PDMI Preprint 08/2022

Обзор подходов построения абсолютной геометрии

Н. В. Дуров[1]

[1] Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской Академии Наук

email: `douroff@pdmi.ras.ru`

Аннотация. Многие исследователи более семидесяти лет пытаются построить «абсолютную геометрию», или «геометрию над полем из одного элемента», чтобы сделать более явной аналогию А. Вейля между теоретико-числовым и функциональным случаем, соответствующем кривым над конечными полями. Однако до сих пор найти удовлетворительную конструкцию не удалось. Цель этой заметки – разобраться, почему, и перечислить возможные варианты преодоления этой проблемы.

Ключевые слова: Абсолютная геометрия, поле из одного элемента, вероятностный топос, конструкция Делиня, стандартное вероятностное пространство, стандартное измеримое пространство, спектральная геометрия, гомотопическая теория типов.

ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:
ЭЛ № ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г.
Выдано Федеральной службой по надзору
в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные:

191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны: (812) 312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www.pdmi.ras.ru/preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором В. Н. Симонова

1 Обзор текущего положения дел

1.1 Существующие подходы и их недостатки

1.1.1. (Кольцевые спектры, E_∞-алгебры и спектральная геометрия как точка сборки существующих подходов.) По существу, лучшие из существующих подходов так или иначе сводятся к использованию кольцевых спектров или E_∞-алгебр (которых мы для простоты будем считать одним и тем же понятием) вместо обычных коммутативных колец, и замены обычной алгебраической геометрии на спектральную геометрию, недавно изложенную J. Lurie. Некоторые авторы еще не совсем это осознали, но тем не менее, это так. Например, Кон и Конзани используют Г-множества Сегала и моноиды в этой категории в качестве «обобщенных колец», однако следующий шаг — уточнение этой теории с помощью симплициальных объектов и гомотопической алгебры для построения производных функторов и т.п. — неизбежно приводит к рассмотрению всех Г-пространств Сегала (или, что примерно одно и то же, Г-симплициальных множеств). Однако Г-пространства Сегала с их тензорным произведением — это как раз одна из моделей связных (connective) спектров с $\wedge$-произведением. Поэтому их теория на следующем шаге тоже превращается в спектральную геометрию.

1.1.2. (Недостатки спектральной геометрии в качестве кандидата в абсолютную геометрию.) Теперь обсудим, чем нас не устраивает спектральная геометрия как кандидат на роль абсолютной геометрии (или геометрии над «полем из одного элемента»). В рамках этой теории естественный кандидат на «поле из одного элемента» — это сферический спектр $\mathbb{S}$. Из него действительно есть единственный морфизм во все кольцевые спектры, включая спектр Эйленберга–Маклейна $H\mathbb{Z}$, который мы отождествляем с обычным кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ (более общо, обычное коммутативное кольцо A отождествляется со спектром Эйленберга–Маклейна HA). При этом подходе даже возникает нетривиальное тензорное произведение $\mathbb{Z}$ на себя, поскольку $H\mathbb{Z} \wedge H\mathbb{Z} \neq H\mathbb{Z}$ (разница связана с существованием нетривиальной алгебры Стинрода $\bmod p$). Тем не менее, итоговая картина получается странной и неудовлетворительной:

- «Спектр сферического спектра» $\operatorname{Spec}\mathbb{S}$ совпадает как топологическое пространство со $\operatorname{Spec}\pi_0\mathbb{S} = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, пусть и с другим пучком E_∞-алгебр (совпадающим в π_0, но не в высших гомотопических группах). Как следствие, его замкнутые точки соответствуют простым числам, и еще есть общая точка, соответствующая изучению рациональных гомотопических типов. Это не совсем то, что ожидается от «абсолютной базы» или «спектра поля из одного элемента» $\operatorname{Spec}\mathbb{F}$. Естественно было бы ожидать, что абсолютная база содержит только одну точку, примерно как спектры конечных полей $\operatorname{Spec}\mathbb{F}_q$, являющиеся базой в функциональном случае.

- Как следствие, отображение $\operatorname{Spec}\mathbb{Z} \to \operatorname{Spec}\mathbb{S}$ выглядит совсем непохоже на отображение кривой C над $\mathbb{F}_q$ в базу $\operatorname{Spec}\mathbb{F}_q$. Вместо того, чтобы отображать все простые числа из $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ в одну точку абсолютной базы, отображение $\operatorname{Spec}\mathbb{Z} \to \operatorname{Spec}\mathbb{S}$ является гомеоморфизмом топологических пространств! Вся разница — только в структурном пучке E_∞-алгебр.

- Кроме того, $\operatorname{Spec}\mathbb{Z} \to \operatorname{Spec}\mathbb{S}$ является изоморфизмом в общей точке, что совсем неожиданно и опять-таки непохоже на отображение (относительной) кривой в базу.

- Мы можем построить $\operatorname{Spec}\mathbb{Z} \times \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, но результат снова выглядит странным — мы в очередной раз получаем нечто гомеоморфное $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, но с другим структурным пучком колец. Примерно так выглядит формальная окрестность диагонали в прямом произведении, у которой другой пучок колец (в котором больше топологических нильпотентов), но то же топологическое пространство. Нельзя сказать, что это совсем неинтересное и бесполезное пространство — так, в нем нетривиальное прямое произведение $\operatorname{Spec}\mathbb{F}_p \times \operatorname{Spec}\mathbb{F}_p$, по существу соответствующее двойственной алгебре Стинрода $\operatorname{mod} p$. Однако это совсем не та «(относительная) поверхность», которую мы ожидали бы увидеть по аналогии с функциональным случаем, и едва ли на ней можно устроить ту теорию пересечений, которая могла бы прояснить аналогию между теоретико-числовым и функциональным случаем.

- Мы также не получаем нетривиального $\operatorname{Spec}\mathbb{F}_p \times \operatorname{Spec}\mathbb{F}_\ell$ для разных простых $p \neq \ell$, и не можем «перебираться» из одной простой характеристики в другую. По существу, это следствие того факта, что простые числа разделены уже на уровне $\operatorname{Spec}\mathbb{S}$, где они соответствуют локализациям гомотопических типов относительно различных простых чисел. Это обстоятельство, возможно, полезно в алгебраической топологии, где оно порождает хроматическую теорию и позволяет много чего вычислить, но вредно для наших целей.

- И, наконец, мы не получаем нетривиальной «архимедовой точки» или «кольца архимедовых целых» $\mathscr{O}_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}$. Те конструкции, которые у нас есть — вроде $\mathbb{Z}_\infty$ в теории обобщенных колец — «растворяются» и превращаются в $\mathbb{R}$ при попытке построить над ними минимум гомотопической алгебры, необходимый для формулировки теорем вроде теоремы Римана–Роха. Нет подходящего аналога и среди кольцевых спектров.

