta_{\min} \leq \delta \leq \delta_{\max}$.

Пусть $V = \{v \in D^4 : \delta_{\min}(v) < \delta_{\max}(v)\}$ — 22-элементное множество клеток таблицы, на которых значение δ не определено однозначно ограничениями (4.1.15.3). Для каждого $v \in V$ заведём булеву переменную $X_v := \delta(v) - \delta_{\min}(v)$. Для удобства положим $X_w := 0$ при $w \in D^4 - V$, так что теперь $\delta = \delta_{\min} + X$, где $X : D^4 \to \{0,1\}$, $X(v) = X_v$. Таким образом, δ допускает описание в терминах отображений $X : V \to \{0,1\}$, которые мы можем считать продолженными нулём на D^4, и нам надо понять, какие наборы значений булевых переменных соответствуют корректным δ, т.е. таким, что выполнено (4.1.8.1), или, что одно и то же, таким, что соответствующая по (4.1.6.1) функция φ принимает значения в $\{-1,0,1\}$. Поскольку $\delta(v) = \delta_{\min}(v) + X_v$, мы можем записать (4.1.6.1) в виде

$$\varphi(x_0,x_1,x_2;y_0,y_1,y_2) = \varphi_{\min}(x_0,x_1,x_2;y_0,y_1,y_2) - 2X_u + X_v \qquad (4.1.23.1)$$

где $u = (x_0,x_1,y_0,y_1)$ и $v = (x_1,x_2,y_1,y_2)$. Условие принадлежности этого выражения множеству $\{-1,0,1\}$ зависит от конкретного значения $\varphi_{\min}$ в этой точке:

- Если $\varphi_{\min}(x_0,x_1,x_2;y_0,y_1,y_2) = -1$, то должно быть $X_u = 0$.
- Если $\varphi_{\min}(x_0,x_1,x_2;y_0,y_1,y_2) = 0$, то должно быть $X_u = 0$ или $X_v = 1$, т.е. $X_u \leq X_v$, что может быть записано как $X_u \Rightarrow X_v$.
- Если $\varphi_{\min}(x_0,x_1,x_2;y_0,y_1,y_2) = 1$, то должно быть $X_u = 1$ или $X_v = 0$, т.е. $X_v \leq X_u$, что может быть записано как $X_v \Rightarrow X_u$.

Можно проверить, что условие $X_u = 0$ возникает только для $u \in D^4 - V$ (например, воспользовавшись тем фактом, что $\delta = \delta_{\max}$ корректно, а для него $X_v = 1$ при всех $v \in V$), так что первое правило не даёт новых ограничений. Пусть E — множество всех пар $(u, v) \in V^2$, для которых должна быть верна импликация $X_u \Rightarrow X_v$ по одному из правил выше. Тогда ориентированный граф (V, E) кодирует абсолютно все условия на δ. Если $\preceq$ — частичный порядок на V, порождённый E, то корректные функции избытка δ оказываются во взаимно однозначном соответствии с идеалами в частично упорядоченном множестве $(V, \preceq)$.

4.1.24. (Явное перечисление рёбер графа (V, E), или импликаций между булевыми переменными X_v.) Мы можем явно перечислить все рёбра графа зависимостей, т.е. множество $E \subset V \times V$ из предыдущего пункта, с помощью таблицы значений функции $\varphi_{\min}$. В итоге получаем 43 ребра; из них два являются петлями из $(-1, -1, -1, -1)$ или $(1, 1, 1, 1)$ в себя, т.е. импликациями $X_1 \Rightarrow X_1$ и $X_{22} \Rightarrow X_{22}$ в обозначениях ниже, и потому могут быть выкинуты. Кроме того, импликации $X_1 \Rightarrow X_{21}$ и $X_2 \Rightarrow X_{22}$ являются следствиями $X_1 \Rightarrow X_3 \Rightarrow X_{21}$ и $X_2 \Rightarrow X_8 \Rightarrow X_{22}$ и потому также избыточны. Остаётся 39 условий:

$$X_1 \Rightarrow \{X_2, X_3, X_9, X_{15}\} \tag{4.1.24.1}$$
$$X_2 \Rightarrow \{X_8, X_{14}, X_{20}, X_{21}\} \tag{4.1.24.2}$$
$$X_3 \Rightarrow \{X_4, X_5, X_6, X_7\} \Rightarrow X_8 \tag{4.1.24.3}$$
$$X_9 \Rightarrow \{X_{10}, X_{11}, X_{12}, X_{13}\} \Rightarrow X_{14} \tag{4.1.24.4}$$
$$X_{15} \Rightarrow \{X_{16}, X_{17}, X_{18}, X_{19}\} \Rightarrow X_{20} \tag{4.1.24.5}$$
$$\{X_3, X_9, X_{15}\} \Rightarrow X_{21} \tag{4.1.24.6}$$
$$\{X_8, X_{14}, X_{20}, X_{21}\} \Rightarrow X_{22} \tag{4.1.24.7}$$

где переменные X_i занумерованы следующим образом:

δ	$\bar1\bar1$	$\bar10$	$\bar11$	$0\bar1$	00	01	$1\bar1$	10	11
$\bar1\bar1$	$X_{22}-2$	-1	-1	-1	-1	$X_{16}-1$	$X_{20}-1$	0	0
$\bar10$	-1	-1	-1	-1	$X_{10}-1$	0	0	0	0
$\bar11$	-1	-1	X_2-1	X_4-1	0	0	0	0	X_{15}
$0\bar1$	-1	-1	$X_{17}-1$	$X_{14}-1$	0	0	0	0	X_{18}
00	-1	$X_{11}-1$	0	0	0	0	0	X_{12}	1
01	X_5-1	0	0	0	0	X_9	X_6	1	1
$1\bar1$	X_8-1	0	0	0	0	X_{19}	X_{21}	1	1
10	0	0	0	0	X_{13}	1	1	1	1
11	0	0	X_3	X_7	1	1	1	1	X_1+1

Ясно, что приведённые выше условия кодируют ровно те же ограничения на значения корректной функции избытка δ, что и таблицы **4.1.19** и **4.1.17**. Например, если $X_{22}=0$, то необходимо все $X_v=0$, что соответствует тому, что $\delta_{\min}$ — единственная функция избытка, принимающая значение -2, и аналогично $X_1=1$ влечёт $X_v=1$ для всех $v\in V$ и $\delta=\delta_{\max}$. Точно так же 1-правила сложения, не являющиеся (-1)-правилами, что были изучены в **4.1.22**, соответствуют $X_1=0$, $X_2=1$, а симметричный случай (-1)-правил сложения, не являющихся 1-правилами — $X_{21}=0$, $X_{22}=1$.

Однако таблицы более удобны для построения и изучения вручную, в то время как приведённый выше список условий на X_v, т.е. граф (V,E), удобней строить и использовать на компьютере.

4.1.25. (Завершение классификации: 1-правила сложения, являющиеся также (-1)-правилами.) Мы уже классифицировали в **4.1.21** и **4.1.22** все функции δ, соответствующие правила сложения φ для которых не являются одновременно 1- и (-1)-правилами сложения, и обнаружили, что их $1+1+2\cdot17^3=9828$ штук. Завершим классификацию, рассмотрев случай, когда φ является одновременно 1-правилом и (-1)-правилом, что соответствует $X_1=X_2=0$, $X_{21}=X_{22}=1$ в обозначениях **4.1.24**. Тогда единственные нетривиальные оставшиеся условия — это (4.1.24.3)—(4.1.24.5), которые имеют вид $X_a\Rightarrow\{X_b,X_c,X_d,X_e\}\Rightarrow X_f$ для трёх непересекающихся наборов из шести переменных. Ясно, что в каждом таком наборе переменные могут быть выбраны $1+1+2^4=18$ способами (либо все переменные равны, либо $X_a=0$, $X_f=1$, а остальные четыре переменные выбираются произвольно), так что существует ровно $18^3=5832$ правил сложения, являющихся одновременно 1-правилами и (-1)-правилами.

Итого получаем, что существует ровно $2+2\cdot 17^3+18^3 = 15660$ локальных правил сложения.

4.1.26. (Универсальные правила сложения.) Универсальные правила сложения выделяются условиями $X_1 = X_2 = X_9 = 0$, $X_{22} = X_{21} = X_{14} = 1$, что оставляет $16 \cdot 18^2 = 5184$ вариантов. Итак, существует ровно 5184 универсальных локальных правил сложения.

4.1.27. (Коммутативные правила сложения.) Классифицируем все *коммутативные* правила сложения φ, т.е. такие, что $\varphi(x_0, x_1, x_2; y_0, y_1, y_2) = \varphi(y_0, y_1, y_2; x_0, x_1, x_2)$, или, что равносильно, $\delta(x_0, x_1; y_0, y_1) = \delta(y_0, y_1; x_0, x_1)$. Это условие на δ может быть легко записано в терминах булевых переменных X_v из **4.1.24**: мы получаем дополнительные равенства $X_3 = X_{15}$, $X_4 = X_{17}$, $X_5 = X_{16}$, $X_6 = X_{19}$, $X_7 = X_{18}$, $X_8 = X_{20}$, $X_{10} = X_{11}$, $X_{12} = X_{13}$, с помощью которых мы можем упростить (4.1.24.1)–(4.1.24.7) до

$$X_1 \Rightarrow \{X_2, X_3, X_9\} \tag{4.1.27.1}$$
$$X_2 \Rightarrow \{X_8, X_{14}, X_{21}\} \tag{4.1.27.2}$$
$$X_3 \Rightarrow \{X_4, X_5, X_6, X_7\} \Rightarrow X_8 \tag{4.1.27.3}$$
$$X_9 \Rightarrow \{X_{10}, X_{12}\} \Rightarrow X_{14} \tag{4.1.27.4}$$
$$\{X_3, X_9\} \Rightarrow X_{21} \tag{4.1.27.5}$$
$$\{X_8, X_{14}, X_{21}\} \Rightarrow X_{22} \tag{4.1.27.6}$$

Отсюда мы легко вычисляем, что коммутативные правила сложения классифицируются следующим образом: это $\varphi_{\min}$, $\varphi_{\max}$, ещё $17 \cdot 5 = 85$ коммутативных 1-правил сложения, не являющихся (-1)-правилами, и столько же коммутативных (-1)-правил, не являющихся 1-правилами, и $18\cdot 6 = 108$ коммутативных 1-правил, являющихся также (-1)-правилами. Из последних можно выделить $18\cdot 4 = 72$ универсальных коммутативных правила. Итого $2 + 2 \cdot 85 + 108 = 280$ коммутативных правил сложения, из которых 72 универсальных.

4.1.28. (Симметричные правила сложения.) Классифицируем все *симметричные* правила сложения, т.е. такие, что

$$\varphi(-x_0, -x_1, -x_2; -y_0, -y_1, -y_2) = -\varphi(x_0, x_1, x_2; y_0, y_1, y_2) \tag{4.1.28.1}$$

что равносильно

$$\delta(-x_0, -x_1; -y_0, -y_1) = -\delta(x_0, x_1; y_0, y_1) \tag{4.1.28.2}$$

В терминах булевых переменных X_v из **4.1.24** это равносильно условиям $X_i + X_{23-i} = 1$ или $X_i \neq X_{23-i}$ для всех $1 \leq i \leq 22$; в частности, $X_1 \neq X_{22}$, $X_2 \neq X_{21}$, $X_9 \neq X_{14}$, откуда $X_1 = X_2 = X_9 = 0$, $X_{22} = X_{21} = X_{14} = 1$, поскольку из условий (4.1.24.1)–(4.1.24.7) известно, что $X_1 \leq X_{22}$, $X_2 \leq X_{21}$, $X_9 \leq X_{14}$. Таким образом, все симметричные правила сложения автоматически являются универсальными. Условия на оставшиеся переменные равносильны

$$X_3 \Rightarrow \{X_4, X_5, X_6, X_7\} \Rightarrow X_8 \tag{4.1.28.3}$$

$$0 \Rightarrow \{X_{10}, X_{11}, \bar{X}_{11}, \bar{X}_{10}\} \Rightarrow 1 \tag{4.1.28.4}$$

$$\bar{X}_8 \Rightarrow \{\bar{X}_7, \bar{X}_6, \bar{X}_5, \bar{X}_4\} \Rightarrow \bar{X}_3 \tag{4.1.28.5}$$

где мы заменили X_i при $i \geq 12$ на логическое отрицание $\bar{X}_{23-i} = 1 - X_{23-i}$. Видно, что (4.1.28.5) равносильно (4.1.28.3) и потому избыточно, а (4.1.28.4) по существу означает, что X_{10} и X_{11} могут принимать произвольные значения. В итоге мы получаем $18 \cdot 4 = 72$ симметричных правила сложения, все из которых являются универсальными.

4.1.29. (Восемь симметричных коммутативных правил сложения.) Классифицируем все симметричные коммутативные правила сложения. Для этого надо скомбинировать (4.1.28.3)–(4.1.28.4) с дополнительными условиями коммутативности $X_3 = \bar{X}_8$, $X_4 = \bar{X}_6$, $X_5 = \bar{X}_7$, $X_{10} = X_{11}$. Поскольку $X_3 \Rightarrow X_8$, отсюда $X_3 = 0$, $X_8 = 1$. Получаем

$$0 \Rightarrow \{X_4, X_5, \bar{X}_4, \bar{X}_5\} \Rightarrow 1 \tag{4.1.29.1}$$

$$0 \Rightarrow \{X_{10}, \bar{X}_{10}\} \Rightarrow 1 \tag{4.1.29.2}$$

Иначе говоря, оставшиеся переменные X_4, X_5, X_{10} могут выбираться произвольно, и у нас есть восемь симметричных коммутативных правил сложения, все восемь из которых являются универсальными. Соответствующие функции избытка δ задаются таблицей

δ	$\bar{1}\bar{1}$	$\bar{1}0$	$\bar{1}1$	$0\bar{1}$	00	01	$1\bar{1}$	10	11
$\bar{1}\bar{1}$	-1	-1	-1	-1	-1	$-\gamma$	0	0	0
$\bar{1}0$	-1	-1	-1	-1	$-\beta$	0	0	0	0
$\bar{1}1$	-1	-1	-1	$-\alpha$	0	0	0	0	0
$0\bar{1}$	-1	-1	$-\alpha$	0	0	0	0	0	γ
00	-1	$-\beta$	0	0	0	0	0	β	1
01	$-\gamma$	0	0	0	0	0	α	1	1
$1\bar{1}$	0	0	0	0	0	α	1	1	1
10	0	0	0	0	β	1	1	1	1
11	0	0	0	γ	1	1	1	1	1

где параметры $\alpha = X_6 = 1 - X_4$, $\beta = X_{12} = 1 - X_{10}$, $\gamma = X_7 = 1 - X_5$ могут принимать произвольные значения из $\{0, 1\}$.

