ПРЕПРИНТ ПОМИ 7/2022

# О ЧИСЛЕ УЗЛОВ С ЗАДАННЫМ ДУГОВЫМ ИНДЕКСОМ

**А. В. Малютин, М. Н. Ступаков**

Санкт-Петербургское отделение
математического института им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27, 191023, Санкт-Петербург, Россия

Международный математический институт им. Леонарда Эйлера,
Песочная набережная, д. 10, 197022, Санкт-Петербург, Россия

malyutin@pdmi.ras.ru, stupakov.mn@gmail.com

АННОТАЦИЯ

Доказывается, что при $k \geqslant 5$ число простых узлов, дуговый индекс которых не превышает $k$, составляет по меньшей мере $x^x$, где $x = k/22$.

**Ключевые слова:** узел, зацепление, дуговый индекс, группа кос, группа классов отображений, многообразие, JSJ разложение, полноторий, несжимаемая поверхность, слоение, изотопия, гомотопия, гомеотопия, универсальное накрытие, гиперболический.

Данная работа была поддержана Санкт-Петербургским международным математическим Институтом имени Леонарда Эйлера, грантовое соглашение NN 075-15-2019-1620 от 08.11.2019 и 075-15-2022-289 от 06.04.2022.

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St. Petersburg Department
of Steklov Institute of Mathematics

---

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В. М. Бабич, Н. А. Вавилов, А. М. Вершик, М. А. Всемирнов,
А. И. Генералов, И. А. Ибрагимов, Л. Ю. Колотилина,
Ю. В. Матиясевич, Н. Ю. Нецветаев,
С. И. Репин, Г. А. Серегин

# 1 Введение

Мы исследуем структуру и статистические характеристики множества классических узлов и зацеплений, включая глобальные и локальные свойства графов преобразований узлов и скорость роста числа узлов относительно различных мер сложности (см. [M18, M19, BM19, BKMMF21] и приведенную там литературу). В настоящей работе конструируются так называемые *усложненные Александеровские замыкания* кос, дающие вложения групп крашеных кос в множество узлов. Как и классическое Александеровское замыкание, усложненные замыкания имеют четко выраженный геометрический смысл и являются липшицевыми отображениями по отношению к словарным метрикам на группах кос и их графах Кэли и метрике вложенных перестроек на множестве узлов и зацеплений и соответствующем гордиевом графе. При этом, в отличие от Александеровского замыкания, склеивающего классы сопряженности (и не только), специальным образом сконструированные усложненные Александеровские замыкания не сюръективны (теорема Александера), а инъективны (раздел 4.1). Это позволяет, в частности, получать оценки на скорость роста числа узлов. Центральными моментами настоящей работы являются описание примера усложненного Александеровского замыкания (§2 и рис. 1), доказательство его инъективности (раздел 4.1) и получение, в качестве следствия, оценки на скорость роста числа простых узлов по отношению к дуговому индексу узла. Полученная нижняя оценка представлена в следующей теореме.

**Теорема 1.** *При $k \geqslant 5$ число $A_k$ изотопических классов ориентированных простых узлов в $\mathbb{R}^3$, дуговый индекс которых не превышает $k$, составляет по меньшей мере $n!$, где $n$ – целая часть числа $(k+4)/11$.*

*В частности, при $k \geqslant 5$ выполняется неравенство $A_k \geqslant x^x$, где $x = k/22$, а при $k \geqslant 10^7$ выполняется неравенство $A_k \geqslant y^y$, где $y = k/12$.*

Пример усложненного Александеровского замыкания описан в §2 (см. рис. 1), предложение 1 описывает некоторые из его свойств в виде абстрактного утверждения о существовании – формулировка не затрагивает геометрического смысла конструкции, – такой формулировки достаточно для вывода теоремы 1.

**Предложение 1.** *Для каждого натурального $n \geqslant 2$ найдется отображение*

$$f_n \colon PB_n \to \vec{\mathscr{K}}$$

*группы крашеных кос $PB_n$ с $n$ нитями в множество $\vec{\mathscr{K}}$ (классов объемлемо изотопных) ориентированных узлов в $\mathbb{R}^3$, обладающее следующими свойствами:*

- *отображение $f_n$ инъективно;*
- *все узлы в образе $f_n(PB_n)$ — просты;*
- *все узлы в образе $f_n(PB_n)$ являются сателлитами;*

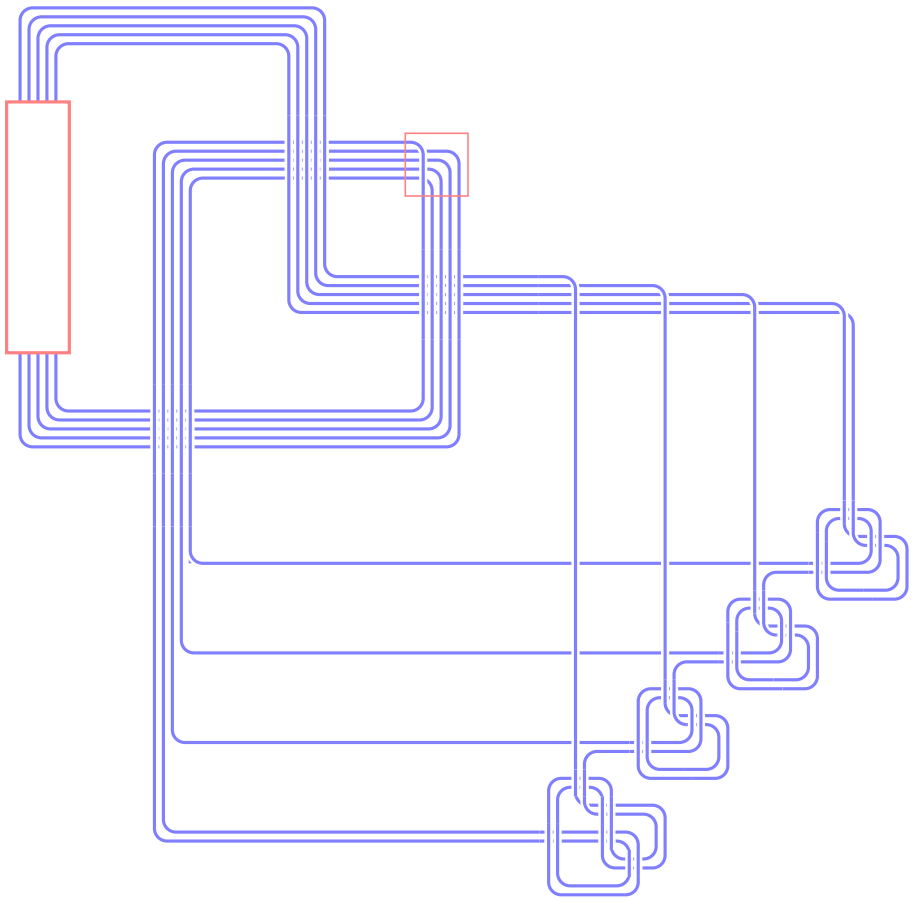

Рис. 1. Пример шаблона для усложненного Александеровского замыкания

– *если коса $\beta \in PB_n$ представима в виде произведения из $s$ перестановочных кос, то дуговый индекс узла $f_n(\beta)$ не превышает числа*