- Как следствие, мы не можем построить компактификацию $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. А ведь полноценная аналогия между теоретико-числовым и функциональным случаем должна включать в себя построение компактификации $\overline{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}}$, замкнутые точки которой должны соответствовать всем нормированиям $\mathbb{Q}$, неархимедовым (p-адическим) и архимедовому. Однако при работе над базой $\operatorname{Spec} \mathbb{S}$ не очень даже понятно, куда могла бы проецироваться архимедова точка $\overline{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}}$ при отображении в $\operatorname{Spec} \mathbb{S}$.

1.1.3. (Фундаментальные проблемы и их проявления.) Можно констатировать, что ситуация довольно печальна – мы не можем «смешивать» разные характеристики, компактифицировать $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, умножать $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ на себя, чтобы получить относительную поверхность над базой и т.д. Все эти проблемы сильно связаны друг с другом и по существу сводятся к тому, что выбранная нами абсолютная база $\operatorname{Spec} \mathbb{S}$ оказывается слишком похожа на $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, там уже разделены все простые числа и т.п. Другая фундаментальная проблема — отсутствие архимедовых целых.

1.2 Три подхода к построению абсолютной геометрии

Мы видим, что до сих пор чисто алгебраический подход к построению абсолютной геометрии, основанный на построении более-менее алгебраической категории обобщенных колец и рассмотрении их спектров, не дал ожидаемых результатов. Возможно, нам необходимы какие-то дополнительные соображения и конструкции, чтобы получить правильную абсолютную геометрию и абсолютную базу. Попробуем указать некоторые потенциально полезные подходы. Наши основные варианты — это *геометрический подход*, *категорный подход* и *логический подход*. Конечно же, этот список не исчерпывающий.

1.2.1. (Геометрический подход: относительные схемы над нетривиальной базой.) Возможно, вместо того, чтобы рассматривать «абсолютные» схемы, надо рассматривать «относительные» схемы над некоторой базой B, которая тогда и будет искомой абсолютной базой, либо будет близка к ней. Эта база B может быть топологическим пространством, топосом (обычным или высшим в смысле J. Lurie — в дальнейшем мы не различаем эти два варианта в наших общих рассуждениях), окольцованным топосом или вектоидом. Концептуально это некоторое топологическое пространство или его подходящее обобщение. Важно, что мы больше не настаиваем, чтобы база B была спектром обобщенного кольца или чем-то подобным.

Затем мы производим все обычные конструкции над B. Обычные кольца становятся постоянными пучками колец над B, обычные схемы X — относительными схемами $X \times B \to B$, и вообще «обычный» объект X превращается в постоянный относительный объект $X \times B \to B$. Однако помимо таких тривиальных расслоений над B у нас могут появиться новые расслоения, не изоморфные постоянным над базой, либо изоморфные локально, но не глобально. Может быть, мы не могли до этого поймать архимедовы целые $\mathscr{O}_{\mathbb{R}}$ из-за того, что они представляют из себя (обобщенный) непостоянный подпучок колец в постоянном пучке колец $\underline{\mathbb{R}}_B$ над B? Точно так же компактификация $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ могла ускользать от нас из-за того, что, в то время как обычному $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ соответствует постоянное расслоение $B \times \operatorname{Spec}\mathbb{Z} \to B$, это может быть неверно для компактификации.

1.2.2. (Недостатки геометрического подхода: откуда взять правильную базу B?) Основным недостатком геометрического подхода является то, что не понятно, откуда взять правильную базу B. Насколько она единственна? Какими универсальными свойствами задается? Тем не менее, геометрический подход довольно нагляден, если мы каким-то образом поймем, какая должна быть база и почему, дальше все будет описываться в относительно привычных терминах.

1.2.3. (Категорный подход: заменяем категорию множеств *Sets* на другую категорию $\mathcal{B}$, делаем все конструкции в $\mathcal{B}$.) Другим вариантом преодоления возникших трудностей представляется замена категории множеств *Sets* на другую подходящую категорию $\mathcal{B}$, и проведение всех обычных конструкций внутри $\mathcal{B}$. Так, если $\mathcal{B}$ декартово замкнута, мы можем определить кольца и модули внутри $\mathcal{B}$ (в том числе обобщенные), а если $\mathcal{B}$ является элементарным топосом, мы можем перенести внутрь $\mathcal{B}$ значительную часть математики, включая определение внутренней категории в $\mathcal{B}$ и построение внутренней категорий предпучков на внутренней категории, и далее определить локализацию внутренней категории предпучков с помощью подходящей идемпотентной внутренней монады. Это означает, что мы можем даже построить спектры внутренних колец и склеить из них внутренние схемы, пусть и ценой существенных технических усилий.

1.2.4. (Пример применения категорного подхода: $\mathscr{O}_{\mathbb{R}}$ как нечеткое подкольцо в $\mathbb{R}$.) Примером применения категорного подхода является моя попытка заменить обычные множества на нечеткие с целью построения варианта архимедовых целых $\mathscr{O}_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}$, основанного на нечетких множествах и гауссовских распределениях; в этом случае характеристическая функция $\chi_{\mathscr{O}_{\mathbb{R}}} : \mathbb{R} \to [0,1]$ может принимать значения, отличные от 0 и 1, и мы можем определить нечеткое множество $\mathscr{O}_{\mathbb{R}}$, положив $\chi_{\mathscr{O}_{\mathbb{R}}}(x) = e^{-x^2/2}$. Такой подход представляется разумным и естественным, поскольку связь архимедовых целых и гауссовских распределений понятна как минимум с диссертации Тейта.

1.2.5. (Недостатки категорного подхода.) Среди недостатков категорного подхода можно отметить его техническую и концептуальную сложность (по существу, надо повторить значительную часть математики внутри категории $\mathcal{B}$, причем в гораздо более сложном варианте), а также ту же проблему, что и у геометрического подхода — непонятно, откуда брать $\mathcal{B}$. Однако пример с нечеткими множествами показывает, что какие-то кандидаты в $\mathcal{B}$ могут естественным образом возникнуть в процессе преодоления проблем, связанных с существующими подходами. Ключевой является возможность построения архимедовых целых.

1.2.6. (Логический подход.) Наконец, может оказаться так, что наши неудачи объясняются тем, что обычных оснований математики недостаточно для построения правильной абсолютной геометрии. Нужно расширить основания по сравнению с обычной классической логикой и теорией множеств, добавить какие-то новые логические принципы и аксиомы, и тогда все получится. Иначе говоря, мы определяем какую-то новую логику, и повторяем значительный фрагмент математики уже внутри этой логики, примерно как это делали Воеводский и компания в программе гомотопической теории типов (HoTT), пытаясь предложить более адекватные и естественные основания для алгебраической топологии и заодно для всей математики.

1.2.7. (Недостатки логического подхода.) Основной недостаток логического подхода — что он откровенно выглядит как «пойди туда — не знаю куда, принеси то — не знаю что». Пространство возможных логических теорий огромно, непонятно, в какую сторону смотреть. При этом трудозатраты на проверку даже одной теории-кандидата могут быть огромны, как показывает пример программы HoTT, добившейся лишь ограниченных успехов.

