

УСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТИПА ШРЁДИНГЕРА
С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ:
РЕЗУЛЬТАТЫ С КОРРЕКТОРАМИ

Т. А. Суслина

Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., д. 7/9,
Санкт-Петербург, 199034, Россия

e-mail: t.suslina@spbu.ru

АННОТАЦИЯ

В $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ рассматривается самосопряженный сильно эллиптический дифференциальный оператор \mathcal{A}_ε второго порядка. Предполагается, что коэффициенты оператора \mathcal{A}_ε периодичны и зависят от \mathbf{x}/ε , где $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Изучается поведение операторной экспоненты $e^{-i\mathcal{A}_\varepsilon\tau}$ при малом ε . Результаты применяются к исследованию поведения решений задачи Коши для уравнения типа Шрёдингера $i\partial_\tau \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau) = (\mathcal{A}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x}, \tau)$ с начальными данными из специального класса. При фиксированном $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ решение сходится в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ к решению усредненной задачи; погрешность имеет порядок $O(\varepsilon)$. При фиксированном $\tau \in \mathbb{R}$ получена аппроксимация решения $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau)$ по норме в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ с погрешностью $O(\varepsilon^2)$, а также аппроксимация решения по норме в $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ с погрешностью $O(\varepsilon)$. В этих аппроксимациях учитываются корректоры. Отслежена зависимость погрешностей от параметра τ .

Ключевые слова: периодические дифференциальные операторы, уравнения типа Шрёдингера, усреднение, операторные оценки погрешности.

Исследование выполнено при поддержке РНФ (проект 22-11-00092, <https://rscf.ru/project/22-11-00092/>).

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В. М. Бабич, Н. А. Вавилов, А. М. Вершик, М. А. Всемирнов,
А. И. Генералов, И. А. Ибрагимов, Л. Ю. Колотилина,
Ю. В. Матиясевич, Н. Ю. Нецеваев, С. И. Репин, Г. А. Серегин.

ВВЕДЕНИЕ

Работа относится к теории усреднения (гомогенизации) периодических дифференциальных операторов (ДО). Задачам гомогенизации посвящена обширная литература; в первую очередь, укажем монографии [BeLP, BaPa, ZhKO]. Один из методов изучения задач усреднения в \mathbb{R}^d — это спектральный метод, основанный на масштабном преобразовании и теории Флоке–Блоха; см., например, [BeLP, гл. 4], [ZhKO, гл. 2], [Se], [Zh1], [CoVa].

0.1. Класс операторов. Мы рассматриваем самосопряженные ДО второго порядка, действующие в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и допускающие факторизацию вида

$$\mathcal{A} = f(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f(\mathbf{x}). \quad (0.1)$$

Здесь $b(\mathbf{D}) = \sum_{l=1}^d b_l D_l$ — $(m \times n)$ -матричный ДО первого порядка. Предполагается, что $m \geq n$ и символ $b(\xi)$ — матрица максимального ранга. Матрицы-функции $g(\mathbf{x})$ (размера $m \times m$) и $f(\mathbf{x})$ (размера $n \times n$) периодичны относительно некоторой решетки Γ ; $g(\mathbf{x})$ положительно определена и ограничена; $f, f^{-1} \in L_\infty$. Удобно сначала изучать более простой класс операторов вида

$$\widehat{\mathcal{A}} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}). \quad (0.2)$$

Многие операторы математической физики допускают запись в виде (0.1) или (0.2); см. [BSu1] и [BSu3, гл. 4]. Простейший пример — это оператор акустики $\widehat{\mathcal{A}} = -\operatorname{div} g(\mathbf{x}) \nabla = \mathbf{D}^* g(\mathbf{x}) \mathbf{D}$.

Введем теперь малый параметр $\varepsilon > 0$ и для всякой Γ -периодической функции $\varphi(\mathbf{x})$ положим $\varphi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \varphi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$. Рассмотрим операторы

$$\mathcal{A}_\varepsilon = f^\varepsilon(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon(\mathbf{x}), \quad (0.3)$$

$$\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}). \quad (0.4)$$

0.2. Операторные оценки погрешности для эллиптических и параболических задач в \mathbb{R}^d . В цикле статей [BSu1, BSu2, BSu3, BSu4] Бирмана и Суслиной был предложен и развит теоретико-операторный подход к задачам гомогенизации в \mathbb{R}^d (вариант спектрального метода). Этот подход основан на масштабном преобразовании, теории Флоке–Блоха и аналитической теории возмущений.

Обсудим результаты для более простого оператора (0.4). В [BSu1] была установлена оценка

$$\|(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + I)^{-1} - (\widehat{\mathcal{A}}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon. \quad (0.5)$$

Здесь $\widehat{\mathcal{A}}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ — эффективный оператор с постоянной эффективной матрицей g^0 . Аппроксимации резольвенты $(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + I)^{-1}$ по $(L_2 \rightarrow L_2)$ -норме с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ и по $(L_2 \rightarrow H^1)$ -норме с погрешностью $O(\varepsilon)$ (при учете корректоров) были получены в [BSu2, BSu3] и [BSu4] соответственно.

К усреднению параболических задач теоретико-операторный подход применялся в [Su1, Su2, Su3, V, VSu1, VSu2]. В [Su1, Su2] была установлена оценка

$$\|e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon(\tau + \varepsilon^2)^{-1/2}, \quad \tau > 0. \quad (0.6)$$

Аппроксимации полугруппы $e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$ по $(L_2 \rightarrow L_2)$ -норме с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ и по $(L_2 \rightarrow H^1)$ -норме с погрешностью $O(\varepsilon)$ (при учете корректоров) были получены в [V] и [Su3] соответственно. Еще более точные аппроксимации резольвенты и полугруппы оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ были найдены в [VSu1, VSu2].

Теоретико-операторный подход применялся также к более общему классу операторов $\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon$ со старшей частью $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ и младшими членами: резольвента такого оператора изучалась в [Su4, Su5], а полугруппа — в [M1, M2].

Оценки вида (0.5), (0.6) называют *операторными оценками погрешности* в теории усреднения. Они точны по порядку. Другой подход к операторным оценкам погрешности был предложен Жиковым и Пастуховой; см. [Zh2, ZhPas1, ZhPas2], а также обзор [ZhPas3].

0.3. Операторные оценки погрешности для нестационарных уравнений типа Шрёдингера и гиперболического типа. Ситуация с усреднением нестационарных уравнений типа Шрёдингера и гиперболического типа отличается от случая эллиптических и параболических задач. Теоретико-операторный подход применялся к нестационарным задачам в [BSu5]. Остановимся опять на результатах для более простого оператора (0.4). В операторных терминах, речь идет об аппроксимациях операторов $e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$ и $\cos(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$ (где $\tau \in \mathbb{R}$) при малом ε . Оказалось, что невозможно аппроксимировать эти операторы по $(L_2 \rightarrow L_2)$ -норме, а потому тип операторной нормы пришлось изменить. В [BSu5] были установлены оценки

$$\|e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{H^3(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(1 + |\tau|)\varepsilon, \quad (0.7)$$

$$\|\cos(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(1 + |\tau|)\varepsilon. \quad (0.8)$$

Аналогичный результат для оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$ был получен Мешковой [M3, M5]:

$$\|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(1 + |\tau|)\varepsilon. \quad (0.9)$$

В [M3, M5] была также найдена аппроксимация оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$ по “энергетической” норме:

$$\|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) - \varepsilon K(\varepsilon)\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C(1 + |\tau|)\varepsilon. \quad (0.10)$$

Здесь $K(\varepsilon)$ — подходящий корректор. Этот результат удалось получить за счет присутствия “сглаживающего” множителя $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}$ в приближаемом операторе. Для операторов $e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$ и $\cos(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$ аналогов оценки (0.10) неизвестно.

Поясним метод на примере вывода оценки (0.7). Обозначим $\mathcal{H}_0 := -\Delta$. Ясно, что оценка (0.7) эквивалентна неравенству

$$\|(e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0})(\mathcal{H}_0 + I)^{-3/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(1 + |\tau|)\varepsilon. \quad (0.11)$$

За счет масштабного преобразования (0.11) эквивалентно оценке

$$\|(e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}} - e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}^0})\varepsilon^3(\mathcal{H}_0 + \varepsilon^2 I)^{-3/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(1 + |\tau|)\varepsilon. \quad (0.12)$$

Далее, с помощью унитарного преобразования Гельфанда оператор $\widehat{\mathcal{A}}$ раскладывается в прямой интеграл по операторам $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$, действующим в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ (где Ω — ячейка решетки Γ) и задаваемым выражением $b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D} + \mathbf{k})$ с периодическими граничными условиями. Операторы $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ имеют дискретный спектр. Семейство операторов $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ изучается методами аналитической теории возмущений (относительно одномерного параметра $t = |\mathbf{k}|$). Для операторов $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ удается получить аналог неравенства (0.12) с постоянной, не зависящей от \mathbf{k} . Это приводит к оценке (0.12).

Дальнейшему исследованию операторной экспоненты посвящены работы [Su6] и [D1]. В [Su6] было показано, что оценка (0.7) точна относительно типа операторной нормы: указаны условия на оператор, при которых оценка $\|e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{H^s \rightarrow L_2} \leq C(\tau)\varepsilon$ неверна, если $s < 3$. В [D1] установлено, что оценка (0.7) точна и относительно зависимости от τ (при большом $|\tau|$): множитель $(1 + |\tau|)$ в правой части оценки нельзя заменить на $(1 + |\tau|)^\alpha$ с $\alpha < 1$. С другой стороны, в [Su6] были выделены дополнительные условия на оператор, при которых результат допускает усиление по типу операторной нормы: H^3 можно заменить на H^2 . А в [D1] было выяснено, что при тех же условиях возможно усиление и в другом смысле: множитель $(1 + |\tau|)$ можно заменить на $(1 + |\tau|)^{1/2}$. В итоге при дополнительных условиях (которые автоматически выполнены для оператора акустики) была доказана оценка

$$\|e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon.$$

Гиперболические задачи изучались в статьях [DSu1, DSu2]. Было показано, что оценки (0.8)–(0.10) точны как относительно типа операторной нормы, так и относительно зависимости от τ , а при дополнительных предположениях эти результаты допускают усиление и в том, и в другом смысле.

Нестационарные задачи изучались и для более общего класса операторов $\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon$ (с младшими членами): в [D2] исследована экспонента $e^{-i\tau\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon}$, а в [M4] — гиперболические задачи. При этом в [M4] предложен другой подход к изучению гиперболических задач, связанный с модификацией теоремы Троттера–Като.

0.4. Основные результаты. В настоящей работе мы продолжаем изучать поведение операторной экспоненты $e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$ при малом ε . Наши цели — за счет учета корректоров найти аппроксимации по $(H^s \rightarrow L_2)$ -норме (при подходящем s) с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ при фиксированном τ и по $(H^s \rightarrow H^1)$ -норме с погрешностью $O(\varepsilon)$ также при фиксированном τ . Однако, построить такие аппроксимации для самой экспоненты $e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$ не удается. Мы находим такие аппроксимации для композиции экспоненты $e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$ и оператора $(I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon)$. Здесь $\Lambda(\mathbf{x})$ — периодическое решение задачи на ячейке (см. (9.8)), а Π_ε — вспомогательный слаживающий оператор.

Наши основные результаты — оценки вида

$$\|e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}(I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon) - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0} - \varepsilon\mathcal{K}(\varepsilon)\|_{H^6(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(1 + |\tau|)^2\varepsilon^2, \quad (0.13)$$

$$\|e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}(I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon) - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0} - \varepsilon\mathcal{K}_1(\varepsilon)\|_{H^4(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C(1 + |\tau|)\varepsilon. \quad (0.14)$$

Здесь $\mathcal{K}(\varepsilon)$ и $\mathcal{K}_1(\varepsilon)$ — подходящие корректоры; они содержат быстро осциллирующий коэффициент Λ^ε , а потому зависят от ε . Эффективный оператор и корректоры описываются в терминах спектральных характеристик оператора $\widehat{\mathcal{A}}$ на краю спектра. Приблизить саму экспоненту $e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$ с требуемой точностью в тех же терминах не представляется возможным; причина в “проблемном” члене $e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon$, который нельзя приблизить в пороговых терминах. См. обсуждение в п. 17.6.

С одной стороны, мы подтверждаем точность оценок (0.13), (0.14): выделено условие на оператор, при котором эти оценки нельзя улучшить ни в отношении типа операторной нормы, ни в отношении зависимости от τ . Это условие формулируется в спектральных терминах.

Рассмотрим операторное семейство $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ и положим $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}$, $t = |\mathbf{k}|$, $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Это семейство аналитично по параметру t . При $t = 0$ число $\lambda_0 = 0$ является n -кратным собственным значением “невозмущенного” оператора $\widehat{\mathcal{A}}(0)$. Тогда при малом t существуют вещественно аналитические ветви собственных значений $\lambda_l(t, \boldsymbol{\theta})$ ($l = 1, \dots, n$) оператора $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$. При малом t справедливы сходящиеся степенные разложения

$$\lambda_l(t, \boldsymbol{\theta}) = \gamma_l(\boldsymbol{\theta})t^2 + \mu_l(\boldsymbol{\theta})t^3 + \nu_l(\boldsymbol{\theta})t^4 + \dots, \quad l = 1, \dots, n, \quad (0.15)$$

где $\gamma_l(\boldsymbol{\theta}) > 0$ и $\mu_l(\boldsymbol{\theta}), \nu_l(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}$. Условие, при котором оценки (0.13), (0.14) нельзя усилить, состоит в том, что $\mu_l(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ при некоторых l и $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$.

С другой стороны, при некоторых дополнительных предположениях мы усиливаем результаты и получаем оценки

$$\|e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}(I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon) - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0} - \varepsilon\mathcal{K}(\varepsilon)\|_{H^4(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(1 + |\tau|)\varepsilon^2, \quad (0.16)$$

$$\|e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}(I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon) - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0} - \varepsilon\mathcal{K}_1(\varepsilon)\|_{H^3(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon. \quad (0.17)$$

При $n = 1$ достаточное условие, которое гарантирует справедливость оценок (0.16), (0.17), состоит в том, что $\mu(\boldsymbol{\theta}) = \mu_1(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. В частности, это условие выполнено для оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = \mathbf{D}^*g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D}$, если $g(\mathbf{x})$ — симметричная матрица с вещественными элементами. При $n \geq 2$, чтобы обеспечить (0.16), (0.17), помимо условия равенства нулю всех коэффициентов $\mu_l(\boldsymbol{\theta})$ мы

накладываем еще одно условие в терминах коэффициентов $\gamma_l(\boldsymbol{\theta})$. Простейший вариант этого условия состоит в том, что различные ветви $\gamma_l(\boldsymbol{\theta})$ не пересекаются друг с другом.

Далее, мы показываем, что оценки (0.16), (0.17) тоже точны: в случае, когда все коэффициенты $\mu_l(\boldsymbol{\theta})$ равны нулю, но $\nu_j(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ (при некоторых j и $\boldsymbol{\theta}_0$), оценки (0.16), (0.17) нельзя улучшить ни относительно типа нормы, ни относительно зависимости от τ .

С помощью интерполяции мы получаем также оценки в $(H^s \rightarrow L_2)$ либо $(H^s \rightarrow H^1)$ -нормах. Например, для оператора из (0.13) справедлива оценка $(H^s \rightarrow L_2)$ -нормы порядка $O((1 + |\tau|)^{s/3} \varepsilon^{s/3})$ при $3 \leq s \leq 6$. А в случае усиления (когда справедлива более сильная оценка (0.16)) $(H^s \rightarrow L_2)$ -норма этого оператора имеет порядок $O((1 + |\tau|)^{s/4} \varepsilon^{s/2})$ при $2 \leq s \leq 4$.

Ясно, что полученные результаты дают возможность получать квалифицированные оценки погрешности при малом ε и большом τ : в общей ситуации можно рассматривать $\tau = O(\varepsilon^{-\alpha})$ при $0 < \alpha < 1$, а в случае усиления можно рассматривать $\tau = O(\varepsilon^{-\alpha})$ при $0 < \alpha < 2$.

Для более общего оператора (0.3) аналоги результатов, описанных выше, получены для “окаймленной” операторной экспоненты $f^\varepsilon e^{-i\tau A_\varepsilon}(f^\varepsilon)^{-1}$.

Результаты, сформулированные в операторных терминах, применяются затем к усреднению решений задачи Коши для уравнений типа Шрёдингера с начальными данными из специального класса. В частности, рассмотрены нестационарное уравнение Шрёдингера и двумерное уравнение Паули с сингулярными быстро осциллирующими потенциалами.

0.5. Метод. Результаты получены с помощью дальнейшего развития теоретико-операторного подхода. Мы следуем плану, намеченному выше в п. 0.3. В основе рассмотрений лежит абстрактная теоретико-операторная схема. Изучается семейство операторов $A(t) = X(t)^*X(t)$, $t \in \mathbb{R}$, в некотором гильбертовом пространстве \mathfrak{H} . Здесь $X(t) = X_0 + tX_1$. (Семейство $A(t)$ моделирует операторное семейство $\mathcal{A}(\mathbf{k}) = \mathcal{A}(t\boldsymbol{\theta})$, но параметр $\boldsymbol{\theta}$ в абстрактной постановке отсутствует.) Предполагается, что точка $\lambda_0 = 0$ является изолированным собственным значением оператора $A(0)$ кратности n . Тогда при $|t| \leq t_0$ возмущенный оператор $A(t)$ имеет на интервале $[0, \delta]$ ровно n собственных значений (мы контролируем δ и t_0 явно). Эти собственные значения и отвечающие им собственные элементы являются вещественно аналитическими функциями от t . Коэффициенты соответствующих степенных разложений называют *пороговыми характеристиками* оператора $A(t)$. Мы выделяем оператор S конечного ранга (так называемый *спектральный росток* семейства $A(t)$), действующий в подпространстве $\mathfrak{N} = \text{Ker } A(0)$. Спектральный росток несет информацию о пороговых характеристиках старшего порядка.