4.1.30. (Формулы для некоторых симметричных коммутативных правил сложения.) Некоторые симметричные коммутативные правила сложения φ, или как минимум соответствующие функции избытка δ, могут быть заданы простыми формулами. Например, если обозначить $D := 3(x_0 + y_0) + x_1 + y_1$, то

$$\begin{aligned}\delta_0(x_0, x_1, x_2; y_0, y_1, y_2) &= [D \geq 4] - [D \leq -4] \\ &= \left\lfloor \frac{3(x_0 + y_0) + x_1 + y_1 + 3}{7} \right\rfloor\end{aligned} \tag{4.1.30.1}$$

соответствует $\alpha = \beta = \gamma = 0$ (максимум нулей в таблице) в **4.1.29**, а

$$\begin{aligned}\delta_1(x_0, x_1, x_2; y_0, y_1, y_2) &= [D \geq 3] - [D \leq -3] \\ &= \left\lfloor \frac{6(x_0 + y_0) + 2(x_1 + y_1) + 5}{11} \right\rfloor\end{aligned} \tag{4.1.30.2}$$

соответствует $\alpha = \beta = \gamma = 1$ (минимум нулей в таблице). Функции избытка $\delta_{\min}$ и $\delta_{\max}$ принимают нулевое значение в 43 точках из 81, в то время как δ_0 — в 51 точке, а δ_1 — в 39. Соответствующие правила сложения $\varphi_{\min}$ и $\varphi_{\max}$ равны нулю в 368 точках из 729, φ_0 и φ_1 — в 375 и 363, соответственно. Можно проверить на компьютере, что δ_1 и φ_1 действительно обладают минимальными количествами нулей среди всех корректных функций избытка и локальных правил сложения, причём и по тому, и по другому параметру минимум единственен. Однако δ_0

и φ_0, хотя и недалеки от максимумов по количеству нулевых значений, но не являются ими: существуют ровно две δ с 52 нулевыми значениями (что является максимально возможным количеством нулей) и им соответствуют два φ с 376 нулевыми значениями (что также является максимумом).

4.1.31. (Локальное правило сложения с максимальным количеством нулей.) Приведём для интереса таблицу одной из двух функций избытка δ, принимающей максимально возможное количество нулевых значений (то есть 52):

δ	$\bar{1}\bar{1}$	$\bar{1}0$	$\bar{1}1$	$0\bar{1}$	00	01	$1\bar{1}$	10	11
$\bar{1}\bar{1}$	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0
$\bar{1}0$	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0
$\bar{1}1$	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0
$0\bar{1}$	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0
00	-1	0	0	0	0	0	0	0	1
01	0	0	0	0	0	0	0	1	1
$1\bar{1}$	0	0	0	0	0	0	1	1	1
10	0	0	0	0	0	1	1	1	1
11	0	0	0	0	1	1	1	1	1

Видно, что δ отличается от δ_0 из предыдущего пункта только значением $\delta(-1,1;-1,1) = 0$ вместо -1. Поэтому правило сложения φ, соответствующее δ, коммутативно, но не симметрично; симметричные δ' и φ' отличаются от δ_0 значением $\delta'(1,-1;1,-1) = 0$ вместо 1. Ясно, что δ' — это вторая функция избытка, принимающая 52 нулевых значений. Соответствующие коммутативные правила сложения φ и симметричное ему φ' обладают максимальным количеством нулей (376 из 729).

4.1.32. (Естественные частоты цифр из D: половина цифр — нули.) Заметим, что правила сложения φ принимают нулевые значения примерно в половине случаев (от 368 до 376 случаев из 729 в зависимости от φ). Это означает, что даже если в слагаемых $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ цифры были равновероятны, в сумме $\boldsymbol{x} \oplus_\varphi \boldsymbol{y}$, вычисленной с помощью локального правила φ, распределение цифр будет иным: примерно половина цифр будут нулями, остальные — единицы и минус единицы, вообще говоря, примерно поровну (или просто поровну, если φ симметрично). Таким образом, можно заключить, что естественное распределение частот цифр из D или их вероятностей таково: $P(0) = 1/2$, $P(1) = 1/4$, $P(\bar{1}) = 1/4$. Интересно проверить, что получается, если цифры слагаемых $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ не равновероятны, а изначально распределены согласно этому закону. Перебор на компьютере показывает, что *для любого правила сложения φ вероятность получить нулевое значение при указанных вероятностях исходных цифр равно в точности* $1/2$. Если при этом ещё и взять симметричное φ, то вероятности получить единицу и минус единицу будут равны друг другу, а значит, равны в точности $1/4$ (для несимметричных φ эти вероятности принимают значения от $3/16$ до $5/16$). Иначе говоря, наше «естественное распределение вероятностей на цифрах» устойчиво при сложении: если цифры слагаемых были распределены таким образом, то и цифры суммы тоже будут так распределены.

Заметим на всякий случай, что соседние цифры суммы на самом деле зависимы, даже если цифры слагаемых были независимыми случайными величинами, так что приведённый выше вероятностный анализ, формально говоря, неточен, особенно если мы используем ранее полученные суммы в качестве слагаемых для новых сумм.

4.1.33. (Дополнительное свойство: все правила сложения комплементарны.) Назовём правило сложения φ *комплементарным*, если при сложении чисел $(0.x_0x_1x_2\ldots)_2$ и $(0.\bar{x}_0\bar{x}_1\bar{x}_2\ldots)_2$, где $\bar{x}_n = -x_n$, получается ноль в виде $(0.000\ldots)_2$. Иначе говоря, при сложении x и наиболее естественного представителя $-x$ получается ноль. Ясно, что это условие равносильно тождеству $\varphi(x_0, x_1, x_2; -x_0, -x_1, -x_2) = 0$, а оно, в свою очередь, равносильно $\delta(x_0, x_1; -x_0, -x_1) = 0$. Однако ограничения на корректную функцию избытка δ из **4.1.11** показывают, что это условие выполнено всегда, т.е. *все правила сложения комплементарны*.

4.1.34. (Дополнительное свойство: ζ-прозрачность.) Назовём правило сложения φ *ζ-прозрачным (справа)* для некоторого $\zeta \in D$, если выполнено тождество

$$\varphi(x_0, x_1, x_2; \zeta, \zeta, \zeta) = x_0 \tag{4.1.34.1}$$

Например, 0-прозрачность означает, что при сложении большого числа и маленького первые цифры большого числа не изменяются:

$$(0.x_0x_1\ldots x_n\ldots)_2 + (0.00\ldots 0y_ny_{n+1}\ldots)_2 = (0.x_0x_1\ldots x_{n-3}z_{n-2}z_{n-1}\ldots)_2$$

Это может быть полезно, если, например, мы хотим вычислять суммы рядов, таких, как $e = \sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$, или даже просто умножать числа по формуле

$$(0.x_0x_1\ldots)_2\cdot(0.y_0y_1\ldots)_2=\sum_{n=0}^{\infty}y_n\cdot(0.\overbrace{00\ldots0}^{n+1}x_0x_1\ldots)_2 \qquad (4.1.34.2)$$

поскольку тогда мы можем быть уверены, что первые цифры промежуточной суммы заведомо не будут изменяться, начиная с некоторого момента. Если же 0-прозрачности нет, первые цифры могут всё время изменяться и не будет сходимости двоичных представлений частичных сумм по цифрам.

Согласно (4.1.5.1) и (4.1.6.1), 0-прозрачность φ равносильна тождеству $\delta(x_0,x_1;0,0)=0$, что невозможно из-за ограничений на δ из **4.1.11**: например, обязательно $\delta(-1,-1;0,0)=-1\neq 0$. Для $\zeta\neq 0$ будем рассуждать, как при выводе (4.1.9.1): применим правило сложения для вычисления $(0.x_0x_1x_2\zeta\zeta\zeta\ldots)_2+(0.\zeta\zeta\zeta\ldots)_2$. Обозначим $\alpha:=\varphi(\zeta,\zeta,\zeta;\zeta,\zeta,\zeta)$; тогда

$$\begin{aligned}2\delta(x_0,x_1;\zeta,\zeta)+\varphi(x_0,x_1,x_2;\zeta,\zeta,\zeta)+\frac{1}{2}\varphi(x_1,x_2,\zeta;\zeta,\zeta,\zeta)\\+\frac{1}{4}\varphi(x_2,\zeta,\zeta;\zeta,\zeta,\zeta)+\frac{\alpha}{4}=x_0+\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{4}+\frac{5\zeta}{4}\end{aligned} \qquad (4.1.34.3)$$

Если φ ζ-прозрачно, то $\alpha=\zeta$, и получаем

$$2\delta(x_0,x_1;\zeta,\zeta)=\frac{5\zeta-\alpha}{4}=\zeta \qquad (4.1.34.4)$$

Тогда $\zeta=2\delta(x_0,x_1;\zeta,\zeta)$ было бы чётным, что невозможно при $\zeta\neq 0$. Мы заключаем, что *ζ-прозрачных правил сложения не существует ни при каком ζ.*

4.1.35. (Обобщение: (λ,μ)-правила сложения.) Для преодоления указанной выше трудности мы можем рассмотреть более общие *(λ,μ)-правила сложения* $f:D^{2(\lambda+\mu+1)}\to D$, где λ, $\mu\in\mathbb{N}_0$. Это такие функции

$$f(x_{-\lambda:\mu},y_{-\lambda:\mu})=f(x_{-\lambda},x_{-\lambda+1},\ldots,x_{\mu-1},x_\mu;y_{-\lambda},y_{-\lambda+1},\ldots,y_{\mu-1},y_\mu)\quad,$$

что выполнено тождество

$$\sum_{n=-\mu}^{\infty}f(x_{n-\lambda},\ldots,x_{n+\mu};y_{n-\lambda},\ldots,y_{n+\mu})2^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(x_n+y_n)2^{-n} \qquad (4.1.35.1)$$

для всех x_n, $y_n \in D$, где мы полагаем $x_n = y_n = 0$ при $n < 0$. Ранее определённые в **4.1.2** локальные правила сложения — это в действительности $(0, 2)$-правила сложения. Аналогично теореме **4.1.6**, (λ, μ)-правила сложения соответствуют функциям избытка $\delta(x_{-\lambda}, \ldots, x_{\mu-1}; y_{-\lambda}, \ldots, y_{\mu-1})$, $\delta : D^{2(\lambda+\mu)} \to \mathbb{Z}$, принимающим небольшие целые значения; при этом в аналоге формулы (4.1.5.1) будет $\lambda + \mu$ слагаемых с участием f, однако в (4.1.6.1) останется по-прежнему два слагаемых с δ:

$$\delta(x_{-\lambda:\mu-1}; y_{-\lambda:\mu-1}) = \sum_{k=0}^{\lambda+\mu-1} 2^k f(\overbrace{0, \ldots, 0}^{k+1}, x_{-\lambda:\mu-k-1}; \overbrace{0, \ldots, 0}^{k+1}, y_{-\lambda:\mu-k-1}) - \sum_{k=0}^{\lambda-1} 2^k (x_{-k-1} + y_{-k-1}) \tag{4.1.35.2}$$

и

$$f(x_{-\lambda:\mu}; y_{-\lambda:\mu}) = x_0 + y_0 - 2\delta(x_{-\lambda:\mu-1}; y_{-\lambda:\mu-1}) + \delta(x_{-\lambda+1:\mu}; y_{-\lambda+1:\mu}) \tag{4.1.35.3}$$

Для таких функций избытка δ будет верен аналог неравенства (4.1.9.2):

$$\left|\delta(x_{-\lambda:\mu-1}; y_{-\lambda:\mu-1}) - \sum_{k=0}^{\mu-1} 2^{-k-1}(x_k + y_k)\right| \leq 1 - 2^{1-\mu} \tag{4.1.35.4}$$

которое доказывается аналогичным образом с помощью сложения чисел $(x_{-\lambda} \ldots x_{-1}.x_0 \ldots x_\mu \eta\eta \ldots)_2$ и $(y_{-\lambda} \ldots y_{-1}.y_0 \ldots y_\mu \eta\eta \ldots)_2$ при $\eta = -1$ и $\eta = 1$.

Получающаяся классификация (λ, μ)-правил сложения в общих чертах похожа на ту, что была проделана выше при $\lambda = 0$ и $\mu = 2$: допустимые значения $\delta(v)$, где $v = (x_{-\lambda:\mu-1}, y_{-\lambda:\mu-1})$, оказываются зажаты между некоторыми $\delta^*_{\min}(v)$ и $\delta^*_{\max}(v)$, которые отличаются максимум на единицу. Если завести булевы переменные X_v для разности $\delta - \delta^*_{\min}$ в тех позициях, где эта разность может быть ненулевой, то мы снова получим некоторое множество импликаций, аналогичное (4.1.24.1)–(4.1.24.7), которое описывает пространство всех (λ, μ)-правил сложения. Однако не очень понятно, есть ли реальная польза от $\lambda > 0$ или $\mu > 2$, поскольку, например, получить 0-прозрачные правила сложения не удаётся по той же причине, что и раньше: необходимо $\delta(1, \ldots, 1; 0, \ldots, 0) = 1 \neq 0$ ввиду (4.1.35.4).

4.1.36. (Прозрачные локальные правила сложения не существуют.) Проиллюстрируем, почему не получается построить прозрачные правила сложения чисел $(0.x_0x_1\ldots) + (0.y_0y_1\ldots)_2 = (z_{-\lambda}\ldots z_{-1}.z_0z_1\ldots)_2$, обладающие тем свойством, что z_n полностью определяется $(x_i)_{0\le i\le n+\mu}$ и $(y_i)_{0\le i\le n+\mu}$ для некоторого $\mu \ge 0$. Предположим, нас просят сложить $(0.1111\ldots)_2$ и $(0.0000\ldots)_2$, где далёкие цифры неизвестны и в конечном итоге могут оказаться какими угодно. Если наше правило сложения прозрачно, мы должны начать выводить $(0.11\ldots)_2$, после того, как прочитаем достаточно много единиц из первого числа и нулей из второго. Однако если первое число действительно состоит из одних единиц, а второе где-то очень далеко содержит хотя бы одну единицу, то итоговая сумма будет строго больше единицы, а мы не сможем продолжить $(0.11\ldots)_2$ так, чтобы это стало записью числа, большего единицы. Это рассуждение показывает, что в действительности мы должны начать в какой-то момент выводить $(1.00\ldots)_2$, поскольку такое начало суммы допускает больше гибкости в дальнейшем.