1.3 Взаимосвязь и единство трех подходов

Теперь мы объясним, почему геометрический, категорный и логический подход к построению абсолютной геометрии очень тесно взаимосвязаны и по существу являются разными аспектами одного и того же подхода.

1.3.1. (Связь логического и категорного подхода.) Если у нас есть какая-то логическая теория $\mathcal{T}$, мы можем рассмотреть ее модели внутри обычной математики вместо того, чтобы полностью рассуждать внутри $\mathcal{T}$. Моделями подходящих теорий $\mathcal{T}$ обычно являются категории $\mathcal{B}$ с какими-то свойствами. Так, топосы являются моделями интуиционистской логики (вернее, интуиционистской теории типов Мартин-Лёфа) посредством семантики Крипке–Жуаяля. Конкретная логическая теория, включающая в себя как минимум интуиционистскую логику, а также дополнительные правила вывода и аксиомы, будет иметь в качестве моделей не все топосы, а некоторые специальные, и мы можем попытаться построить универсальную модель данной логической теории $\mathcal{T}$. Тогда вместо того, чтобы что-то проверять или строить в логической теории $\mathcal{T}$, мы можем делать все это внутри категории $\mathcal{B}$, пользуясь при этом классической математикой и привычной логикой. Наоборот, всякий топос $\mathcal{B}$, или даже всякая категория $\mathcal{B}$, может быть описана с помощью своей внутренней логики (теории типов, типами которой являются объекты категории $\mathcal{B}$), а аксиомы соответствуют тем специфическим утверждениям, которые всегда выполнены внутри данной категории $\mathcal{B}$.

Таким образом, логический подход и категорный подход по существу эквивалентны, эта эквивалентность реализуется с помощью теории моделей. Это не два разных подхода, а два разных языка для описания одной и той же ситуации, и мы можем переключаться с одного языка на другой так, как нам удобно.

1.3.2. (Связь категорного и геометрического подхода.) Категорный и геометрический подход также оказываются тесно связаны друг с другом. А именно, если база B из геометрического подхода является топологическим пространством, ей можно сопоставить топос пучков $\tilde{B}$. Тогда геометрическим конструкциям над B соответствуют категорные конструкции внутри категории $\tilde{B}$. Например, пучок колец на B соответствует внутреннему кольцу в $\tilde{B}$. Более того, согласно теореме Дьяконеску внутренней категории предпучков на внутренней категории в $\tilde{B}$ соответствует некоторый «настоящий» топос $\mathcal{E}$ над B. Иначе говоря, вместо того, чтобы строить внутренние спектры внутренних колец в $\tilde{B}$ и склеивать из них внутренние схемы, мы можем строить относительные спектры пучков колец над базой B и склеивать из них относительные схемы, что гораздо более наглядно и понятно геометрически.

Конечно же, если база B в геометрическом подходе является топосом, а не топологическим пространством, то все это тем более применимо, потому что B — это тогда уже готовая базовая категория для категорного подхода, а внутренняя логика категории $\mathcal{B}$ — это правильная логическая теория для логического подхода. Аналогичные замечания можно сделать, если геометрическая база B является каким-нибудь другим обобщением топологического пространства, например, вектоидом.

1.3.3. (Все три подхода совпадают, это разные языки для описания одного и того же.) Мы выъяснили, что геометрический подход с базой B, категорный подход с категорией $\mathcal{B}$ и логический подход с теорией $\mathcal{T}$ — это по существу разные языки для описания одной и той же ситуации. Мы можем переключаться с одного языка на другой, чтобы скомпенсировать недостатки этих подходов и пользоваться их преимуществами.

2 Вероятность и абсолютная геометрия

Теперь мы хотим рассмотреть, каким образом предыдущие три подхода к построению абсолютной геометрии могут быть связаны с теорией вероятностей. Сначала надо пояснить, почему мы считаем, что теория вероятностей может быть как-то связана с абсолютной геометрией. Затем мы покажем, как вероятностные подходы могут быть встроены в общую концепцию построения абсолютной базы, изложенную ранее.

2.1 Вероятностные подходы к построению абсолютной базы

2.1.1. (Теория вероятностей и архимедовы целые.) Одним из аргументов в пользу того, что «правильная» абсолютная база должна быть как-то связана с вероятностями, является связь архимедовой точки и гипотетического «кольца архимедовых целых» $\mathscr{O}_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}$ с нечеткими множествами и гауссовскими случайными величинами. В конце концов, одно из наиболее удачных и понятных определений $\mathscr{O}_{\mathbb{R}}$ — это нечеткое подмножество $\mathbb{R}$ с характеристической функцией $e^{-x^2/2}$. Тогда при желании можно интерпретировать $e^{-x^2/2}$ как вероятность того, что данное число $x \in \mathbb{R}$ является архимедовым целым, т.е. принадлежит нечеткому множеству $\mathscr{O}_{\mathbb{R}}$. Если же характеристическую функцию $e^{-x^2/2}$ домножить на меру Лебега dx и отнормировать, получим стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(0,1)$, которое по аналогии с p-адическим случаем логично считать «мерой Хаара $\mathscr{O}_{\mathbb{R}}$».

2.1.2. (Аракеловская геометрия, потенциалы и случайные блуждания.) Другим аргументом является то, что геометрия над $\operatorname{Spec} \mathscr{O}_{\mathbb{R}}$ по существу должна быть вариантом аракеловской геометрии, а как минимум существующие конструкции аракеловской геометрии задействуют потенциалы замкнутых подмногообразий в качестве важного ингредиента для построения арифметической теории пересечений. Однако потенциалы замкнутых подмногообразий риманова или кэлерова многообразия допускают естественную интерпретацию в терминах случайных блужданий. В таком случае можно предположить, что случайные блуждания на римановых многообразий должны быть как-то связаны с $\mathscr{O}_{\mathbb{R}}$, а значит, правильная абсолютная база должна каким-то образом позволять моделировать случайные блуждания.

2.1.3. (Вероятностное смешивание разных характеристик.) Другим аргументом в пользу вероятностной базы, не связанным с архимедовой точкой, является то наблюдение, что вероятностные конструкции позволяют смешивать разные характеристики и непрерывно «перебираться» из $\mathbb{F}_p$

в $\mathbb{F}_\ell$ для разных простых $p \neq \ell$, что обычно невозможно в других подходах, как мы видели в **1.1.2**. А именно, предположим, что мы хотим перебраться, например, из $\mathbb{F}_3$ в $\mathbb{F}_5$. Пусть у нас есть случайное кольцо. Мы мало что про него можем сказать, но как минимум в нем есть единица 1. Будем определять характеристику этого кольца, складывая единицу с собой и проверяя, получился ли ноль. В обычной математике либо $3 = 1+1+1 = 0$, либо $5 = 1+1+1+1+1 = 0$, но не оба сразу (будем считать, что известно, что $1 \neq 0$). А в вероятностном мире может оказаться, что в начале нашего пути вероятность $P(3 = 0)$ равна единице, затем она постепенно уменьшается, а вероятность $P(5 = 0)$ увеличивается, и в конце нашего пути мы уже абсолютно уверены, что $5 = 0$. Тем самым мы непрерывно продеформировали $\mathbb{F}_3$ в $\mathbb{F}_5$ (особенно если изначально известно, что все элементы рассматриваемого случайного кольца являются суммами единиц). «Кратчайший» путь из $\mathbb{F}_3$ в $\mathbb{F}_5$ при этом будет обладать тем свойством, что $P(15 = 0) = 1$ во время всего пути, но помимо этого пути есть и другие. Мы можем также описать $\mathbb{Z}/(9)$ как небольшую окрестность $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$: мы можем начать с того, что мы уверены, что $3 = 0$ и $9 = 0$. Затем мы можем сохранять $P(9 = 0) = 1$, но постепенно уменьшать $P(3 = 0)$ с единицы до нуля. Тем самым мы плавно перейдем от $\mathbb{F}_3$ к $\mathbb{Z}/(9)$.