В терминах спектрального ростка удается найти старший член аппроксимации для оператора $e^{-i\varepsilon^{-2}\tau A(t)}$. Нахождение более точных аппроксимаций с корректорами требует учета пороговых характеристик следующих порядков. Применение этих абстрактных результатов и приводит к требуемым оценкам для ДО.

0.6. План статьи. Статья состоит из трех глав. Глава 1 (§1–7) содержит необходимый абстрактный теоретико-операторный материал; здесь получены основные результаты в абстрактных терминах. В главе 2 (§8–16) изучаются периодические ДО вида (0.1), (0.2). В §8 описан класс операторов и разложение в прямой интеграл; соответствующее операторное семейство $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ включено в рамки абстрактной схемы. В §9 описаны эффективные характеристики оператора $\widehat{\mathcal{A}}$. В §10 с помощью абстрактных теорем получены аппроксимации оператора $e^{-i\varepsilon^{-2}\tau \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})}$, а в §11 подтверждена точность этих результатов. В §12 описаны эффективные характеристики оператора (0.1). Требуемые аппроксимации окаймленной экспоненты от $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ найдены в §13, а точность этих результатов обсуждается в §14. §15 посвящен аппроксимациям экспоненты $e^{-i\varepsilon^{-2}\tau \widehat{\mathcal{A}}}$ для оператора (0.2), а в §16 найдены нужные аппроксимации окаймленной экспоненты для оператора (0.1). Эти результаты выводятся из результатов §10–14 с помощью разложения в прямой интеграл. Глава 3 (§17–22) посвящена задачам гомогенизации. В §17, 18 с помощью масштабного преобразования мы выводим основные

результаты работы (аппроксимации экспоненты $e^{-i\tau\hat{A}_\varepsilon}$ и окаймленной экспоненты $e^{-i\tau A_\varepsilon}$) из результатов главы 2. В §19 полученные результаты применяются к изучению решений задачи Коши для уравнений типа Шредингера. §20–22 посвящены применению общих результатов к конкретным уравнениям математической физики.

0.7. Обозначения. Пусть $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Символы $(\cdot, \cdot)_{\mathfrak{H}}$ и $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$ означают скалярное произведение и норму в \mathfrak{H} соответственно; символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_*}$ означает норму ограниченного оператора из \mathfrak{H} в \mathfrak{H}_* . Иногда мы опускаем индексы. Через $I = I_{\mathfrak{H}}$ обозначается тождественный оператор в \mathfrak{H} . Если $A : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_*$ — линейный оператор, то через $\text{Dom } A$ обозначается его область определения, а через $\text{Ker } A$ — его ядро. Если \mathfrak{N} — подпространство в \mathfrak{H} , то \mathfrak{N}^\perp — его ортогональное дополнение. Если P — ортопроектор пространства \mathfrak{H} на \mathfrak{N} , то P^\perp — ортопроектор на \mathfrak{N}^\perp .

Символы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и $|\cdot|$ означают скалярное произведение и норму в \mathbb{C}^n ; $\mathbf{1}_n$ — единичная $(n \times n)$ -матрица. Если a — $(m \times n)$ -матрица, то символ $|a|$ означает норму матрицы a как линейного оператора из \mathbb{C}^n в \mathbb{C}^m .

Далее, используем обозначения $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $iD_j = \partial_j = \partial/\partial x_j$, $j = 1, \dots, d$; $\mathbf{D} = -i\nabla = (D_1, \dots, D_d)$.

Классы L_p (где $1 \leq p \leq \infty$) вектор-функций в области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ со значениями в \mathbb{C}^n обозначаем через $L_p(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. Классы Соболева порядка s (где $s \geq 0$) \mathbb{C}^n -значных функций в области \mathcal{O} обозначаем через $H^s(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. При $n = 1$ пишем просто $L_p(\mathcal{O})$, $H^s(\mathcal{O})$, но иногда применяем такие упрощенные обозначения и для классов вектор-функций или матриц-функций.

Через $C, \mathcal{C}, \mathfrak{C}, c$ (возможно, с индексами и значками) обозначаются различные постоянные в оценках.

ГЛАВА 1. АБСТРАКТНАЯ ТЕОРЕТИКО-ОПЕРАТОРНАЯ СХЕМА

§ 1. КВАДРАТИЧНЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ СЕМЕЙСТВА

Материал этого параграфа заимствован из [BSu1, BSu2, VSu1, Su6, D1].

1.1. Операторы $X(t)$ и $A(t)$. Пусть \mathfrak{H} и \mathfrak{H}_* — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Предположим, что $X_0 : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_*$ — плотно определенный и замкнутый оператор, а $X_1 : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_*$ — ограниченный оператор. Введем замкнутый на $\text{Dom } X_0$ оператор $X(t) = X_0 + tX_1$, $t \in \mathbb{R}$. Рассмотрим семейство самосопряженных операторов $A(t) = X(t)^*X(t)$ в \mathfrak{H} . Оператор $A(t)$ порождается замкнутой квадратичной формой $\|X(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}^2$, $u \in \text{Dom } X_0$. Введем обозначения $A_0 := A(0)$; $\mathfrak{N} := \text{Ker } A_0 = \text{Ker } X_0$; $\mathfrak{N}_* := \text{Ker } X_0^*$.

Предполагается, что точка $\lambda_0 = 0$ — изолированная точка спектра оператора A_0 и

$$0 < n := \dim \mathfrak{N} < \infty, \quad n \leq n_* := \dim \mathfrak{N}_* \leq \infty.$$

Пусть d^0 — расстояние от точки $\lambda_0 = 0$ до остального спектра оператора A_0 . Через P и P_* обозначаются ортопроекторы пространства \mathfrak{H} на \mathfrak{N} и пространства \mathfrak{H}_* на \mathfrak{N}_* , соответственно. Обозначим через $F(t; [a, b])$ спектральный проектор оператора $A(t)$ для промежутка $[a, b]$ и положим $\mathfrak{F}(t; [a, b]) := F(t; [a, b])\mathfrak{H}$. Фиксируем число $\delta > 0$ такое, что $8\delta < d^0$. Выберем число $t_0 > 0$ так, чтобы

$$t_0 \leq \delta^{1/2} \|X_1\|^{-1}. \quad (1.1)$$

Как показано в [BSu1, гл. 1, предложение 1.2], при $|t| \leq t_0$ выполнено $F(t; [0, \delta]) = F(t; [0, 3\delta])$ и $\text{rank } F(t; [0, \delta]) = n$. Будем писать $F(t)$ вместо $F(t; [0, \delta])$ и $\mathfrak{F}(t)$ вместо $\mathfrak{F}(t; [0, \delta])$.

1.2. Операторы Z , R и S . Следуя [BSu1, гл. 1, §1] и [BSu2, §1], введем операторы, которые возникают при рассмотрениях в духе теории возмущений.

Обозначим $\mathcal{D} := \text{Dom } X_0 \cap \mathfrak{N}^\perp$. Пусть $\omega \in \mathfrak{N}$. Рассмотрим уравнение на $\phi \in \mathcal{D}$:

$$X_0^*(X_0\phi + X_1\omega) = 0,$$

которое понимается в слабом смысле:

$$(X_0\phi, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} = -(X_1\omega, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*}, \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}.$$

Существует единственное решение $\phi = \phi(\omega)$. Введем оператор $Z : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$ формулой $Zu = \phi(Pu)$, $u \in \mathfrak{H}$. Отметим, что $PZ = 0$, а потому $Z^*P = 0$. Справедливы оценки

$$\|X_0Z\| \leq \|X_1\|, \quad \|Z\| \leq (8\delta)^{-1/2}\|X_1\|. \quad (1.2)$$

Определим оператор $R : \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}_*$ формулой $R := X_0Z + X_1$. Другое представление для R имеет вид $R = P_*X_1|_{\mathfrak{N}}$.

Следуя [BSu1, гл. 1], назовем оператор $S := R^*R : \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}$ *спектральным ростком* семейства $A(t)$ при $t = 0$. Для ростка справедливо также соотношение $S = PX_1^*P_*X_1|_{\mathfrak{N}}$. Спектральный росток называется *невырожденным*, если $\text{Ker } S = \{0\}$. Отметим оценки

$$\|R\| \leq \|X_1\|, \quad \|S\| \leq \|X_1\|^2. \quad (1.3)$$

1.3. Операторы Z_2 и R_2 . Нам потребуются операторы Z_2 и R_2 (см. [VSu1, §1]). Пусть $\omega \in \mathfrak{N}$ и пусть $\psi = \psi(\omega) \in \mathcal{D}$ — (слабое) решение уравнения

$$X_0^*(X_0\psi + X_1Z\omega) = -P^\perp X_1^*R\omega.$$

Очевидно, условие разрешимости выполнено. Определим оператор $Z_2 : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$ соотношением $Z_2u = \psi(Pu)$, $u \in \mathfrak{H}$. Наконец, введем оператор $R_2 : \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{H}_*$ формулой $R_2 := X_0Z_2 + X_1Z$.

1.4. Аналитические ветви собственных значений и собственных векторов оператора $A(t)$. Согласно общей аналитической теории возмущений (см. [Ka]), при $|t| \leq t_0$ существуют вещественно аналитические функции $\lambda_l(t)$ (ветви собственных значений) и вещественно аналитические \mathfrak{H} -значные функции $\varphi_l(t)$ (ветви собственных векторов), такие что

$$A(t)\varphi_l(t) = \lambda_l(t)\varphi_l(t), \quad l = 1, \dots, n, \quad |t| \leq t_0, \quad (1.4)$$

причем набор $\varphi_l(t)$, $l = 1, \dots, n$, образует ортонормированный базис в $\mathfrak{F}(t)$. Для достаточно малого t_* (где $0 < t_* \leq t_0$) при $|t| \leq t_*$ имеют место сходящиеся степенные разложения

$$\lambda_l(t) = \gamma_l t^2 + \mu_l t^3 + \nu_l t^4 + \dots, \quad \gamma_l \geq 0, \quad \mu_l, \nu_l \in \mathbb{R}, \quad l = 1, \dots, n, \quad (1.5)$$

$$\varphi_l(t) = \omega_l + t\psi_l^{(1)} + \dots, \quad l = 1, \dots, n. \quad (1.6)$$

При этом элементы $\omega_l = \varphi_l(0)$, $l = 1, \dots, n$, образуют ортонормированный базис в \mathfrak{N} . Подставляя разложения (1.5), (1.6) в равенства (1.4) и сравнивая коэффициенты при t и при t^2 , приходим к соотношениям

$$\tilde{\omega}_l := \psi_l^{(1)} - Z\omega_l \in \mathfrak{N}, \quad l = 1, \dots, n, \quad (1.7)$$

$$S\omega_l = \gamma_l\omega_l, \quad l = 1, \dots, n. \quad (1.8)$$

(Ср. [BSu1, гл. 1, §1], [BSu2, §1].) Таким образом, числа γ_l и элементы ω_l , определенные в (1.5) и (1.6), являются собственными для ростка S . Справедливы представления

$$P = \sum_{l=1}^n (\cdot, \omega_l)\omega_l, \quad (1.9)$$

$$SP = \sum_{l=1}^n \gamma_l (\cdot, \omega_l)\omega_l. \quad (1.10)$$

1.5. Пороговые аппроксимации. Спектральный проектор $F(t)$ и оператор $A(t)F(t)$ являются вещественно аналитическими оператор-функциями при $|t| \leq t_0$. Справедливы представления

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{l=1}^n (\cdot, \varphi_l(t)) \varphi_l(t), \\ A(t)F(t) &= \sum_{l=1}^n \lambda_l(t) (\cdot, \varphi_l(t)) \varphi_l(t). \end{aligned} \quad (1.11)$$

С учетом (1.5), (1.6), (1.9), (1.10) отсюда следуют степенные разложения $F(t) = P + tF_1 + \dots$, $A(t)F(t) = t^2SP + t^3K + \dots$, сходящиеся при $|t| \leq t_*$. Однако, нам нужны не разложения, а лишь аппроксимации (с одним или несколькими первыми членами), но с оценками погрешности на контролируемом промежутке $|t| \leq t_0$.

Следующее утверждение было получено в [BSu1, гл. 1, теоремы 4.1 и 4.3]. Договоримся ниже через β_j обозначать абсолютные константы, причем считаем $\beta_j \geq 1$.

Предложение 1.1 ([BSu1]). *В условиях п. 1.1 справедливы оценки*

$$\|F(t) - P\| \leq C_1|t|, \quad |t| \leq t_0, \quad (1.12)$$

$$\|A(t)F(t) - t^2SP\| \leq C_2|t|^3, \quad |t| \leq t_0. \quad (1.13)$$

Число t_0 подчинено (1.1), а постоянные C_1, C_2 имеют вид

$$C_1 = \beta_1 \delta^{-1/2} \|X_1\|, \quad C_2 = \beta_2 \delta^{-1/2} \|X_1\|^3. \quad (1.14)$$

Нам понадобятся также более точные аппроксимации, найденные в [BSu2, §2 и §4].

Предложение 1.2 ([BSu2]). *В условиях п. 1.1 справедливы представления*

$$F(t) = P + tF_1 + F_2(t), \quad |t| \leq t_0, \quad (1.15)$$

$$A(t)F(t) = t^2SP + t^3K + \Psi(t), \quad |t| \leq t_0, \quad (1.16)$$

и оценки

$$\|F_2(t)\| \leq C_3 t^2, \quad C_3 = \beta_3 \delta^{-1} \|X_1\|^2, \quad (1.17)$$

$$\|\Psi(t)\| \leq C_4 t^4, \quad C_4 = \beta_4 \delta^{-1} \|X_1\|^4. \quad (1.18)$$

Оператор K допускает представление

$$K = K_0 + N = K_0 + N_0 + N_*, \quad (1.19)$$

где K_0 переводит \mathfrak{N} в \mathfrak{N}^\perp и \mathfrak{N}^\perp в \mathfrak{N} , а $N = N_0 + N_*$ переводит \mathfrak{N} в себя и \mathfrak{N}^\perp в $\{0\}$. В терминах коэффициентов степенных разложений операторы F_1, K_0, N_0, N_* имеют вид

$$\begin{aligned} F_1 &= \sum_{l=1}^n ((\cdot, Z\omega_l)\omega_l + (\cdot, \omega_l)Z\omega_l), \\ K_0 &= \sum_{l=1}^n \gamma_l ((\cdot, Z\omega_l)\omega_l + (\cdot, \omega_l)Z\omega_l), \\ N_0 &= \sum_{l=1}^n \mu_l (\cdot, \omega_l)\omega_l, \quad N_* = \sum_{l=1}^n \gamma_l ((\cdot, \tilde{\omega}_l)\omega_l + (\cdot, \omega_l)\tilde{\omega}_l). \end{aligned} \quad (1.20)$$

В инвариантных терминах справедливы представления

$$F_1 = ZP + PZ^*, \quad K_0 = ZSP + SPZ^*, \quad (1.21)$$

$$N = Z^* X_1^* RP + (RP)^* X_1 Z. \quad (1.22)$$

Выполнены оценки

$$\|K\| \leq \sqrt{2}\delta^{-1/2} \|X_1\|^3, \quad \|N\| \leq (2\delta)^{-1/2} \|X_1\|^3. \quad (1.23)$$

Замечание 1.3. В базисе $\{\omega_l\}_{l=1}^n$ операторы N , N_0 , N_* (суженные на подпространство \mathfrak{N}) задаются матрицами размера $n \times n$. При этом оператор N_0 диагонален:

$$(N_0\omega_j, \omega_k) = \mu_j \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, n. \quad (1.24)$$

Матричные элементы оператора N_* имеют вид

$$(N_*\omega_j, \omega_k) = \gamma_k(\omega_j, \tilde{\omega}_k) + \gamma_j(\tilde{\omega}_j, \omega_k) = (\gamma_j - \gamma_k)(\tilde{\omega}_j, \omega_k), \quad j, k = 1, \dots, n.$$

Здесь мы учли соотношение (см. [BSu2, (1.18)])

$$(\tilde{\omega}_j, \omega_k) + (\omega_j, \tilde{\omega}_k) = 0, \quad j, k = 1, \dots, n. \quad (1.25)$$

Видно, что диагональные элементы для N_* обращаются в ноль: $(N_*\omega_j, \omega_j) = 0$, $j = 1, \dots, n$. Более того,

$$(N_*\omega_j, \omega_k) = 0, \quad \text{если } \gamma_j = \gamma_k.$$

1.6. Условие невырожденности. Ниже мы будем предполагать выполненным следующее дополнительное условие (ср. [BSu1, гл. 1, п. 5.1]).

Условие 1.4. При некотором $c_* > 0$ выполнено неравенство

$$A(t) \geq c_* t^2 I, \quad |t| \leq t_0. \quad (1.26)$$

Из (1.26) следует, что $\lambda_l(t) \geq c_* t^2$, $l = 1, \dots, n$, при $|t| \leq t_0$. В силу (1.5) это влечет

$$\gamma_l \geq c_* > 0, \quad l = 1, \dots, n.$$

Таким образом, спектральный росток невырожден:

$$S \geq c_* I_{\mathfrak{N}}. \quad (1.27)$$

1.7. Разбиение собственных значений оператора $A(t)$ на кластеры. Материал этого пункта заимствован из [Su6, §2]. Он содержателен при $n \geq 2$.