4.2 Вещественные и 2-адические правила сложения

Можно ли аналогичным образом локально складывать 2-адические числа? Оказывается, что да, причём с помощью тех же локальных правил сложения φ, что и вещественные числа. Это позволяет построить совместное представление $\mathbb{Q}_2$ и $\mathbb{R}$ с помощью двоичных дробей, бесконечных в обе стороны, по аналогии с формальными степенными рядами над конечным полем $\mathbb{F}_q$, бесконечными в обе стороны.

Введём следующее определение:

Определение 4.2.1 *(2-адические правила сложения.) Функция* $\varphi : D^6 \to D$, *где* $D = \{-1, 0, 1\}$, *называется* **(локальным) 2-адическим правилом сложения**, *если для любых последовательностей* $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n\ge 0}$, $\boldsymbol{y} = (y_n)_{n\ge 0} \in D^\omega$ *следующее равенство выполнено в* $\mathbb{Z}_2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}; y_n, y_{n-1}, y_{n-2})2^n = \sum_{n=0}^{\infty}(x_n + y_n)2^n \tag{4.2.1.1}$$

где мы полагаем $x_{-1} = x_{-2} = y_{-1} = y_{-2} = 0$.

Иначе говоря, 2-адическое правило сложения φ позволяет локально складывать 2-адические числа $(\ldots x_2x_1x_0.000)_2 + (\ldots y_2y_1y_0.000)_2 = (\ldots z_2z_1z_0.000)_2$, полагая $z_n = \varphi(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}; y_n, y_{n-1}, y_{n-2})$.

Предложение 4.2.2 *(2-адические правила сложения совпадают с вещественными.) Функция $\varphi : D^6 \to D$ является 2-адическим правилом сложения в смысле* **4.2.1**, *если и только если оно является вещественным правилом сложения в смысле* **4.1.2**.

Доказательство. Если φ — вещественное правило сложения, то согласно теореме **4.1.6** для соответствующей функции избытка δ выполнены равенства (4.1.6.1) и (4.1.6.2). Подстановка этих тождеств в (4.2.1.1) сразу даёт требуемое. Докажем обратную импликацию. Пусть φ — 2-адическое правило сложения, т.е. выполнено (4.2.1.1). Проверим сначала, что $\zeta := \varphi(0,0,0;0,0,0) = 0$. Для этого применим (4.2.1.1) для сложения двух нулей, т.е. в ситуации, когда все $x_n = y_n = 0$. Получаем $\zeta \sum_{n=0}^{\infty} 2^n = -\zeta = 0$, поскольку $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = -1$ в $\mathbb{Z}_2$. После того, как установлено равенство $\varphi(0,0,0;0,0,0) = 0$, мы видим, что φ корректно складывает трёхзначные числа $(\ldots 00x_2x_1x_0)_2 + (\ldots 00y_2y_1y_0)_2$, а значит, и $(0.x_2x_1x_000\ldots)_2 + (0.y_2y_1y_000\ldots)_2$, и мы можем применить **4.1.7**.

4.2.3. (Совместное представление $D^{\mathbb{Z}}$ для вещественных и 2-адических чисел.) Заметим, что существование локальных правил сложения $\varphi : D^6 \to D$, работающих одновременно и для вещественных, и для 2-адических чисел позволяет построить совместное представление для $\mathbb{Q}_2$ и $\mathbb{R}$.

А именно, рассмотрим множество $D^{\mathbb{Z}}$ всех последовательностей $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ элементов $D = \{-1,0,1\}$, бесконечных в обе стороны. Будем думать о таких последовательностях как о двоичных числах $(\ldots x_2x_1x_0.x_{-1}x_{-2}\ldots)_2$, бесконечных в обе стороны. Зафиксируем какое-нибудь правило сложения φ и определим операцию $\oplus = \oplus_\varphi : D^{\mathbb{Z}} \times D^{\mathbb{Z}} \to D^{\mathbb{Z}}$ по формуле

$$\boldsymbol{x} \oplus_\varphi \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} \quad \text{где } z_n = \varphi(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}; y_n, y_{n-1}, y_{n-2}) \tag{4.2.3.1}$$

Введём также операцию $\ominus : D^{\mathbb{Z}} \to D^{\mathbb{Z}}$ согласно формуле

$$\ominus \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \quad \text{где } y_n = -x_n \tag{4.2.3.2}$$

и выделенный элемент $\mathbf{0} \in D^{\mathbb{Z}}$, все компоненты которого равны нулю.

Внутри $D^{\mathbb{Z}}$ можно выделить два подмножества, устойчивых относительно $\oplus$ и $\ominus$, а именно, $D^+ := \{\boldsymbol{x} = (x_n) : x_n = 0 \text{ для } n \ll 0\}$ и $D^- := \{\boldsymbol{x} = (x_n) : x_n = 0 \text{ для } n \gg 0\}$. Тогда $(D^+, \mathbf{0}, \oplus, \ominus)$ позволяет представлять и складывать всевозможные 2-адические числа, а $(D^-, \mathbf{0}, \oplus, \ominus)$ — вещественные. Иначе говоря, существуют сюръективные отображения

$w_2 : D^+ \to \mathbb{Q}_2$ и $w_\infty : D^- \to \mathbb{R}$, согласованные со структурами абелевых групп $\mathbb{Q}_2$ и $\mathbb{R}$ (однако $D^{\mathbb{Z}}$, конечно же, не является абелевой группой, поскольку $\oplus_\varphi$ не ассоциативно).

4.2.4. (Аналогия с формальными степенными рядами над конечным полем.) В этом отношении $\mathbb{Q}_2$ и $\mathbb{R}$ оказываются полностью аналогичны полям рядов Лорана $\mathbb{F}_q((t)) = \mathbb{F}_q[[t]][t^{-1}]$ и $\mathbb{F}_q((t^{-1}))$ над конечным полем $\mathbb{F}_q$, если в качестве конечного множества цифр D использовать $\mathbb{F}_q$. В самом деле, $\mathbb{F}_q^{\mathbb{Z}}$ можно отождествить с множеством формальных рядов $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n t^n$, $x_n \in \mathbb{F}_q$, бесконечных в обе стороны, и на них можно определить ноль, сложение $\oplus$ и вычитание $\ominus$. Тогда $\mathbb{F}_q((t))$ отождествляется с D^+, т.е. множеством тех рядов, коэффициенты x_n которых равны нулю при $n \ll 0$, и аналогично $\mathbb{F}_q((t^{-1}))$ отождествляется с рядами, коэффициенты x_n которых равны нулю при $n \gg 0$.

Мы видим, что $\mathbb{Q}_2$ и $\mathbb{R}$ полностью аналогичны $\mathbb{F}_q((t))$ и $\mathbb{F}_q((t^{-1}))$, с той лишь разницей, что общее сложение $\oplus$ для $\mathbb{Q}_2$ и $\mathbb{R}$ задаётся $(0,2)$-локальным правилом сложения, а сложение формальных степенных рядов задается покомпонентно, т.е. $(0,0)$-локальным правилом сложения. Можно также увидеть, что умножения $\mathbb{Q}_2$ и $\mathbb{R}$ едва ли могут быть подняты до общего умножения на $D^{\mathbb{Z}}$, хотя и поднимаются по отдельности до непрерывных умножений $\odot : D^+ \times D^+ \to D^+$ и $\odot : D^- \times D^- \to D^-$, поскольку нельзя разумным образом определить произведение формальных степенных рядов, бесконечных в обе стороны.

4.2.5. (Отношение эквивалентности $\equiv$ на $D^{\mathbb{Z}}$.) Заметим, что числовой случай всё же отличается от функционального тем, что отображения $w_2 : D^+ \to \mathbb{Q}_2$ и $w_\infty : D^- \to \mathbb{R}$ сюръективны, но не биективны, так что существенным компонентом описанной выше числовой системы, пригодной для одновременного представления 2-адических и вещественных чисел, являются отношения эквивалентности $\equiv^+$ и $\equiv^-$ на D^+ и D^- соответственно, такие, что $\mathbb{Q}_2 = D^+/\equiv^+$ и $\mathbb{R} = D^-/\equiv^-$. Оказывается, что оба они являются ограничениями некоторого отношения эквивалентности $\equiv$, определённого на $D^{\mathbb{Z}}$. Для описания $\equiv$ заметим, что $\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{y}$ должно быть равносильно $\boldsymbol{x} \ominus \boldsymbol{y} := \boldsymbol{x} \oplus (\ominus \boldsymbol{y}) \equiv \mathbf{0}$, так что нам достаточно описать, когда $\boldsymbol{z} \equiv \mathbf{0}$. Будем называть такие $\boldsymbol{z}$ *нуль-последовательностями.* Поскольку $\boldsymbol{z} = (z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ — бесконечная в обе стороны последовательность, а мы можем конструктивно проверить только конечное количество компонент, естественно определять множество нуль-последовательностей $\mathcal{N}$ через его проекции на конечные фрагменты $p_n : D^{\mathbb{Z}} \to D^{[-n,n]}$: для каждого $n \geq 0$ мы определим подмножество $\mathcal{N}_n := p_n(\mathcal{N}) \subset D^{[-n,n]}$ и скажем, что $\boldsymbol{z} \equiv \mathbf{0}$, если и только если $p_n(\boldsymbol{z}) = z_{-n:n} \in \mathcal{N}_n$ для всех $n \geq 0$. Иначе говоря, мы хотим, чтобы $\mathcal{N}$ было замкнутым в топологии прямого произведения на $D^{\mathbb{Z}}$.

Теперь мы можем явно описать $\mathcal{N}_n$ для каждого $n \geq 0$ в интересующем нас случае. Оно будет состоять из всех слов из $2n+1$ символов из D вида 0^{2n+1}, $0^a\bar{1}1^b$, $0^a1\bar{1}^b$, 1^{2n+1}, $\bar{1}^{2n+1}$, где мы пишем $\bar{1}$ вместо $-1 \in D$, и возведение в степень означает повторение слова. Более простое описание $\mathcal{N}_n$ таково:

$$\mathcal{N}_n = \Big\{(z_i)_{-n\leq i\leq n} \in D^{[-n,n]} : \exists \zeta, \eta \in D : \sum_{i=-n}^{n} 2^{n+i} z_i = 2^{2n+1}\zeta + \eta\Big\} \quad (4.2.5.1)$$

4.2.6. (Необычные нули в $D^{\mathbb{Z}}$.) Отметим, что помимо $\mathbf{0}$ в $D^{\mathbb{Z}}$ есть ещё две последовательности, неожиданным образом эквивалентные нулю: это $(\ldots 111.111\ldots)_2$ и $(\ldots \bar{1}\bar{1}\bar{1}.\bar{1}\bar{1}\bar{1}\ldots)_2$. Можно объяснить этот эффект следующим образом: $(\ldots 111.0)_2 = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n = -1$ в 2-адических числах и $(0.111\ldots)_2 = 1$ в вещественных числах; складывая эти два равенства, получаем $(\ldots 111.111\ldots)_2 = 0$.

4.2.7. (Факторгруппа $D^{\mathbb{Z}}/\equiv$.) Поскольку $\equiv$ — замкнутое отношение эквивалентности на компакте $D^{\mathbb{Z}}$, мы можем построить компактное фактормножество $D^{\mathbb{Z}}/\equiv$, которое окажется компактной абелевой группой относительно операций, индуцированных $\oplus$ и $\ominus$, причём $\mathbb{Q}_2$ и $\mathbb{R}$ окажутся топологическими подгруппами этой группы $D^{\mathbb{Z}}/\equiv$. Несложно видеть, что $D^{\mathbb{Z}}/\equiv$ — это пушаут абелевых групп $\mathbb{Q}_2$ и $\mathbb{R}$ относительно общей подгруппы $\mathbb{Z}[1/2]$, т.е. $(D^{\mathbb{Z}}/\equiv) \cong (\mathbb{Q}_2 \times \mathbb{R})/\mathbb{Z}[1/2]$. Можно сказать, что это небольшой фрагмент группы классов аделей $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$. В действительности аналогом формальных степенных рядов, бесконечных в обе стороны, является эта факторгруппа $D^{\mathbb{Z}}/\equiv$, а не само $D^{\mathbb{Z}}$.

4.3 m-ичные локальные правила сложения

Конечно же, число два не является каким-то исключительным, и локальные правила сложения существуют в избыточных m-ичных системах счисления для всех целых $m > 1$.

4.3.1. (Избыточные m-ичные системы счисления.) Зафиксируем целые $m \geq 2$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta \geq m - 1$, и обозначим через

$$D := \{-\alpha, -\alpha+1, \ldots, \beta-1, \beta\} \quad (4.3.1.1)$$

множество цифр для m-ичной системы счисления. Будем говорить, что эта система счисления *избыточна*, если она использует более m цифр, т.е. если $\alpha+\beta \geq m$, и что она *сбалансирована*, если $\alpha = \beta$. Если $\alpha = 0$ или $\beta = 0$, будем называть эту систему счисления *односторонней*, в противном случае — *двусторонней*. Рассмотрим также отображения $w_\infty : D^\omega \to \mathbb{R}$ и $w_m : D^\omega \to \mathbb{Z}_m = \prod_{p|m} \mathbb{Z}_p$, заданные

$$w_\infty : \boldsymbol{x} = (x_n)_{n\geq 0} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} x_n m^{-n-1} \tag{4.3.1.2}$$

и

$$w_m : \boldsymbol{x} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} x_n m^n \tag{4.3.1.3}$$

4.3.2. (m-ичные правила сложения f.) Определим (λ, μ)-локальное m-ичное правило сложения $f : D^{2(\lambda+\mu+1)} \to D$, потребовав, чтобы

$$f(0, \ldots, 0; 0, \ldots, 0) = 0 \tag{4.3.2.1}$$

и чтобы тождество

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x_{n-\lambda:n+\mu}; y_{n-\lambda:n+\mu}) m^{-n} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (x_n + y_n) m^{-n} \tag{4.3.2.2}$$

было выполнено для всех $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, таких, что почти все x_n и y_n равны нулю.