$$n \cdot \max\{11, s+8\} - 4.$$

## 2 Усложненное Александеровское замыкание: определение отображения $\mathfrak{f}_n \colon PB_n \to \vec{\mathscr{K}}$

В настоящем разделе для произвольного $n \geqslant 3$ определяется отображение $\mathfrak{f}_n \colon PB_n \to \vec{\mathscr{K}}$ из группы крашеных кос $PB_n$ на $n$ нитях в множество $\vec{\mathscr{K}}$ классов объемлемо изотопных ориентированных узлов в $\mathbb{R}^3$.

Пусть $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость. Выберем $n$ различных точек на вещественном интервале $(-1;1) \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ и обозначим эти точки через $z_1, \ldots, z_n$

слева направо (т. е. так, что $z_1 < z_2 < \cdots < z_n$ на $\mathbb{R}$). Точки множества $Z := \{z_1, \ldots, z_n\}$ будем называть *исключительными*. Обозначим через $D$ замкнутый диск единичного радиуса с центром в точке $0 \in \mathbb{C}$, и через $D'$ — проколотый диск $D \setminus Z$.

Пусть $V$ – полноторий, полученный отождествлением слоев $D \times \{0\}$ и $D \times \{3\}$ ($\{z\} \times \{0\} \sim \{z\} \times \{3\}$) цилиндра $D \times [0, 3]$. Слоение полнотория $V$ на меридианные диски вида $D \times \{t\}$ будем называть *фиксированным* слоением. Подцилиндры $D \times [0, 1]$, $D \times [1, 2]$ и $D \times [2, 3]$ в полнотории $V$ обозначим через $V_C$, $V_S$ и $V_B$ соответственно.

Для элементов группы кос $B_n$ зафиксируем стандартное представление в виде изотопических классов наборов простых дуг с фиксированными концами в цилиндрах вида $D \times [a, b]$, поставив в соответствие артиновской образующей $\sigma_i$ набор, состоящий из отрезков $\{z_j\} \times [a, b]$ для всех $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i, i+1\}$ и дуг $\gamma_i$ и $\gamma_i'$, где $\gamma_i$ – простая дуга с концами в точках $\{z_i\} \times \{a\}$ и $\{z_{i+1}\} \times \{b\}$, трансверсальная к дискам фиксированного слоения и при проекции в $D$ дающая простую дугу, относительная внутренность которой лежит в полуплоскости с отрицательной мнимой частью, а $\gamma_i'$ – простая дуга, получающаяся из $\gamma_i$ поворотом на угол $\pi$ относительно отрезка $\{(z_i + z_{i+1})/2\} \times [a, b]$. При $a < b < c$ произведению кос $\beta_1\beta_2$ ставится в соответствие изотопический класс набора дуг в $D \times [a, c]$, являющегося объединением набора дуг в $D \times [a, b]$, представляющего косу $\beta_1$, и набора дуг в $D \times [b, c]$, представляющего косу $\beta_2$.

Для крашеной косы $\beta \in PB_n$ обозначим через $\beta'$ набор дуг в $D \times [0, 3]$, являющийся объединением отрезков $Z \times [0, 1]$, произвольно выбранного набора дуг в $V_S$, представляющих косу

$$\delta_n := \sigma_{n-1} \ldots \sigma_2 \sigma_1,$$

и произвольно выбранного набора дуг в $V_B$, представляющего косу $\beta$ (набор $\beta'$ представляет тем самым косу $\delta_n\beta$). Соответствующее подмножество в полнотории $V$ обозначим через $\hat{\beta}'$. Заметим, что множество $\hat{\beta}'$ связно, поскольку коса $\delta_n$, а значит и $\delta_n\beta$, задают циклическую перестановку множества $\{1, \ldots, n\}$. Подмножества вида $\hat{\beta}'$ будем называть также *узлами* или *замкнутыми косами*.

Для каждого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ выберем и обозначим через $O_i$ какую-нибудь геометрическую окружность, лежащую во внутренности диска $D$ и охватывающую из множества $Z$ лишь точки $z_i$ и $z_{i+1}$. Окружность $O_i \times \{i/n\}$ в $V_C \subset V$ обозначим через $C_i$, зацепление $C_1 \cup \cdots \cup C_{n-1}$ в $V_C \subset V$ обозначим через $C$.

Обозначим через $r$ минимум расстояний между компонентами множества $(Z \times [0, 1]) \cup C$, положим $\epsilon := r/(100n)$, и для каждого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ обозначим через $B^i$ замкнутую $\epsilon$-окрестность плоского диска, ограниченного окружностью $C_i$.

Для каждого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ выберем во внутренности топологического шара $B^i$ достаточно тонкую замкнутую трубчатую окрестность $U_i = U(C_i)$ окружности $C_i$. Дополняющий полноторий $B^i \setminus \operatorname{int} U_i$ обозначим через $R_i$.

Объединение $U_1 \cup \dots \cup U_{n-1}$ будем обозначать через $U(C)$ и $U$, многообразие $V \setminus \mathrm{int}(U(C))$ обозначим через $M$. (Тем самым, $M$ гомеоморфно сфере с выкинутой открытой окрестностью тривиального $n$-компонентного зацепления.)

Пусть $B$ – топологический шар, $O$ – содержащийся в $B$ полноторий (возможно, заузленный). Тогда на крае $\partial O$ определен изотопический класс *параллелей* (см, например, [BZ03, Theorem 3.1]). Вложение $\psi\colon O \to B$ назовем *неперекручивающим*, если $\psi$ переводит параллели полнотория $O$ в параллели полнотория $\psi(O)$.

Пусть $\phi_0\colon M \to V$ – какое-нибудь вложение, тождественное вне шаров $B^i$, неперекрученно заузливающее полноторий $R_1$ в узел-восьмерку и для каждого $i \in \{2, \dots, n-1\}$ неперекрученно заузливающее полноторий $R_i$ в правый трилистник.

Пусть $\phi_1\colon V \to \mathbb{R}^3$ – какое-нибудь вложение полнотория $V$ в $\mathbb{R}^3$, заузливающее его в трилистник и неперекручивающее в том смысле, что для произвольного $x \in \partial D$ кривая, отвечающая отрезку $\{x\} \times [0,3]$, переходит в параллель заузленного полнотория $\phi_1(V)$.