2.1.4. (Выделенная роль вещественных чисел.) В предыдущем пункте видно, что вещественные числа (например, вероятности, приписанные тем или иным событиям) полезны и играют выделенную роль, позволяя задавать непрерывные пути между различными алгебраическими объектами, которые обычно сложно деформировать друг в друга. Это заметно и в **2.1.1**, где мы не можем описать нечеткое множество $\mathscr{O}_\mathbb{R}$ без вещественных чисел. Можно ожидать, что вещественные числа играют важную роль в описании абсолютной базы B, которую мы ищем. Такая выделенная роль вещественных чисел на фундаментальном уровне кажется довольно странной. С другой стороны, алгебраическая топология дает пример другой ветви математики, где вещественные числа играют очень важную роль, несмотря на то, что все необходимые объекты в принципе допускают чисто комбинаторное описание, например, как симплициальные множества, и гипотетически можно исключить вещественные числа из всех построений, пусть это и не всегда просто и естественно. Может быть, та теория, которую мы ищем, обладает аналогичным свойством: оно допускает описание и без вещественных чисел, но описание, использующее вещественные числа, проще и удобней. Поэтому на данном этапе не надо слишком переживать из-за того, что возникают какие-то вещественные параметры.

2.1.5. (Является ли абсолютная база B стягиваемой?) В этом месте возникает интересный вопрос — является ли абсолютная база B стягиваемой? Конечно, мы пока не знаем, является ли она вообще топологическим пространством, а не, например, топосом или вектоидом. Однако если B — это пространство всех распределений вероятностей на некоторой σ-алгебре фундаментальных событий (по существу мы только что обсуждали нечто подобное в **2.1.3**), то B — это стягиваемое пространство (бесконечномерный симплекс). Мы увидим позже, что другие естественные кандидаты в B включают в себя вариации на тему бесконечномерной сферы S^∞, которая тоже стягиваема.

Поэтому разумно попытаться ответить на вопрос, не является ли это странным. Если универсальная база стягиваема, не получим ли мы ту же теорию, что и над точкой, что вернет нас в исходную ситуацию со всеми ее проблемами, перечисленными в **1.1.2**? Ведь (топологические) расслоения над стягиваемой базой обычно оказываются изоморфны тривиальным?

Скорее всего, возможная стягиваемость базы не является проблемой, потому что пучки на стягиваемом пространстве все же не обязаны быть постоянными, то есть мы получаем топосы $\mathcal{B}$, не эквивалентные *Sets*. В конце концов, та же алгебраическая топология существенно эксплуатирует тот факт, что отрезок $I = [0, 1]$, хоть и стягиваем, сильно отличается от одноточечного пространства $*$ и не может быть на него заменен (например, в определении гомотопии). Может быть, даже естественно ожидать, что правильная абсолютная база B будет стягиваемой.

2.1.6. (От вероятностного пространства к абсолютной базе.) Допустим, предыдущие аргументы убедили нас в том, что вероятностные и измеримые пространства должны играть существенную роль при построении правильной абсолютной базы. Тогда у нас возникают две проблемы:

- Вероятностных пространств много, равно как и измеримых. Какое из них выбрать? Почему какое-то одно из них должно быть выбрано в качестве основы для построения абсолютной базы?

- Мы видели, что абсолютная база B должна быть чем-то вроде топологического пространства или топоса, а вовсе не вероятностным

> или измеримым пространством. Как быть с этим? Можно ли естественным образом изготовить из одного другое?

Попробуем ответить сначала на второй вопрос. Оказывается, есть как минимум два способа изготовить топологическое пространство или топос из вероятностного или измеримого пространства.

2.1.7. (Топос из вероятностного пространства: конструкция Делиня.) Один возможный ответ на второй из поставленных вопросов дан в первом томе SGA4, где приводится конструкция Делиня топоса без точек. Для этой конструкции нужно измеримое пространство $(X, \mathfrak{a})$, т.е. X — множество, $\mathfrak{a}$ — σ-алгебра подмножеств на X. Кроме того, нужен σ-идеал $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{a}$. Если на $(X, \mathfrak{a})$ задана σ-конечная мера μ, можно взять идеал множеств меры нуль (это, в частности, применимо, если изначально дано вероятностное пространство $(X, \mathfrak{a}, P)$). Если же дано только измеримое пространство, можно взять нулевой идеал $\mathfrak{n} = \{\varnothing\}$.

Теперь мы строим из $(X, \mathfrak{a})$ сайт почти как из топологического пространства. Для этого определяем категорию $\mathcal{S}$, объекты которой — измеримые множества (то есть множества из $\mathfrak{a}$), упорядоченные по включению (то есть морфизм из S в T есть в том и только том случае, если $S \subset T$). Далее, мы определяем базу покрытий как *не более чем счётные* семейства морфизмов $\{S_\alpha \to S\}$ в $\mathcal{S}$, такие, что $S - \bigcup_\alpha S_\alpha$ принадлежит идеалу $\mathfrak{n}$. Можно проверить, что тем самым на $\mathcal{S}$ определена некоторая топология Гротендика, и мы получаем некоторый топос $\tilde{\mathcal{S}}$. Если исходная мера μ не обладает атомами (одноточечными множествами ненулевой меры), то топос $\tilde{\mathcal{S}}$ не обладает ни одной точкой, но при этом нетривиален. Он и приведен в SGA4 в качестве примера нетривиального топоса без точек.

Тем не менее, эта конструкция годится не только для построения подобных примеров. Несложно видеть, что сечения постоянных пучков $\underline{U}$ на $\tilde{\mathcal{S}}$ соответствуют U-значным случайным величинам (по крайней мере, если все подмножества U измеримы, что естественно предполагать в тех случаях, когда U не более чем счётно). Поэтому, взяв в качестве исходного измеримого пространства какое-нибудь вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{a}, \mathcal{P})$, мы получим топос, постоянные пучки в котором соответствуют обычным множествам, их произвольные сечения — случайным величинам, а их постоянные сечения — постоянным величинам. Более того, можно делать более необычные вещи — например, определить случайное кольцо как кольцевой объект в таком топосе. Тем самым вся теория вероятностей может быть построена внутри топоса $\tilde{\mathcal{S}}$, а внутренняя логика этого топоса представляет из себя некую «вероятностную логику», которая может быть применена в качестве основ «вероятностной математики», включающей в себя случайность на фундаментальном уровне.