Предположим, что выполнено условие 1.4. Сейчас нам будет удобно изменить обозначения, отслеживая кратности собственных значений ростка S . Обозначим количество различных собственных значений ростка через p . Занумеруем эти собственные значения в порядке возрастания и обозначим их через γ_j° , $j = 1, \dots, p$. Их кратности обозначим через k_1, \dots, k_p (разумеется, $k_1 + \dots + k_p = n$). Введем обозначения для собственных подпространств: $\mathfrak{N}_j := \text{Ker}(S - \gamma_j^\circ I_{\mathfrak{N}})$, $j = 1, \dots, p$. Тогда $\mathfrak{N} = \sum_{j=1}^p \oplus \mathfrak{N}_j$. Пусть P_j — ортопроектор пространства \mathfrak{H} на \mathfrak{N}_j . Тогда

$$P = \sum_{j=1}^p P_j, \quad P_j P_l = 0 \quad \text{при } j \neq l.$$

Соответственно изменим и обозначения собственных векторов ростка (тех самых, которые являются “зародышами” в (1.6)), разделяя их на p частей, так что $\omega_1^{(j)}, \dots, \omega_{k_j}^{(j)}$ отвечают собственному значению γ_j° и образуют ортонормированный базис в \mathfrak{N}_j .

Замечание 1.5. Напомним, что $N = N_0 + N_*$. Согласно замечанию 1.3

$$P_j N_* P_j = 0, \quad j = 1, \dots, p; \quad P_l N_0 P_j = 0 \quad \text{при } l \neq j.$$

Отсюда следуют инвариантные представления операторов N_0 и N_* :

$$N_0 = \sum_{j=1}^p P_j N P_j, \quad N_* = \sum_{\substack{1 \leq j, l \leq p: \\ j \neq l}} P_j N P_l. \quad (1.28)$$

Для каждой пары индексов $(j, l), 1 \leq j, l \leq p, j \neq l$, введем обозначение

$$c_{jl}^\circ := \min\{c_*, n^{-1}|\gamma_j^\circ - \gamma_l^\circ|\}. \quad (1.29)$$

Ясно, что найдется номер $i_0 = i_0(j, l)$, где $j \leq i_0 \leq l-1$ при $j < l$ и $i_0 \leq j-1$ при $l < j$, такой что $\gamma_{i_0+1}^\circ - \gamma_{i_0}^\circ \geq c_{jl}^\circ$. Это означает, что на промежутке между γ_j° и γ_l° в спектре оператора S имеется лакуна длины не меньше c_{jl}° . Возможно, выбор i_0 неоднозначен, в этом случае договоримся брать наименьшее возможное i_0 (для определенности).

Выберем число $t_{jl}^{00} \leq t_0$ так, чтобы (см. (1.14))

$$t_{jl}^{00} \leq (4C_2)^{-1}c_{jl}^\circ = (4\beta_2)^{-1}\delta^{1/2}\|X_1\|^{-3}c_{jl}^\circ. \quad (1.30)$$

Положим $\Delta_{jl}^{(1)} := [\gamma_1^\circ - c_{jl}^\circ/4, \gamma_{i_0}^\circ + c_{jl}^\circ/4]$ и $\Delta_{jl}^{(2)} := [\gamma_{i_0+1}^\circ - c_{jl}^\circ/4, \gamma_p^\circ + c_{jl}^\circ/4]$. Промежутки $\Delta_{jl}^{(1)}$ и $\Delta_{jl}^{(2)}$ отделены друг от друга на расстояние, не меньшее $c_{jl}^\circ/2$. В [Su6, §2] показано, что при $|t| \leq t_{jl}^{00}$ оператор $A(t)$ имеет ровно $k_1 + \dots + k_{i_0}$ собственных значений (с учетом кратностей) на промежутке $t^2\Delta_{jl}^{(1)}$ и ровно $k_{i_0+1} + \dots + k_p$ собственных значений на промежутке $t^2\Delta_{jl}^{(2)}$. Спектральные проекторы оператора $A(t)$, отвечающие промежуткам $t^2\Delta_{jl}^{(1)}$ и $t^2\Delta_{jl}^{(2)}$, обозначим через $F_{jl}^{(1)}(t)$ и $F_{jl}^{(2)}(t)$, соответственно. Тогда

$$F(t) = F_{jl}^{(1)}(t) + F_{jl}^{(2)}(t), \quad |t| \leq t_{jl}^{00}. \quad (1.31)$$

Предложение 1.6. *Положим*

$$P_{jl}^{(1)} := P_1 + \dots + P_{i_0}, \quad P_{jl}^{(2)} := P_{i_0+1} + \dots + P_p.$$

При $|t| \leq t_{jl}^{00}$ справедливы оценки

$$\|F_{jl}^{(1)}(t) - P_{jl}^{(1)}\| \leq C_{5,jl}|t|, \quad (1.32)$$

$$\|F_{jl}^{(2)}(t) - P_{jl}^{(2)}\| \leq C_{5,jl}|t|, \quad (1.33)$$

$$\|A(t)F_{jl}^{(1)}(t) - t^2SP_{jl}^{(1)}\| \leq C_{6,jl}|t|^3, \quad (1.34)$$

$$\|A(t)F_{jl}^{(2)}(t) - t^2SP_{jl}^{(2)}\| \leq C_{6,jl}|t|^3. \quad (1.35)$$

Число t_{jl}^{00} выбрано согласно (1.29), (1.30), а постоянные $C_{5,jl}, C_{6,jl}$ заданы соотношениями

$$C_{5,jl} = \beta_5\delta^{-1/2}\|X_1\|^5(c_{jl}^\circ)^{-2}, \quad C_{6,jl} = \beta_6\delta^{-1/2}(\|X_1\|^3 + \|X_1\|^7(c_{jl}^\circ)^{-2}).$$

Доказательство. Неравенства (1.32) и (1.33) проверены в [Su6, Предложение 2.1].

Проверим теперь оценку (1.34). Из (1.13) непосредственно вытекает, что

$$\|A(t)F_{jl}^{(1)}(t) - t^2SP_{jl}^{(1)}(t)\| \leq C_2|t|^3, \quad |t| \leq t_0.$$

Отсюда и из (1.32) с учетом (1.3) получаем

$$\|A(t)F_{jl}^{(1)}(t) - t^2SP_{jl}^{(1)}\| \leq (C_2 + C_{5,jl}\|X_1\|^2)|t|^3, \quad |t| \leq t_{jl}^{00}.$$

Этим доказана оценка (1.34). Неравенство (1.35) устанавливается аналогично. \square

Нам понадобится также следующее утверждение.

Предложение 1.7. *При $|t| \leq t_{jl}^{00}$ справедливы оценки*

$$\left\| (A(t)F_{jl}^{(2)}(t) - \gamma_j^\circ t^2 I)^{-1}F_{jl}^{(2)}(t) - (t^2 SP_{jl}^{(2)} - \gamma_j^\circ t^2 I)^{-1}P_{jl}^{(2)} \right\| \leq C_{7,jl}|t|^{-1}, \quad \text{если } j < l, \quad (1.36)$$

$$\left\| (A(t)F_{jl}^{(1)}(t) - \gamma_j^\circ t^2 I)^{-1}F_{jl}^{(1)}(t) - (t^2 SP_{jl}^{(1)} - \gamma_j^\circ t^2 I)^{-1}P_{jl}^{(1)} \right\| \leq C_{7,jl}|t|^{-1}, \quad \text{если } j > l. \quad (1.37)$$

Число t_{jl}^{00} выбрано согласно (1.29), (1.30), а постоянная $C_{7,jl}$ задана соотношением

$$C_{7,jl} = \beta_7 \delta^{-1/2} (c_{jl}^\circ)^{-2} (\|X_1\|^3 + \|X_1\|^5 (c_{jl}^\circ)^{-1} + \|X_1\|^7 (c_{jl}^\circ)^{-2}).$$

Доказательство. Пусть $j < l$. Докажем неравенство (1.36). При $|t| \leq t_{jl}^{00}$ расстояние от промежутка $\Delta_{jl}^{(2)}$ до числа γ_j° не меньше, чем $3c_{jl}^\circ/4$. Следовательно,

$$\left\| (A(t)F_{jl}^{(2)}(t) - \gamma_j^\circ t^2 I)^{-1} \right\| \leq 4(3c_{jl}^\circ)^{-1} t^{-2}, \quad |t| \leq t_{jl}^{00}. \quad (1.38)$$

Очевидно,

$$\left\| (t^2 SP_{jl}^{(2)} - \gamma_j^\circ t^2 I)^{-1} \right\| \leq (c_{jl}^\circ)^{-1} t^{-2}. \quad (1.39)$$

Обозначим оператор под знаком нормы в (1.36) через $\mathcal{T}_{jl}(t)$ и представим его в виде

$$\mathcal{T}_{jl}(t) = \tilde{\mathcal{T}}_{jl}(t) + \hat{\mathcal{T}}_{jl}(t) + \check{\mathcal{T}}_{jl}(t), \quad (1.40)$$

где

$$\tilde{\mathcal{T}}_{jl}(t) := (F_{jl}^{(2)}(t) - P_{jl}^{(2)}) (A(t)F_{jl}^{(2)}(t) - \gamma_j^\circ t^2 I)^{-1} F_{jl}^{(2)}(t), \quad (1.41)$$

$$\hat{\mathcal{T}}_{jl}(t) := P_{jl}^{(2)} (t^2 SP_{jl}^{(2)} - \gamma_j^\circ t^2 I)^{-1} (F_{jl}^{(2)}(t) - P_{jl}^{(2)}), \quad (1.42)$$

$$\check{\mathcal{T}}_{jl}(t) := P_{jl}^{(2)} (A(t)F_{jl}^{(2)}(t) - \gamma_j^\circ t^2 I)^{-1} F_{jl}^{(2)}(t) - P_{jl}^{(2)} (t^2 SP_{jl}^{(2)} - \gamma_j^\circ t^2 I)^{-1} F_{jl}^{(2)}(t). \quad (1.43)$$

Оценки операторов (1.41) и (1.42) следуют из (1.33), (1.38) и (1.39):

$$\|\tilde{\mathcal{T}}_{jl}(t)\| \leq 4C_{5,jl}(3c_{jl}^\circ)^{-1}|t|^{-1}, \quad |t| \leq t_{jl}^{00}, \quad (1.44)$$

$$\|\hat{\mathcal{T}}_{jl}(t)\| \leq C_{5,jl}(c_{jl}^\circ)^{-1}|t|^{-1}, \quad |t| \leq t_{jl}^{00}. \quad (1.45)$$

Преобразуем теперь оператор (1.43):

$$\check{\mathcal{T}}_{jl}(t) = P_{jl}^{(2)} (A(t)F_{jl}^{(2)}(t) - \gamma_j^\circ t^2 I)^{-1} \left(t^2 SP_{jl}^{(2)} - A(t)F_{jl}^{(2)}(t) \right) (t^2 SP_{jl}^{(2)} - \gamma_j^\circ t^2 I)^{-1} F_{jl}^{(2)}(t).$$

Отсюда в силу (1.35), (1.38) и (1.39) получаем

$$\|\check{\mathcal{T}}_{jl}(t)\| \leq \frac{4}{3} C_{6,jl}(c_{jl}^\circ)^{-2}|t|^{-1}, \quad |t| \leq t_{jl}^{00}. \quad (1.46)$$

В итоге, соотношения (1.40) и (1.44)–(1.46) влечут искомое неравенство (1.36).

В случае $j > l$ неравенство (1.37) устанавливается аналогично. \square

1.8. Коэффициенты ν_l . Для определенности будем считать нумерацию в (1.5), (1.6) такой, что $\gamma_1 \leq \dots \leq \gamma_n$. Коэффициенты ν_l и векторы ω_l , $l = 1, \dots, n$, в разложениях (1.5), (1.6) являются собственными значениями и собственными элементами некоторой задачи; см. [D1, п. 1.8]. Нам понадобится описать эту задачу в случае, когда $\mu_l = 0$, $l = 1, \dots, n$, то есть, $N_0 = 0$. См. также [DSu2, предложение 1.7].

Предложение 1.8 ([D1]). *Пусть $N_0 = 0$. Положим*

$$N_1^0 := Z_2^* X_1^* R P + (R P)^* X_1 Z_2 + R_2^* R_2 P.$$

Пусть $\gamma_1^\circ, \dots, \gamma_p^\circ$ – различные собственные значения оператора S , а k_1, \dots, k_p – их кратности.

Пусть P_q – ортопроектор на подпространство $\mathfrak{N}_q = \text{Ker}(S - \gamma_q^\circ I_{\mathfrak{N}})$, $q = 1, \dots, p$. Введем операторы $\mathcal{N}^{(q)}$, $q = 1, \dots, p$: оператор $\mathcal{N}^{(q)}$ действует в \mathfrak{N}_q и задается выражением

$$\mathcal{N}^{(q)} := P_q \left(N_1^0 - \frac{1}{2} Z^* Z S P - \frac{1}{2} S P Z^* Z \right) \Big|_{\mathfrak{N}_q} + \sum_{j=1, \dots, p: j \neq q} (\gamma_q^\circ - \gamma_j^\circ)^{-1} P_q N P_j N \Big|_{\mathfrak{N}_q}.$$

Обозначим $i(q) = k_1 + \dots + k_{q-1} + 1$. Пусть ν_l , $l = 1, \dots, n$, – коэффициенты при t^4 из разложений (1.5). Тогда

$$\mathcal{N}^{(q)} \omega_l = \nu_l \omega_l, \quad l = i(q), i(q) + 1, \dots, i(q) + k_q - 1.$$

§ 2. ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРА $e^{-i\tau A(t)}$

2.1. Аппроксимация по операторной норме в \mathfrak{H} . Положим

$$E(t, \tau) := e^{-i\tau A(t)} F(t) - e^{-i\tau t^2 SP} P, \quad (2.1)$$

$$J(t, \tau) := e^{-i\tau A(t)} P - e^{-i\tau t^2 SP} P. \quad (2.2)$$

Нам понадобятся оценки операторов (2.1), (2.2), установленные (с помощью пороговых аппроксимаций) в [BSu5, п. 2.1] и [Su6, Следствия 3.3, 3.5].

Теорема 2.1 ([BSu5]). *При $\tau \in \mathbb{R}$ и $|t| \leq t_0$ справедливы оценки*

$$\|E(t, \tau)\| \leq C_1 |t| + C_2 |\tau| |t|^3, \quad (2.3)$$

$$\|J(t, \tau)\| \leq 2C_1 |t| + C_2 |\tau| |t|^3. \quad (2.4)$$

Число t_0 подчинено условию (1.1). Постоянны C_1, C_2 определены в (1.14).

Теорема 2.2 ([Su6]). *Пусть оператор N , определенный в (1.22), равен нулю: $N = 0$. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $|t| \leq t_0$ справедлива оценка*

$$\|J(t, \tau)\| \leq 2C_1 |t| + C_8 |\tau| |t|^4.$$

Число t_0 подчинено условию (1.1). Постоянная C_1 определена в (1.14), а постоянная C_8 имеет вид

$$C_8 = \beta_8 \delta^{-1} \|X_1\|^4. \quad (2.5)$$

Теорема 2.3 ([Su6]). *Пусть $n \geq 2$. Положим $\mathcal{Z} := \{(j, l) : 1 \leq j, l \leq p, j \neq l, P_j N P_l \neq 0\}$. Пусть*

$$c^\circ := \min_{(j, l) \in \mathcal{Z}} c_{jl}^\circ, \quad (2.6)$$

где числа c_{jl}° определены в (1.29). Пусть число $t^{00} \leq t_0$ подчинено условию

$$t^{00} \leq (4\beta_2)^{-1} \delta^{1/2} \|X_1\|^{-3} c^\circ. \quad (2.7)$$

Предположим, что оператор N_0 , определенный в (1.28), равен нулю: $N_0 = 0$. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $|t| \leq t^{00}$ справедлива оценка

$$\|J(t, \tau)\| \leq C_9 |t| + C_{10} |\tau| |t|^4.$$

Постоянны C_9, C_{10} заданы выражениями

$$\begin{aligned} C_9 &= \beta_9 \delta^{-1/2} \|X_1\| (1 + n^2 \|X_1\|^2 (c^\circ)^{-1}), \\ C_{10} &= \beta_{10} \delta^{-1} \|X_1\|^4 (1 + n^2 \|X_1\|^4 (c^\circ)^{-2}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

2.2. Аппроксимация по операторной норме в \mathfrak{H} с учетом корректора. Имеем

$$J(t, \tau) = E(t, \tau) - e^{-i\tau A(t)} (F(t) - P). \quad (2.9)$$

Рассмотрим оператор

$$\Sigma(t, \tau) := e^{i\tau t^2 SP} E(t, \tau) = e^{i\tau t^2 SP} F(t) e^{-i\tau A(t)} - P. \quad (2.10)$$

Тогда $\Sigma(t, 0) = F(t) - P$,

$$\frac{d\Sigma(t, \tau)}{d\tau} = ie^{i\tau t^2 SP} (t^2 SP - A(t)F(t)) F(t) e^{-i\tau A(t)}.$$

Следовательно,

$$\Sigma(t, \tau) = F(t) - P + i \int_0^\tau e^{i\tilde{\tau} t^2 SP} (t^2 SP - A(t)F(t)) F(t) e^{-i\tilde{\tau} A(t)} d\tilde{\tau}.$$

Вместе с (2.9) и (2.10) это влечет

$$\begin{aligned} J(t, \tau) &= -e^{-i\tau A(t)}(F(t) - P) + e^{-i\tau t^2 SP}(F(t) - P) \\ &\quad + i \int_0^\tau e^{-i(\tau-\tilde{\tau})t^2 SP} (t^2 SP - A(t)F(t)) F(t)e^{-i\tilde{\tau} A(t)} d\tilde{\tau}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Из (1.15), (1.16) и (2.11) получаем

$$J(t, \tau) = -e^{-i\tau A(t)}(tF_1 + F_2(t)) + e^{-i\tau t^2 SP}(tF_1 + F_2(t)) - i \int_0^\tau e^{-i(\tau-\tilde{\tau})t^2 SP} (t^3 K + \Psi(t)) F(t)e^{-i\tilde{\tau} A(t)} d\tilde{\tau}. \quad (2.12)$$