4.3.3. (Функции избытка δ, связанные с f.) Аналогично тому, что было проделано в двоичном случае в **4.1.35**, мы можем классифицировать m-ичные правила сложения с помощью соответствующих функций избытка $\delta : D^{2(\lambda+\mu)} \to \mathbb{Z}$, заданных формулами, аналогичными (4.1.35.2) и (4.1.35.3), но с заменой 2 на m.

4.3.4. (Существование m-ичных правил сложения.) Отметим, что для достаточно больших $\alpha+\beta$ локальные (λ, μ)-правила сложения существуют. В действительности они существуют для всех избыточных m-ичных систем счисления, т.е. при $\alpha + \beta \geq m$, но для этого могут потребоваться большие λ и μ. Если же $\alpha+\beta \geq m+1$ с $m \geq 3$, всегда есть $(0, 1)$-правило сложения, заданное

$$\delta(x_0; y_0) = \left\lfloor \frac{x_0 + y_0 + \gamma}{m} \right\rfloor \tag{4.3.4.1}$$

и

$$f(x_0, x_1; y_0, y_1) = x_0 + y_0 - m\left\lfloor \frac{x_0 + y_0 + \gamma}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x_1 + y_1 + \gamma}{m} \right\rfloor \qquad (4.3.4.2)$$

для подходящего γ, например, $\gamma = \lfloor \alpha(m-2)/(m-1) \rfloor$.

4.3.5. (Операция $\oplus_f$ на $D^{\mathbb{Z}}$.) Определим с помощью f бинарную операцию $\oplus_f : D^{\mathbb{Z}} \times D^{\mathbb{Z}} \to D^{\mathbb{Z}}$ на множестве последовательностей элементов из D, бесконечных в обе стороны, с помощью той же формулы (4.2.3.1), что была использована в **4.2**. Тогда мы снова можем построить D^+ и D^-, отношение эквивалентности $\equiv$ на $D^{\mathbb{Z}}$, продолжающее соответствующие отношения эквивалентности на D^+ и D^-, и в итоге получим общую модель для $\mathbb{R}$ и для $\prod_{p|m} \mathbb{Q}_p$, пересечение которых изоморфно $\mathbb{Z}[1/m]$.

4.4 Проверка равенства чисел с помощью конечного автомата

Для наших целей будет полезно более прямое описание отношения эквивалентности $\equiv$ на множестве бесконечных двоичных дробей, т.е. бесконечных слов из D^ω, чем то косвенное описание с помощью локальных правил сложения, что было дано в **4.2.5**.

4.4.1. (Алгоритм сравнения бесконечных двоичных дробей.) Рассмотрим следующий алгоритм проверки на равенство чисел $x = (0.x_0x_1\ldots)_2$ и $y = (0.y_0y_1\ldots)_2$, где x_n, $y_n \in D = \{-1, 0, 1\}$:

S0) [Инициализация.] $s \leftarrow 0$, $n \leftarrow 0$.

S1) [Шаг.] $s \leftarrow 2s + x_n - y_n$, $n \leftarrow n + 1$.

S2) [Выход?] Если $s > 2$ или $s < -2$, то сообщить, что числа различны, и завершить выполнение алгоритма. В противном случае повторить S1.

Для доказательства корректности этого алгоритма заметим, что после n-го выполнения шага S1 переменная s равна $(x_0\ldots x_{n-1})_2 - (y_0\ldots y_{n-1})_2$. Если числа x и y были бы действительно равны друг другу, то целое число s было бы также равно $(0.y_ny_{n+1}\ldots)_2 - (0.x_nx_{n+1}\ldots)_2$, что не превосходит по модулю двух. Поэтому если вдруг s станет больше двух или меньше минус двух, мы точно знаем, что числа не равны (и даже можем указать, которое из них больше), и можем завершить выполнение алгоритма. В противном случае алгоритм будет работать вечно.

4.4.2. (Вариант: сравнение конечных двоичных чисел.) Сравнение конечных двоичных чисел $(x_0 \dots x_{N-1})_2$ и $(y_0 \dots y_{N-1})_2$ длины N может быть также осуществлено предыдущим алгоритмом, если выполнять не более N шагов, и в конце проверить, верно ли, что $s = 0$:

S0) [Инициализация.] $s \leftarrow 0$, $n \leftarrow 0$.

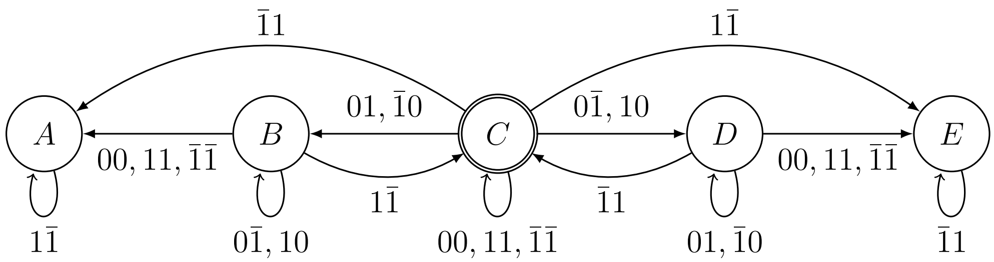
S1) [Шаг.] $s \leftarrow 2s + x_n - y_n$, $n \leftarrow n + 1$.

S2) [Выход?] Если $s > 2$ или $s < -2$, то сообщить, что числа различны, и завершить выполнение алгоритма. В противном случае, если $n < N$, то вернуться к шагу S1.

S3) [Итоговая проверка.] Если $s = 0$, то числа равны. Иначе они не равны.

Отметим, что в этом случае можно было бы исключить досрочный выход на шаге S2. Однако тогда число s могло бы достигать значений порядка 2^{N+1}, и потребовало бы для хранения порядка N битов памяти, что означало бы, что наш алгоритм требует потенциально неограниченного количества памяти и может быть реализован, например, машиной Тьюринга. Благодаря досрочному выходу в S2 гарантируется, что в начале шага S1 значение s будет всегда принадлежать множеству $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, и потому для реализации сравнения двоичных чисел, конечных или нет, достаточно конечного автомата. Отметим ещё, что в действительности можно завершать выполнение в S2, если $|s| > 1$, поскольку $s = \pm 2$ исключает равенство $s = 0$ когда-либо в будущем; см. **4.4.5** ниже.

4.4.3. (Проверка двоичных чисел на равенство с помощью конечного автомата.) Мы видим, что проверка избыточных двоичных чисел на равенство может быть осуществлена посредством конечного автомата с пятью состояниями, соответствующими пяти возможным значениям s. Это крайне удачно, поскольку конечные автоматы гораздо проще подвергать формальному анализу, чем произвольные машины Тьюринга. В нашем случае конечный автомат выглядит следующим образом:



Здесь состояния A, B, C, D, E соответствуют $s = -2$, -1, 0, 1, 2. Метки на рёбрах, т.е. переходах этого автомата — это пары $(x_i, y_i) \in D^2$ проверяемых символов из x и y, записанные в виде $x_i y_i$, причём $\bar{1}$ обозначает $-1 \in D$. В общем случае переход $s \xrightarrow{\alpha\beta} t$ для s, $t \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, α, $\beta \in D$ присутствует в этом автомате, если и только если $t = 2s + \alpha - \beta$.

Начальное состояние — это $C = 0$; оно же является и конечным для проверки эквивалентности конечных слов. Для проверки на эквивалентность конечных слов $x_0 \ldots x_{n-1}$ и $y_0 \ldots y_{n-1}$ надо последовательно переходить из начального состояния C по рёбрам с метками (x_0, y_0), (x_1, y_1), $\ldots$, (x_{n-1}, y_{n-1}). Конечные слова эквивалентны, если и только если все переходы возможны и в итоге автомат оказывается в состоянии C. Проверка на эквивалентность бесконечных слов осуществляется точно так же, но завершается только в том случае, если очередного перехода не существует; в этом случае мы заключаем, что бесконечные слова не эквивалентны. Если же они эквивалентны, автомат никогда не останавливается.

4.4.4. (Проверка эквивалентности 2-адических чисел.) Отметим, что если развернуть в этом автомате все рёбра в обратную сторону, он будет проверять на эквивалентность избыточные двоичные записи 2-адических чисел, потому что метки всех рёбер, входящих в одну и ту же вершину, различны.

4.4.5. (Состояния A и E, соответствующие $s = \pm 2$, не нужны при проверке равенства конечных или 2-адических чисел.) Несложно видеть, что из состояний A и E, соответствующих $s = \pm 2$, конечное состояние C недостижимо. Поэтому, если мы хотим проверять на равенство конечные числа, можно убрать из конечного автомата эти два состояния. Иначе говоря, на шаге S2 в **4.4.2** можно сразу завершать выполнение алгоритма, если $|s| > 1$. Кроме того, состояния A и E не нужны и для развёрнутого автомата, проверяющего на равенство в 2-адических числах бесконечные влево дроби $(\ldots x_1x_0)_2$ и $(\ldots y_1y_0)_2$, поскольку эти два состояния недостижимы из начального состояния C, если двигаться по стрелкам в обратном направлении. На самом деле это то же самое условие: состояние недостижимо из C в развёрнутом автомате в том и только том случае, если из этого состояния нельзя попасть в C в исходном автомате.

Тем не менее, состояния A и E необходимы при проверке на равенство двоичных дробей, бесконечных вправо, поскольку без них конечный автомат некорректно завершит работу при проверке на равенство $(0.1\bar{1}\bar{1}\ldots)_2 = (0.\bar{1}11\ldots)_2$. Эти состояния необходимы и для проверки эквивалентности слов, бесконечных в обе стороны, к которой мы сейчас переходим.

4.4.6. (Проверка эквивалентности слов, бесконечных в обе стороны.) Можно также приспособить этот конечный автомат для проверки эквивалентности слов, бесконечных в обе стороны, т.е. элементов $D^{\mathbb{Z}}$. Для этого надо начать с произвольного состояния s_0, и идти от него в обе стороны: вперёд по стрелкам с помощью переходов (x_0, y_0), (x_1, y_1), $\ldots$, $(x_i, y_i) : s_i \to s_{i+1}$, и назад по стрелкам с помощью (x_{-1}, y_{-1}), (x_{-2}, y_{-2}), $\ldots (x_i, y_i) : s_i \to s_{i+1}$. Можно чередовать шаги первого и второго типа. Если очередной шаг невозможен, то проверка завершается неудачно. Два бесконечных слова эквивалентны, если хотя бы для одного из пяти вариантов выбора s_0 этот процесс никогда не завершается. Ясно, что можно параллельно отслеживать цепочки состояний, построенных для всех пяти вариантов выбора s_0. Если в какой-то момент все цепочки обрываются, то бесконечные слова не эквивалентны. Таким образом, мы получаем альтернативное определение отношения эквивалентности $\equiv$ на $D^{\mathbb{Z}}$, которое мы ранее описали более косвенным образом в **4.2.5**.

4.4.7. (Другое описание проверки эквивалентности слов из $D^{\mathbb{Z}}$.) Предыдущий метод проверки эквивалентности слов из $D^{\mathbb{Z}}$ может быть более компактно изложен следущим образом. Пусть $M = \mathrm{Rel}(S, S)$ — моноид соответствий на конечном множестве состояний S нашего конечного автомата, с композицией соответствий в качестве операции. Для каждой пары x, $y \in D$ пусть $\gamma(x, y)$ — это соответствие, сопоставляющее состоянию s те состояния s', в которые в него можно перейти по паре входных символов (x, y). Поскольку наш автомат детерминирован, в нашем случае $\gamma(x, y)$ будет частично определённым отображением и даже частичной биекцией. Далее, пусть $\emptyset$ — это «пустое» соответствие; оно является нулевым элементом M, т.е. $\emptyset\varphi = \emptyset = \varphi\emptyset$ для любого

$\varphi \in M$. Тогда два бесконечных в обе стороны слова $\dots x_{-1}x_0.x_1x_2\dots$ и $\dots y_{-1}y_0.y_1y_2\dots$ эквивалентны в том и только том случае, если произведения $\gamma(x_a, y_a)\gamma(x_{a+1}, y_{a+1})\cdots\gamma(x_{b-1}, y_{b-1}) \neq \emptyset$ для любых целых $a \leq b$. Поэтому для проверки мы можем последовательно вычислять произведения $\varphi_n := \gamma(x_{-n+1}, y_{-n+1})\dots\gamma(x_n, y_n) \in M$ для $n = 0, 1, 2, \dots$ по формуле $\varphi_0 = \mathrm{id}_S$, $\varphi_{n+1} = \gamma(x_{-n}, y_{-n})\varphi_n\gamma(x_{n+1}, y_{n+1})$. Если для какого-то n оказывается, что $\varphi_n = \emptyset$, вычисления можно прекратить, заключив, что исходные слова не эквивалентны. Если же они эквивалентны, этот алгоритм никогда не завершает работу.

4.4.8. (Тройка $(0, D, G)$ — конечный комбинаторный объект, эффективно задающий $D^{\mathbb{Z}}$ с отношением эквивалентности $\equiv$.) Таким образом, интересующий нас объект оказывается чисто комбинаторным конечным объектом: это тройка, состоящая из конечного алфавита D с выделенным элементом $0 \in D$ и конечного автомата G с переходами, помеченными парами букв из D — или, если угодно, тройки $G = (S, \zeta, \gamma)$, где S — конечное множество состояний, $\zeta \in S$ — начальное состояние, и $\gamma : D^2 \to \mathrm{PartBij}(S)$ — отображение пар символов из D в моноид частичных биекций на S. При этом такой конечный комбинаторный объект эффективно задаёт отношение эквивалентности $\equiv$ на $D^{\mathbb{Z}}$, D^+, D^-, конечных словах D^n и т.п. Более того, с ним можно эффективно производить разнообразные операции, невозможные для произвольных машин Тьюринга. Например, если заданы $(D, 0, G = (S, \zeta, \gamma))$ как выше, можно проверить, верно ли, что отношение $\equiv$ на $D^{\mathbb{Z}}$, определённое автоматом G, действительно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Иначе говоря, это комбинаторное задание $(D, 0, G)$ *конечно* и *эффективно*.

4.4.9. (Объект над $\mathbb{F}_1$.) Такого рода конечные комбинаторные объекты с эффективно заданными операциями с ними по существу определены над «полем из одного элемента $\mathbb{F}_1$».