Удивительно, что подобные построения не были проделаны, хотя конструкция Делиня явно выглядит как первый шаг в данном направлении, за которым не последовали следующие.

2.1.8. (Альтернатива: симплекс вероятностных мер на $(X, \mathfrak{a})$.) Несмотря на значимость конструкции Делиня, у нее есть свои недостатки. Так, получающийся топос очень сильно несвязен, потому что у любого подобъекта финального объекта есть дополнение (это соответствует тому, что любой объект булевой алгебры $\mathfrak{a}$ обладает дополнением). Это может помешать «непрерывно перебираться» из одной характеристики в другую, как описано в **2.1.3**, или по крайней мере так наглядно описывать этот процесс.

Для таких случаев есть другая конструкция: мы можем рассмотреть множество всех вероятностных мер $\Delta(X)$ на данном измеримом пространстве $(X, \mathfrak{a})$. Если дан некоторый σ-идеал $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{a}$, например, идеал всех множеств меры нуль относительно некоторой σ-конечной меры ν, то можно рассмотреть не все $\Delta(X)$, а его подмножество $\Delta_{\mathfrak{n}}(X)$, состоящее из вероятностных мер, обращающихся в ноль на $\mathfrak{n}$.

В качестве топологии на $\Delta(X)$ или $\Delta_{\mathfrak{n}}(X)$ можно взять как и сильную топологию (определенную нормой $\|\mu\|$ на пространстве всех ограниченных мер на X, не обязательно положительных), так и слабую топологию (топологию поточечной сходимости как отображений $\mu : \mathfrak{a} \to [0, 1]$), в данном случае эти две топологии совпадают. По существу, $\Delta(X)$ — это бесконечномерный симплекс. Довольно очевидно, что $\Delta(X)$ — стягиваемое пространство (для непустого X), но мы уже обсудили в **2.1.5**, что это нестрашно.

2.1.9. (Стандартные измеримые пространства.) Обратимся теперь к первому из вопросов, поставленных в **2.1.6**: даже если мы можем изготовить топос из вероятностного или измеримого пространства, откуда взять правильное? Их же ведь очень много?

В действительности по существу есть только одно измеримое пространство — так называемое *стандартное измеримое пространство* и только одно вероятностное пространство — *стандартное вероятностное пространство.* В этом отношении ситуация аналогична ситуации с вещественными или комплексными гильбертовыми пространствами — все интересные гильбертовы пространства сепарабельны, и все сепарабельные гильбертовы пространства (неканонически) изоморфны. Поэтому на самом деле нет проблемы, какое именно измеримое или вероятностное пространство выбрать.

Опишем сначала стандартное измеримое пространство (см. [DS, 12.B]). Оно может быть определено, как любое несчетное польское пространство P вместе с σ-алгеброй борелевских множеств на нем. Напомним, что польское пространство — это топологическое пространство, топология которого может быть задана с помощью полной метрики, и в котором есть счетное всюду плотное множество. Многие топологические пространства, встречающиеся в математике, польские.

Оказывается, что любое польское пространство либо не более чем счетно, либо обладает мощностью континуум (т.е. для польских пространств верна континуум-гипотеза, см. [DS, 6.B], а других бесконечных множеств в математике практически не бывает). Для наших целей достаточно выбрать любое польское пространство мощности континуум и рассмотреть σ-алгебру борелевских множеств на нем. Мы можем, например, рассмотреть борелевские множества на отрезке $[0, 1]$ или на $\mathbb{R}$ или на канторовом множестве $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Стандартное измеримое пространство, построенное таким образом, оказывается единственным с точностью до (неканонического) изоморфизма (см. [DS, 15.B]), т.е. между любыми двумя несчетными польскими пространствами можно построить взаимно измеримую биекцию.

2.1.10. (Стандартные вероятностные пространства.) Аналогичным образом существуют стандартные вероятностные пространства, и практически все реально встречающиеся вероятностные пространства стандартны. В первом приближении стандартное вероятностное пространство — это то, в котором можно установить «истинное положение дел», ответив на счетное число вопросов, то есть оно в некотором смысле порождается счетным семейством измеримых множеств. В качестве стандартного вероятностного пространства можно взять, например, отрезок $[0, 1]$ с мерой Лебега (и всеми подмножествами, измеримыми по Лебегу), или же канторово множество $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \cong C_2^{\mathbb{N}}$, т.е. множество бесконечных последовательностей подбрасываний монетки, с мерой Хаара.

Хотя и неверно, что любые два стандартных вероятностных пространства изоморфны, они становятся изоморфны после выкидывания из каждого из них подмножества меры нуль (см. [SP]).

Таким образом, если нам нужно конкретное вероятностное пространство, например, для применения конструкции Делиня **2.1.7** (которая как раз игнорирует множества меры нуль), надо просто взять стандартное вероятностное пространство, например, $[0, 1]$ с мерой Лебега. Получающийся топос определен однозначно с точностью до эквивалентности.

2.1.11. (Промежуточный итог: два кандидата на абсолютную базу.) Предыдущие рассмотрения уже дали нам два конкретных кандидата на абсолютную базу:

- Топос, полученный в результате применения конструкции Делиня **2.1.7** к стандартному вероятностному пространству;

- Бесконечномерный симплекс всех вероятностных мер на стандартном измеримом пространстве.

Абсолютная база могла бы совпадать с одним из этих пространств либо содержать одно из них, например, в качестве сомножителя. Однако лучше продолжить наши общие рассмотрения прежде, чем погружаться в построение теории, основанной на выборе одной из этих двух абсолютных баз. В конце концов, приведенный выше список заведомо неполон, мы могли бы, например, применить конструкцию Делиня к стандартному измеримому пространству, или придумать какие-то еще конструкции топосов из вероятностных пространств. Может быть, мы сумеем выделить какие-то общие принципы, позволяющие сузить пространство вариантов и не тратить усилия на проверку заведомо неподходящих.

2.1.12. (Категорный подход: взять все вероятностные или измеримые пространства сразу.) Следует отметить, что помимо приведенного выше решения проблемы выбора подходящего вероятностного или измеримого пространства, есть и другой подход: а именно, рассмотреть категорию $\mathcal{C}$ всех (не слишком больших) вероятностных или измеримых пространств, и потребовать, чтобы все конструкции проводились над всеми объектами категории $\mathcal{C}$ и были бы согласованы с морфизмами, т.е. рассматривать предпучки множеств на $\mathcal{C}$, декартовы и кодекартовы расслоения над $\mathcal{C}$ и т.п. Даже если все объекты категории $\mathcal{C}$ будут изоморфны стандартному пространству или его ретрактам, категорный подход все равно может быть полезен и естественен, поскольку он решает проблему неканоничности изоморфизмов между стандартными вероятностными или измеримыми пространствами (с точки зрения гомотопической теории типов, неканоничность выбора изоморфизма является столь же существенной проблемой, как и неоднозначность выбора самого объекта). В этом случае категория предпучков множеств $\hat{\mathcal{C}}$ на $\mathcal{C}$ будет эквивалентна категории M-множеств, где M — моноид эндоморфизмов стандартного (вероятностного или измеримого) пространства в категории $\mathcal{C}$. Если на $\mathcal{C}$ задана некая топология Гротендика (например, с помощью конструкции, аналогичной конструкции Делиня), то соответствующий топос, т.е. категория пучков $\tilde{\mathcal{C}}$, будет полной подкатегорией в $\hat{\mathcal{C}}$, т.е. в категории M-множеств.