Обозначим композицию $\phi_1 \circ \phi_0$ через $\phi$ и определим образ $\mathfrak{f}_n(\beta)$ косы $\beta \in PB_n$ как класс узла $\phi(\hat{\beta}')$ в $\mathbb{R}^3$.

# 3 Предварительные сведения и вспомогательные леммы

## 3.1 Предварительные сведения и вспомогательные леммы о зацеплениях в расслоенных пространствах

Настоящий раздел содержит сведения о зацеплениях в расслоенных пространствах, использующиеся в разделе 4.1 при доказательстве инъективности определенных в разделе 2 отображений $\mathfrak{f}_n$.

Подмногообразие расслоенного многообразия называется *вертикально-горизонтальным* (*ВГ*), если каждая из его компонент либо трансверсальна слоям во всех своих точках (*вертикальна*), либо лежит в слое (*горизонтальна*). Одномерные компактные подмногообразия, лежащие во внутренности трехмерного многообразия, называются *зацеплениями*.

В работе [Mal22] доказывается следующая теорема.

**Теорема 2.** *В компактном ориентируемом трехмерном многообразии, локально тривиально расслоенном над окружностью со слоем компактная поверхность, ВГ-зацепления объемлемо изотопны если и только если они изотопны в классе ВГ.*

Нам потребуется следующее уточнение теоремы 2, прямо вытекающее из конструкции приведенного в [Mal22] доказательства теоремы 2.

**Теорема 3.** *Пусть $L_1$ и $L_2$ – объемлемо изотопные ВГ-зацепления в компактном ориентируемом трехмерном многообразии $W$, локально тривиально расслоенном над окружностью со слоем компактная поверхность. Тогда для каждой объемлемой изотопии $\lambda$, переводящей $L_1$ в $L_2$, найдется изотопия в классе ВГ, переводящая $L_1$ в $L_2$ и индуцирующая то же отображение на множествах компонент зацеплений, что и изотопия $\lambda$.*

Пусть $F$ – поверхность. Зацепление в $F \times \mathbb{R}$ называется *вертикально расщепленным*, если его проекция в $\mathbb{R}$ не связна, и – *горизонтально расщепленным*, если не связна его проекция на $F$. Если зацепление $L$ в $F \times \mathbb{R}$ изотопно вертикально/горизонтально расщепленному, его называют *вертикально/горизонтально расщепимым*. Ту компоненту двухкомпонентного вертикально расщепленного зацепления в $F \times \mathbb{R}$, у которой $\mathbb{R}$-координаты больше, назовем *верхней*, а отличную от нее компоненту – *нижней*. Будем говорить, что вертикально расщепленное двухкомпонентное горизонтальное зацепление в $F \times \mathbb{R}$ *допускает рокировку*, если в $F \times \mathbb{R}$ найдутся вертикально расщепленное двухкомпонентное горизонтальное зацепление $L'$ и изотопия между $L$ и $L'$, переводящая верхнюю компоненту зацепления $L$ в нижнюю компоненту зацепления $L'$. *Поверхностями конечного типа* называют компактные поверхности и поверхности, полученные из компактных удалением конечного числа точек внутренности.

В работе [Mal22] доказывается следующая лемма.

**Лемма 1.** *Вертикально расщепленное двухкомпонентное горизонтальное зацепление в $F \times \mathbb{R}$, где $F$ – ориентируемая поверхность конечного типа, допускает рокировку если и только если проекции его компонент на $F$ изотопны в $F$ непересекающимся кривым.*

Вертикально-горизонтальное зацепление назовем *моноциклическим*, если оно не изотопно никакому ВГ-зацеплению с двумя горизонтальными компонентами в одном слое. (По теореме 2, каждое моноциклическое зацепление не только изотопно, но и ВГ-изотопно зацеплению с двумя горизонтальными компонентами в одном слое.)

**Лемма 2.** *При $n \geqslant 3$ для каждой крашеной косы $\beta \in PB_n$ зацепление $\hat{\beta}' \cup C$ из определения отображения $\mathfrak{f}_n$ моноциклично.*

*Доказательство.* Пусть $N$ – многообразие, локально тривиально расслоенное над окружностью со связным слоем, и пусть $L$ – вертикально-горизонтальное зацепление в $N$, ни одна пара горизонтальных компонент которого не лежит в одном слое.

Две горизонтальные компоненты в $L$ назовем *соседними*, если они лежат в одной компоненте пространства, получающегося при удалении из $N$ всех слоев, содержащих отличные от двух рассматриваемых горизонтальные компоненты зацепления $L$.

Если в $L$ имеется по меньшей мере три горизонтальных компоненты, то *локальным цилиндром* двух соседних горизонтальных компонент $C'$ и $C''$

в $L$ будем называть содержащую $C'$ и $C''$ компоненту многообразия (с индуцированным расслоением), получающегося из $N$ при удалении слоев, содержащих отличные от $C'$ и $C''$ горизонтальные компоненты зацепления $L$, и последующем удалении вертикальной части зацепления $L$.

Если горизонтальная часть у $L$ состоит из двух компонент $C'$ и $C''$, возьмем в $N$ два слоя $F'$ и $F''$ таким образом, чтобы объединение $F' \cup F''$ не пересекалось с объединением $C' \cup C''$ и компоненты $C'$ и $C''$ лежали в разных компонентах связности пространства $N \setminus (F' \cup F'')$, и назовем *локальными цилиндрами* пары $C'$ и $C''$ многообразия (с индуцированными расслоениями) $N \setminus (F' \cup L_v)$ и $N \setminus (F'' \cup L_v)$, где $L_v$ – вертикальная часть зацепления $L$.

Будем говорить, что две соседние горизонтальные компоненты в $L$ *допускают рокировку*, если они допускают рокировку хотя бы в одном из их локальных цилиндров.

Из теоремы 2 и леммы 1 очевидным образом следует, что $L$ не является моноциклическим если и только если какие-то две соседние компоненты допускают рокировку.

Покажем, что никакие две соседние горизонтальные компоненты зацепления $\hat{\beta}' \cup C$ рокировки не допускают.

Действительно, как следует из определений, набор

$$(C_1, C_2), (C_2, C_3), \ldots, (C_{n-1}, C_1)$$

исчерпывает множество соседних горизонтальных компонент для $\hat{\beta}' \cup C$ (см. раздел 2).

Каждый из локальных цилиндров каждой пары из этого набора расслаивается над интервалом со слоем проколотый диск $D'$.

При проекции каждого из этих локальных цилиндров в $D'$ мы видим, что соседние компоненты переходят в простые замкнутые кривые, каждая из которых окружает по два прокола, и при этом пересечение множеств окружаемых проколов в каждом из случаев состоит из одного прокола. (Для пары $(C_{n-1}, C_1)$ это обусловлено тем, что косы $\delta_n$ и $\delta_n\beta$ индуцируют циклическую перестановку $1 \to 2 \to \cdots \to n$ на множестве проколов.)