4.4.10. (Другие операции: $\oplus$, $\ominus$. Эффективные числовые системы.) Заметим, что другие полезные операции с избыточными двоичными числами, вроде (какой-нибудь реализации) сложения $\oplus$ и вычисления противоположного элемента $\ominus$, также могут быть заданы конечными автоматами (точнее, трансдукторами). Например, $\oplus$ может задаваться конечным автоматом $G_\oplus$, рёбра которого помечены тройками $xy|z$, где $(x, y) = (x_n, y_n)$ — это пара цифр аргументов, а $z = z_{n-\lambda}$ — сдвинутая цифра результата. После этого можно эффективно проверить, верно ли, что $\oplus$ и $\ominus$ действительно согласованы с $\equiv$, что они задают структуру абелевой группы на фактормножестве и т.п. Мы будем говорить, что такого рода конечная комбинаторная система, состоящая из $(D, 0, G_{\equiv}, G_{\oplus}, G_{\ominus})$, удовлетворяющих определённым аксиомам — это *эффективная числовая система*. Можно классифицировать все эффективные числовые системы, но сейчас мы не будем этим заниматься.

4.5 Полуторная система счисления

Прежде, чем двигаться дальше, зададимся следующим вопросом: существует ли эффективная числовая система (в смысле **4.4.10**), позволяющая представлять вещественные числа с помощью всего двух цифр? Обычная (неизбыточная) двоичная система не подходит, поскольку она не является эффективной в этом смысле, а избыточная двоичная система, изученная в предыдущих пунктах, использует три цифры $\{-1, 0, 1\}$.

4.5.1. (Описание числовой системы с помощью перекрывающихся отрезков.) Заметим, что избыточная двоичная система с цифрами из $D = \{-1, 0, 1\}$ допускает следующее описание. Отрезок $I = [-1, 1]$, который является множеством вещественных чисел x, допускающих запись вида $x = (0.x_0x_1\ldots)_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n 2^{-n-1}$ с $x_n \in D$, покрывается тремя перекрывающимися отрезками вдвое меньшей длины: «левым» $I_l = [-1, 0]$, «средним» $I_m = [-1/2, 1/2]$ и «правым» $I_r = [0, 1]$. Первая цифра x_0 избыточной записи числа соответствует выбору одного из этих трёх подотрезков. Далее, выбранный подотрезок снова покрывается тремя отрезками вдвое меньшей длины, левым, средним и правым, и цифра x_1 выбирает один из них. Получаем последовательность вложенных отрезков $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$; их пересечение состоит из единственной точки x, которая и есть наше число.

Существенным в этом описании является то, что, во-первых, все отрезки из покрытия имеют одинаковую длину (в данном случае — вдвое меньшую, чем исходный отрезок), а во-вторых, что они перекрываются (это делает числовую систему избыточной и позволяет определить очередную цифру суммы, зная только ограниченное количество цифр слагаемых).

4.5.2. (Избыточная числовая система с двумя цифрами должна иметь основание $1 < a < 2$.) Пусть теперь у нас есть избыточное представление вещественных чисел с помощью всего двух цифр. Одна из этих цифр — это ноль (иначе нам нечем будет при необходимости дополнять слева наши представления). Другую же цифру можно, не умаляя общности, считать единицей (если это не так, мы можем просто разделить все вещественные числа на значение этой цифры). Таким образом, мы будем считать, что наше множество цифр — это $\{0, 1\}$. Далее, очередная цифра x_n будет соответствовать выбору одного из двух перекрывающихся подотрезков одинаковой длины текущего отрезка. Эти подотрезки будут ровно в a раз короче исходного отрезка, где a — основание системы счисления: мы записываем $x \in I$ как $x = (0.x_0x_1\ldots)_a = \sum_{n=0}^{\infty} x_n a^{-n-1}$, $x_n \in \{0, 1\}$. Поскольку эти два отрезка должны покрывать исходный отрезок и ещё и перекрываться, каждый из них должен быть менее, чем вдвое короче исходного. Иначе говоря, основание a нашей избыточной системы с двумя цифрами $\{0, 1\}$ должно удовлетворять неравенству $1 < a < 2$. При этом суммы $x = (0.x_0x_1\ldots)_a = \sum_{n=0}^{\infty} x_n a^{-n-1}$ будут принимать произвольные значения в отрезке $[0, 1/(a-1)]$.

4.5.3. (Для представления отрицательных чисел лучше использовать отрицательное основание a.) В действительности положительное основание a позволит нам представлять только неотрицательные вещественные числа. Однако если заменить a на $-a$, описанное выше подразбиение отрезка на два подотрезка по существу не изменится (только длина подотрезков будет $|a|^{-1}$ от длины исходного, и их ориентация будет каждый раз изменяться при подразбиении), но мы сможем представлять произвольные вещественные числа. Например, суммы $x = (0.x_0x_1\ldots)_{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(-a)^{-n-1}$ с $1 < a < 2$ и $x_n \in \{0, 1\}$ принимают всевозможные значения в отрезке $[-a/(a^2-1), 1/(a^2-1)]$.

Таким образом, для представления всех, а не только положительных, вещественных чисел с помощью двух цифр нам понадобится основание $-2 < a < -1$, а не $1 < a < 2$, но мы пока не будем различать эти две ситуации.

4.5.4. (Можно ли использовать основание $a = e - 1$?) Каким же лучше всего выбрать основание a? На первый взгляд кажется, что его можно выбрать произвольно, лишь бы было выполнено $1 < |a| < 2$. Например, можно взять $a = e-1$. Однако в этом случае алгоритмы сравнения и сложения чисел в системе с основанием a будут реализуемы только машиной Тьюринга, которая по существу будет всё более и более точно вычислять число $e - 1$ и его степени по мере чтения цифр x_n и y_n двух слагаемых или сравниваемых чисел $x = (0.x_1x_2\ldots)_a$ и $y = (0.y_1y_2\ldots)_a$, что требует потенциально неограниченного объёма памяти. Если же мы хотим, чтобы числовая система была эффективной в смысле **4.4.10**, сложение и сравнение чисел должны реализовываться конечными автоматами (а ещё лучше, чтобы существовали локальные правила сложения, аналогичные изученным в **4.1** для избыточной двоичной системы). Поэтому трансцендентные основания вроде $a = e - 1$ нам не подходят.

4.5.5. (Система с основанием $a = 3/2$.) Естественный кандидат на как можно более простое основание a избыточной системы счисления с двумя цифрами — это $a = 3/2$ (или скорее $-3/2$, но мы пока не будем различать эти два случая). В самом деле, это самое простое рациональное число, лежащее между единицей и двойкой. При этом рациональность представляется полезной для того, чтобы нам не приходилось вычислять a всё более и более точно по мере продвижения сравнения или сложения двух чисел в системе с основанием a. Поэтому изучим систему счисления с основанием полтора и двумя цифрами $\{0, 1\}$ более подробно.

4.5.6. (Алгоритм проверки равенства в полуторной системе счисления.) В действительности эффективная числовая система с основанием $a = 3/2$ несколько неожиданным образом требует не менее четырёх цифр. Для того, чтобы разобраться в причинах этого, посмотрим, как мог бы выглядеть алгоритм проверки на равенство двух чисел $(0.x_0x_1\ldots)_{3/2}$ и $(0.y_0y_1\ldots)_{3/2}$ с цифрами из множества $\{0, 1\}$, аналогичный **4.4.1**:

- S0) [Инициализация.] $s \leftarrow 0$, $n \leftarrow 0$.
- S1) [Шаг.] $s \leftarrow \frac{3}{2}s + x_n - y_n$, $n \leftarrow n + 1$.
- S2) [Выход?] Если $|s| > 2$, то сообщить, что числа различны, и завершить выполнение алгоритма. В противном случае повторить S1.

Возможность досрочного выхода, как и в **4.4.1**, основана на том, что на n-ом шаге s равно $(x_0x_1\ldots x_n)_{3/2} - (y_0y_1\ldots y_n)_{3/2}$, и если числа действительно равны, то s должно быть также равно $(0.y_{n+1}y_{n+2}\ldots)_{3/2} - (0.x_{n+1}x_{n+2}\ldots)_{3/2} = \sum_{k=1}^{+\infty}(y_{n+k} - x_{n+k})(2/3)^k$, что не превосходит по модулю $\sum_{k=1}^{+\infty}(2/3)^k = 2$.

4.5.7. (Возможные значения переменной s.) Если бы переменная s в предыдущем алгоритме могла бы принимать только конечное множество значений, то мы получили бы конечный автомат, проверяющий равенство чисел в полуторной системе счисления. Однако в нашем случае s, хотя и лежит на отрезке $[-2, 2]$, не обязательно является целым числом, а является двоично-рациональным числом со знаменателем 2^n. Можно вместо s использовать целое число $s' = 2^n s$, однако тогда оно будет находиться в диапазоне от -2^{n+1} до 2^{n+1}, и потому будет требовать всё больше и больше памяти для хранения по мере того, как алгоритм читает новые цифры. Иначе говоря, для реализации приведённого выше алгоритма недостаточно конечного автомата, а необходима машина Тьюринга.

4.5.8. (Проверка на равенство в $\mathbb{Q}_3$ бесконечных влево чисел в системе с основанием 3/2.) Удивительным образом алгоритм, аналогичный **4.5.6**, но работающий в другую сторону — то есть проверяющий на равенство в $\mathbb{Q}_3$ бесконечные влево числа $(\ldots x_1 x_0)_{3/2}$ и $(\ldots y_1 y_0)_{3/2}$ с цифрами из $\{0, 1\}$ — использует только конечное число значений s и потому реализуем конечным автоматом:

S0) [Инициализация.] $s \leftarrow 0$, $n \leftarrow 0$.

S1) [Шаг.] $s \leftarrow \frac{2}{3}s + x_n - y_n$, $n \leftarrow n + 1$.

S2) [Выход?] Если $|s| > 3$, или если s не делится на три, то сообщить, что числа различны, и завершить выполнение алгоритма. В противном случае повторить S1.

В самом деле, здесь рациональное число s — это $(x_n . x_{n-1} \ldots x_0)_{3/2} - (y_n . y_{n-1} \ldots y_0)_{3/2}$, также равное $(\ldots y_{n+1} 0)_{3/2} - (\ldots x_{n+1} 0)_{3/2}$, если проверяемые на равенство числа действительно равны в $\mathbb{Q}_3$. Отсюда получаем, что, во-первых, $|s| \leq 3$ и $s \in \mathbb{Z}_2$ (из первого равенства), и, во-вторых, $s \in 3\mathbb{Z}_3$ (из второго равенства). Поскольку s — рациональное число, знаменатель которого является степенью тройки, эти условия означают, что единственные возможные значения для s — это -3, 0 и 3. Иначе говоря, s будет всегда оставаться целым, а если мы увидим, что оно уже не сможет оставаться целым из-за того, что оно не будет делиться на три перед следующим умножением на 2/3, то мы можем сразу завершить исполнение алгоритма.

4.5.9. (Проверка на равенство в $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_2$.) Что будет, если мы развернём в обратную сторону только что построенный конечный автомат, то есть направим все его переходы $s \xrightarrow{xy} t$ в обратную сторону? Мы действительно получим конечный автомат для проверки на равенство бесконечных дробей $(0.x_0 x_1 \ldots)_{3/2}$ и $(0.y_0 y_1 \ldots)_{3/2}$, однако проверять на равенство он будет не в $\mathbb{R}$, а в $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_2$:

S0) [Инициализация.] $s \leftarrow 0$, $n \leftarrow 0$.

S1) [Шаг.] $s \leftarrow \frac{3}{2}s + x_n - y_n$, $n \leftarrow n + 1$.

S2) [Выход?] Если $|s| > 2$, или если s нечётно, то сообщить, что числа различны, и завершить выполнение алгоритма. В противном случае повторить S1.

Если теперь этот алгоритм проверяет на равенство $x = (0.x_0x_1\ldots)_{3/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n(3/2)^{-n-1}$ и $y = \sum_{n\geq 0} y_n(3/2)^{-n-1}$ не как элементы $\mathbb{R}$, а как элементы $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_2$, то работает фактически то же самое рассуждение, что и в **4.5.8**, и оказывается, что s принимает только конечное множество значений.

Таким образом, в действительности эффективная числовая система с основанием $3/2$ должна представлять не вещественные числа $x \in \mathbb{R}$, а пары $x \in \mathbb{R} \times \mathbb{Q}_2$, состоящие из вещественного и 2-адического числа. (Мы пока не привели строгого доказательства, что это необходимо, но поверим, что это действительно так.) Это аналогично тому наблюдению, что бесконечные влево числа в системе с натуральным основанием $m > 1$ представляют числа из $\prod_{p|m} \mathbb{Q}_p$, см. **4.3.5**.

4.5.10. (Для представления $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_2$ необходимо три цифры.) Однако для представления в системе с основанием $a = 3/2$ элементов $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_2$, а не просто вещественных чисел, требуется больше цифр, а именно, не менее трёх (и даже четырёх, если мы хотим получить эффективную числовую систему). Действительно, пусть $D \subset \mathbb{Q}$ — некоторое конечное множество цифр, и предположим, что оно достаточно для представления всех элементов $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_2$ в полуторной системе счисления, т.е. любой $x \in \mathbb{R} \times \mathbb{Q}_2$ представим в виде $(x_0 \ldots x_{k-1}.x_k x_{k+1}\ldots)_{3/2} = (3/2)^k \sum_{n=0}^{\infty} x_n(3/2)^{-n-1}$ при некоторых $x_n \in D$ и $k \in \mathbb{N}_0$. Пусть $w : D^\omega \to \mathbb{R} \times \mathbb{Q}_2$ — непрерывное отображение $\boldsymbol{x} = x_0x_1\ldots \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} x_n(3/2)^{-n-1}$, и пусть $K := w(D^\omega) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{Q}_2$ — множество элементов $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_2$, представимых в виде $(0.x_0x_1\ldots)_{3/2}$. Поскольку w непрерывно и D^ω компактно, $K = w(D^\omega)$ — компакт. Кроме того, $\bigcup_{k\geq 0}(3/2)^k K = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}_2$, поскольку все элементы $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_2$ представимы в рассматриваемой системе счисления. Поскольку $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_2$ локально компактно, оно является пространством Бэра, а значит, не может быть представлено в виде счётного объединения замкнутых множеств с пустыми внутренностями. Отсюда следует, что компакт K должен обладать непустой внутренностью. Поэтому его аддитивная мера Хаара $\mu(K)$ строго положительна, а также конечна (потому что K компакт).