Примером похожей конструкции является т.н. «топологический топос» Питера Джонстона [TT].

2.1.13. (Принцип использования всех неканонических изоморфизмов, он же принцип эквивариантности конструкций.) В предыдущем пункте мы мимоходом упомянули принцип, проистекающий в том числе из гомотопической теории типов, согласно которому неканоничность при выборе изоморфизма является такой же существенной проблемой, как и неоднозначность при выборе объекта категории. Поскольку этот принцип представляется крайне важным для математики вообще, имеет смысл дать ему название и обсудить поподробнее. Назовем его *принципом использования всех неканонических изоморфизмов*, или же *принципом эквивариантности конструкций.* Иначе говоря, даже если объект определен однозначно с точностью до неканонического изоморфизма, мы все равно должны рассматривать все варианты выбора этого объекта и изоморфизма, тем самым фактически всегда используя категорный подход **2.1.12**.

2.1.14. (Пример применения принципа эквивариантности конструкций в алгебре и теории чисел.) Например, алгебраическое замыкание $\bar{k}$ поля k определено однозначно с точностью до неканонического изоморфизма. Значит, всякий раз, когда мы используем $\bar{k}$ в конструкциях или доказательствах, наши конструкции должны быть согласованы со всеми вариантами выбора $\bar{k}$ и всеми изоморфизмами между ними, т.е. мы должны работать с группоидом всех алгебраических замыканий k. Поскольку этот группоид связен, он эквивалентен группоиду с одним объектом и группой автоморфизмов $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$, т.е. мы все-таки можем зафиксировать одно алгебраическое замыкание $\bar{k}$, но все конструкции должны быть $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$-эквивариантными.

Другой способ преодоления неканоничности изоморфизма заключается в задании дополнительных данных. Например, поле алгебраических чисел $\bar{\mathbb{Q}}$ является алгебраическим замыканием $\mathbb{Q}$, и потому, если мы не зададим дополнительных данных, мы будем обязаны использовать только $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-эквивариантные конструкции при работе с $\bar{\mathbb{Q}}$. С другой стороны, если мы зафиксируем вложение $\bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$, у $\bar{\mathbb{Q}}$ больше не останется нетривиальных автоморфизмов, и мы сможем работать с одной конкретной реализацией алгебраических чисел как подмножества комплексных чисел. Это показывает, почему аналитические и трансцендентные методы могут оказываться на практике более удобными, чем чисто алгебраические, даже в алгебраической теории чисел.

2.1.15. (Принцип эквивариантности конструкций в алгебраической топологии.) Интересно, что ортогональные и симметрические спектры в алгебраической топологии как раз отличаются от придуманных до этого последовательных спектров тем, что помнят все необходимые симметрии или их часть, т.е. эти конструкции более эквивариантны, чем исходная, и при этом они позволили решить стоявшую долгое время проблему определения правильного $\wedge$-произведения спектров. Иначе говоря, и в этом случае правильное решение оказалось частичным или полным применением обсуждаемого принципа.

2.1.16. (Эквивариантность только относительно изоморфизмов или эквивалентностей.) Отметим, что приведенные выше аргументы обосновывают эквивариантность только относительно всех изоморфизмов. Эквивариантность относительно эндоморфизмов при этом может быть полезна, но не обязательна, во всяком случае, она не следует с такой же необходимостью.

2.1.17. (Вероятностная логика или квантовая?) Мы видели, что вероятностный подход не лишен смысла в том числе из-за существования стандартного вероятностного и измеримого пространства. Это напоминает другой аналогичный факт, важный в квантовой механике — единственность сепарабельного гильбертова пространства (комплексного в квантовой механике). Не означает ли этого, что на самом деле вместо построения вероятностной логики (например, как внутренней логики одного из двух топосов, указанных в **2.1.11**) мы должны стремиться к построению квантовой логики, аналогичным образом основанной на сепарабельном комплексном или вещественном гильбертовом пространстве? В конце концов, физический мир в своей основе квантовый, а не вероятностный, и вероятности возникают в нем лишь как приблизительное описание более глубоких квантовых эффектов. К тому же мы видели в **2.1.1**, что гауссовские случайные величины, неразрывно связанные с положительно определенными квадратичными формами и гильбертовыми пространствами, имеют прямое отношение к архимедовым целым $\mathscr{O}_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}$.

Пока что мы запомним этот аргумент и отложим его в сторону. Однако, если удастся построить разумную вероятностную модель (абсолютную базу), можно будет задаться вопросом, не является ли она приближением к более сложной, но более правильной квантовой модели, основанной на гильбертовых пространствах?

2.1.18. (Стандартное гильбертово пространство.) По аналогии со стандартным измеримым и стандартным вероятностным пространством, будем называть сепарабельное вещественное или комплексное гильбертово пространство *стандартными гильбертовыми пространствами.*

2.1.19. ($\Delta(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ — не совсем бесконечномерный симплекс.) Отметим во избежание недоразумений, что множество $\Delta(X)$ вероятностных мер на стандартном измеримом пространстве X (например, отрезке $[0,1]$ или канторовом множестве $C := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ с σ-алгеброй борелевских множеств) — на самом деле вовсе не бесконечномерный симплекс Δ^∞ или его пополнение $\hat{\Delta}^\infty$, хотя и обладает отчасти схожими свойствами (например, является выпуклым и стягиваемым). В самом деле, логично определить бесконечномерный симплекс Δ^∞ по аналогии с бесконечномерной сферой S^∞:

$$\Delta^\infty = \varinjlim_n \Delta^n = \{(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\geq 0} \,:\, \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n = 1, \text{почти все } \lambda_n = 0\} \tag{2.1.19.1}$$

и его пополнение

$$\hat{\Delta}^\infty = \{(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\geq 0} \,:\, \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n = 1\} \tag{2.1.19.2}$$

В то же время элементы $P \in \Delta(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$, т.е. вероятностные меры на множестве бесконечных последовательностей из нулей и единиц, можно задать с помощью чисел $p_\alpha = P(\text{последовательность начинается с } \alpha)$, где α пробегает множество $\{0,1\}^*$ всех конечных слов из нулей и единиц. Эти числа подчинены условиям $p_\varnothing = 1$, $p_\alpha \geq 0$, $p_\alpha = p_{\alpha 0} + p_{\alpha 1}$, и можно проверить, что вероятностная мера P однозначно определяется таким набором p_α. Если закодировать α натуральным числом $n = (1\alpha)_2$, то $\alpha 0$ и $\alpha 1$ соответствуют $2n$ и $2n+1$, и мы получаем следующее описание:

$$\Delta(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) = \{(p_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\geq 0} : p_1 = 1,\ (\forall n)(p_n = p_{2n} + p_{2n+1})\} \qquad (2.1.19.3)$$