Отсюда в силу леммы 1 вытекает, что никакие две соседние горизонтальные компоненты зацепления $\hat{\beta}' \cup C$ рокировки не допускают.

Следовательно, зацепление $\hat{\beta}' \cup C$ из определения отображения $\mathfrak{f}_n$ моноциклично. $\square$

**Предложение 2.** *Пусть $F$ – компактная поверхность, а $L_1$ и $L_2$ – объемлемо изотопные моноциклические вертикально-горизонтальные зацепления в прямом произведении $F \times S^1$. Предположим, что множество слоев, содержащих горизонтальные компоненты зацепления $L_1$, совпадает с множеством слоев, содержащих горизонтальные компоненты зацепления $L_2$, и что $L_1$ и $L_2$ связаны объемлемой изотопией, переводящей хотя бы одну из горизонтальных компонент зацепления $L_1$ в горизонтальную*

*компоненту зацепления $L_2$, лежащую в том же слое. Тогда $L_1$ и $L_2$ связаны послойной изотопией многообразия $F \times S^1$, в каждый момент переводящей каждый слой $F \times \{x\}$ в него же.*

*Доказательство.* По теореме 3 найдется ВГ-изотопия $\rho$, переводящая $L_1$ в $L_2$ и в конечный момент переводящая одну из горизонтальных компонент зацепления $L_1$ в ее исходный слой.

Поскольку ВГ-изотопия моноциклического зацепления в силу определений сохраняет циклический порядок на множестве горизонтальных компонент, отсюда следует, что изотопия $\rho$ в конечный момент переводит каждую из горизонтальных компонент зацепления $L_1$ в ее исходный слой.

Заметим, что ВГ-изотопиям моноциклических зацеплений отвечают послойные изотопии многообразия, поскольку в процессе ВГ-изотопии моноциклического зацепления его различные горизонтальные компоненты не оказываются в один и тот же момент в одном и том же слое.

Следовательно, для $F \times S^1$ найдется послойная изотопия $\tau$, переводящая $L_1$ в $L_2$ и такая, что $\tau_1(F_x) = F_x$, если $F_x$ – слой, содержащий горизонтальную компоненту зацепления $L_1$. Подправив при необходимости изотопию $\tau$ на цилиндрах, ограниченных соседними слоями, содержащими горизонтальные компоненты, мы можем считать, что $\tau_1(F_x) = F_x$ и для каждого слоя $F_x$, так что $\tau_1$ индуцирует тождественный автоморфизм базы $S^1$.

Пусть $p(\tau)$ – изотопия базы $S^1$, индуцированная послойной изотопией $\tau$, $\tilde{p}$ – «поднятие» изотопии $p(\tau)$ в $F \times S^1$, доставляемое произведением изотопии $p(\tau)$ и тождественной изотопии слоя, а $\tilde{p}'$ – изотопия, обратная к $\tilde{p}$ в том смысле, что $\tilde{p}'_t = \tilde{p}_t^{-1}$. Тогда изотопия-произведение $\chi = \tau \star \tilde{p}'$, задаваемая правилом $\chi_t = \tau_t \circ \tilde{p}'_t$, очевидно обладает искомым свойством. □

## 3.2 Предварительные сведения и вспомогательные леммы о JSJ-разложении

Детальное описание сведений о JSJ-разложении дополнений узлов можно найти в работе [Bud06] и приведенной там литературе.

**Лемма 3.** *В терминологии раздела 2, для любой крашеной косы $\beta \in PB_n$ вложенный тор $T$ в дополнении $\mathbb{R}^3 \setminus \phi(\hat{\beta}')$ узла $\phi(\hat{\beta}')$ является несжимаемым если и только если $T$ изотопен одному из торов набора $\phi(\partial M)$. Более того, набор торов $\phi(\partial M)$ представляет набор JSJ-разложения для (дополнения) узла $\phi(\hat{\beta}')$.*

*Доказательство.* Торы из $\phi(\partial M)$ несжимаемы в $\mathbb{R}^3 \setminus \phi(\hat{\beta}')$, поскольку каждый из этих торов заузлен, а узел $\phi(\hat{\beta}')$ проходит в ограничиваемом каждым из этих узлов полнотории с ненулевым индексом вращения относительно полнотория. (По построению, узел $\phi(\hat{\beta}')$ имеет индекс $n$ в полнотории, ограниченном тором $\phi(\partial V)$, и индекс 2 в полноториях, ограниченных торами из $\phi(\partial U)$.)

Торы из $\phi(\partial M)$ входят в JSJ-разложение, поскольку заузлены в несателлитные узлы.

Торы из $\phi(\partial M)$ попарно не пареллельны, – в одноточечной компактификации $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ они по построению вкладываются в набор попарно непересекающихся шаров.

Покажем, что каждый несжимаемый тор в дополнении $\mathbb{R}^3 \setminus \phi(\hat{\beta}')$ изотопен одному из торов набора $\phi(\partial M)$.

Предположим, желая прийти к противоречию, что некоторый несжимаемый тор $T$ в $\mathbb{R}^3 \setminus \phi(\hat{\beta}')$ не изотопен ни одному из торов набора $\phi(\partial M)$.

В таком случае, поскольку ни один из торов набора $\phi(\partial M)$ не завязан в сателлитный узел, тор $T$ изотопией в $\mathbb{R}^3 \setminus \phi(\hat{\beta}')$ переводится во внутренность многообразия $\phi(M)$, так что определен прообраз $\phi^{-1}(T)$ в $M$, и этот прообраз несжимаем и не параллелен краю в $M$.

Изотопией переведем тор $T' = \phi^{-1}(T)$ в состояние общего положения по отношению к фиксированному слоению меридианными дисками в $V$ и стандартными методами теории несжимаемых поверхностей минимизируем количество особенностей на индуцированном (фиксированным слоением меридианными дисками) слоении с особенностями на $T'$.

Тор $T'$ не переводится в «вертикальное» положение, где особенности на индуцированном слоении отсутствуют, поскольку в таком случае на пересечении тора с произвольным меридианным диском образовывалась бы простая замкнутая кривая, охватывающая лишь часть нитей замкнутой косы $\hat{\beta}'$ (поскольку предполагается, что тор $T'$ не параллелен краю $\partial V$, а ни одна из окружностей $C_i$ все нити косы не охватывает), которая при изотопии полного оборота над базой не задевала бы ни одной окружности из набора $C$, что невозможно, поскольку наличие такой изотопии позволяло бы найти на проколотом диске $D'$ простую замкнутую кривую, не изотопную краю $\partial D'$ и не пересекающую ни одной окружности набора $O_1, \ldots, O_{n-1}$.