Домножим равенство (2.12) справа на проектор P и учтем, что $J(t, \tau)P = J(t, \tau)$ (см. (2.2)). В силу соотношений $F_1 = ZP + PZ^*$ и $Z^*P = 0$ имеем $tF_1P = tZP$. Мы приходим к тождеству

$$\begin{aligned} J(t, \tau) &= -e^{-i\tau A(t)}(tZP + F_2(t)P) + e^{-i\tau t^2 SP}(tZP + F_2(t)P) \\ &\quad - i \int_0^\tau e^{-i(\tau-\tilde{\tau})t^2 SP} (t^3 K + \Psi(t)) F(t)e^{-i\tilde{\tau} A(t)} P d\tilde{\tau}. \end{aligned}$$

Отсюда и из оценок (1.17), (1.18) с учетом (2.2) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} &\left\| e^{-i\tau A(t)}(I + tZ)P - e^{-i\tau t^2 SP}(I + tZ)P + i \int_0^\tau e^{-i(\tau-\tilde{\tau})t^2 SP} t^3 K F(t)e^{-i\tilde{\tau} A(t)} P d\tilde{\tau} \right\| \\ &\leqslant 2C_3 t^2 + C_4 |\tau| t^4, \quad |t| \leqslant t_0, \quad \tau \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Обозначим интегральный член в (2.13) через $\mathcal{I}(t, \tau)$ и преобразуем его с помощью равенства $K = ZSP + SPZ^* + N$ (см. (1.19), (1.21)):

$$\mathcal{I}(t, \tau) := i \int_0^\tau e^{-i(\tau-\tilde{\tau})t^2 SP} t^3 K F(t)e^{-i\tilde{\tau} A(t)} P d\tilde{\tau} = \mathcal{I}_1(t, \tau) + \mathcal{I}_2(t, \tau) + \mathcal{I}_3(t, \tau), \quad (2.14)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1(t, \tau) &:= i \int_0^\tau e^{-i(\tau-\tilde{\tau})t^2 SP} t^3 ZSPF(t)e^{-i\tilde{\tau} A(t)} P d\tilde{\tau}, \\ \mathcal{I}_2(t, \tau) &:= i \int_0^\tau e^{-i(\tau-\tilde{\tau})t^2 SP} t^3 SPZ^* F(t)e^{-i\tilde{\tau} A(t)} P d\tilde{\tau}, \\ \mathcal{I}_3(t, \tau) &:= i \int_0^\tau e^{-i(\tau-\tilde{\tau})t^2 SP} t^3 NF(t)e^{-i\tilde{\tau} A(t)} P d\tilde{\tau}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Член $\mathcal{I}_2(t, \tau)$ легко оценить, используя (1.12) и тождество $Z^*P = 0$:

$$\|\mathcal{I}_2(t, \tau)\| \leqslant C_1 \|S\| \|Z\| |\tau| t^4 \leqslant C'_{11} |\tau| t^4, \quad |t| \leqslant t_0, \quad C'_{11} = \beta'_{11} \delta^{-1} \|X_1\|^4. \quad (2.16)$$

Мы учли (1.2), (1.3) и (1.14).

Преобразуем теперь член $\mathcal{I}_1(t, \tau)$. Поскольку $PZ = 0$, то

$$e^{-i\tau t^2 SP} Z = Z, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad (2.17)$$

а потому

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1(t, \tau) &= i \int_0^\tau t^3 ZSPF(t)e^{-i\tilde{\tau} A(t)} P d\tilde{\tau} \\ &= i \int_0^\tau tZ(t^2 SP - A(t)F(t))F(t)e^{-i\tilde{\tau} A(t)} P d\tilde{\tau} + i \int_0^\tau tZA(t)F(t)e^{-i\tilde{\tau} A(t)} P d\tilde{\tau}. \end{aligned}$$

Первый интеграл справа оценим с помощью (1.13) через $C_2 \|Z\| |\tau| t^4$, а второй интеграл вычисляется: он равен $-tZ(e^{-i\tau A(t)} - I)F(t)P$. Учитывая оценки (1.12) и (2.3), получаем

$$\|\mathcal{I}_1(t, \tau) + tZe^{-i\tau t^2 SP} P - tZP\| \leqslant 2C_1 \|Z\| t^2 + 2C_2 \|Z\| |\tau| t^4 \leqslant C'_{12} t^2 + C''_{11} |\tau| t^4, \quad |t| \leqslant t_0. \quad (2.18)$$

Здесь $C'_{12} = \beta'_{12} \delta^{-1} \|X_1\|^2$, $C''_{11} = \beta''_{11} \delta^{-1} \|X_1\|^4$. Мы учли (1.2) и (1.14).

Сопоставляя (2.13), (2.14), (2.16), (2.18) и учитывая (2.17), приходим к неравенству

$$\left\| e^{-i\tau A(t)}(I+tZ)P - (I+tZ)e^{-i\tau t^2 SP}P + \mathcal{I}_3(t, \tau) \right\| \leq C_{12}t^2 + C_{11}|\tau|t^4, \quad |t| \leq t_0. \quad (2.19)$$

Здесь

$$C_{11} = C_4 + C'_{11} + C''_{11} = \beta_{11}\delta^{-1}\|X_1\|^4, \quad C_{12} = 2C_3 + C'_{12} = \beta_{12}\delta^{-1}\|X_1\|^2. \quad (2.20)$$

Наконец, используя оценку (2.3), получаем

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{I}_3(t, \tau) - i \int_0^\tau e^{-i(\tau-\tilde{\tau})t^2 SP} t^3 N e^{-i\tilde{\tau}t^2 SP} P d\tilde{\tau} \right\| &\leq \|N\| \left(C_1 |\tau|t^4 + \frac{C_2}{2} \tau^2 t^6 \right) \\ &\leq C'_{13} |\tau|t^4 + C_{14} \tau^2 t^6, \quad |t| \leq t_0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Здесь $C'_{13} = \beta'_{13}\delta^{-1}\|X_1\|^4$, $C_{14} = \beta_{14}\delta^{-1}\|X_1\|^6$. Мы учли (1.14) и (1.23).

В итоге, из (2.19) и (2.21) вытекает следующий результат. Для краткости положим

$$G_0(t, \tau) := e^{-i\tau A(t)}(I+tZ)P - (I+tZ)e^{-i\tau t^2 SP}P, \quad (2.22)$$

$$G(t, \tau) := e^{-i\tau A(t)}(I+tZ)P - (I+tZ)e^{-i\tau t^2 SP}P + i \int_0^\tau e^{-i(\tau-\tilde{\tau})t^2 SP} t^3 N e^{-i\tilde{\tau}t^2 SP} P d\tilde{\tau}. \quad (2.23)$$

Теорема 2.4. Пусть $G(t, \tau)$ — оператор (2.23). При $|t| \leq t_0$ и $\tau \in \mathbb{R}$ справедлива оценка

$$\|G(t, \tau)\| \leq C_{12}t^2 + C_{13}|\tau|t^4 + C_{14}\tau^2 t^6. \quad (2.24)$$

Число t_0 подчинено условию (1.1). Постоянные C_{12}, C_{13}, C_{14} заданы выражениями

$$C_{12} = \beta_{12}\delta^{-1}\|X_1\|^2, \quad C_{13} = \beta_{13}\delta^{-1}\|X_1\|^4, \quad C_{14} = \beta_{14}\delta^{-1}\|X_1\|^6. \quad (2.25)$$

Замечание 2.5. Теорема 2.4 дает аппроксимацию не для оператора $e^{-i\tau A(t)}P$, которую мы изначально хотели получить, а для оператора $e^{-i\tau A(t)}(I+tZ)P$. Член $e^{-i\tau A(t)}tZP$ имеет порядок $O(|t|)$ и его нельзя отнести в поправку, поскольку сейчас мы стремимся к большей точности, чем в (2.4). С другой стороны, не представляется возможным аппроксимировать этот член в прежних терминах. Действительно, $ZP = P^\perp ZP$, P^\perp можно заменить на $F(t)^\perp$ и в пределах допустимой погрешности “проблемный” член принимает вид $e^{-i\tau A(t)}F(t)^\perp tZP$. В “пороговых” терминах можно приблизить оператор $e^{-i\tau A(t)}F(t)$, но не оператор $e^{-i\tau A(t)}F(t)^\perp$, отвечающий части спектра $[3\delta, \infty)$.

Теперь мы получим усиление результата теоремы 2.4 при дополнительных предположениях. Из (2.15) и (2.19) непосредственно вытекает следующий результат.

Теорема 2.6. Пусть $G_0(t, \tau)$ — оператор (2.22). Пусть оператор N , определенный в (1.22), равен нулю: $N = 0$. Тогда при $|t| \leq t_0$ и $\tau \in \mathbb{R}$ справедлива оценка

$$\|G_0(t, \tau)\| \leq C_{12}t^2 + C_{11}|\tau|t^4. \quad (2.26)$$

Число t_0 подчинено условию (1.1). Постоянные C_{11}, C_{12} определены в (2.20).

Теорема 2.7. Пусть $G(t, \tau)$ — оператор (2.23). Пусть $n \geq 2$ и оператор N_0 , определенный в (1.28), равен нулю: $N_0 = 0$. Тогда при $|t| \leq t^{00}$ и $\tau \in \mathbb{R}$ справедлива оценка

$$\|G(t, \tau)\| \leq C_{15}t^2 + C_{16}|\tau|t^4. \quad (2.27)$$

Число $t^{00} \leq t_0$ подчинено условию (2.7). Постоянныес C_{15}, C_{16} имеют вид

$$\begin{aligned} C_{15} &= \beta_{15}\delta^{-1}(\|X_1\|^2 + n^2\|X_1\|^4(c^\circ)^{-1} + n^2\|X_1\|^6(c^\circ)^{-2} + n^2\|X_1\|^8(c^\circ)^{-3} + n^2\|X_1\|^{10}(c^\circ)^{-4}), \\ C_{16} &= \beta_{16}\delta^{-1}(\|X_1\|^4 + n^2\|X_1\|^6(c^\circ)^{-1} + n^2\|X_1\|^8(c^\circ)^{-2}). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Доказательство. Доказательство опирается на оценку (2.19) и анализ оператора (2.15). При условии $N_0 = 0$ выполнено $N = N_*$. Тогда с учетом (1.28) член (2.15) принимает вид

$$\mathcal{I}_3(t, \tau) = \sum_{\substack{1 \leq j, l \leq p: \\ j \neq l}} \mathcal{I}_{3,jl}(t, \tau), \quad (2.29)$$

где

$$\mathcal{I}_{3,jl}(t, \tau) := ie^{-i\tau\gamma_j^\circ t^2} t^3 \int_0^\tau e^{i\tilde{\tau}\gamma_j^\circ t^2} P_j N P_l F(t) e^{-i\tilde{\tau}A(t)} P d\tilde{\tau}.$$

Проанализируем каждое слагаемое в (2.29) отдельно. Пусть $j < l$ и $|t| \leq t^{00}$. В силу (1.31) имеем

$$\mathcal{I}_{3,jl}(t, \tau) = \mathcal{I}_{3,jl}^{(1)}(t, \tau) + \mathcal{I}_{3,jl}^{(2)}(t, \tau), \quad (2.30)$$

где

$$\mathcal{I}_{3,jl}^{(k)}(t, \tau) := ie^{-i\tau\gamma_j^\circ t^2} t^3 \int_0^\tau e^{i\tilde{\tau}\gamma_j^\circ t^2} P_j N P_l F_{jl}^{(k)}(t) e^{-i\tilde{\tau}A(t)} P d\tilde{\tau}, \quad k = 1, 2.$$

Учитывая, что

$$P_l F_{jl}^{(1)}(t) = P_l(F_{jl}^{(1)}(t) - P_{jl}^{(1)}),$$

и применяя оценку (1.32), оценим член $\mathcal{I}_{3,jl}^{(1)}(t, \tau)$:

$$\|\mathcal{I}_{3,jl}^{(1)}(t, \tau)\| \leq \|N\|C_{5,jl}|\tau|t^4 \leq C'_{16,jl}|\tau|t^4, \quad |t| \leq t^{00}, \quad C'_{16,jl} = \beta_5 \delta^{-1} \|X_1\|^8 (c_{jl}^\circ)^{-2}. \quad (2.31)$$

Вычислим теперь интеграл в выражении для $\mathcal{I}_{3,jl}^{(2)}(t, \tau)$:

$$\mathcal{I}_{3,jl}^{(2)}(t, \tau) = -e^{-i\tau\gamma_j^\circ t^2} t^3 P_j N P_l F_{jl}^{(2)}(t) (A(t) F_{jl}^{(2)}(t) - \gamma_j^\circ t^2 I)^{-1} \left(e^{i\tau\gamma_j^\circ t^2} e^{-i\tau A(t)} - I \right) P.$$

Отсюда с помощью предложения 1.7 и оценок (1.38), (2.4) получаем

$$\|\mathcal{I}_{3,jl}^{(2)}(t, \tau) - \widehat{\mathcal{I}}_{3,jl}^{(2)}(t, \tau)\| \leq C'_{15,jl} t^2 + C''_{16,jl} |\tau| t^4, \quad |t| \leq t^{00}. \quad (2.32)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{I}}_{3,jl}^{(2)}(t, \tau) &= -e^{-i\tau\gamma_j^\circ t^2} t^3 P_j N P_l (t^2 S P_{jl}^{(2)} - \gamma_j^\circ t^2 I)^{-1} \left(e^{i\tau\gamma_j^\circ t^2} e^{-i\tau t^2 S P} - I \right) P \\ &= -e^{-i\tau\gamma_j^\circ t^2} t P_j N P_l (\gamma_l^\circ - \gamma_j^\circ)^{-1} \left(e^{i\tau(\gamma_j^\circ - \gamma_l^\circ)t^2} - 1 \right). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Постоянные в оценке (2.32) заданы выражениями

$$\begin{aligned} C'_{15,jl} &= \beta'_{15} \delta^{-1} (c_{jl}^\circ)^{-1} (\|X_1\|^4 + \|X_1\|^6 (c_{jl}^\circ)^{-1} + \|X_1\|^8 (c_{jl}^\circ)^{-2} + \|X_1\|^{10} (c_{jl}^\circ)^{-3}), \\ C''_{16,jl} &= \beta''_{16} \delta^{-1} \|X_1\|^6 (c_{jl}^\circ)^{-1}. \end{aligned}$$

Ясно, что оператор (2.33) можно представить в виде

$$\widehat{\mathcal{I}}_{3,jl}^{(2)}(t, \tau) = i \int_0^\tau e^{-i(\tau-\tilde{\tau})t^2 S P} t^3 P_j N P_l e^{-i\tilde{\tau}t^2 S P} P d\tilde{\tau}. \quad (2.34)$$

Из (2.30)–(2.32) вытекает оценка

$$\|\mathcal{I}_{3,jl}(t, \tau) - \widehat{\mathcal{I}}_{3,jl}^{(2)}(t, \tau)\| \leq C'_{15,jl} t^2 + (C'_{16,jl} + C''_{16,jl}) |\tau| t^4, \quad |t| \leq t^{00}. \quad (2.35)$$

Случай $j > l$ рассматривается аналогично. В итоге, из (2.29), (2.34) и (2.35) получаем

$$\|\mathcal{I}_3(t, \tau) - i \int_0^\tau e^{-i(\tau-\tilde{\tau})t^2 S P} t^3 N e^{-i\tilde{\tau}t^2 S P} P d\tilde{\tau}\| \leq C'_{15} t^2 + \widetilde{C}_{16} |\tau| t^4, \quad |t| \leq t^{00}, \quad (2.36)$$

где

$$C'_{15} = \sum_{j \neq l} C'_{15,jl}, \quad \widetilde{C}_{16} = \sum_{j \neq l} (C'_{16,jl} + C''_{16,jl}).$$

Окончательно, неравенства (2.19) и (2.36) влекут искомую оценку (2.27). \square

2.3. Аппроксимация по “энергетической” норме. В этом пункте мы получим аппроксимацию операторной экспоненты по “энергетической” норме. Для этого нам будут нужны следующие оценки, первая из которых вытекает из (1.1), (1.3), (1.13) и (1.14), а вторая установлена в [BSu4, (2.23)]:

$$\|A(t)^{1/2}F(t)\| \leq C_{17}|t|, \quad |t| \leq t_0; \quad C_{17} = (1 + \beta_2)^{1/2}\|X_1\|, \quad (2.37)$$

$$\|A(t)^{1/2}F_2(t)\| \leq C_{18}t^2, \quad |t| \leq t_0; \quad C_{18} = \beta_{18}\delta^{-1/2}\|X_1\|^2. \quad (2.38)$$

Очевидно, справедливо представление

$$\begin{aligned} A(t)^{1/2} \left(e^{-i\tau A(t)}P - e^{-i\tau t^2 SP}P \right) &= A(t)^{1/2}F(t) \left(e^{-i\tau A(t)}P - e^{-i\tau t^2 SP}P \right) \\ &\quad + A(t)^{1/2}e^{-i\tau A(t)}(P - F(t))P - A(t)^{1/2}(P - F(t))e^{-i\tau t^2 SP}P. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Первый член справа оценивается с помощью (2.37) и теоремы 2.1:

$$\left\| A(t)^{1/2}F(t) \left(e^{-i\tau A(t)}P - e^{-i\tau t^2 SP}P \right) \right\| \leq 2C_1C_{17}t^2 + C_2C_{17}|\tau|t^4, \quad |t| \leq t_0, \quad \tau \in \mathbb{R}. \quad (2.40)$$

В силу (1.15) и (1.21) с учетом равенства $Z^*P = 0$ получаем

$$(P - F(t))P = (-tF_1 - F_2(t))P = -tZP - F_2(t)P.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &A(t)^{1/2}e^{-i\tau A(t)}(P - F(t))P - A(t)^{1/2}(P - F(t))e^{-i\tau t^2 SP}P \\ &= -A(t)^{1/2} \left(e^{-i\tau A(t)}tZP - tZPe^{-i\tau t^2 SP}P \right) - e^{-i\tau A(t)}A(t)^{1/2}F_2(t)P + A(t)^{1/2}F_2(t)e^{-i\tau t^2 SP}P. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Оценивая последние два члена справа с помощью (2.38) и применяя (2.39), (2.40), приходим к неравенству

$$\left\| A(t)^{1/2} \left(e^{-i\tau A(t)}(I + tZ)P - (I + tZ)e^{-i\tau t^2 SP}P \right) \right\| \leq 2(C_1C_{17} + C_{18})t^2 + C_2C_{17}|\tau|t^4, \quad |t| \leq t_0, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Вспоминая выражения для констант C_1, C_2, C_{17}, C_{18} , получаем следующий результат.