Другое эквивалентное описание получается, если сгруппировать слова α по их длине $|\alpha|$:

$$\Delta(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) = \varprojlim_n \Delta^{\{0,1\}^n} = \varprojlim_n \Delta^{2^n} \qquad (2.1.19.4)$$

Здесь $\Delta^{\{0,1\}^n}$ — симплекс, вершинами которого являются все слова α длины n, а морфизм перехода $\Delta^{\{0,1\}^{n+1}} \twoheadrightarrow \Delta^{\{0,1\}^n}$ переводит вершины $\alpha 0$ и $\alpha 1$ в α. В частности, из этого описания видно, что $\Delta(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ компактно (и является польским компактом), в отличие от настоящих бесконечномерных симплексов Δ^∞ и $\hat{\Delta}^\infty$ (последовательность вершин которых не обладает точкой сгущения).

Интересно, что, поскольку $\Delta(X)$ является польским пространством, оно также становится стандартным измеримым пространством, если его наделить σ-алгеброй борелевских множеств, и потому $\Delta(\Delta(X))$ («вероятностные распределения на пространстве вероятностных распределений») неканонически изоморфно самому $\Delta(X)$! Вероятно, именно поэтому в конечном итоге верна теорема де Финетти [DF, III] и ее обобщения.

2.2 Сравнение конструкции Делиня и бесконечномерного симплекса

Мы привели в предыдущем разделе две конкретные конструкции, позволяющие изготовить топос из вероятностного или измеримого пространства: это *конструкция Делиня* (см. **2.1.7**) и *пространство вероятностных мер*, оно же *«бесконечномерный симплекс»* (см. **2.1.8**). Мы хотим сравнить их, чтобы понимать их относительные преимущества и недостатки. Мы увидим, что несмотря на то, что изначально они выглядят совершенно разными, эти две конструкции оказываются тесно связаны: по существу, топос Делиня — это некоторый комбинаторный объект, а пространство вероятностных мер — его геометрическая реализация.

2.2.1. (Различия конструкции Делиня и пространства вероятностных мер.) На первый взгляд, эти две конструкции представляются совершенно разными: так, конструкция Делиня дает топос, не являющийся топологическим пространством, и этот топос вполне несвязен, в то время как пространство вероятностных мер является обычным топологическим пространством, и к тому же связным и даже стягиваемым. При этом топос из конструкции Делиня очень хорошо кодирует события (как открытые объекты, т.е. подобъекты финального объекта), случайные величины (как глобальные сечения постоянных пучков) и даже случайные объекты, такие, как случайные кольца (как соответствующие объекты в топосе, например, кольцевые объекты, т.е. пучки колец). Иначе говоря, он хорошо отражает весь логический каркас теории вероятностей, и даже позволяет производить конструкции, сложно формализуемые при обычном построении теории вероятностей (например, рассматривать случайные объекты, а не только случайные величины, т.е. случайные элементы постоянных объектов).

Однако при этом топос Делиня ничего не знает о вероятностях тех или иных событий. В лучшем случае он различает только, является ли вероятность нулевой или ненулевой (а значит, единичной или меньше единицы, если перейти к дополнению события). Пространство вероятностных мер в этом смысле представляется полным антиподом, потому что оно помнит точные вероятности всех событий.

2.2.2. (Топос Делиня — не топологическое пространство, но близок: он локаль, или 0-топос.) Одно из фундаментальных отличий заключается в том, что топос Делиня — это именно топос, а не топологическое пространство. Однако в действительности топос Делиня недалек от топологических пространств, поскольку является *0-топосом*, или *локалью*, т.е. он полностью задается решеткой открытых объектов (подобъектов финального объекта). Локали часто называют «топологическими пространствами без точек», поскольку они действительно настолько близки к топологическим пространствам, насколько это возможно: топос, определенный топологическим пространством, всегда является локалью, и наоборот, если локаль обладает достаточным количеством точек, то она эквивалентна топосу, заданному некоторым топологическим пространством. Тем самым категория трезвых топологических пространств оказывается эквалентна полной подкатегории категории локалей.

Это рассуждение показывает, что мы не должны слишком огорчаться из-за того, что топос Делиня всего лишь локаль, а не топологическое пространство, и не должны выдвигать это в качестве возможного аргумента против использования топоса Делиня в наших конструкциях абсолютной базы.

2.2.3. (Топос Делиня — это комбинаторный объект, а симплекс вероятностных мер — его геометрическая реализация.) Между топосом Делиня, определенным измеримым или вероятностным пространством X, и соответствующим симплексом вероятностных мер $\Delta(X)$ или $\Delta_{\mathfrak{n}}(X)$, существует довольно тесная связь. Так, если X — конечное множество, то соответствующий топос Делиня соответствует X как дискретному топологическому пространству, а пространство вероятностных мер $\Delta(X)$ — это (геометрический) симплекс с вершинами в X. Можно думать про топос Делиня как некоторый комбинаторный объект, который кодирует только «качественную» информацию, а про соответствующее вероятностное пространство — как геометрическую реализацию этого комбинаторного объекта, по аналогии с симплициальными множествами в алгебраической топологии и их геометрическими реализациями. Симплициальные множества — это комбинаторные объекты, дискретные по своей сущности, а их геометрические реализации — это зачастую связные топологические пространства, позволяющие строить всевозможные пути, гомотопии, деформационные ретракты и т.п. При этом и симплициальные множества, и топологические пространства могут быть использованы для построения гомотопической категории, и в рамках этой категории различие между «комбинаторными» симплициальными множествами и их «топологическими» геометрическими реализациями исчезает. И симплициальные множества, и их геометрические реализации (вместе с более общими CW-комплексами или даже произвольными компактно порожденными топологическими пространствами) в итоге позволяют определить модельные категории, эквивалентные по Квиллену. При этом сами эти модельные категории обладают довольно разными свойствами: так, в категории симплициальных множеств все объекты корасслоенны, в то время как в категории (компактно порожденных) топологических пространств все объекты расслоенны (относительно модельной структуры Серра–Квиллена). Поэтому некоторые конструкции проще производить в одной из этих модельных категорий, другие – в другой. Например, гомотопические расслоенные произведения удобней или как минимум нагляднее строить в топологических пространствах.

2.2.4. (Геометрическая реализация симплициального множества как пространство вероятностных мер.) Пусть K — симплициальное множество, невырожденное в следующем смысле: все вершины любого невырожденного симплекса различны, и любые два невырожденных симплекса обладают различными множествами вершин. Тогда геометрическая реализация $|K|$ может быть описана как множество всех вероятностных мер p на множестве вершин K_0 симплициального множества K, таких, что $\operatorname{supp} p$ содержится в множестве вершин какого-нибудь симплекса K.