На невертикально расположенном торе $T'$ кроме седловых точек присутствуют также экстремальные точки «максимумов» и «минимумов». (Чтобы убедиться в этом, заметим, что две непересекающиеся замкнутые простые кривые на торе либо изотопны, либо одна из кривых стягиваема, и применим это наблюдение к высекаемым меридианными дисками простым замкнутым кривым на торе $T'$.)

Стандартный анализ показывает, что единственным препятствием к сокращению количества особенностей и/или переведению максимума и минимума в тонкую окрестность одного меридианного диска в нашем случае могут служить лишь компоненты подзацепления $C$. При этом в случае, если компонента $C_i$ служит таким препятствием, в торе $T'$ имеется кольцо $A$, отделяемое меридианом, содержащим $C_i$. Натянув кольцо $A'$ от кольца $A$ к окружности $C_i$ и анализируя пересечение кольца $A'$ и тора $T'$, мы видим, что предполагаемая несжимаемость тора $T'$ позволяет изотопиями очистить кольцо $A'$ от пересечений с $T'$, за исключением кривых, параллельных окружности $C_i$, которые могут возникать исключительно в

результате пересечений с другими – параллельными кольцу $A$ – кольцами тора $T'$, отсекаемыми от $T'$ меридианом, содержащим окружность $C_i$.

Ближайшее к $\partial(U_i)$ из указанных подколец изотопией в $M$ переводится в положение «касания» с $\partial(U_i)$. Получающаяся таким образом кривая касания $\gamma_i$ на $T'$ не стягиваема в $T'$, поскольку $C_i$ не стягиваема в $V \setminus \hat{\beta}'$.

Так как тор $T'$ не параллелен тору $\partial(U_i)$, в паре к кривой касания $\gamma_i$ на $T'$ аналогичным образом возникает кривая касания $\gamma_j \subset T'$ с параллелью тора $\partial(U_j)$ одной из компонент $C_j$, отличных от $C_i$. В таком случае ограниченное кривыми $\gamma_i$ и $\gamma_j$ кольцо на $T'$ дает в $M$ правильно вложенное несжимаемое кольцо с краями-параллелями на $\partial(U_i)$ и $\partial(U_j)$. Наличие такого кольца показывает, что $C_i$ и $C_j$ изотопны в $(V \setminus (\hat{\beta}' \cup C)) \cup C_i \cup C_j$. Однако это невозможно, поскольку $\hat{\beta}' \cup C$ моноциклично в $V$ (лемма 2).

Полученное противоречие завершает доказательство. □

*Замечание.* Из моноцикличности зацепления $\hat{\beta}' \cup C$ в $V$ (лемма 2) и специфики расположения окружностей зацепления $C$ в силу рассуждений, приведенных в доказательстве леммы 3, вытекает, что в $M$ отсутствуют также и правильно вложенные несжимаемые кольца (anannularity). Отсюда в силу гиперболизационной теоремы Терстона следует гиперболичность (внутренности) многообразия $M$, или, что то же самое, многообразия $V \setminus (\hat{\beta}' \cup C)$.

## 3.3 Лемма об обметывающих наборах кривых

**Лемма 4.** *Пусть $n \geqslant 3$, а $D'$ и $C_1, \ldots, C_{n-1}$ – проколотый диск и простые кривые на нем из конструкции раздела 2. Пусть $h\colon D' \to D'$ – сохраняющий ориентацию автогомеоморфизм, переводящий каждую из кривых $C_1, \ldots, C_{n-1}$ в изотопную ей кривую. Тогда $h$ изотопен тождественному автогомеоморфизму.*

*Доказательство.* С помощью стандартных методов теории автоморфизмов поверхностей, индукцией по $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ демонстрируется, что $h$ изотопен автогомеоморфизму, тождественному на подмножестве $C_1 \cup \cdots \cup C_k$.

Из того, что $h$ изотопен автогомеоморфизму, тождественному на подмножестве $C_1 \cup \cdots \cup C_{n-1}$, следует требуемое в силу того, что каждая из компонент множества $D' \setminus (C_1 \cup \cdots \cup C_{n-1})$ гомеоморфна либо открытому диску, либо открытому диску с проколом, либо кольцу с одной компонентой края. □

*Замечание.* Потребовав дополнительно при определении окружностей $C_1, \ldots, C_{n-1}$, чтобы ни для какого $i$ окружности $C_i$ и $C_{i+2}$ не пересекались, мы можем разбить набор $C_1, \ldots, C_{n-1}$ на два простых подмногообразия $C_1 \cup C_3 \cup \ldots$ и $C_2 \cup C_4 \cup \ldots$ и воспользоваться для доказательства леммы 4 методами гиперболической геометрии (см., например, [CB88]).

# 4 Доказательство предложения 1 и свойств отображения $\mathfrak{f}_n$

Заметим, что в случае $n = 2$ справедливость предложения 1 очевидным образом обеспечивается отображением, отправляющим группу крашеных кос $PB_2 \cong \mathbb{Z}$ в множество двуниточных сателлитов трилистника или узла-восьмерки, и далее, чтобы не делать оговорок, связанных с вырождением, мы предполагаем, что $n \geqslant 3$. В случае $n \geqslant 3$ справедливость предложения 1 автоматически вытекает из доказанных ниже свойств отображения $\mathfrak{f}_n$.

## 4.1 Доказательство инъективности отображения $\mathfrak{f}_n$

Предположим, что у двух крашеных кос $\beta_1$ и $\beta_2$ из $PB_n$ образы $\mathfrak{f}_n(\beta_1)$ и $\mathfrak{f}_n(\beta_2)$ совпадают.

В терминах базовой конструкции, определяющей отображение $\mathfrak{f}_n$ (см. раздел 2), это означает по построению, что узлы $\phi(\hat{\beta}'_1)$ и $\phi(\hat{\beta}'_2)$ объемлемо изотопны в $\mathbb{R}^3$ (с учетом ориентации).

Обратимся к теории несжимаемых поверхностей и JSJ-разложения и воспользуемся тем, что объемлемая изотопия между узлами продолжима на несжимаемые поверхности в дополнении узла, представляющие те или иные канонически привязанные к узлу изотопические классы таких поверхностей. (Имеется в виду, что изотопия между узлами продолжается, к примеру, на наборы торов JSJ-разложений дополнений узлов или на канонические поднаборы таких наборов, – к примеру, на все торы JSJ-разложения, заузленные в фиксированный узел.)

В силу леммы 3 набор торов $\phi(\partial M)$ является изотопическим инвариантом узла $\phi(\hat{\beta}')$. Следовательно, найдется изотопия $\tau_t$, $t \in [0,1]$, $\tau_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$, пространства $\mathbb{R}^3$, переводящая узел $\phi(\hat{\beta}'_1)$ в узел $\phi(\hat{\beta}'_2)$, а набор торов $\partial\phi(M) = \phi(\partial M)$ – в тот же набор торов.