Теорема 2.8. Пусть $G_0(t, \tau)$ – оператор (2.22). При $|t| \leq t_0$ и $\tau \in \mathbb{R}$ справедлива оценка

$$\left\| A(t)^{1/2}G_0(t, \tau) \right\| \leq C_{19}t^2 + C_{20}|\tau|t^4. \quad (2.42)$$

Число t_0 подчинено условию (1.1). Постоянные C_{19}, C_{20} имеют вид

$$C_{19} = \beta_{19}\delta^{-1/2}\|X_1\|^2, \quad C_{20} = \beta_{20}\delta^{-1/2}\|X_1\|^4. \quad (2.43)$$

При дополнительных предположениях результат теоремы 2.8 допускает усиление.

Теорема 2.9. Пусть $G_0(t, \tau)$ – оператор (2.22). Пусть оператор N , определенный в (1.22), равен нулю: $N = 0$. Тогда при $|t| \leq t_0$ и $\tau \in \mathbb{R}$ справедлива оценка

$$\left\| A(t)^{1/2}G_0(t, \tau) \right\| \leq C_{19}t^2 + C_{21}|\tau||t|^5. \quad (2.44)$$

Число t_0 подчинено условию (1.1). Постоянная C_{19} определена в (2.43), постоянная C_{21} имеет вид $C_{21} = \beta_{21}\delta^{-1}\|X_1\|^5$.

Доказательство. Воспользуемся представлением (2.39) и оценим первый член справа с помощью теоремы 2.2 и (2.37):

$$\left\| A(t)^{1/2}F(t) \left(e^{-i\tau A(t)}P - e^{-i\tau t^2 SP}P \right) \right\| \leq 2C_1C_{17}t^2 + C_8C_{17}|\tau||t|^5, \quad |t| \leq t_0, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Как и прежде, применяем (2.41) и оцениваем последние два члена справа с помощью (2.38). В результате приходим к оценке

$$\left\| A(t)^{1/2} \left(e^{-i\tau A(t)}(I + tZ)P - (I + tZ)e^{-i\tau t^2 SP}P \right) \right\| \leq 2(C_1C_{17} + C_{18})t^2 + C_8C_{17}|\tau||t|^5, \quad |t| \leq t_0, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Остается вспомнить выражения для констант. \square

Аналогичным образом из теоремы 2.3 и соотношений (2.37)–(2.39), (2.41) вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.10. Пусть $G_0(t, \tau)$ — оператор (2.22). Пусть $n \geq 2$ и оператор N_0 , определенный в (1.28), равен нулю: $N_0 = 0$. Тогда при $|t| \leq t^{00}$ и $\tau \in \mathbb{R}$ справедлива оценка

$$\|A(t)^{1/2}G_0(t, \tau)\| \leq C_{22}t^2 + C_{23}|\tau||t|^5.$$

Число $t^{00} \leq t_0$ подчинено условию (2.7). Постоянные C_{22}, C_{23} имеют вид

$$C_{22} = \beta_{22}\delta^{-1/2}\|X_1\|^2(1 + n^2\|X_1\|^2(c^\circ)^{-1}), \quad C_{23} = \beta_{23}\delta^{-1}\|X_1\|^5(1 + n^2\|X_1\|^4(c^\circ)^{-2}). \quad (2.45)$$

§ 3. ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА $\exp(-i\varepsilon^{-2}\tau A(t))$

3.1. Аппроксимация по операторной норме в \mathfrak{H} . Введем теперь параметр $\varepsilon > 0$. Исследуем поведение оператора $e^{-i\varepsilon^{-2}\tau A(t)}$ при малом ε . Удобно домножить этот оператор на “сглаживающий множитель” $\varepsilon^s(t^2 + \varepsilon^2)^{-s/2}P$, где $s > 0$. (Термин объясняется тем, что в приложениях к дифференциальным операторам такое домножение переходит в сглаживание.)

Теорема 3.1 ([BSu5]). При $\varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}$ и $|t| \leq t_0$ справедлива оценка

$$\left\|e^{-i\varepsilon^{-2}\tau A(t)}P - e^{-i\varepsilon^{-2}\tau t^2 SP}P\right\| \frac{\varepsilon^3}{(t^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \leq (C_1 + C_2|\tau|)\varepsilon. \quad (3.1)$$

Число t_0 подчинено условию (1.1). Постоянны C_1, C_2 определены в (1.14).

Теорема 3.1 вытекает непосредственно из оценки (2.4) с заменой τ на $\varepsilon^{-2}\tau$. Впервые оценка (3.1) была установлена в [BSu5, теорема 2.6].

При дополнительных условиях результат допускает усиление.

Теорема 3.2 ([D1]). Пусть оператор N , определенный в (1.22), равен нулю: $N = 0$. Тогда при $\varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}$ и $|t| \leq t_0$ справедлива оценка

$$\left\|e^{-i\varepsilon^{-2}\tau A(t)}P - e^{-i\varepsilon^{-2}\tau t^2 SP}P\right\| \frac{\varepsilon^2}{t^2 + \varepsilon^2} \leq (C_1 + C'_8|\tau|^{1/2})\varepsilon.$$

Число t_0 подчинено условию (1.1). Постоянны C_1, C_8 определены в (1.14), (2.5), $C'_8 = \max\{C_8; 2\}$.

Теорема 3.3 ([D1]). Пусть $n \geq 2$ и оператор N_0 , определенный в (1.28), равен нулю: $N_0 = 0$. Тогда при $\varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}$ и $|t| \leq t^{00}$ справедлива оценка

$$\left\|e^{-i\varepsilon^{-2}\tau A(t)}P - e^{-i\varepsilon^{-2}\tau t^2 SP}P\right\| \frac{\varepsilon^2}{t^2 + \varepsilon^2} \leq (C_9 + C'_{10}|\tau|^{1/2})\varepsilon.$$

Число $t^{00} \leq t_0$ подчинено условию (2.7). Постоянны C_9, C_{10} определены в (2.8), $C'_{10} = \max\{C_{10}; 2\}$.

Теорема 3.2 выводится из теоремы 2.2, а теорема 3.3 — из теоремы 2.3; см. [D1, теоремы 2.5, 2.6].

3.2. Аппроксимация с корректором по операторной норме в \mathfrak{H} . Операторы (2.22), (2.23) с заменой τ на $\varepsilon^{-2}\tau$ имеют вид

$$G_0(t, \varepsilon^{-2}\tau) = e^{-i\varepsilon^{-2}\tau A(t)}(I + tZ)P - (I + tZ)e^{-i\varepsilon^{-2}\tau t^2 SP}P, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} G(t, \varepsilon^{-2}\tau) = & e^{-i\varepsilon^{-2}\tau A(t)}(I + tZ)P - (I + tZ)e^{-i\varepsilon^{-2}\tau t^2 SP}P \\ & + i\varepsilon^{-2} \int_0^\tau e^{-i\varepsilon^{-2}(\tau - \tilde{\tau})t^2 SP} t^3 N e^{-i\varepsilon^{-2}\tilde{\tau}t^2 SP} P d\tilde{\tau}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Из теоремы 2.4 выводим следующий результат.

Теорема 3.4. Пусть $G(t, \varepsilon^{-2}\tau)$ – оператор (3.3). При $|t| \leq t_0$, $\varepsilon > 0$ и $\tau \in \mathbb{R}$ справедлива оценка

$$\|G(t, \varepsilon^{-2}\tau)\| \frac{\varepsilon^6}{(t^2 + \varepsilon^2)^3} \leq (C_{12} + C_{13}|\tau| + C_{14}\tau^2) \varepsilon^2. \quad (3.4)$$

Число t_0 подчинено условию (1.1). Постоянные C_{12}, C_{13}, C_{14} определены в (2.25).

Доказательство. Применяя оценку (2.24) с заменой τ на $\varepsilon^{-2}\tau$, получаем

$$\begin{aligned} \|G(t, \varepsilon^{-2}\tau)\| \frac{\varepsilon^6}{(t^2 + \varepsilon^2)^3} \\ \leq (C_{12}t^2 + C_{13}\varepsilon^{-2}|\tau|t^4 + C_{14}\varepsilon^{-4}\tau^2t^6) \frac{\varepsilon^6}{(t^2 + \varepsilon^2)^3} \leq (C_{12} + C_{13}|\tau| + C_{14}\tau^2) \varepsilon^2, \quad |t| \leq t_0. \end{aligned}$$

□

При дополнительных предположениях результат допускает усиление.

Теорема 3.5. Пусть $G_0(t, \varepsilon^{-2}\tau)$ – оператор (3.2). Пусть оператор N , определенный в (1.22), равен нулю: $N = 0$. При $|t| \leq t_0$, $\varepsilon > 0$ и $\tau \in \mathbb{R}$ справедлива оценка

$$\|G_0(t, \varepsilon^{-2}\tau)\| \frac{\varepsilon^4}{(t^2 + \varepsilon^2)^2} \leq (C_{12} + C_{11}|\tau|) \varepsilon^2.$$

Число t_0 подчинено условию (1.1). Постоянны C_{11}, C_{12} определены в (2.20).

Доказательство. Применяя оценку (2.26) с заменой τ на $\varepsilon^{-2}\tau$, получаем

$$\|G_0(t, \varepsilon^{-2}\tau)\| \frac{\varepsilon^4}{(t^2 + \varepsilon^2)^2} \leq (C_{12}t^2 + C_{11}\varepsilon^{-2}|\tau|t^4) \frac{\varepsilon^4}{(t^2 + \varepsilon^2)^2} \leq (C_{12} + C_{11}|\tau|) \varepsilon^2.$$

□

Аналогичным образом из теоремы 2.7 выводится следующий результат.

Теорема 3.6. Пусть $G(t, \varepsilon^{-2}\tau)$ – оператор (3.3). Пусть $n \geq 2$ и оператор N_0 , определенный в (1.28), равен нулю: $N_0 = 0$. Тогда при $\varepsilon > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $|t| \leq t^{00}$ справедлива оценка

$$\|G(t, \varepsilon^{-2}\tau)\| \frac{\varepsilon^4}{(t^2 + \varepsilon^2)^2} \leq (C_{15} + C_{16}|\tau|) \varepsilon^2.$$

Число $t^{00} \leq t_0$ подчинено условию (2.7). Постоянны C_{15}, C_{16} определены в (2.28).

3.3. Апроксимация по “энергетической” норме. Из теоремы 2.8 вытекает следующий результат.

Теорема 3.7. Пусть $G_0(t, \varepsilon^{-2}\tau)$ – оператор (3.2). При $|t| \leq t_0$, $\varepsilon > 0$ и $\tau \in \mathbb{R}$ справедлива оценка

$$\|A(t)^{1/2}G_0(t, \varepsilon^{-2}\tau)\| \frac{\varepsilon^4}{(t^2 + \varepsilon^2)^2} \leq (C_{19} + C_{20}|\tau|) \varepsilon^2. \quad (3.5)$$

Число t_0 подчинено условию (1.1). Постоянны C_{19}, C_{20} определены в (2.43).

Доказательство. Применяя оценку (2.42) с заменой τ на $\varepsilon^{-2}\tau$, получаем

$$\|A(t)^{1/2}G_0(t, \varepsilon^{-2}\tau)\| \frac{\varepsilon^4}{(t^2 + \varepsilon^2)^2} \leq (C_{19}t^2 + C_{20}\varepsilon^{-2}|\tau|t^4) \frac{\varepsilon^4}{(t^2 + \varepsilon^2)^2} \leq (C_{19} + C_{20}|\tau|) \varepsilon^2, \quad |t| \leq t_0.$$

□

При дополнительных предположениях результат допускает усиление.

Теорема 3.8. Пусть $G_0(t, \varepsilon^{-2}\tau)$ – оператор (3.2). Пусть оператор N , определенный в (1.22), равен нулю: $N = 0$. При $|t| \leq t_0$, $\varepsilon > 0$ и $\tau \in \mathbb{R}$ справедлива оценка

$$\left\| A(t)^{1/2}G_0(t, \varepsilon^{-2}\tau) \right\| \frac{\varepsilon^3}{(t^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \leq \left(C_{19} + C_{24}|\tau|^{1/2} \right) \varepsilon^2. \quad (3.6)$$

Число t_0 подчинено условию (1.1). Постоянная C_{19} определена в (2.43), постоянная C_{24} задана выражением $C_{24} = \beta_{24}\|X_1\|(1 + \delta^{-1}\|X_1\|^4)$.

Доказательство. Отметим, что с учетом (1.1) и (1.2) справедлива оценка

$$\begin{aligned} \left\| A(t)^{1/2}(I + tZ)P \right\| &= \|(X_0 + tX_1)(P + tZP)\| = \|tX_1P + tX_0ZP + t^2X_1ZP\| \\ &\leq 2\|X_1\||t| + (8\delta)^{-1/2}\|X_1\|^2t^2 \leq (2 + 8^{-1/2})\|X_1\||t|, \quad |t| \leq t_0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

При $\tau = 0$ оценка (3.6) очевидна, поскольку $G_0(t, 0) = 0$.

Пусть теперь $\tau \neq 0$. Применяя (3.7), при $|t| > \varepsilon^{1/2}|\tau|^{-1/4}$ и $|t| \leq t_0$ оценим левую часть (3.6) через величину

$$\begin{aligned} 2 \left\| A(t)^{1/2}(I + tZ)P \right\| \frac{\varepsilon^3}{(t^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} &\leq 2(2 + 8^{-1/2})\|X_1\||t| \frac{\varepsilon^3}{(t^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \\ &\leq 2(2 + 8^{-1/2})\|X_1\| \frac{|t|}{(t^2 + \varepsilon^2)^{1/2}} \cdot \frac{\varepsilon^3}{\varepsilon|\tau|^{-1/2} + \varepsilon^2} \leq 2(2 + 8^{-1/2})\|X_1\||\tau|^{1/2}\varepsilon^2. \end{aligned}$$

При $|t| \leq \min\{\varepsilon^{1/2}|\tau|^{-1/4}, t_0\}$ воспользуемся теоремой 2.9. В силу неравенства (2.44) с заменой τ на $\varepsilon^{-2}\tau$ имеем

$$\begin{aligned} \left\| A(t)^{1/2}G_0(t, \varepsilon^{-2}\tau) \right\| \frac{\varepsilon^3}{(t^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \\ \leq (C_{19}t^2 + C_{21}\varepsilon^{-2}|\tau||t|^5) \frac{\varepsilon^3}{(t^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \leq C_{19}\varepsilon^2 + C_{21}|\tau|t^2\varepsilon \leq \left(C_{19} + C_{21}|\tau|^{1/2} \right) \varepsilon^2. \end{aligned}$$

В итоге с учетом выражений для постоянных получаем искомую оценку (3.6). \square

Аналогичным образом теорема 2.10 позволяет вывести следующий результат.

Теорема 3.9. Пусть $G_0(t, \varepsilon^{-2}\tau)$ – оператор (3.2). Пусть $n \geq 2$ и оператор N_0 , определенный в (1.28), равен нулю: $N_0 = 0$. Тогда при $\varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}$ и $|t| \leq t^{00}$ справедлива оценка

$$\left\| A(t)^{1/2}G_0(t, \varepsilon^{-2}\tau) \right\| \frac{\varepsilon^3}{(t^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \leq \left(C_{22} + C_{25}|\tau|^{1/2} \right) \varepsilon^2.$$

Число $t^{00} \leq t_0$ подчинено условию (2.7). Постоянная C_{22} определена в (2.45), постоянная C_{25} имеет вид $C_{25} = \beta_{25}\|X_1\|(1 + \delta^{-1}\|X_1\|^4 + \delta^{-1}n^2\|X_1\|^8(c^\circ)^{-2})$.

Замечание 3.10. Мы отследили, как зависят константы в оценках от параметров задачи. Постоянные $C_1, C_2, C'_8, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{19}, C_{20}, C_{24}$ из теорем 3.1, 3.2, 3.4, 3.5, 3.7, 3.8 оцениваются полиномами с (абсолютными) положительными коэффициентами от переменных $\delta^{-1/2}$ и $\|X_1\|$. Константы $C_9, C'_{10}, C_{15}, C_{16}, C_{22}, C_{25}$ из теорем 3.3, 3.6, 3.9 оцениваются полиномами с положительными коэффициентами от тех же переменных, а также от $(c^\circ)^{-1}$ и n .

§ 4. Подтверждение точности результатов §3

4.1. Подтверждение точности результатов относительно сглаживающего множителя.

Покажем, что полученные результаты точны относительно сглаживающего множителя. Следующее утверждение, установленное в [Сиб, теорема 4.4], подтверждает точность теоремы 3.1 в общем случае.