Далее,

$$K = \bigcup_{z\in D} \Big(z + \frac{2}{3}K \Big) \qquad (4.5.10.1)$$

Поскольку $\mu\big((2/3)K\big) = |2/3|_{\mathbb{R}} \cdot |2/3|_{\mathbb{Q}_2} \cdot \mu(K) = \mu(K)/3$, эта формула означает, что множество K покрыто объединением $|D|$ множеств втрое меньшей меры Хаара. Такое возможно, только если $|D| \geq 3$. Таким образом, для представления всех элементов $\mathbb{R}\times\mathbb{Q}_2$ в системе с основанием 3/2 необходимо как минимум три цифры.

4.5.11. (Эффективная числовая система, представляющая вещественные числа, должна быть избыточной, и потому необходимы четыре цифры.) Если мы хотим, чтобы выбранное множество цифр D позволяло не только записывать все элементы $\mathbb{R}\times\mathbb{Q}_2$, но и эффективно производить с ними операции (например, чтобы сумма вычислялась конечным автоматом), необходимо, чтобы множества $z + (2/3)K$ из (4.5.10.1) хотя бы немного перекрывались, т.е. чтобы внутренность K покрывалась внутренностями этих множеств. В противном случае, если сумма $x + y$ двух элементов $x, y \in \mathbb{R}\times\mathbb{Q}_2$ окажется внутри K, но на границе всех содержащих её подмножеств $z + (2/3)K$, $z \in D$, мы не сможем вычислить даже первую цифру $x + y$, зная только конечное количество первых цифр x и y. (Это рассуждение в принципе правильно, хотя и неточно; например, x и y должны выбираться не произвольно, а во внутренности K.) Таким образом, эффективная система счисления должна быть хотя бы немного избыточной, и должна задействовать не три, а как минимум четыре цифры.

4.5.12. (Другие системы счисления с рациональным $1 < a < 2$ требуют не менее пяти цифр.) Если мы заменим 3/2 на другое рациональное число $1 < a < 2$, ситуация не улучшится. В этом случае a-ичные записи $(0.x_0x_1\ldots)_a$ будут представлять не просто вещественные числа, а элементы из $\prod_{v\in\mathbb{P}_\infty:|a|_p>1} \mathbb{Q}_v$, где $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$, и аналогичное рассуждение с аддитивной мерой Хаара на этом прямом произведении показывает, что понадобятся как минимум

$$\mathrm{ht}(a) = \prod_{v\in\mathbb{P}_\infty} \sup\big(1, |a|_v\big) \qquad (4.5.12.1)$$

цифр для представления всех элементов этого прямого произведения в системе с основанием a. В действительности понадобится хотя бы $\mathrm{ht}(a)+1$ цифра, потому что эффективность системы счисления требует избыточности, если задействовано архимедово нормирование. Однако высота $\mathrm{ht}(a)$ есть $\max(|m|,|n|)$, где $a = m/n$ — представление рационального числа в виде несократимой дроби. Поскольку $1 < |m/n| < 2$ возможно только при $|m| \geq 3$ (с равенством только для $a = \pm 3/2$), другие эффективные системы счисления с рациональным основанием в диапазоне от единицы до двух (а также от -2 до -1) потребуют ещё больше цифр, т.е. не менее пяти (см. также строгое доказательство того, что рациональные a не подходят, в [AB6],**6.6.15**).

4.6 Система с основанием φ

Мы только что видели, что основание a эффективной числовой системы, позволяющей представлять вещественные числа с помощью только двух цифр $D = \{0, 1\}$, не может быть рациональным числом (см. также [AB6],**6.6.15**, где этот факт строго доказан другим способом). Трансцендентные основания, судя по всему, тоже не годятся (это строго доказано в [AB6],**6.6.14**). Посмотрим, найдётся ли подходящее алгебраическое число a.

4.6.1. (Ограничения на вещественное алгебраическое число a: оно должно быть единицей.) Ясно, что искомое вещественное алгебраическое число a по-прежнему должно удовлетворять неравенству $1 < |a| < 2$. Кроме того, бесконечные вправо a-ичные дроби будут представлять не просто вещественные числа, а элементы $\prod_{v \in V_K : |a|_v > 1} K_v$, где $K = \mathbb{Q}(a)$ — числовое поле, порождённое a, V_K — множество его нормирований, и K_v — пополнение K относительно v. Такого рода представления потребуют не менее $\mathrm{ht}(a) = \prod_{v \in V_K} \sup(1, |a|_v)$ цифр, а на самом деле строго больше из-за присутствия архимедова нормирования. Здесь $|\cdot|_v$ обозначает норму, соответствующую v, нормализованную так, чтобы быть мультипликатором аддитивной меры Хаара на K_v. Таким образом, если мы надеемся обойтись только двумя цифрами, необходимо $\mathrm{ht}(a) < 2$. Однако если $|a|_v > 1$ хотя бы для одного неархимедова нормирования v, это сразу даст $\mathrm{ht}(a) \geq |a|_v \geq p \geq 2$, где p — характеристика поля вычетов K_v. Поэтому должно быть $|a|_v \leq 1$ для всех неархимедовых v, и $1 < |a|_v < 2$ хотя бы для одного архимедова v (а именно, соответствующего тому вложению $\mathbb{Q}(a) \to \mathbb{R}$, ради которого мы всё затеяли). По формуле произведения $\mathrm{ht}(a) = \mathrm{ht}(a^{-1})$, откуда мы получаем $|a^{-1}|_v \leq 1$ для всех неархимедовых v, т.е. $|a|_v = 1$ для неархимедовых v. Иначе говоря, *a должно быть единицей в максимальном порядке $\mathcal{O}_K \subset K$*, и его норма $N_{K/\mathbb{Q}}(a)$ равна ± 1.

4.6.2. (Если a — квадратичная иррациональность, то $a = \pm\varphi$.) Поскольку a не может быть рациональным числом, естественно рассмотреть случай, когда степень a минимальна, т.е. a является вещественной квадратичной иррациональностью. В этом случае a является корнем квадратного уравнения $t^2 - pt + q = 0$ с $q = \pm 1$ и $p \in \mathbb{Z}$, поскольку a обязано быть единицей в квадратичном расширении $\mathbb{Q}(a)$. Мы знаем, что $1 < |a| < 2$. Если a' — сопряжённый элемент к a, то $a' = q/a$, откуда $|a'| = 1/|a| < 1$. Если $q = 1$, то a и a' одного знака, откуда $|p| = |a| + |a'| > |a| > 1$, т.е. $|p| \geq 2$; однако тогда $t^2 - pt + 1 = 0$ не имеет двух различных вещественных корней. Поэтому $q = -1$, и $0 < |p| = |a| - |a'| < 2$, откуда $p = \pm 1$, т.е. a должно быть корнем $t^2 \pm t - 1 = 0$. Это означает, что $a = \pm\varphi$, где $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ — золотое сечение (положительный корень многочлена $t^2 - t - 1$). Мы пришли к выводу, что единственная подходящая квадратичная иррациональность — это $\pm\varphi$, несколько нестрогим способом; строгое доказательство будет дано позже в [AB6],**6.6.19**.

4.6.3. (Есть только конечное множество подходящих иррациональностей каждой степени.) Несложно видеть, что для любой степени n существует лишь конечное множество вещественных алгебраических чисел a степени n и высоты $\mathrm{ht}(a) < 2$ в поле $\mathbb{Q}(a)$. В самом деле, коэффициенты c_k минимального многочлена $P(T) = T^n + c_{n-1}T^{n-1} + \cdots + c_0$ числа a должны быть, с одной стороны, целыми с $c_0 = \pm 1$ (мы только что видели, что $\mathrm{ht}(a) < 2$ возможно только в том случае, если a — единица в $\mathbb{Q}(a)$), а с другой стороны, $|c_k| \leq \binom{n}{k} \mathrm{ht}(a) < 2\binom{n}{k}$ для всех $0 < k < n$, поскольку произведение любого подмножества комплексных корней многочлена $P(T)$ не превосходит по модулю $\mathrm{ht}(a)$, а $\pm c_k$ — это симметрический многочлен от корней, т.е. сумма $\binom{n}{k}$ таких произведений. Это оставляет только конечное множество вариантов для минимального многочлена $P(T)$. Например, при $n = 3$ остаётся только четыре неприводимых кубических многочлена $P(T)$, обладающих корнем $1 < a < 2$ высоты $\mathrm{ht}(a) < 2$: это $T^3 - T - 1$, $T^3 - T^2 - 1$, $T^3 - 2T^2 + T - 1$ и $T^3 - T^2 - T - 1$; и есть ещё четыре многочлена $-P(-T)$ с подходящим корнем $-2 < a < -1$.

4.6.4. (Золотое сечение в качестве основания системы счисления.) Таким образом, естественно попытаться более тщательно изучить случай $a = \pm\varphi$. Сначала мы не особо будем различать случаи $a = \varphi$ и $a = -\varphi$, однако если мы хотим представлять все вещественные числа, а не только неотрицательные, надо использовать $a = -\varphi$. Обозначим через $\hat{\varphi} = 1 - \varphi = -\varphi^{-1} = (1 - \sqrt{5})/2$ число, сопряжённое к золотому сечению.

4.6.5. (Бесконечные дроби в системе с основанием φ представляют только вещественные числа.) Отметим, что поскольку $|\varphi|_v \neq 1$ только для архимедовых нормирований поля $K = \mathbb{Q}(\varphi) = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, бесконечные дроби $(0.x_0x_1\ldots)_\varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n\varphi^{-n-1}$ имеют значение только в $\mathbb{R}$, а никаких $\mathbb{Q}_p$ или их квадратичных расширений не возникает. Более того, если мы рассмотрим дроби $(\ldots x_{-2}x_{-1})_\varphi$, бесконечные влево, они также не обладают значениями ни в каких неархимедовых локальных полях: сумма $\sum_{n=0}^{\infty} x_{-n-1}\varphi^n$ сходится только относительно второго архимедова нормирования поля K, соответствующего вложению $\mathbb{Q}(\varphi) \to \mathbb{R}$, переводящему φ в $\hat{\varphi}$. Иначе говоря, мы приписываем $(\ldots x_{-2}x_{-1})_\varphi$ вещественное значение $\sum_{n=0}^{\infty} x_{-n-1}\hat{\varphi}^n = \sum_{n=0}^{\infty} x_{-n-1}(-\varphi)^{-n} \in \mathbb{R}$, но оно лежит в «другом» экземпляре $\mathbb{R}$ (например, другом прямом сомножителе относительно изоморфизма $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$). Довольно необычным является тот факт, что ни дроби, бесконечные вправо, ни дроби, бесконечные влево, не связаны ни с какими p-адическими числами. До этого у нас не было примеров таких систем счисления.

4.6.6. (Алгоритм проверки на равенство.) Алгоритм проверки на равенство в $\mathbb{R}$ двух бесконечных дробей $x = (0.x_0x_1\ldots)_\varphi$ и $y = (0.y_0y_1\ldots)_\varphi$, где x_n, $y_n \in \{0, 1\}$, выглядит уже привычным образом:

S0) [Инициализация.] $s \leftarrow 0$, $n \leftarrow 0$.

S1) [Шаг.] $s \leftarrow \varphi s + x_n - y_n$, $n \leftarrow n + 1$.

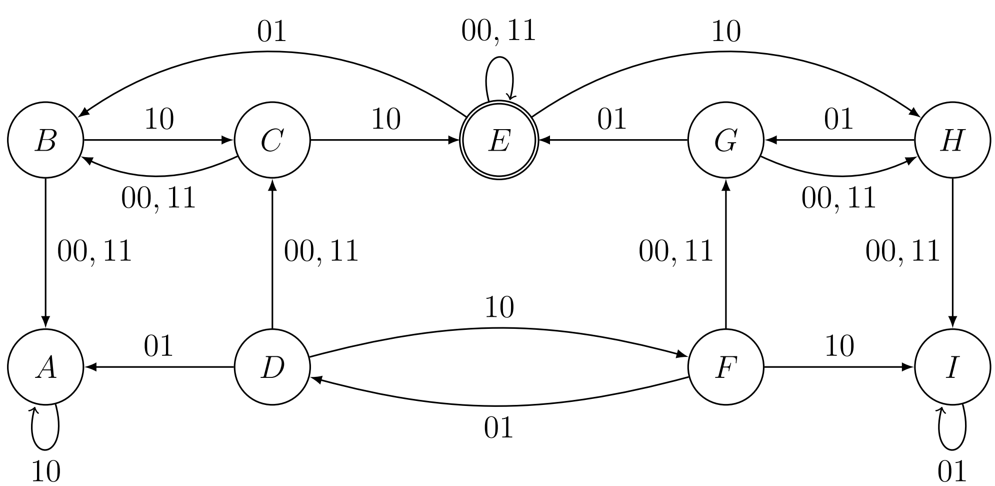
S2) [Выход?] Если $s \notin S$, где S — некоторое конечное множество разрешённых значений, то сообщить, что числа различны, и завершить выполнение алгоритма. В противном случае повторить S1.

Интрига здесь в том, действительно ли множество разрешённых значений S конечно, или нет. Как обычно, после $n + 1$-го шага s равно $(x_0\ldots x_n)_\varphi - (y_0\ldots y_n)_\varphi$; если числа x и y действительно равны, s должно также равняться $(0.y_{n+1}y_{n+2}\ldots)_\varphi - (0.x_{n+1}x_{n+2}\ldots)_\varphi$. Какие ограничения это накладывает на s?