Поскольку оба узла $\phi(\hat{\beta}'_1)$ и $\phi(\hat{\beta}'_2)$ лежат в многообразии $\phi(M)$ (и тем самым – в одной и той же компоненте связности пространства $\mathbb{R}^3 \setminus \partial\phi(M)$), такая изотопия переводит также $\phi(M)$ в $\phi(M)$.

Следовательно, композиция $\alpha := \phi^{-1} \circ \tau_1 \circ \phi$ дает автогомеоморфизм $M \to M$ многообразия $M$, переводящий узел $\hat{\beta}'_1$ в узел $\hat{\beta}'_2$. (Отсюда в силу известной теоремы Артина следует, что косы $\beta'_1$ и $\beta'_2$ сопряжены, но требуется показать большее: что $\beta'_1 = \beta'_2$.)

Заметим, что изотопия $\tau$ переводит тор $\phi(\partial V)$ в него же, поскольку $\phi(\partial V)$ – единственная компонента края $\partial M$, относительно которой узлы $\phi(\hat{\beta}'_1)$ и $\phi(\hat{\beta}'_2)$ имеют индекс вращения (winding number) $n \geqslant 3$, а не 2, как относительно каждой из остальных компонент. При этом, поскольку $\tau$ переводит узел $\phi(\hat{\beta}'_1)$ в узел $\phi(\hat{\beta}'_2)$ с учетом ориентации, $\tau$ переводит тор $\phi(\partial V)$ в $\phi(\partial V)$ с сохранением ориентации его параллелей, и следовательно, сужение автогомеоморфизма $\tau_1$ на тор $\phi(\partial V)$ изотопно тождественному отображению тора.

Заметим также, что изотопия $\tau$ переводит тор $\phi(\partial U(C_1))$ в него же, поскольку $\phi(\partial U(C_1))$ – единственная компонента края $\partial\phi(M)$, заузленная в узел-восьмерку, и что сужение автогомеоморфизма $\tau_1$ на тор $\phi(\partial U(C_1))$ изотопно тождественному отображению тора (в силу соображений, аналогичных высказанным чуть выше для случая с тором $\phi(\partial V)$).

Это означает, что автогомеоморфизм $\alpha$ переводит тор $\partial V$ в тор $\partial V$, а тор $\partial U(C_1)$ – в тор $\partial U(C_1)$, причем получающиеся автогомеоморфизмы торов изотопны тождественным.

Вообще говоря, имеющийся набор данных позволяет уже на этом этапе доказательства продемонстрировать, что автогомеоморфизм $\alpha$ переводит в себя – причем гомеоморфизмом, изотопным тождественному – каждую из компонент края $\partial M$, но нам этот факт не потребуется. (Кроме того, при конструировании отображения $\phi$ мы могли бы заузливать разные компоненты края $\partial M$ в разные узлы, но это привело бы к некоторому увеличению коэффициентов в финальной оценке предложения.)

Для следующего шага нашего рассуждения достаточно отметить, что в силу выбора одинакового вида $\phi$-заузливания для всех компонент $\partial U(C_2)$, …, $\partial U(C_{n-1})$, при выборе согласованно ориентированных систем меридианов и параллелей на $\partial U(C_2)$, …, $\partial U(C_{n-1})$ мы получаем, что $\alpha$ переводит элементы такой системы меридианов и параллелей с одного тора на другой в изотопную систему (причем с учетом ориентации).

Отсюда следует, что, подправив при необходимости изотопию $\tau$ в (сколь угодно тонкой) окрестности края $\partial\phi(M)$, мы приходим к ситуации, когда автогомеоморфизм $\alpha$ переводит в самих себя произвольные предварительно фиксированные меридианные слоения на $\partial V$ и на $\partial U(C)$.

Из того, что автогомеоморфизм $\alpha\colon M \to M$ сохраняет систему меридианов на $\partial U(C)$, следует, что по $\alpha$ можно сконструировать автогомеоморфизм $\bar\alpha\colon V \to V$ полнотория $V$, переводящий $\hat\beta_1' \cup C$ в $\hat\beta_2' \cup C$, а из того, что сужение гомеоморфизма $\alpha$ на край $\partial V$ изотопно тождественному отображению, следует, что и сужение такого $\bar\alpha$ на $\partial V$ изотопно тождественному отображению.

Поскольку группа тождественных на крае гомеотопий полнотория связна, автогомеоморфизм $\bar\alpha$ изотопен тождественному.

Это доказывает существование изотопии полнотория $V$, переводящей зацепление $\hat\beta_1' \cup C$ в зацепление $\hat\beta_2' \cup C$ и при этом переводящей компоненту $C_1$ – в компоненту $C_1$.

В силу леммы 2 зацепления $\hat\beta_1' \cup C$ и $\hat\beta_2' \cup C$ моноцикличны.

Отсюда в силу предложения 2 следует, что найдется изотопия $\rho$ полнотория $V$, обладающая следующими свойствами:

(P1) $\rho$ переводит зацепление $\hat\beta_1' \cup C$ в зацепление $\hat\beta_2' \cup C$;

(P2) в каждый момент $\rho$ переводит каждый меридианный диск (фиксированного расслоения полнотория $V$ на меридианные диски) в тот же меридианный диск.

Кроме того, $\rho$ может быть выбрана обладающей вдобавок свойством

(P3) $\rho$ поточечно тождественна на крае $\partial V$ полнотория $V$.

В качестве комментария отметим, что в силу конструкции подзацепления $C$ всякая изотопия $\rho$ полнотория $V$, обладающая указанными свойствами (P1) и (P2), некоторой изотопией $\chi$ полнотория $V$, обладающей свойством (P1) и неподвижной на $\hat{\beta}_2' \cup C$, дополняется до автогомеоморфизма $\chi_1 \circ \rho_1$, тождественного на цилиндре $V_C = D \times [0,1]$ и крае $\partial V$ (см. описание базовой конструкции в разделе 2).

Для наших целей достаточно показать меньшее – а именно, нам достаточно показать, что найдется изотопия $\eta$ полнотория $V$, обладающая свойством (P1) и такая, что сужение автогомеоморфизма $\eta_1 \colon V \to V$ на меридианный диск $D_0 = D \times \{0\}$ полнотория $V$ является тождественным отображением. Покажем это.

Для этого проанализируем свойства сужения изотопии $\rho$ со свойствами (P1)–(P3) и автогомеоморфизма $\rho_1$ на диск $D_0$.