Теорема 4.1 ([Su6]). Пусть $N_0 \neq 0$. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leq s < 3$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau) > 0$, чтобы оценка

$$\left\| e^{-i\varepsilon^{-2}\tau A(t)}P - e^{-i\varepsilon^{-2}\tau t^2 SP}P \right\| \frac{\varepsilon^s}{(t^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq C(\tau)\varepsilon \quad (4.1)$$

выполнялась при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$.

Точность теорем 3.2 и 3.3 подтверждена в [D1, теорема 2.9].

Теорема 4.2 ([D1]). Пусть $N_0 = 0$ и $\mathcal{N}^{(q)} \neq 0$ при некотором $q \in \{1, \dots, p\}$. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leq s < 2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau) > 0$, чтобы оценка (4.1) выполнялась при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$.

Далее, подтвердим точность теоремы 3.4.

Теорема 4.3. Пусть $G(t, \varepsilon^{-2}\tau)$ – оператор (3.3). Пусть $N_0 \neq 0$. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leq s < 6$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau) > 0$, чтобы оценка

$$\|G(t, \varepsilon^{-2}\tau)\| \frac{\varepsilon^s}{(t^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq C(\tau)\varepsilon^2 \quad (4.2)$$

выполнялась при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Достаточно считать, что $2 \leq s < 6$. В силу (1.15), (1.21) и равенства $Z^*P = 0$ справедливо тождество

$$P + tZP = (F(t) - F_2(t))P. \quad (4.3)$$

Из оценки (1.17) следует, что

$$\left\| e^{-i\varepsilon^{-2}\tau A(t)}F_2(t)P \right\| \frac{\varepsilon^s}{(t^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq C_3 t^2 \frac{\varepsilon^s}{(t^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq C_3 \varepsilon^2, \quad |t| \leq t_0. \quad (4.4)$$

Поэтому неравенство (4.2) равносильно оценке

$$\begin{aligned} & \left\| e^{-i\varepsilon^{-2}\tau A(t)}F(t)P - (I + tZ)e^{-i\varepsilon^{-2}\tau t^2 SP}P + i\varepsilon^{-2} \int_0^\tau e^{-i\varepsilon^{-2}(\tau - \tilde{\tau})t^2 SP} t^3 N e^{-i\varepsilon^{-2}\tilde{\tau}t^2 SP} P d\tilde{\tau} \right\| \\ & \times \frac{\varepsilon^s}{(t^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq \tilde{C}(\tau)\varepsilon^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

с некоторой постоянной $\tilde{C}(\tau)$.

Будем рассуждать от противного. Предположим, что при некоторых $\tau \neq 0$ и $2 \leq s < 6$ выполнено (4.5) при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$. В силу (1.24) условие $N_0 \neq 0$ означает, что $\mu_l \neq 0$ при некотором $l \in \{1, \dots, n\}$. Рассмотрим квадратичную форму оператора под знаком нормы в (4.5) на векторе ω_l . Поскольку $S\omega_l = \gamma_l\omega_l$ и $Z^*P = 0$, то

$$\left((I + tZ)e^{-i\varepsilon^{-2}\tau t^2 SP}P\omega_l, \omega_l \right) = e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\gamma_lt^2}. \quad (4.6)$$

В силу замечания 1.3 выполнено $(N\omega_l, \omega_l) = \mu_l$, а потому

$$i\varepsilon^{-2} \int_0^\tau \left(e^{-i\varepsilon^{-2}(\tau - \tilde{\tau})t^2 SP} t^3 N e^{-i\varepsilon^{-2}\tilde{\tau}t^2 SP} P\omega_l, \omega_l \right) d\tilde{\tau} = i\varepsilon^{-2}\tau e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\gamma_lt^2} \mu_l t^3.$$

С учетом этих соотношений из (4.5) вытекает неравенство

$$\left| \left(e^{-i\varepsilon^{-2}\tau A(t)}F(t)\omega_l, \omega_l \right) - e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\gamma_lt^2} + i\varepsilon^{-2}\tau e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\gamma_lt^2} \mu_l t^3 \right| \frac{\varepsilon^s}{(t^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq \tilde{C}(\tau)\varepsilon^2 \quad (4.7)$$

при достаточно малых $|t|$ и ε .

Далее, из (1.11) следует представление

$$\left(e^{-i\varepsilon^{-2}\tau A(t)}F(t)\omega_l, \omega_l \right) = \sum_{j=1}^n e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\lambda_j(t)} |(\omega_l, \varphi_j(t))|^2.$$

Из сходимости ряда (1.6) следует, что $\|\varphi_j(t) - \omega_j\| \leq c|t|$ при $|t| \leq t_*$, $j = 1, \dots, n$. Тогда

$$|(\omega_l, \varphi_j(t))| = |(\omega_l, \varphi_j(t) - \omega_j)| \leq c|t|, \quad j \neq l, \quad |t| \leq t_*.$$

В силу (1.7) и (1.25)

$$(\omega_l, \psi_l^{(1)}) + (\psi_l^{(1)}, \omega_l) = 0,$$

а потому из сходимости ряда (1.6) следует, что

$$|(|(\omega_l, \varphi_l(t))|^2 - 1| \leq ct^2, \quad |t| \leq t_*.$$

Таким образом,

$$\left| \left(e^{-i\varepsilon^{-2}\tau A(t)} F(t) \omega_l, \omega_l \right) - e^{-i\varepsilon^{-2}\tau \lambda_l(t)} \right| \leq ct^2, \quad |t| \leq t_*. \quad (4.8)$$

Отсюда и из (4.7) следует, что найдется постоянная $\check{C}(\tau) > 0$ такая, что

$$\left| e^{-i\varepsilon^{-2}\tau \lambda_l(t)} - e^{-i\varepsilon^{-2}\tau \gamma_l t^2} + i\varepsilon^{-2}\tau e^{-i\varepsilon^{-2}\tau \gamma_l t^2} \mu_l t^3 \right| \frac{\varepsilon^s}{(t^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq \check{C}(\tau) \varepsilon^2 \quad (4.9)$$

при достаточно малых $|t|$ и ε . Перепишем (4.9) в виде

$$\left| -2e^{-\frac{i}{2}\varepsilon^{-2}\tau(\lambda_l(t) - \gamma_l t^2)} \sin\left(\frac{1}{2}\varepsilon^{-2}\tau(\lambda_l(t) - \gamma_l t^2)\right) + \varepsilon^{-2}\tau \mu_l t^3 \right| \frac{\varepsilon^s}{(t^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq \check{C}(\tau) \varepsilon^2. \quad (4.10)$$

Учтем, что $\lambda_l(t) = \gamma_l t^2 + \mu_l t^3 + O(t^4)$ и рассмотрим значения

$$t = t_o(\varepsilon) = (4\pi)^{1/3} |\mu_l \tau|^{-1/3} \varepsilon^{2/3} = c_o \varepsilon^{2/3}.$$

Тогда $\frac{1}{2}\varepsilon^{-2}\tau \mu_l t_o(\varepsilon)^3 = 2\pi \operatorname{sgn}(\mu_l \tau)$, а потому $\sin\left(\frac{1}{2}\varepsilon^{-2}\tau(\lambda_l(t_o(\varepsilon)) - \gamma_l t_o(\varepsilon)^2)\right) = O(\varepsilon^{2/3})$. В результате неравенство (4.10) при $t = t_o(\varepsilon)$ влечет

$$\left| 4\pi + O(\varepsilon^{2/3}) \right| \frac{\varepsilon^s}{(c_o^2 \varepsilon^{4/3} + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq \check{C}(\tau) \varepsilon^2$$

при всех достаточно малых ε . Это означает, что величина $\varepsilon^{s/3-2}$ равномерно ограничена, что неверно при $s < 6$. Полученное противоречие завершает доказательство. \square

Следующее утверждение показывает, что результат теоремы 3.6 также точен относительно сглаживающего множителя.

Теорема 4.4. Пусть $G(t, \varepsilon^{-2}\tau)$ – оператор (3.3). Пусть $N_0 = 0$ и $\mathcal{N}^{(q)} \neq 0$ при некотором $q \in \{1, \dots, p\}$. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leq s < 4$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau) > 0$, чтобы оценка (4.2) выполнялась при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Достаточно считать, что $2 \leq s < 4$. Используя тождество (4.3) и оценку (4.4), убеждаемся, что неравенство (4.2) равносильно оценке (4.5) с некоторой постоянной $\check{C}(\tau) > 0$.

Будем рассуждать от противного. Предположим, что при некоторых $\tau \neq 0$ и $2 \leq s < 4$ неравенство (4.5) выполнено при всех достаточно малых $|t|$ и ε . Согласно (1.24) и предложению 1.8, условия $N_0 = 0$ и $\mathcal{N}^{(q)} \neq 0$ при некотором $q \in \{1, \dots, p\}$ означают, что в разложениях (1.5) выполнено $\mu_l = 0$ при всех $l = 1, \dots, n$ и $\nu_j \neq 0$ хотя бы для одного j . Тогда

$$\lambda_j(t) = \gamma_j t^2 + \nu_j t^4 + O(|t|^5), \quad |t| \leq t_*. \quad (4.11)$$

Рассмотрим квадратичную форму оператора под знаком нормы в (4.5) на векторе ω_j . Поскольку в условиях теоремы $N_0 = 0$, то $(N\omega_j, \omega_j) = 0$ (см. замечание 1.3). Поэтому квадратичная форма, отвечающая интегральному члену в (4.5), равна нулю. Используя (4.6), (4.8) (для вектора ω_j), из (4.5) получаем, что для некоторой постоянной $\check{C}(\tau)$ выполнено

$$\left| e^{-i\varepsilon^{-2}\tau \lambda_j(t)} - e^{-i\varepsilon^{-2}\tau \gamma_j t^2} \right| \frac{\varepsilon^s}{(t^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq \check{C}(\tau) \varepsilon^2 \quad (4.12)$$

при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$. Перепишем (4.12) в виде

$$\left| 2 \sin \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{-2} \tau (\lambda_j(t) - \gamma_j t^2) \right) \right| \frac{\varepsilon^s}{(t^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq \check{C}(\tau) \varepsilon^2 \quad (4.13)$$

и рассмотрим значения

$$t = t_b(\varepsilon) = \pi^{1/4} |\nu_j \tau|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} = c_b \varepsilon^{1/2}.$$

Согласно (4.11) имеем $\frac{1}{2} \varepsilon^{-2} \tau (\lambda_j(t_b(\varepsilon)) - \gamma_j t_b(\varepsilon)^2) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\nu_j \tau) + O(\varepsilon^{1/2})$. Тогда из (4.13) вытекает, что величина

$$\frac{\varepsilon^{s-2}}{(t_b(\varepsilon)^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} = \frac{\varepsilon^{s/2-2}}{(c_b^2 + \varepsilon)^{s/2}}$$

равномерно ограничена при всех достаточно малых ε . Но это неверно при $s < 4$. Полученное противоречие завершает доказательство. \square

Из теоремы 4.4 непосредственно вытекает следствие, подтверждающее точность теоремы 3.5.

Следствие 4.5. Пусть $G_0(t, \varepsilon^{-2} \tau)$ – оператор (3.2). Пусть $N = 0$ и $\mathcal{N}^{(q)} \neq 0$ при некотором $q \in \{1, \dots, p\}$. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leq s < 4$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau) > 0$, чтобы оценка

$$\|G_0(t, \varepsilon^{-2} \tau)\| \frac{\varepsilon^s}{(t^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq C(\tau) \varepsilon^2 \quad (4.14)$$

выполнялась при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$.

Подтвердим теперь точность теоремы 3.7.

Теорема 4.6. Пусть $G_0(t, \varepsilon^{-2} \tau)$ – оператор (3.2). Пусть $N_0 \neq 0$. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leq s < 4$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau) > 0$, чтобы оценка

$$\|A(t)^{1/2} G_0(t, \varepsilon^{-2} \tau)\| \frac{\varepsilon^s}{(t^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq C(\tau) \varepsilon^2 \quad (4.15)$$

выполнялась при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Достаточно считать, что $2 \leq s < 4$. Используя тождество (4.3) и оценку (2.38), убеждаемся, что неравенство (4.15) равносильно оценке

$$\|A(t)^{1/2} \left(e^{-i\varepsilon^{-2}\tau A(t)} F(t) P - (I + tZ) e^{-i\varepsilon^{-2}\tau t^2 SP} P \right) \| \frac{\varepsilon^s}{(t^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq \tilde{C}(\tau) \varepsilon^2$$

с некоторой постоянной $\tilde{C}(\tau) > 0$. Тогда с учетом (1.26) найдется такая постоянная $\check{C}(\tau) > 0$, что

$$\left\| e^{-i\varepsilon^{-2}\tau A(t)} F(t) P - (I + tZ) e^{-i\varepsilon^{-2}\tau t^2 SP} P \right\| |t| \frac{\varepsilon^s}{(t^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq \check{C}(\tau) \varepsilon^2 \quad (4.16)$$

при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$.

Будем рассуждать от противного. Предположим, что при некоторых $\tau \neq 0$ и $2 \leq s < 4$ выполнено (4.16) при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$. В силу (1.24) условие $N_0 \neq 0$ означает, что $\mu_l \neq 0$ при некотором $l \in \{1, \dots, n\}$. Рассмотрим квадратичную форму оператора под знаком нормы в (4.16) на векторе ω_l . Применяя (4.6) и (4.8), из (4.16) получаем, что найдется постоянная $C'(\tau) > 0$ такая, что

$$\left| e^{-i\varepsilon^{-2}\tau \lambda_l(t)} - e^{-i\varepsilon^{-2}\tau \gamma_l t^2} \right| |t| \frac{\varepsilon^s}{(t^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq C'(\tau) \varepsilon^2$$

при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$. Перепишем последнее неравенство в виде

$$2 \left| \sin \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{-2} \tau (\lambda_l(t) - \gamma_l t^2) \right) \right| |t| \frac{\varepsilon^s}{(t^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq C'(\tau) \varepsilon^2. \quad (4.17)$$

Учтем, что $\lambda_l(t) - \gamma_l t^2 = \mu_l t^3 + O(t^4)$, и рассмотрим значения

$$t = t_{\dagger}(\varepsilon) = \pi^{1/3} |\tau \mu_l|^{-1/3} \varepsilon^{2/3} = c_{\dagger} \varepsilon^{2/3}.$$

При $t = t_{\dagger}(\varepsilon)$ неравенство (4.17) влечет

$$2 \left| \sin \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\mu_l \tau) + O(\varepsilon^{2/3}) \right) \right| c_{\dagger} \varepsilon^{2/3} \frac{\varepsilon^s}{(c_{\dagger}^2 \varepsilon^{4/3} + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq C'(\tau) \varepsilon^2$$

при всех достаточно малых ε . Это означает, что величина $\varepsilon^{s/3-4/3}$ равномерно ограничена, что неверно при $s < 4$. Полученное противоречие завершает доказательство. \square

Убедимся теперь в точности теорем 3.8 и 3.9.

Теорема 4.7. *Пусть $G_0(t, \varepsilon^{-2}\tau)$ – оператор (3.2). Пусть $N_0 = 0$ и $\mathcal{N}^{(q)} \neq 0$ при некотором $q \in \{1, \dots, p\}$. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leq s < 3$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau) > 0$, чтобы оценка (4.15) выполнялась при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$.*

Доказательство. Согласно (1.24) и предложению 1.8, условия $N_0 = 0$ и $\mathcal{N}^{(q)} \neq 0$ при некотором $q \in \{1, \dots, p\}$ означают, что в разложениях (1.5) выполнено $\mu_l = 0$ при всех $l = 1, \dots, n$ и $\nu_j \neq 0$ хотя бы для одного j . Тогда выполнено (4.11).

Рассуждая от противного, по аналогии с доказательством теоремы 4.6 получаем, что найдется постоянная $C'(\tau) > 0$ такая, что

$$2 \left| \sin \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{-2} \tau (\lambda_j(t) - \gamma_j t^2) \right) \right| |t| \frac{\varepsilon^s}{(t^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq C'(\tau) \varepsilon^2 \quad (4.18)$$

при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$. Учтем, что в силу (4.11) справедливо $\lambda_j(t) - \gamma_j t^2 = \nu_j t^4 + O(|t|^5)$, и рассмотрим значения

$$t = t_b(\varepsilon) = \pi^{1/4} |\nu_j \tau|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} = c_b \varepsilon^{1/2}.$$

При $t = t_b(\varepsilon)$ неравенство (4.18) влечет

$$2 \left| \sin \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\nu_j \tau) + O(\varepsilon^{1/2}) \right) \right| c_b \varepsilon^{1/2} \frac{\varepsilon^s}{(c_b^2 \varepsilon + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq C'(\tau) \varepsilon^2$$

при всех достаточно малых ε . Это означает, что величина $\varepsilon^{s/2-3/2}$ равномерно ограничена, что неверно при $s < 3$. Полученное противоречие завершает доказательство. \square

4.2. Точность результатов относительно времени. Покажем теперь, что полученные результаты точны относительно зависимости оценок от τ (при большом $|\tau|$). Следующая теорема, установленная в [D1, теорема 2.10], подтверждает точность теоремы 3.1 в общем случае.

Теорема 4.8 ([D1]). *Пусть $N_0 \neq 0$. Пусть $s \geq 3$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и оценка (4.1) выполняется при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$.*

Точность теорем 3.2 и 3.3 подтверждена в [D1, теорема 2.11].

Теорема 4.9 ([D1]). *Пусть $N_0 = 0$ и $\mathcal{N}^{(q)} \neq 0$ при некотором $q \in \{1, \dots, p\}$. Пусть $s \geq 2$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и оценка (4.1) выполняется при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$.*

Теперь мы подтвердим точность теоремы 3.4 относительно зависимости от τ .

Теорема 4.10. *Пусть $N_0 \neq 0$. Пусть $s \geq 6$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/\tau^2 = 0$ и оценка (4.2) выполняется при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$.*

Доказательство. Условие $N_0 \neq 0$ означает, что $\mu_l \neq 0$ при некотором l .