4.6.7. (Множество S допустимых значений s.) Поскольку при $x = y$ должно быть $s = (0.y_{n+1}y_{n+2}\ldots)_\varphi - (0.x_{n+1}x_{n+2}\ldots)_\varphi$, получаем $|s| \le \sum_{k=1}^{\infty}\varphi^{-k} = \varphi^{-1}/(1-\varphi^{-1}) = \varphi$; в противном случае мы можем сразу завершить исполнение алгоритма на шаге S2. С другой стороны, $s = (x_0\ldots x_n)_\varphi - (y_0\ldots y_n)_\varphi$ означает, что $\hat{s} = \sum_{k=0}^{n}(x_{n-k} - y_{n-k})\hat{\varphi}^k$, где $\hat{s}$ обозначает сопряжённое к s в $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Поэтому $|\hat{s}| \le \sum_{k=0}^{\infty}|\hat{\varphi}|^k = 1/(1-\varphi^{-1}) = \varphi^2 = 1+\varphi$, поскольку $\hat{\varphi} = -\varphi^{-1}$. Мы получаем ограничения $|s| \le \varphi$ и $|\hat{s}| \le 1+\varphi$ (в действительности второе неравенство даже строгое, потому что сумма для $\hat{s}$ в нашем случае заведомо конечна, но мы предпочитаем использовать нестрогое неравенство, чтобы потом в **4.6.10** можно было развернуть конечный автомат); кроме того, $s \in \mathbb{Z}[\varphi]$, т.е. $s = a + b\sqrt{5}$, где a и b оба целые или оба полуцелые. Отсюда $|2a| = |s+\hat{s}| \le 1+2\varphi$ и потому $|a| \le 2$, а также $|2b| = |(s-\hat{s})/\sqrt{5}| \le (1+2\varphi)/\sqrt{5} = 1+2/\sqrt{5}$, откуда $|b| \le 1/2$. Это оставляет только конечное множество вариантов для a и b, и потому множество S допустимых значений s конечно:

$$\begin{aligned} S &= \left\{s \in \mathbb{Z}[\varphi] : |s| \le \varphi, |\hat{s}| \le \varphi^2\right\} \\ &= \{-\varphi, -1, 1-\varphi, \varphi-2, 0, 2-\varphi, \varphi-1, 1, \varphi\} \\ &= \{-\varphi, -1, -\varphi^{-1}, -\varphi^{-2}, 0, \varphi^{-2}, \varphi^{-1}, 1, \varphi\} \end{aligned} \tag{4.6.7.1}$$

4.6.8. (Конечный автомат для проверки равенства в системе счисления с основанием φ.) Таким образом, проверка равенства двух бесконечных вправо дробей $(0.x_0x_1\ldots)_\varphi$ и $(0.y_0y_1\ldots)_\varphi$ с цифрами x_n, $y_n \in \{0, 1\}$ осуществляется следующим конечным автоматом:



Здесь $A \dots I$ соответствуют девяти допустимым значениям s в порядке возрастания, т.е. $A = -\varphi$, $B = -1$, $C = -\varphi^{-1}$, $D = -\varphi^{-2}$, $E = 0$, $F = \varphi^{-2}$, $G = \varphi^{-1}$, $H = 1$, $I = \varphi$. Переход $s \xrightarrow{xy} t$ присутствует в том и только том случае, если $t = \varphi s + x - y$, $s, t \in S$, $x, y \in \{0, 1\}$. Начальным состоянием является E, соответствующее $s = 0$.

4.6.9. (Для проверки равенства бесконечных вправо дробей состояния D и F не нужны.) Заметим, что состояния D и F, соответствующие значениям $s = \pm\varphi^{-2}$, недостижимы из начального состояния E, и потому они совершенно ненужны для проверки равенства бесконечных вправо дробей с основанием φ. Иначе говоря, для проверки равенства бесконечных вправо дробей достаточно автомата с семью состояниями.

Несложно видеть, что эти два состояния оказались в нашем автомате только из-за того, что мы использовали нестрогое неравенство $|\hat{s}| \leq \varphi^2$ в **4.6.7** вместо строгого $|\hat{s}| < \varphi^2$, которое как раз исключило бы $s = \pm\varphi^{-2}$.

4.6.10. (Для проверки равенства бесконечных влево дробей состояния A и I не нужны, зато нужны D и F.) Мы можем использовать «развёрнутый» автомат **4.6.8**, т.е. автомат, в котором ориентация всех рёбер изменена на противоположную, для проверки равенства бесконечных влево дробей $(\dots x_1 x_0)_\varphi = (\dots y_1 y_0)_\varphi$. При этом состояния A и I недостижимы из начального состояния E в развёрнутом автомате (иначе говоря, из A и I нельзя попасть в начальное состояние в исходном автомате) и потому могут быть исключены. Однако теперь состояния D и F, ненужные в исходном автомате, оказываются нужны. Именно поэтому мы их оставили в автомате **4.6.8**.

4.6.11. (Развёрнутый автомат проверяет равенство дробей в системе с основанием $-\varphi$.) Заметим, что бесконечные влево дроби $(\dots x_1 x_0)_\varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \varphi^n$ имеют смысл только для другого вложения $\mathbb{Z}[\varphi] \to \mathbb{R}$, т.е. только после замены φ на $\hat{\varphi}$. Иначе говоря, развёрнутый автомат в действительности проверяет равенство $(\dots x_1 x_0)_{\hat{\varphi}} = (\dots y_1 y_0)_{\hat{\varphi}}$. Однако бесконечные влево дроби в системе с основанием $\hat{\varphi}$ — это то же самое, что и бесконечные вправо дроби с основанием $\hat{\varphi}^{-1} = -\varphi$. Поэтому развёрнутый автомат (или его версия без избыточных состояний A и I) в действительности проверяет равенство $(0.x_0 x_1 \dots)_{-\varphi} = (0.y_0 y_1 \dots)_{-\varphi}$, так что нам не надо строить отдельный автомат для случая основания $a = -\varphi$.

4.6.12. (Проверка равенства чисел, бесконечных в обе стороны.) Автомат **4.6.8** со всеми девятью состояниями может использоваться для проверки равенства бесконечных в обе стороны чисел $(\dots x_{-2}x_{-1}.x_0x_1\dots)_\varphi$, т.е. для построения замкнутого отношения эквивалентности $\equiv$ на множестве $B^{\mathbb{Z}} = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, которое обладает правильными ограничениями на подмножества слов B^+ и B^-, бесконечных только вправо или только влево. Для этого надо применить к автомату **4.6.8** конструкцию из **4.4.6** или **4.4.7**, ранее использованную для описания эквивалентности избыточных двоичных чисел, бесконечных в обе стороны. В итоге мы получаем топологическую группу $B^{\mathbb{Z}}/\equiv$, изоморфную $(\mathbb{R}\times\mathbb{R})/\mathbb{Z}[\varphi]$.

4.6.13. (Для проверки равенства n-значных чисел достаточно пяти состояний.) Для проверки равенства двух n-значных чисел вида $(x_0\dots x_{n-1})_\varphi$ можно использовать всё тот же автомат **4.6.8**, но теперь надо требовать, чтобы после n-го перехода автомат оказался в начальном состоянии E. Поэтому можно выкинуть из автомата как и состояния, недостижимые из E, так и состояния, из которых недостижимо E. В итоге остаются только пять состояний B, C, E, G, H, и проверка n-значных чисел на равенство осуществляется конечным автоматом всего с пятью состояниями.

4.6.14. (Проверка равенства в фибоначчиевой системе счисления.) Пусть $F_n := (\varphi^n - \hat\varphi^n)/(\varphi - \hat\varphi)$ — числа Фибоначчи: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Будем рассматривать n-значные числа в фибоначчиевой системе счисления, т.е. записи $(x_nx_{n-1}\dots x_1)_F = \sum_{k=1}^n x_kF_k$ с цифрами $x_k \in \{0,1\}$; в отличие от обычного определения фибоначчиевой системы счисления, мы не будем требовать, чтобы соседние цифры не были одновременно единицами.

Рассмотрим задачу проверки на равенство двух n-значных чисел в фибоначчиевой системе счисления. Несложно видеть, что $(x_n\dots x_1)_F = (y_n\dots y_1)_F$, если и только если

$$(x_n\dots x_1 0.x_1y_2x_3y_4\dots x_n)_\varphi = (y_n\dots y_1 0.y_1x_2y_3x_4\dots y_n)_\varphi$$

(строго говоря, эта формула годится только для нечетного n; для четного n можно выписать аналогичную формулу, либо положить $x_{n+1} = y_{n+1} = 0$ и увеличить n на единицу), поэтому такую проверку можно выполнить с помощью всё того же конечного автомата с пятью состояниями B, C, E, G, H. Более того, нет необходимости проверять на равенство эти $(2n+1)$-значные числа в системе с основанием φ полностью. Действительно, состояние s после n-го шага есть $s = \sum_{k=1}^n (x_k - y_k)\varphi^{k-1}$, и $\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)F_k = (\varphi s - \widehat{\varphi s})/(\varphi - \hat\varphi)$. Поэтому, если числа равны в фибоначчиевой системе, то, во-первых, s должно быть корректным состоянием нашего автомата (иначе проверка не могла бы завершиться успешно и после учёта оставшихся $n+1$ пар цифр), а во-вторых, φs должно равняться $\widehat{\varphi s}$, т.е. должно быть целым рациональным числом. Из допустимых состояний этому условию удовлетворяют только $s=0$ и $s=\pm\varphi^{-1}$, т.е. состояния C, E и G. Таким образом, *два n-значных числа $(x_n\dots x_1)_F$ и $(y_n\dots y_1)_F$ в фибоначчиевой системе счисления равны, если и только если после переходов в конечном автомате* **4.6.8** *из начального состояния E по рёбрам с метками x_ny_n, …, x_1y_1, автомат оказывается в одном из состояний C, E или G.*

Иначе говоря, тот же автомат, что проверяет на равенство n-значные числа в системе с основанием φ, годится и для проверки равенства в фибоначчиевой системе счисления, если расширить множество конечных состояний до $\{C,E,G\}$.

4.6.15. (Проверка равенства в фибоначчиевой системе счисления без дублирования единиц.) Заметим, что в определённой нами фибоначчиевой системе счисления есть две записи единицы, $(01)_F$ и $(10)_F$, поскольку $F_1=F_2=1$. Обычно фибоначчиеву систему счисления определяют так, чтобы такого дублирования единицы не было, т.е. используют запись $(x_n\dots x_2)_{F'}=\sum_{k=2}^{n}x_kF_k$. Из такого рода записей можно получить те, что мы рассматривали в предыдущем пункте, если справа дописать ещё один ноль. Поэтому равенство n-значных чисел в такой исправленной фибоначчиевой системе счисления можно по-прежнему проверять тем же конечным автоматом: надо всего лишь перейти из исходного состояния E по переходам, соответствующим парам цифр x_ny_n, …, x_2y_2, а затем проверить, верно ли, что после ещё одного перехода, соответствующего паре цифр 00, мы попадём в одно из состояний $\{C,E,G\}$. Несложно видеть, что это равносильно тому, что до этого дополнительного перехода конечный автомат оказался в состоянии E. Иначе говоря, *проверка равенства n-значных чисел в фибоначчиевой системе счисления без дублирования единицы осуществляется ровно тем же конечным автоматом с пятью состояниями, что и проверка равенства n-значных чисел в системе с основанием φ.* При желании мы можем проверять на равенство числа в фибоначчиевой системе счисления не слева направо (от более значимых разрядов к менее значимым), а справа налево, просто развернув этот конечный автомат с пятью состояниями.

4.6.16. (Алгоритм сложения в системе с основанием φ.) Обратимся теперь к вычислению суммы в системе с основанием φ. Сначала приведём эффективный алгоритм, а потом посмотрим, может ли он быть реализован конечным автоматом. Итак, сумма $(z_{-3}z_{-2}z_{-1}.z_0z_1\ldots)_\varphi$ двух чисел $(0.x_0x_1\ldots)_\varphi$ и $(0.y_0y_1\ldots)_\varphi$ может быть вычислена следующим образом:

S0) [Инициализация.] $s \leftarrow 0$, $n \leftarrow 0$

S1) [Шаг.] $s \leftarrow \varphi s + x_n + y_n$

S2) [Определение цифры.] Если $s \geq \varphi^3$, то $z_{n-3} \leftarrow 1$, иначе $z_{n-3} \leftarrow 0$.

S3) [Учёт цифры.] $s \leftarrow s - z_{n-3}\varphi^3$, затем $n \leftarrow n+1$ и вернуться к S1.

Значение параметра s перед шагом S1 — это $(x_0\ldots x_{n-1})_\varphi + (y_0\ldots y_{n-1})_\varphi - \varphi^3(z_{-3}\ldots z_{n-4})_\varphi$. Несложно видеть, что этот инвариант всегда сохраняется в результате выполнения шагов S1–S3. Если мы докажем, что s остаётся ограниченным, то отсюда мы получим искомое $(z_{-3}z_{-2}z_{-1}.z_0\ldots)_\varphi = (0.x_0x_1\ldots)_\varphi + (0.y_0y_1\ldots)_\varphi$. Если бы мы вычисляли сумму с задержкой не в три, а в четыре цифры, и использовали бы φ^4 вместо φ^3 на шагах S2 и S3, то неравенство $0 \leq s < \varphi^4$ следовало бы по индукции из неравенства $\varphi^5 + 2 \leq 2\varphi^4$. Однако в нашем случае $\varphi^4 + 2 > 2\varphi^3$, и потому такое простое доказательство не проходит.

4.6.17. (Возможные значения параметра s.) Можно проверить по индукции, что s в предыдущем алгоритме принимает только значения из десятиэлементного множества $S = \{0, \varphi^{-2}, \varphi^{-1}, 1, \varphi, 2, \varphi^2, 3, 2\varphi, 2+\varphi\}$ (в порядке возрастания). В частности, s остаётся ограниченным, и потому этот алгоритм действительно вычисляет одно из представлений суммы.

4.6.18. (Конечный автомат, вычисляющий сумму в системе с основанием φ.) Поскольку множество S конечно, сложение чисел в системе с основанием φ может быть реализовано конечным автоматом (точнее, трансдуктором) с множеством состояний S. Переходы этого конечного автомата $s \xrightarrow{xy|z} t$ соответствуют s, $t \in S$, x, y, $z \in \{0,1\}$, таким, что $t = \varphi s + x + y - \varphi^3 z$. Эта запись означает, что конечный автомат читает в состоянии s очередную пару цифр слагаемых xy, после чего выдаёт цифру суммы z и переходит в состояние t. Вместо того, чтобы изображать этот конечный автомат в виде ориентированного графа с 10 вершинами и 40 рёбрами, запишем его в виде набора правил переписывания $sxy \to zt$:

A	$A00 \to 0A$	$A01 \to 0D$	$A10 \to 0D$	$A11 \to 0F$
B	$B00 \to 0C$	$B01 \to 0E$	$B10 \to 0E$	$B11 \to 0G$
C	$C00 \to 0D$	$C01 \to 0F$	$C10 \to 0F$	$C11 \to 0H$
D	$D00 \to 0E$	$D01 \to 0G$	$D10 \to 0G$	$D11 \to 0J$
E	$E00 \to 0G$	$E01 \to 0J$	$E10 \to 0J$	$E11 \to 1B$
F	$F00 \to 0I$	$F01 \to 1A$	$F10 \to 1A$	$F11 \to 1D$
G	$G00 \to 1A$	$G01 \to 1D$	$G10 \to 1D$	$G11 \to 1F$
H	$H00 \to 1C$	$H01 \to 1E$	$H10 \to 1E$	$H11 \to 1G$
I	$I00 \to 1D$	$I01 \to 1F$	$I10 \to 1F$	$I11 \to 1H$
J	$J00 \to 1E$	$J01 \to 1G$	$J10 \to 1G$	$J11 \to 1J$

Состояния $A \dots I$ соответствуют допустимым значениям $s \in S$ в порядке возрастания. Таким образом, $A = 0$, $B = \varphi^{-2}$, $C = \varphi^{-1}$, $D = 1$, $E = \varphi$, $F = 2$, $G = \varphi^2$, $H = 3$, $I = 2\varphi$, $J = 2 + \varphi$. Начальное состояние — это A.