Обозначим через $D_0'$ проколотый диск $D_0 \setminus Z = D_0 \setminus \hat{\beta}_1' = D_1 \setminus \hat{\beta}_2'$. Поскольку $\rho_1(\hat{\beta}_1') = \hat{\beta}_2'$, автогомеоморфизм $\rho_1$ переводит $D_0'$ в $D_0'$.

Пусть $p \colon V_C \to D_0$ – проекция входящего в полноторий $V$ цилиндра $V_C = D \times [0,1] = D_0 \times [0,1]$ на $D_0$, а $I_i$ – «кольцо» $C_i \times [0, i/n]$, соединяющее $C_i$ с проекцией $p(C_i)$. Тогда проекция $p$ образа $\rho_1(I_i)$ дает изотопию между $p(C_i)$ и $\rho_1(p(C_i))$ на $D_0$. Следовательно, поскольку $\rho_1(I_i)$ не пересекает набора сегментов $V_1 \cap \hat{\beta}_1'$, кривые $p(C_i)$ и $\rho_1(p(C_i))$ изотопны на проколотом диске $D_0'$. Таким образом, сужение $\rho_1|_{D_0'}$ гомеоморфизма $\rho_1$ на проколотый диск $D_0'$ переводит в изотопную каждую из кривых набора $C_1 = p(C_1)$, $p(C_2)$, $\ldots$, $p(C_{n-1})$. Отсюда в силу леммы 4 получаем, что $\rho_1|_{D_0'}$ изотопен тождественному (в классе изотопий, не фиксирующих край поточечно).

Пусть $\zeta$ – продолжение изотопии проколотого диска $D_0'$, связывающей автогомеоморфизм $\rho_1|_{D_0'}$ с тождественным автогомеоморфизмом $\mathrm{id}_{D_0'}$, до изотопии всего полнотория $V$ с носителем в малой окрестности объединения $D_0 \cup \partial V$ и неподвижной на $\hat{\beta}_2'$ (на $\partial V$ продолжаем изотопию с $\partial D_0'$ прямым послойным поднятием).

Тогда композиция $\zeta_1 \circ \rho_1$ есть гомеоморфизм, тождественный на $D_0 \cup \partial V$ и переводящий $\hat{\beta}_1'$ в $\hat{\beta}_2'$.

Воспользовавшись трюком Александера, мы заключаем, что автогомеоморфизм $\zeta_1 \circ \rho_1$ связан с тождественным автогомеоморфизом полнотория $V$ изотопией, неподвижной на $D_0 \cup \partial V$.

Таким образом, узлы $\hat{\beta}_1'$ и $\hat{\beta}_2'$ связаны изотопией полнотория, неподвижной на $D_0 \cup \partial V$, а отвечающие им наборы дуг $\beta_1'$ и $\beta_2'$ в цилиндре $D \times [0,3]$ связаны изотопией цилиндра, неподвижной на крае цилиндра.

Из теоремы Артина [Art25] об изотопных косах прямо вытекает, что в этом случае наборы дуг $\beta_1'$ и $\beta_2'$ связаны неподвижной на крае и послойной изотопией цилиндра.

Это в точности означает, что наборы дуг $\beta_1'$ и $\beta_2'$ в цилиндре $D \times [0,3]$ представляют один и тот же элемент группы кос.

Поскольку наборы дуг $\beta_1'$ и $\beta_2'$ представляют косы $\delta_n \beta_1$ и $\delta_n \beta_2$, это означает, что $\delta_n \beta_1 = \delta_n \beta_2$ и тем самым $\beta_1 = \beta_2$.

Это доказывает инъективность отображения $\mathfrak{f}_n$.

### 4.2 Доказательство простоты и сателлитности узлов из образа отображения $\mathfrak{f}_n$

Сателлитность узла $\phi(\hat{\beta}')$ для произвольного $\beta \in PB_n$ следует из наличия в дополнении $\mathbb{R}^3 \setminus \phi(\hat{\beta}')$ несжимаемых торов $\phi(\partial M)$ (лемма 3), простота узла $\phi(\hat{\beta}')$ следует из отсутствия в множестве несжимаемых торов в дополнении $\mathbb{R}^3 \setminus \phi(\hat{\beta}')$ характерных для составных узлов несжимаемых торов, относительно которых узел имеет единичный индекс вращения (лемма 3).

### 4.3 Доказательство оценки из предложения 1

Оценка на дуговый индекс узла $\phi(\hat{\beta}')$ получается через так называемые прямоугольные диаграммы (см. [Dy06, DP13] и приведенную там литературу).

На рисунке 1 дан пример шаблона прямоугольной диаграммы для узлов $\phi(\hat{\beta}')$ при $n = 5$. Этот пример демонстрирует, что

- узел $\phi_1(\hat{\beta}')$ (см. описание вложения $\phi_1$ в разделе 2) для тривиальной косы $\beta$ реализуется прямоугольной диаграммой сложности $5n$ (5 – дуговый индекс трилистника);
- сложность диаграммы увеличивается на 8 при добавлении двуниточного заузливания в узел-восьмерку (дуговый индекс узла-восьмерки равен шести), отвечающего заузливанию компоненты $U_1$;
- сложность диаграммы увеличивается на $6(n-2)$ при добавлении $n-2$ двуниточных заузливаний в трилистник (эти заузливания отвечают компонентам $U_2$, $U_3$, $\ldots U_{n-1}$);
- для реализации любого перестановочного участка в косе $\beta$ достаточно добавить в диаграмму «ступень» на участке из $n$ параллельных дуг, что увеличивает сложность диаграммы на $n$;
- при этом в представленном шаблоне имеется шесть «свободных углов» что с учетом альтернирования знаков при обходе этих углов позволяет реализовать три перестановочных косы без добавления «ступеней».

Суммируя, получаем

$$5n + 8 + 6(n-2) + n \cdot \max\{s-3, 0\} = n \cdot \max\{s+8, 11\} - 4.$$

## 5 Доказательство теоремы 1

*Доказательство теоремы* 1. Обратимся к хорошо известной стандартной биекции между перестановками множества $\{1, \ldots, n\}$ и положительными

перестановочными косами в $B_n$. Заметим, что для произвольной перестановки $\pi$ множества $\{1,\dots,n\}$ произведение $\beta_\pi\beta_{\pi^{-1}}$, где $\beta_\pi$ и $\beta_{\pi^{-1}}$ – положительные перестановочные косы из $B_n$, отвечающие перестановке $\pi$ и обратной $\pi^{-1}$, является крашеной косой, а разным перестановкам при отображении $\pi \mapsto \beta_\pi\beta_{\pi^{-1}}$ отвечают разные косы, поскольку нити с индексами $i$ и $j$ у косы $\beta_\pi\beta_{\pi^{-1}}$ зацеплены между собой если и только если они пересекаются в стандартной диаграмме косы $\beta_\pi$. Следовательно, в $PB_n$ имеется по меньшей мере $n!$ элементов, каждый из которых представим в виде произведения двух перестановочных кос. Отсюда в силу предложения 1 заключаем (подставляя $s=2$ в формулу предложения), что для любого натурального $k \geqslant 11\cdot 2-4=18$ найдется по меньшей мере $n!$, где

$$n=\left[\frac{k+4}{11}\right],$$

элементов группы $PB_n$, отправляемых отображением $f_n$ в попарно не совпадающие простые ориентированные узлы с дуговым индексом $\leqslant k$.