По аналогии с доказательством теоремы 4.3, рассуждая от противного, убеждаемся, что при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε выполнено неравенство (4.10) с некоторой положительной

функцией $\check{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \check{C}(\tau)/\tau^2 = 0$. Мнимая часть величины под знаком модуля в (4.10) равна $2 \sin^2 \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{-2} \tau (\lambda_l(t) - \gamma_l t^2) \right)$, а потому

$$2 \sin^2 \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{-2} \tau (\lambda_l(t) - \gamma_l t^2) \right) \frac{\varepsilon^s}{(t^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq \check{C}(\tau) \varepsilon^2 \quad (4.19)$$

при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε .

Используя разложение $\lambda_l(t) = \gamma_l t^2 + \mu_l t^3 + \dots$ и условие $\mu_l \neq 0$, будем считать t_* настолько малым, что

$$\frac{1}{2} |\mu_l| |t|^3 \leq |\lambda_l(t) - \gamma_l t^2| \leq \frac{3}{2} |\mu_l| |t|^3, \quad |t| \leq t_*. \quad (4.20)$$

Пусть $\tau \neq 0$, и пусть $\varepsilon \leq \varepsilon_* |\tau|^{1/2}$, $\varepsilon_* = \pi^{-1/2} |\mu_l|^{1/2} t_*^{3/2}$. Положим

$$t_\wedge = t_\wedge(\varepsilon, \tau) = c_\wedge |\tau|^{-1/3} \varepsilon^{2/3}, \quad c_\wedge = \pi^{1/3} |\mu_l|^{-1/3}. \quad (4.21)$$

Тогда $t_\wedge \leq t_*$ и в силу (4.20)

$$\frac{\pi}{4} \leq \left| \frac{\tau}{2\varepsilon^2} (\lambda_l(t_\wedge) - \gamma_l t_\wedge^2) \right| \leq \frac{3\pi}{4}. \quad (4.22)$$

Следовательно,

$$2 \sin^2 \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{-2} \tau (\lambda_l(t_\wedge) - \gamma_l t_\wedge^2) \right) \geq 1. \quad (4.23)$$

Теперь из (4.19) и (4.23) вытекает оценка

$$\frac{\varepsilon^s}{(t_\wedge(\varepsilon, \tau))^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq \check{C}(\tau) \varepsilon^2,$$

что равносильно неравенству

$$\frac{(|\tau| \varepsilon)^{s/3-2}}{(c_\wedge^2 + (|\tau| \varepsilon)^{2/3})^{s/2}} \leq \frac{\check{C}(\tau)}{\tau^2}. \quad (4.24)$$

Рассмотрим (4.24) на последовательностях $\tau = \tau_k = k$ и $\varepsilon = \varepsilon_k = k^{-1}$, считая $k \in \mathbb{N}$ достаточно большим. Тогда левая часть равна положительному числу $(c_\wedge^2 + 1)^{-s/2}$, а правая часть стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$ по нашему предположению. Мы пришли к противоречию. \square

Следующее утверждение показывает, что теорема 3.6 также точна относительно зависимости от τ .

Теорема 4.11. *Пусть $N_0 = 0$ и $\mathcal{N}^{(q)} \neq 0$ при некотором $q \in \{1, \dots, p\}$. Пусть $s \geq 4$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и оценка (4.2) выполняется при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$.*

Доказательство. Условия $N_0 = 0$ и $\mathcal{N}^{(q)} \neq 0$ при некотором $q \in \{1, \dots, p\}$ означают, что в разложениях (1.5) выполнено $\mu_l = 0$ при всех $l = 1, \dots, n$ и $\nu_j \neq 0$ хотя бы для одного j .

По аналогии с доказательством теоремы 4.10, рассуждая от противного, убеждаемся, что при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε выполнено неравенство

$$2 \sin^2 \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{-2} \tau (\lambda_j(t) - \gamma_j t^2) \right) \frac{\varepsilon^s}{(t^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq \check{C}(\tau) \varepsilon^2 \quad (4.25)$$

с некоторой положительной функцией $\check{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \check{C}(\tau)/|\tau| = 0$.

Используя разложение $\lambda_j(t) = \gamma_j t^2 + \nu_j t^4 + \dots$ и условие $\nu_j \neq 0$, будем считать t_* настолько малым, что

$$\frac{1}{2} |\nu_j| t^4 \leq |\lambda_j(t) - \gamma_j t^2| \leq \frac{3}{2} |\nu_j| t^4, \quad |t| \leq t_*. \quad (4.26)$$

Пусть $\tau \neq 0$, и пусть $\varepsilon \leq \varepsilon_* |\tau|^{1/2}$, $\varepsilon_* = \pi^{-1/2} |\nu_j|^{1/2} t_*^2$. Положим

$$t_\vee = t_\vee(\varepsilon, \tau) = c_\vee |\tau|^{-1/4} \varepsilon^{1/2}, \quad c_\vee = \pi^{1/4} |\nu_j|^{-1/4}. \quad (4.27)$$

Тогда $t_\vee \leq t_*$ и в силу (4.26)

$$\frac{\pi}{4} \leq \left| \frac{\tau}{2\varepsilon^2} (\lambda_j(t_\vee) - \gamma_j t_\vee^2) \right| \leq \frac{3\pi}{4}. \quad (4.28)$$

Следовательно,

$$2 \sin^2 \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{-2} \tau (\lambda_j(t_\vee) - \gamma_j t_\vee^2) \right) \geq 1. \quad (4.29)$$

Теперь из (4.25) и (4.29) вытекает оценка

$$\frac{\varepsilon^s}{(t_\vee(\varepsilon, \tau)^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq \check{C}(\tau) \varepsilon^2,$$

что равносильно неравенству

$$\frac{(|\tau|^{1/2} \varepsilon)^{s/2-2}}{(c_\vee^2 + |\tau|^{1/2} \varepsilon)^{s/2}} \leq \frac{\check{C}(\tau)}{|\tau|}. \quad (4.30)$$

Рассмотрим (4.30) на последовательностях $\tau = \tau_k = k^2$ и $\varepsilon = \varepsilon_k = k^{-1}$, считая $k \in \mathbb{N}$ достаточно большим. Тогда левая часть равна положительному числу $(c_\vee^2 + 1)^{-s/2}$, а правая часть стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$ по нашему предположению. Полученное противоречие завершает доказательство. \square

Из теоремы 4.11 непосредственно вытекает следствие, демонстрирующее точность теоремы 3.5.

Следствие 4.12. *Пусть $N = 0$ и $\mathcal{N}^{(q)} \neq 0$ при некотором $q \in \{1, \dots, p\}$. Пусть $s \geq 4$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и оценка (4.14) выполняется при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$.*

Подтвердим теперь точность теоремы 3.7 относительно зависимости от τ .

Теорема 4.13. *Пусть $N_0 \neq 0$. Пусть $s \geq 4$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и оценка (4.15) выполняется при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$.*

Доказательство. Условие $N_0 \neq 0$ означает, что $\mu_l \neq 0$ при некотором l .

По аналогии с доказательством теоремы 4.6, рассуждая от противного, убеждаемся, что при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε выполнено неравенство (4.17) с некоторой положительной функцией $C'(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C'(\tau)/|\tau| = 0$.

Используя разложение $\lambda_l(t) = \gamma_l t^2 + \mu_l t^3 + \dots$ и условие $\mu_l \neq 0$, будем считать t_* настолько малым, что выполнено (4.20) при $|t| \leq t_*$. Пусть $\tau \neq 0$, и пусть $\varepsilon \leq \varepsilon_* |\tau|^{1/2}$, $\varepsilon_* = \pi^{-1/2} |\mu_l|^{1/2} t_*^{3/2}$. Пусть $t_\wedge = t_\wedge(\varepsilon, \tau)$ определено в (4.21). Тогда $t_\wedge \leq t_*$ и выполнено (4.22). Следовательно,

$$2 \left| \sin \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{-2} \tau (\lambda_l(t_\wedge) - \gamma_l t_\wedge^2) \right) \right| \geq \sqrt{2}. \quad (4.31)$$

Теперь из (4.17) и (4.31) вытекает оценка

$$\sqrt{2} \frac{t_\wedge(\varepsilon, \tau) \varepsilon^s}{(t_\wedge(\varepsilon, \tau)^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq C'(\tau) \varepsilon^2,$$

что равносильно неравенству

$$\sqrt{2} c_\wedge \frac{(|\tau| \varepsilon)^{(s-4)/3}}{(c_\wedge^2 + (|\tau| \varepsilon)^{2/3})^{s/2}} \leq \frac{C'(\tau)}{|\tau|}. \quad (4.32)$$

Рассмотрим (4.32) на последовательностях $\tau = \tau_k = k$ и $\varepsilon = \varepsilon_k = k^{-1}$, считая $k \in \mathbb{N}$ достаточно большим. Тогда левая часть равна положительному числу $\sqrt{2} c_\wedge (c_\wedge^2 + 1)^{-s/2}$, а правая часть стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$ по нашему предположению. Мы пришли к противоречию. \square

Аналогичным образом мы подтверждим точность теорем 3.8 и 3.9.

Теорема 4.14. Пусть $N_0 = 0$ и $\mathcal{N}^{(q)} \neq 0$ при некотором $q \in \{1, \dots, p\}$. Пусть $s \geq 3$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и оценка (4.15) выполняется при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Условия $N_0 = 0$ и $\mathcal{N}^{(q)} \neq 0$ при некотором $q \in \{1, \dots, p\}$ означают, что в разложениях (1.5) выполнено $\mu_l = 0$ при всех $l = 1, \dots, n$ и $\nu_j \neq 0$ хотя бы для одного j .

По аналогии с доказательством теоремы 4.7, рассуждая от противного, убеждаемся, что при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε выполнено неравенство (4.18) с некоторой положительной функцией $C'(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C'(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$.

Используя разложение $\lambda_j(t) = \gamma_j t^2 + \nu_j t^4 + \dots$ и условие $\nu_j \neq 0$, будем считать t_\star настолько малым, что выполнено (4.26). Пусть $\tau \neq 0$ и $\varepsilon \leq \varepsilon_\star |\tau|^{1/2}$, $\varepsilon_\star = \pi^{-1/2} |\nu_j|^{1/2} t_\star^2$. Пусть $t_V(\varepsilon, \tau)$ определено в (4.27). Тогда $t_V \leq t_\star$ и выполнено (4.28). Следовательно,

$$2 \left| \sin \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{-2} \tau (\lambda_j(t_V) - \gamma_j t_V^2) \right) \right| \geq \sqrt{2}. \quad (4.33)$$

Теперь из (4.18) и (4.33) вытекает оценка

$$\sqrt{2} \frac{t_V(\varepsilon, \tau) \varepsilon^s}{(t_V(\varepsilon, \tau)^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq C'(\tau) \varepsilon^2,$$

что равносильно неравенству

$$\sqrt{2} c_V \frac{(|\tau|^{1/2} \varepsilon)^{(s-3)/2}}{(c_V^2 + |\tau|^{1/2} \varepsilon)^{s/2}} \leq \frac{C'(\tau)}{|\tau|^{1/2}}. \quad (4.34)$$

Рассмотрим (4.34) на последовательностях $\tau = \tau_k = k^2$ и $\varepsilon = \varepsilon_k = k^{-1}$, считая $k \in \mathbb{N}$ достаточно большим. Тогда левая часть равна положительному числу $\sqrt{2} c_V (c_V^2 + 1)^{-s/2}$, а правая часть стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$ по нашему предположению. Полученное противоречие завершает доказательство. \square

§ 5. ОПЕРАТОР ВИДА $A(t) = M^* \widehat{A}(t)M$

5.1. Операторное семейство вида $A(t) = M^* \widehat{A}(t)M$. Наряду с пространством \mathfrak{H} рассмотрим еще одно сепарабельное гильбертово пространство $\widehat{\mathfrak{H}}$. Пусть $\widehat{X}(t) = \widehat{X}_0 + t \widehat{X}_1 : \widehat{\mathfrak{H}} \rightarrow \mathfrak{H}_*$ — семейство операторов того же вида, что и $X(t)$, причем для $\widehat{X}(t)$ выполнены предположения п. 1.1. Пусть $M : \mathfrak{H} \rightarrow \widehat{\mathfrak{H}}$ — изоморфизм. Предположим, что

$$M \text{Dom } X_0 = \text{Dom } \widehat{X}_0, \quad X(t) = \widehat{X}(t)M,$$

а тогда и $X_0 = \widehat{X}_0 M$, $X_1 = \widehat{X}_1 M$. В $\widehat{\mathfrak{H}}$ введем семейство самосопряженных операторов $\widehat{A}(t) = \widehat{X}(t)^* \widehat{X}(t)$. Тогда, очевидно,

$$A(t) = M^* \widehat{A}(t)M. \quad (5.1)$$

Все объекты, отвечающие семейству $\widehat{A}(t)$, далее помечаются значком “ $\widehat{}$ ”. Отметим, что $\widehat{\mathfrak{N}} = M \mathfrak{N}$, $\widehat{n} = n$, $\widehat{\mathfrak{N}}_* = \mathfrak{N}_*$, $\widehat{n}_* = n_*$, $\widehat{P}_* = P_*$.

В пространстве $\widehat{\mathfrak{H}}$ рассмотрим положительно определенный оператор

$$Q := (MM^*)^{-1} : \widehat{\mathfrak{H}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{H}}.$$

Пусть $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}$ — блок оператора Q в подпространстве $\widehat{\mathfrak{N}}$, т.е.

$$Q_{\widehat{\mathfrak{N}}} = \widehat{P} Q |_{\widehat{\mathfrak{N}}} : \widehat{\mathfrak{N}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{N}}.$$

Очевидно, $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}$ — изоморфизм в $\widehat{\mathfrak{N}}$.

Как показано в [Su2, предложение 1.2], ортопроектор P в \mathfrak{H} на \mathfrak{N} и ортопроектор \widehat{P} в $\widehat{\mathfrak{H}}$ на $\widehat{\mathfrak{N}}$ связаны соотношением

$$P = M^{-1} (Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1} \widehat{P} (M^*)^{-1}. \quad (5.2)$$

Пусть $\widehat{S}: \widehat{\mathfrak{N}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{N}}$ — спектральный росток семейства $\widehat{A}(t)$ при $t = 0$, а S — росток семейства $A(t)$. В [BSu1, гл. 1, п. 1.5] установлено следующее тождество:

$$S = PM^* \widehat{S}M|_{\mathfrak{N}}. \quad (5.3)$$

Мы предполагаем, что для $A(t)$ выполнено условие 1.4. Тогда росток S (как и \widehat{S}) невырожден.

5.2. Операторы \widehat{Z}_Q и \widehat{N}_Q . Для операторного семейства $\widehat{A}(t)$ введем оператор \widehat{Z}_Q , действующий в $\widehat{\mathfrak{H}}$ и сопоставляющий элементу $\widehat{u} \in \widehat{\mathfrak{H}}$ решение $\widehat{\phi}_Q$ задачи

$$\widehat{X}_0^*(\widehat{X}_0\widehat{\phi}_Q + \widehat{X}_1\widehat{\omega}) = 0, \quad Q\widehat{\phi}_Q \perp \widehat{\mathfrak{N}},$$

где $\widehat{\omega} = \widehat{P}\widehat{u}$. Как показано в [BSu2, §6], оператор Z для семейства $A(t)$ и введенный оператор \widehat{Z}_Q связаны соотношением

$$\widehat{Z}_Q = MZM^{-1}\widehat{P}. \quad (5.4)$$

Введем оператор

$$\widehat{N}_Q := \widehat{Z}_Q^*\widehat{X}_1^*\widehat{R}\widehat{P} + (\widehat{R}\widehat{P})^*\widehat{X}_1\widehat{Z}_Q. \quad (5.5)$$

Согласно [BSu2, §6], оператор N для семейства $A(t)$ и введенный оператор (5.5) связаны соотношением

$$\widehat{N}_Q = \widehat{P}(M^*)^{-1}NM^{-1}\widehat{P}. \quad (5.6)$$

Отметим оценки

$$\|\widehat{X}_0\widehat{Z}_Q\| \leq \|X_0Z\|\|M^{-1}\| \leq \|X_1\|\|M^{-1}\|, \quad (5.7)$$

$$\|\widehat{Z}_Q\| \leq \|Z\|\|M\|\|M^{-1}\| \leq (8\delta)^{-1/2}\|X_1\|\|M\|\|M^{-1}\|, \quad (5.8)$$

$$\|\widehat{N}_Q\| \leq \|N\|\|M^{-1}\|^2 \leq (2\delta)^{-1/2}\|X_1\|^3\|M^{-1}\|^2, \quad (5.9)$$

вытекающие из (1.2), (1.23), (5.4) и (5.6).

Напомним, что $N = N_0 + N_*$ и определим операторы

$$\widehat{N}_{0,Q} = \widehat{P}(M^*)^{-1}N_0M^{-1}\widehat{P}, \quad \widehat{N}_{*,Q} = \widehat{P}(M^*)^{-1}N_*M^{-1}\widehat{P}. \quad (5.10)$$

Тогда $\widehat{N}_Q = \widehat{N}_{0,Q} + \widehat{N}_{*,Q}$.

Справедлива следующая лемма, доказанная в [Su6, лемма 5.1].