Таким образом, барицентрические координаты внутри симплексов геометрической реализации $|K|$ также могут быть интерпретированы как некоторые вероятности. Это объясняет, почему мы настаиваем, что и в общем случае можно думать про пространство вероятностных мер $\Delta(X)$ (где X — измеримое или вероятностное пространство) как про геометрическую реализацию комбинаторного объекта — топоса Делиня, определенного X. Это соображение показывает, что $\Delta(X)$ и топос Делиня не обязательно принципиально различны; скорее это разные способы описания одного и того же гомотопического объекта.

2.2.5. (Измеримым подмножествам $Y \subset X$ соответствуют замкнутые подмножества $\Delta(Y) \subset \Delta(X)$.) Если Y — измеримое подмножество измеримого пространства X, то Y определяет открытый объект в топосе Делиня, обладающий дополнением $X - Y$, т.е. по существу открыто-замнутое подмножество в топосе Делиня, если думать про него как про топологическое пространство или локаль.

С другой стороны, $\Delta(Y)$ отождествляется с замкнутым подмножеством в $\Delta(X)$, состоящим из вероятностных мер P, сконцентрированных на Y, т.е. таких, что $P(Y) = 1$. Дополнение $\Delta(Y)$ — это открытое множество, характеризуемое $P(Y) < 1$. Если $\bar{Y} = X - Y$ — дополнение Y, то можно также сказать, что $\Delta(Y)$ характеризуется $P(\bar{Y}) = 0$, а его дополнение — $P(\bar{Y}) > 0$. Иначе говоря, если рассматривать внутри $\Delta(X)$ подмножества, определенные сравнением вероятностей некоторых событий с нулём или единицей (что соответствует «качественному» использованию вероятностей: мы не фиксируем точное значение вероятностей, нам важно лишь, возможно то или иное событие или нет), то получающиеся подмножества будут близко соответствовать «комбинаторной» схеме, заданной топосом Делиня.

Отметим, что $\Delta(X)$ не есть объединение $\Delta(Y)$ и $\Delta(\bar{Y}) = \Delta(X - Y)$, в отличие от того, что происходит с топосами Делиня. В действительности $\Delta(X)$ — это джойн $\Delta(Y) * \Delta(X - Y)$. Мы снова видим, как естественным образом возникает знакомая топологическая конструкция.

2.2.6. (Геометрическая реализация $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$.) Можно себе представить, что обычные схемы и спектры колец, такие, как $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ — это чисто комбинаторные объекты, вроде топосов Делиня. Предположим, что есть некоторая формальная конструкция («геометрическая реализация»), которая, например, преобразует топос Делиня в пространство вероятностных мер. Что будет, если мы применим эту геометрическую реализацию к $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$? Можно предположить, что получится некоторое связное топологическое пространство $|\operatorname{Spec} \mathbb{Z}|$, и замкнутые подмножества $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ будут соответствовать замкнутым подмножествам в этом пространстве. В частности, $|\operatorname{Spec} \mathbb{F}_p| \subset |\operatorname{Spec} \mathbb{Z}|$ будут непересекающимися замкнутыми подмножествами.

Более того, можно представить, что локальные координаты точек $|\operatorname{Spec} \mathbb{Z}|$ будут допускать некоторую вероятностную интерпретацию по аналогии с **2.2.4**, и что замкнутые подмножества $|\operatorname{Spec} \mathbb{F}_p|$ будут выделяться внутри $|\operatorname{Spec} \mathbb{Z}|$ условиями равенства каких-то из этих координат-вероятностей нулю или, наоборот, единице. Это напоминает неформальную картину из **2.1.3**, где в качестве условия, выделяющего $\mathbb{F}_p$, предлагалось $P(p \cdot 1 = 0) = 1$.

2.2.7. (Гомотопический расслоенный квадрат $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$.) Если обрисованная выше картина имеет хоть какое-то право на существование, можно также предположить, что правильное $\operatorname{Spec} \mathbb{Z} \times \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ (над некоторой абсолютной базой) должно вычисляться как гомотопическое расслоенное произведение. Тогда мы можем использовать геометрическую реализацию $|\operatorname{Spec} \mathbb{Z}|$ в качестве расслоенной замены и вычислять уже ее расслоенное произведение на себя, которое тогда будет допускать обычное описание как пространство троек (x, y, γ), где x и y — точки в $|\operatorname{Spec} \mathbb{Z}|$, а γ — путь между проекциями x и y на абсолютную базу. Понятно тогда, почему обычные способы вычисления абсолютного квадрата $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ не дают правильный результат и не позволяют смешивать разные характеристики.

Все это хорошо согласуется с неформальной картиной из **2.1.3**. Можно также отметить, что непрерывные функции, обращающиеся в ноль в точности на некоторой замкнутой подсхеме, очень похожи на потенциалы замкнутых подмногообразий из аракеловской геометрии.

Список литературы

[GHS] Svante Janson, *Gaussian Hilbert spaces*, Cambridge Tracts in Mathematics **129**, Cambridge University Press, 1997.

[DS] Alexander S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Graduate Texts in Mathematics **156**, Springer-Verlag, 1995.

[TG] Nicolas Bourbaki, *Topologie Générale*, Hermann, Paris, 1971 (chap. 1–4), 1974 (chap. 5–10).

[OP] Gabor Szegö, *Orthogonal polynomials*, AMS, 1978.

[TT] Peter Johnstone, *On a topological topos*, Proc. London Math. Soc. (3) **38** (1979) pp. 237–271.

[CH1] Th. Coquand, G. Huet, *Constructions: A higher order proof system for mechanizing mathematics.* In EUROCAL'85, volume **203**, Linz, 1985. Springer-Verlag.

[CH2] Th. Coquand, G. Huet, *The Calculus of Constructions,* Information and Computation, **76** (2/3), 1988.

[CP] Th. Coquand, C. Paulin-Mohring. *Inductively defined types,* in P. Martin-Löf and G. Mints, editors, Proceedings of Colog'88, **417**. Springer-Verlag, 1990.

[SP] Thierry de la Rue, *Espaces de Lebesgue*, Séminaire de Probabilités XXVII, Lecture Notes in Mathematics **1557**, Springer, 1993, pp. 15–21.

[DF] Bruno de Finetti, *La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives*, Annales de l'institut Henri Poincaré, **7** (1937) no. 1, pp. 1–68.

[AB1] Дуров Н.В., *Обзор подходов построения абсолютной геометрии*, Препринт ПОМИ 8 (2022).

[AB3] Дуров Н.В., *Индуктивные и коиндуктивные конструкции в математике*, Препринт ПОМИ 9 (2022).

[AB4] Дуров Н.В., *Примеры эффективных систем счисления*, Препринт ПОМИ 10 (2022).

[AB5] Дуров Н.В., *Вероятностные свойства избыточных систем счисления*, Препринт ПОМИ 11 (2022).

[AB6] Дуров Н.В., *Регулярные пространства и регулярные отображения*, Препринт ПОМИ 12 (2022).