При $k\in[5,18)$ справедливость доказываемой оценки обеспечивается трилистником, дуговый индекс которого равен 5.

Из неравенства $A_k \geqslant n!$ вытекают и искомые экспоненциальные неравенства. Действительно, поскольку

$$m! \geqslant \left(\frac{m+1}{2}\right)^{\frac{m+1}{2}}$$

и

$$\left[\frac{k+4}{11}\right]+1 \geqslant \frac{k+5}{11},$$

мы получаем, что

$$n!=\left[\frac{k+4}{11}\right]! \geqslant \left(\frac{k+5}{22}\right)^{\frac{k+5}{22}} > \left(\frac{k}{22}\right)^{\frac{k}{22}}.$$

Из формулы Стирлинга вытекает, что при $n\geqslant a+b$ выполняется неравенство

$$n! \geqslant \left(\frac{a}{e}\right)^a\cdot a^b = a^a\cdot\left(\frac{a^b}{e^a}\right),$$

так что $n!>a^a$ при $a>e^{a/b}$.

Отсюда (заметив, что $n>k/(11,01)$ при $k>6\cdot 1101$ и) положив

$$a=\frac{k}{12} \quad \text{и} \quad b=\frac{k}{11,01}-\frac{k}{12}=\frac{0,99}{132,12}\cdot k,$$

получаем, что $n!>y^y$, где $y=k/12$, при $k>10^7>12e^{12}$. □

## Список литературы


[Al23] J. W. Alexander, A lemma on systems of knotted curves, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 1923, 9:3, 93–95.

[Art25] E. Artin, Theorie der Zöpfe, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1925, 4, 47–72.

[BP00] Y. Bae, C.-Y. Park, An upper bound of arc index of links, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 2000, 129:3, 491–500.

[BM19] Yu. Belousov, A. Malyutin, Hyperbolic knots are not generic, preprint arXiv:1908.06187, 2019.

[BKMMF21] Ю. С. Белоусов, М. В. Карев, А. В. Малютин, А. Ю. Миллер, Е. А. Фоминых, Лернейские узлы и вложенные перестройки, Алгебра и анализ, 2021, 33:1, 30–66.

[Bud06] R. Budney, JSJ-decompositions of knot and link complements in $S^3$. Enseign. Math. (2), 2006, 52:2, 319–59.

[BZ03] G. Burde, H. Zieschang, Knots, 2nd ed., de Gruyter Stud. Math. 5, de Gruyter, Berlin, 2003.

[CB88] A. Casson, S. Bleiler, Automorphisms of Surfaces after Nielsen and Thurston, London Math. Soc. Student Texts, vol. 9, Cambridge Univ. Press, 1988.

[Cr95] P. R. Cromwell, Embedding knots and links in an open book. I. Basic properties, Topology Appl., 1995, 64:1, 37–58.

[Cr95b] P. R. Cromwell, Arc presentations of knots and links, in: “Knot theory (Warsaw, 1995)”, 57–64, Banach Center Publ., 42, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 1998.

[CN96] P. R. Cromwell, I. J. Nutt, Embedding knots and links in an open book. II. Bounds on arc index, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1996, 119:2, 309–319.

[Dy06] I. A. Dynnikov, Arc-presentations of links: monotonic simplification, Fund. Math. 2006, 190, 29–76.

[DP13] И. А. Дынников, М. В. Прасолов, Шунты для прямоугольных диаграмм. Доказательство гипотезы Джонса и связанные вопросы, Тр. ММО, 74:1, МЦНМО, М., 2013, 115–173;

[Ep66] D. B. A. Epstein, Curves on 2-manifolds and isotopies, Acta Math., 1966, 115, 83–107.

[ES87] C. Ernst, D. W. Sumners, The growth of the number of prime knots, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1987, 102:2, 303–315.

[JL12] G. T. Jin, H. J. Lee, Prime knots whose arc index is smaller than the crossing number, J. Knot Theory Ramifications, 2012, 21:10, 1250103.

[JP10] G. T. Jin, W. K. Park, Prime knots with arc index up to 11 and an upper bound of arc index for non-alternating knots, J. Knot Theory Ramifications, 2010, 19:12, 1655–1672.

[KT08] C. Kassel, V. Turaev, Braid Groups, Grad. Texts in Math., vol. 247, Springer, New York, 2008.

[Mal04] А. В. Малютин, Закрученность (замкнутых) кос, Алгебра и анализ, 2004, 16:5, 59–91.

[M18] A. V. Malyutin, On the question of genericity of hyperbolic knots, Int. Math. Res. Not., 2020, 2020:21, 7792–7828.

[M19] A. V. Malyutin, Hyperbolic links are not generic, preprint arXiv:1907.04458, 2019.

[Mal21] А. В. Малютин, Расслоения со свойством Бирман–Хильдена, Препринт ПОМИ, 06, 2021.

[Mal22] А. В. Малютин, Обобщение теоремы Артина об изотопности замкнутых кос. Препринт ПОМИ, 06, 2022.

[Mor78] H. R. Morton, Infinitely many fibred knots having the same Alexander polynomial, Topology, 1978, 17, 101–104.

[SW00] H. Short, B. Wiest, Orderings of mapping class groups after Thurston, Enseign. Math., 2000, 46, 279–312.

[St04] A. Stoimenow, On the number of links and link polynomials, Q. J. Math., 2004, 55:1, 87–98.

[STh98] C. Sundberg, M. B. Thistlethwaite, The rate of growth of the number of prime alternating links and tangles, Pacific J. Math., 1998, 182:2, 329–358.

[Th98] M. B. Thistlethwaite, On the structure and scarcity of alternating links and tangles, J. Knot Theory Ramifications, 1998, 7:7, 981–1004.

[Th86] W. P. Thurston, A norm for the homology of 3-manifolds, Mem. Amer. Math. Soc., 1986, 59:339, i–vi and 99–130.

[Wal68] F. Waldhausen, On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, Ann. Math. (2), 1968, 87, 56–88.

[W92] D. J. A. Welsh, On the number of knots and links, in “Sets, Graphs and Numbers (Proceedings of 1991 Budapest conference)”, 713–718. Colloq. Math. Soc. János Bolyai 60, Amsterdam: North-Holland, 1992.