4.6.19. (Пример сложения с автоматом в виде набора правил переписывания.) Представление конечного автомата в виде набора правил переписывания удобно применять следующим образом. Для сложения $(0.x_0x_1\dots)_\varphi$ и $(0.y_0y_1\dots)_\varphi$ запишем бесконечную строку $Ax_0y_0x_1y_1x_2y_2\dots$, состоящую из начального состояния A и цифр слагаемых вперемежку, а затем будем применять к этой строке правила переписывания $\alpha \to \beta$, заменяя подстроку α в любой позиции этой бесконечной строки на подстроку β. Сложим, например, периодическое число $(0.010010010\dots)_\varphi$ с собой:

$$\begin{gathered}\underline{A00}1100001100001\dots \to 0\underline{A11}000011000011\dots \to 00\underline{F00}00110000110\dots \to \\ 000\underline{I00}1100001100\dots \to 0001\underline{D11}000011000\dots \to 00010\underline{J00}00110000\dots \to \\ 000101\underline{E00}1100001\dots \to 0001010\underline{G11}000011\dots \to 00010101\underline{F00}00110\dots \to \\ 000101010\underline{I00}1100\dots \to 0001010101\underline{D11}000\dots \to 00010101010\underline{J00}00\dots \to\end{gathered} \tag{4.6.19.1}$$

Таким образом, сумма равна $(000.10101010\dots)_\varphi = (1.000\dots)_\varphi = 1$; мы можем убедиться в последнем равенстве с помощью конечного автомата **4.6.8**, в котором есть бесконечная цепочка переходов $E \xrightarrow{01} B \xrightarrow{10} C \xrightarrow{00} B \xrightarrow{10} C \to \cdots$ с циклом длины два.

4.6.20. (Алгоритм сложения в системе с основанием $-\varphi$.) Для сложения $(0.x_0x_1\dots)_{-\varphi} + (0.y_0y_1\dots)_{-\varphi} = (z_{-3}z_{-2}z_{-1}.z_0\dots)_{-\varphi}$ можно воспользоваться следующим алгоритмом, аналогичным **4.6.16**:

S0) [Инициализация.] $s \leftarrow 0$, $n \leftarrow 0$

S1) [Шаг.] $s \leftarrow -\varphi s + x_n + y_n$

S2) [Определение цифры.] Если $s \geq 1-\varphi$, то $z_{n-3} \leftarrow 0$, иначе $z_{n-3} \leftarrow 1$.

S3) [Учёт цифры.] $s \leftarrow s + z_{n-3}\varphi^3$, затем $n \leftarrow n+1$ и вернуться к S1.

Значение параметра s перед шагом S1 — это $(x_0 \ldots x_{n-1})_{-\varphi} + (y_0 \ldots y_{n-1})_{-\varphi} + \varphi^3(z_{-3} \ldots z_{n-4})_{-\varphi}$. Если мы докажем, что s принимает только значения из некоторого конечного множества, то отсюда будет следовать корректность этого алгоритма.

4.6.21. (Множество S допустимых значений s и конечный автомат для сложения чисел с основанием $-\varphi$.) Можно проверить по индукции, что s в предыдущем алгоритме всегда принимает значения во множестве $S = \{-\varphi, -\varphi^{-3}, 0, \varphi^{-2}, 1, 3-\varphi, 2, 4-\varphi, \varphi^2, 3\}$, и потому алгоритм корректен и может быть реализован следующим автоматом с десятью состояниями:

$$\begin{array}{c|cccc}
A & A00 \to 0E & A01 \to 0G & A10 \to 0G & A11 \to 0J \\
B & B00 \to 0D & B01 \to 0F & B10 \to 0F & B11 \to 0H \\
C & C00 \to 0C & C01 \to 0E & C10 \to 0E & C11 \to 0G \\
D & D00 \to 0A & D01 \to 0D & D10 \to 0D & D11 \to 0F \\
E & E00 \to 1I & E01 \to 0A & E10 \to 0A & E11 \to 0D \\
F & F00 \to 1G & F01 \to 1J & F10 \to 1J & F11 \to 0B \\
G & G00 \to 1E & G01 \to 1G & G10 \to 1G & G11 \to 1J \\
H & H00 \to 1D & H01 \to 1F & H10 \to 1F & H11 \to 1H \\
I & I00 \to 1C & I01 \to 1E & I10 \to 1E & I11 \to 1G \\
J & J00 \to 1A & J01 \to 1D & J10 \to 1D & J11 \to 1F
\end{array}$$

Состояния $A \ldots J$ соответствуют допустимым значениям $s \in S$ в порядке возрастания. Таким образом, $A = -\varphi$, $B = -\varphi^{-3}$, $C = 0$, $D = \varphi^{-2}$, $E = 1$, $F = 3-\varphi$, $G = 2$, $H = 4-\varphi$, $I = \varphi^2$, $J = 3$. Начальное состояние — это C. Переход $s \xrightarrow{xy|z} t$ присутствует в том и только том случае, если s, $t \in S$, x, y, $z \in \{0,1\}$ и $t = -\varphi s + x + y + \varphi^3 z$.

Этот автомат очень похож на тот, что был построен в **4.6.18**, и может показаться, что новый автомат получается из старого обращением всех стрелок и переименованием состояний. Однако это не так, поскольку в старом автомате **4.6.18** не всегда есть стрелки со всеми метками xy, входящие в выбранное состояние. Например, в состояние I нет входящих стрелок с метками 01 или 11.

4.6.22. (Алгоритм для изменения знака в системе с основанием $-\varphi$.) Заметим, что в отличие от избыточной двоичной системы с цифрами $\{-1, 0, 1\}$, изменение знака в системе с основанием $-\varphi$ и цифрами $\{0, 1\}$ — нетривиальная операция. Мы должны проверить, что она также реализуется эффективно, т.е. с помощью конечного автомата. Сначала приведём алгоритм, вычисляющий $(z_{-1}.z_0 z_1 \ldots)_{-\varphi} = -(0.x_0 x_1 \ldots)_{-\varphi}$:

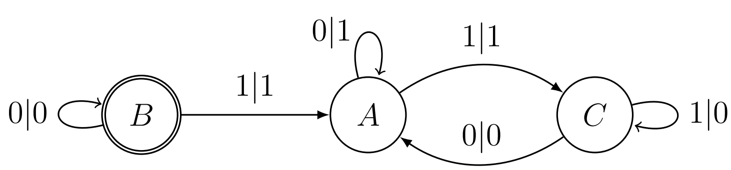
S0) [Инициализация.] $s \leftarrow 0$, $n \leftarrow 0$

S1) [Шаг.] $s \leftarrow -\varphi s + x_n$

S2) [Определение цифры.] Если $s \leq 2 - \varphi = \varphi^{-2}$, то $z_{n-1} \leftarrow 0$, иначе $z_{n-1} \leftarrow 1$.

S3) [Учёт цифры.] $s \leftarrow s - z_{n-1}\varphi$, затем $n \leftarrow n + 1$ и вернуться к S1.

Здесь $s = (x_0 x_1 \ldots x_{n-1})_{-\varphi} + (z_{-1} z_0 \ldots z_{n-2} 0)_{-\varphi}$. В данном случае множество возможных значений s состоит всего из трёх элементов: $S = \{-\varphi^{-1}, 0, \varphi^{-2}\}$, и потому операция изменения знака может быть реализована автоматом с тремя состояниями:



Здесь $A = -\varphi^{-1}$, $B = 0$, $C = \varphi^{-2}$. Начальное состояние — это B. Переход $s \xrightarrow{x|z} t$ есть в том и только том случае, если s, $t \in S$, x, $z \in \{0, 1\}$ и $t = -\varphi s + x - \varphi z$. Интересно, что после чтения первой единицы автомат покидает начальное состояние B и никогда больше туда не возвращается.

4.6.23. (Алгоритм и конечный автомат для вычитания в системе с основанием $-\varphi$.) Приведём алгоритм и конечный автомат, сразу вычисляющие разность $(z_{-3} z_{-2} z_{-1}.z_0 \ldots)_{-\varphi} = (0.x_0 x_1 \ldots)_{-\varphi} - (0.y_0 y_1 \ldots)_{-\varphi}$:

S0) [Инициализация.] $s \leftarrow 0$, $n \leftarrow 0$

S1) [Шаг.] $s \leftarrow -\varphi s + x_n - y_n$

S2) [Определение цифры.] Если $s \geq -1$, то $z_{n-3} \leftarrow 0$, иначе $z_{n-3} \leftarrow 1$.

S3) [Учёт цифры.] $s \leftarrow s + z_{n-3}\varphi^3$, затем $n \leftarrow n+1$ и вернуться к S1.

Множество возможных значений s — это $S = \{-1, -\varphi^{-1}, -\varphi^{-2}, 0, \varphi^{-1}, 1, \varphi, 2, 2\varphi - 1, \varphi^2\}$. Соответствующий конечный автомат — это

A	$A01 \to 0E$	$A00 \to 0G$	$A11 \to 0G$	$A10 \to 0J$
B	$B01 \to 0D$	$B00 \to 0F$	$B11 \to 0F$	$B10 \to 0H$
C	$C01 \to 0C$	$C00 \to 0E$	$C11 \to 0E$	$C10 \to 0G$
D	$D01 \to 0A$	$D00 \to 0D$	$D11 \to 0D$	$D10 \to 0F$
E	$E01 \to 1I$	$E00 \to 0A$	$E11 \to 0A$	$E10 \to 0D$
F	$F01 \to 1G$	$F00 \to 1J$	$F11 \to 1J$	$F10 \to 0B$
G	$G01 \to 1E$	$G00 \to 1G$	$G11 \to 1G$	$G10 \to 1J$
H	$H01 \to 1D$	$H00 \to 1F$	$H11 \to 1F$	$H10 \to 1H$
I	$I01 \to 1C$	$I00 \to 1E$	$I11 \to 1E$	$I10 \to 1G$
J	$J01 \to 1A$	$J00 \to 1D$	$J11 \to 1D$	$J10 \to 1F$

Как обычно, состояния $A \ldots J$ соответствуют допустимым значениям s в порядке возрастания: $A = -1$, $B = -\varphi^{-1}$, $C = -\varphi^{-2}$, $D = 0$, $E = \varphi^{-1}$, $F = 1$, $G = \varphi$, $H = 2$, $I = 2\varphi - 1$ и $J = \varphi^2$. Начальное состояние — это D. Переход $s \xrightarrow{xy|z} t$ присутствует в том и только том случае, если $t = -\varphi s + x - y + \varphi^3 z$. Несложно видеть, что этот автомат почти совпадает с автоматом из **4.6.21**, однако метки на рёбрах немного другие: 00, 01, 10, 11 теперь стали 01, 00, 11 и 10, соответственно. Состояния слегка сдвинулись: старое состояние s соответствует $s' = s - \varphi^{-2}$ в новом автомате.

4.6.24. (Эффективная система счисления для вещественных чисел всего с двумя цифрами.) Тем самым мы доказали, что существует эффективная система счисления, представляющая все вещественные числа с помощью всего двух цифр. А именно, следует рассмотреть систему с основанием $-\varphi$ и двумя цифрами 0 и 1. Такое представление вещественных чисел эффективно в том смысле, что сравнение, сложение и вычитание чисел в этом представлении реализуются конечными автоматами. По всей видимости, это самая простая эффективная система счисления для вещественных чисел, использующая только две цифры, в том смысле, что это единственная такая система, основание которой — квадратичная иррациональность, а не кубическая или ещё более высокой степени.

Список литературы

[GHS] Svante Janson, *Gaussian Hilbert spaces*, Cambridge Tracts in Mathematics **129**, Cambridge University Press, 1997.

[DS] Alexander S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Graduate Texts in Mathematics **156**, Springer-Verlag, 1995.

[TG] Nicolas Bourbaki, *Topologie Générale*, Hermann, Paris, 1971 (chap. 1–4), 1974 (chap. 5–10).

[OP] Gabor Szegö, *Orthogonal polynomials*, AMS, 1978.

[TT] Peter Johnstone, *On a topological topos*, Proc. London Math. Soc. (3) **38** (1979) pp. 237–271.

[CH1] Th. Coquand, G. Huet, *Constructions: A higher order proof system for mechanizing mathematics.* In EUROCAL'85, volume **203**, Linz, 1985. Springer-Verlag.

[CH2] Th. Coquand, G. Huet, *The Calculus of Constructions,* Information and Computation, **76** (2/3), 1988.

[CP] Th. Coquand, C. Paulin-Mohring. *Inductively defined types,* in P. Martin-Löf and G. Mints, editors, Proceedings of Colog'88, **417**. Springer-Verlag, 1990.

[SP] Thierry de la Rue, *Espaces de Lebesgue*, Séminaire de Probabilités XXVII, Lecture Notes in Mathematics **1557**, Springer, 1993, pp. 15–21.

[DF] Bruno de Finetti, *La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives*, Annales de l'institut Henri Poincaré, **7** (1937) no. 1, pp. 1–68.

[AB1] Дуров Н.В., *Обзор подходов построения абсолютной геометрии*, Препринт ПОМИ 8 (2022).

[AB3] Дуров Н.В., *Индуктивные и коиндуктивные конструкции в математике*, Препринт ПОМИ 9 (2022).

[AB4] Дуров Н.В., *Примеры эффективных систем счисления*, Препринт ПОМИ 10 (2022).

[AB5] Дуров Н.В., *Вероятностные свойства избыточных систем счисления*, Препринт ПОМИ 11 (2022).

[AB6] Дуров Н.В., *Регулярные пространства и регулярные отображения*, Препринт ПОМИ 12 (2022).