Лемма 5.1 ([Su6]). *Пусть выполнены предположения п. 5.1. Пусть операторы N и N_0 определены в (1.22) и (1.28), а операторы \widehat{N}_Q и $\widehat{N}_{0,Q}$ определены в (5.6) и (5.10). Тогда условие $N = 0$ равносильно равенству $\widehat{N}_Q = 0$. Условие $N_0 = 0$ равносильно равенству $\widehat{N}_{0,Q} = 0$.*

5.3. Операторы $\widehat{Z}_{2,Q}$, $\widehat{R}_{2,Q}$ и $\widehat{N}_{1,Q}^0$. Пусть $\widehat{\omega} \in \widehat{\mathfrak{N}}$ и пусть $\widehat{\psi}_Q = \widehat{\psi}_Q(\widehat{\omega}) \in \text{Dom } \widehat{X}_0$ — (слабое) решение задачи

$$\widehat{X}_0^*(\widehat{X}_0\widehat{\psi}_Q + \widehat{X}_1\widehat{Z}_Q\widehat{\omega}) = -\widehat{X}_1^*\widehat{R}\widehat{\omega} + QQ_{\widehat{\mathfrak{N}}}^{-1}\widehat{P}\widehat{X}_1^*\widehat{R}\widehat{\omega}, \quad Q\widehat{\psi}_Q \perp \widehat{\mathfrak{N}}.$$

Ясно, что правая часть уравнения принадлежит $\widehat{\mathfrak{N}}^\perp = \text{Ran } \widehat{X}_0^*$, а потому условие разрешимости выполнено. Определим оператор $\widehat{Z}_{2,Q} : \widehat{\mathfrak{H}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{H}}$ соотношением $\widehat{Z}_{2,Q}\widehat{u} = \widehat{\psi}_Q(\widehat{P}\widehat{u})$, $\widehat{u} \in \widehat{\mathfrak{H}}$. Далее, определим оператор $\widehat{R}_{2,Q} : \widehat{\mathfrak{N}} \rightarrow \mathfrak{H}_*$ формулой $\widehat{R}_{2,Q} := \widehat{X}_0\widehat{Z}_{2,Q} + \widehat{X}_1\widehat{Z}_Q$.

Наконец, определим оператор $\widehat{N}_{1,Q}^0$ соотношением

$$\widehat{N}_{1,Q}^0 = \widehat{Z}_{2,Q}^*\widehat{X}_1^*\widehat{R}\widehat{P} + (\widehat{R}\widehat{P})^*\widehat{X}_1\widehat{Z}_{2,Q} + \widehat{R}_{2,Q}^*\widehat{R}_{2,Q}\widehat{P}. \quad (5.11)$$

В [VSu1, п. 6.3] установлены следующие тождества:

$$\widehat{Z}_{2,Q} = MZ_2M^{-1}\widehat{P}, \quad \widehat{R}_{2,Q} = R_2M^{-1}|_{\widehat{\mathfrak{N}}},$$

$$\widehat{N}_{1,Q}^0 = \widehat{P}(M^*)^{-1}N_1^0M^{-1}\widehat{P}.$$

5.4. Связь операторов и коэффициентов степенных разложений. Укажем связь коэффициентов степенных разложений (1.5), (1.6) и операторов \widehat{S} и $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}$. (См. [BSu3, п. 1.6, 1.7].) Положим $\zeta_l := M\omega_l \in \widehat{\mathfrak{N}}$, $l = 1, \dots, n$. Тогда из (1.8) и (5.2), (5.3) видно, что

$$\widehat{S}\zeta_l = \gamma_l Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_l, \quad l = 1, \dots, n. \quad (5.12)$$

Набор ζ_1, \dots, ζ_n образует базис в $\widehat{\mathfrak{N}}$, ортонормированный с весом $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}$:

$$(Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_l, \zeta_j) = \delta_{lj}, \quad l, j = 1, \dots, n. \quad (5.13)$$

Операторы $\widehat{N}_{0,Q}$ и $\widehat{N}_{*,Q}$ можно описать в терминах коэффициентов степенных разложений (1.5) и (1.6); см. (1.20). Положим $\tilde{\zeta}_l := M\tilde{\omega}_l \in \widehat{\mathfrak{N}}$, $l = 1, \dots, n$. Тогда

$$\begin{aligned} \widehat{N}_{0,Q} &= \sum_{k=1}^n \mu_k(\cdot, Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_k) Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_k, \\ \widehat{N}_{*,Q} &= \sum_{k=1}^n \gamma_k \left((\cdot, Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\tilde{\zeta}_k) Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_k + (\cdot, Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_k) Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\tilde{\zeta}_k \right). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Замечание 5.2. В силу (5.13) и (5.14) выполнены соотношения

$$\begin{aligned} (\widehat{N}_{0,Q}\zeta_j, \zeta_l) &= \mu_l \delta_{jl}, \quad j, l = 1, \dots, n, \\ (\widehat{N}_{*,Q}\zeta_j, \zeta_l) &= \gamma_l (\zeta_j, Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\tilde{\zeta}_l) + \gamma_j (Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\tilde{\zeta}_j, \zeta_l), \quad j, l = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Соотношения (1.25) влечут

$$(Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\tilde{\zeta}_j, \zeta_l) + (\zeta_j, Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\tilde{\zeta}_l) = 0, \quad j, l = 1, \dots, n.$$

Отсюда видно, что

$$(\widehat{N}_{*,Q}\zeta_j, \zeta_l) = 0, \quad \text{если } \gamma_j = \gamma_l.$$

Перейдем теперь к обозначениям, принятным в п. 1.7. Напомним, что различные собственные значения ростка S обозначаются через γ_j° , $j = 1, \dots, p$, а соответствующие собственные подпространства через \mathfrak{N}_j . Векторы $\omega_i^{(j)}$, $i = 1, \dots, k_j$, образуют ортонормированный базис в \mathfrak{N}_j . Тогда те же числа γ_j° , $j = 1, \dots, p$ — это различные собственные значения задачи (5.12), а $M\mathfrak{N}_j = \text{Ker}(\widehat{S} - \gamma_j^\circ Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}) =: \widehat{\mathfrak{N}}_{j,Q}$ — соответствующие собственные подпространства. Векторы $\zeta_i^{(j)} = M\omega_i^{(j)}$, $i = 1, \dots, k_j$, образуют базис в $\widehat{\mathfrak{N}}_{j,Q}$, ортонормированный с весом $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}$. Через \mathcal{P}_j обозначим “косой” проектор на $\widehat{\mathfrak{N}}_{j,Q}$, ортогональный относительно скалярного произведения $(Q_{\widehat{\mathfrak{N}}} \cdot, \cdot)$, т. е.

$$\mathcal{P}_j = \sum_{i=1}^{k_j} (\cdot, Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_i^{(j)}) \zeta_i^{(j)}, \quad j = 1, \dots, p.$$

Легко видеть, что $\mathcal{P}_j = MP_jM^{-1}\widehat{P}$. Можно указать аналог соотношений (1.28). Используя (1.28), (5.6) и (5.10), нетрудно проверить равенства

$$\widehat{N}_{0,Q} = \sum_{j=1}^p \mathcal{P}_j^* \widehat{N}_Q \mathcal{P}_j, \quad \widehat{N}_{*,Q} = \sum_{\substack{1 \leq l, j \leq p: \\ l \neq j}} \mathcal{P}_l^* \widehat{N}_Q \mathcal{P}_j, \quad (5.15)$$

дающие инвариантные представления операторов $\widehat{N}_{0,Q}$, $\widehat{N}_{*,Q}$.

5.5. Коэффициенты ν_l . Коэффициенты ν_l из разложений (1.5) и векторы $\zeta_l = M\omega_l$, $l = 1, \dots, n$, являются собственными значениями и собственными элементами некоторой задачи; см. [D1, п. 3.4]. Нам понадобится описать эту задачу в случае, когда $\mu_l = 0$, $l = 1, \dots, n$, то есть, $\widehat{N}_{0,Q} = 0$. См. также [DSu2, предложение 5.3].

Предложение 5.3 ([D1]). *Пусть $\widehat{N}_{0,Q} = 0$. Пусть оператор $\widehat{N}_{1,Q}^0$ определен в (5.11). Пусть $\gamma_1^\circ, \dots, \gamma_p^\circ$ – различные собственные значения задачи (5.12), а k_1, \dots, k_p – их кратности. Пусть $\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q} = \text{Ker}(\widehat{S} - \gamma_q^\circ Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})$ и $\widehat{P}_{q,Q}$ – ортопроектор пространства $\widehat{\mathfrak{H}}$ на подпространство $\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}$, $q = 1, \dots, p$. Введем операторы $\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q)}$, $q = 1, \dots, p$: оператор $\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q)}$ действует в $\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}$ и задается выражением*

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q)} := & \widehat{P}_{q,Q} \left(\widehat{N}_{1,Q}^0 - \frac{1}{2} \widehat{Z}_Q^* Q \widehat{Z}_Q Q^{-1} \widehat{S} \widehat{P} - \frac{1}{2} \widehat{S} \widehat{P} Q^{-1} \widehat{Z}_Q^* Q \widehat{Z}_Q \right) \Big|_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}} \\ & + \sum_{j=1, \dots, p: j \neq q} (\gamma_q^\circ - \gamma_j^\circ)^{-1} \widehat{P}_{q,Q} \widehat{N}_Q \widehat{P}_{j,Q} Q^{-1} \widehat{P}_{j,Q} \widehat{N}_Q \Big|_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}}.\end{aligned}$$

Обозначим $i(q) = k_1 + \dots + k_{q-1} + 1$. Пусть ν_l , $l = 1, \dots, n$, – коэффициенты при t^4 из разложений (1.5), а ω_l – зародыша из разложений (1.6), и пусть $\zeta_l = M\omega_l$, $l = 1, \dots, n$. Обозначим $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}} = \widehat{P}_{q,Q} Q \Big|_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}}$. Тогда

$$\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q)} \zeta_l = \nu_l Q_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}} \zeta_l, \quad l = i(q), i(q) + 1, \dots, i(q) + k_q - 1.$$

§ 6. АППРОКСИМАЦИЯ ОКАЙМЛЕННОЙ ОПЕРАТОРНОЙ ЭКСПОНЕНТЫ ОПЕРАТОРА $A(t) = M^* \widehat{A}(t) M$

6.1. Аппроксимация окаймленной экспоненты по операторной норме в $\widehat{\mathfrak{H}}$. Пусть выполнены условия пункта 5.1. Получим аппроксимацию экспоненты $e^{-i\varepsilon^{-2}\tau A(t)}$, где $A(t)$ – семейство вида (5.1), в терминах ростка \widehat{S} оператора $\widehat{A}(t)$ и изоморфизма M . При этом оказывается удобным окаймить операторную экспоненту множителями M и M^{-1} .

Положим $M_0 := (Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1/2}$. Согласно [BSu5, предложение 3.1] справедливо тождество

$$M e^{-i\tau t^2 S P} P M^* = M_0 e^{-i\tau t^2 M_0 \widehat{S} M_0} M_0 \widehat{P}. \quad (6.1)$$

Домножая (6.1) справа на $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}} \widehat{P} = M_0^{-2} \widehat{P}$ и учитывая равенство $P M^* = M^{-1} Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}^{-1} \widehat{P}$ (см. (5.2)), получаем:

$$M e^{-i\tau t^2 S P} M^{-1} \widehat{P} = M_0 e^{-i\tau t^2 M_0 \widehat{S} M_0} M_0^{-1} \widehat{P}. \quad (6.2)$$

Введем обозначение

$$\mathcal{J}(t, \tau) := M e^{-i\tau A(t)} M^{-1} \widehat{P} - M_0 e^{-i\tau t^2 M_0 \widehat{S} M_0} M_0^{-1} \widehat{P}. \quad (6.3)$$

Лемма 6.1. *Пусть выполнены предположения пункта 5.1. Пусть $J(t, \tau)$ – оператор (2.2) и $\mathcal{J}(t, \tau)$ – оператор (6.3). Справедливы оценки*

$$\|\mathcal{J}(t, \tau)\| \leq \|M\| \|M^{-1}\| \|J(t, \tau)\|, \quad (6.4)$$

$$\|J(t, \tau)\| \leq \|M\| \|M^{-1}\| \|\mathcal{J}(t, \tau)\|. \quad (6.5)$$

Доказательство. Из (6.2) и (6.3) с учетом очевидного равенства $M^{-1} \widehat{P} = P M^{-1} \widehat{P}$ следует, что

$$\mathcal{J}(t, \tau) := M J(t, \tau) M^{-1} \widehat{P}. \quad (6.6)$$

Отсюда вытекает (6.4).

Очевидно, $J(t, \tau) = M^{-1} M J(t, \tau) P$. В силу очевидного равенства $P = M^{-1} M P = M^{-1} \widehat{P} M P$ и (6.6) имеем

$$J(t, \tau) = M^{-1} (M J(t, \tau) M^{-1} \widehat{P}) M P = M^{-1} \mathcal{J}(t, \tau) M P.$$

Отсюда вытекает неравенство (6.5). \square

С помощью оценки (6.4) из теоремы 3.1 выводится следующее утверждение; ср. [BSu5, теорема 3.2].

Теорема 6.2 ([BSu5]). *Пусть выполнены предположения пункта 5.1. Пусть $\mathcal{J}(t, \tau)$ — оператор (6.3). Тогда при $\varepsilon > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $|t| \leq t_0$ выполнена оценка*

$$\|\mathcal{J}(t, \varepsilon^{-2}\tau)\| \frac{\varepsilon^3}{(t^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \leq \|M\| \|M^{-1}\| (C_1 + C_2 |\tau|) \varepsilon.$$

Аналогично, из теорем 3.2 и 3.3 с помощью леммы 5.1 и леммы 6.1 выводятся следующие утверждения; см. [D1, теоремы 3.5 и 3.6].

Теорема 6.3 ([D1]). *Пусть выполнены предположения пункта 5.1. Пусть $\mathcal{J}(t, \tau)$ — оператор (6.3). Пусть оператор \widehat{N}_Q , определенный в (5.5), равен нулю: $\widehat{N}_Q = 0$. Тогда при $\varepsilon > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $|t| \leq t_0$ справедлива оценка*

$$\|\mathcal{J}(t, \varepsilon^{-2}\tau)\| \frac{\varepsilon^2}{t^2 + \varepsilon^2} \leq \|M\| \|M^{-1}\| (C_1 + C'_8 |\tau|^{1/2}) \varepsilon.$$

Теорема 6.4 ([D1]). *Пусть выполнены предположения пункта 5.1. Пусть $\mathcal{J}(t, \tau)$ — оператор (6.3). Пусть оператор $\widehat{N}_{0,Q}$, определенный в (5.15), равен нулю: $\widehat{N}_{0,Q} = 0$. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $|t| \leq t^{00}$ справедлива оценка*

$$\|\mathcal{J}(t, \varepsilon^{-2}\tau)\| \frac{\varepsilon^2}{t^2 + \varepsilon^2} \leq \|M\| \|M^{-1}\| (C_9 + C'_{10} |\tau|^{1/2}) \varepsilon.$$

6.2. Аппроксимация оператора $M e^{-i\varepsilon^{-2}\tau A(t)} M^{-1}$ с учетом корректора. Получим теперь приближение для окаймленной операторной экспоненты с учетом корректора. Положим

$$\mathcal{G}_0(t, \tau) := M e^{-i\tau A(t)} M^{-1} (I + t \widehat{Z}_Q) \widehat{P} - (I + t \widehat{Z}_Q) M_0 e^{-i\tau t^2 M_0 \widehat{S} M_0} M_0^{-1} \widehat{P}, \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(t, \tau) := M e^{-i\tau A(t)} M^{-1} (I + t \widehat{Z}_Q) \widehat{P} - (I + t \widehat{Z}_Q) M_0 e^{-i\tau t^2 M_0 \widehat{S} M_0} M_0^{-1} \widehat{P} \\ + i \int_0^\tau M_0 e^{-i(\tau - \tilde{\tau}) t^2 M_0 \widehat{S} M_0} M_0 t^3 \widehat{N}_Q M_0 e^{-i\tilde{\tau} t^2 M_0 \widehat{S} M_0} M_0^{-1} \widehat{P} d\tilde{\tau}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Лемма 6.5. *Пусть выполнены предположения пункта 5.1. Пусть $G_0(t, \tau)$, $G(t, \tau)$ — операторы (2.22), (2.23) соответственно. Пусть $\mathcal{G}_0(t, \tau)$, $\mathcal{G}(t, \tau)$ — операторы (6.7) и (6.8) соответственно. Справедливы оценки*

$$\|\mathcal{G}_0(t, \tau)\| \leq \|M\| \|M^{-1}\| \|G_0(t, \tau)\|, \quad (6.9)$$

$$\|G_0(t, \tau)\| \leq \|M\| \|M^{-1}\| \|\mathcal{G}_0(t, \tau)\|, \quad (6.10)$$

$$\|\mathcal{G}(t, \tau)\| \leq \|M\| \|M^{-1}\| \|G(t, \tau)\|, \quad (6.11)$$

$$\|G(t, \tau)\| \leq \|M\| \|M^{-1}\| \|\mathcal{G}(t, \tau)\|. \quad (6.12)$$

Доказательство. В силу (5.4) и (6.2) справедливо тождество

$$\mathcal{G}_0(t, \tau) = MG_0(t, \tau)M^{-1}\widehat{P}. \quad (6.13)$$

Отсюда вытекает неравенство (6.9).

С учетом очевидного равенства $P = M^{-1}\widehat{P}MP$ и (6.13) имеем

$$G_0(t, \tau) = M^{-1}MG_0(t, \tau)P = M^{-1}(MG_0(t, \tau)M^{-1}\widehat{P})MP = M^{-1}\mathcal{G}_0(t, \tau)MP. \quad (6.14)$$

Отсюда вытекает оценка (6.10).

Покажем теперь, что

$$\mathcal{G}(t, \tau) = MG(t, \tau)M^{-1}\widehat{P}. \quad (6.15)$$

Действительно, в силу очевидного равенства $N = PN$ и соотношений (5.2), (5.6), (6.2) имеем

$$\begin{aligned} & M \left(i \int_0^\tau e^{-i(\tau-\tilde{\tau})t^2 SP} t^3 N e^{-i\tilde{\tau}t^2 SP} P d\tilde{\tau} \right) M^{-1} \hat{P} \\ &= it^3 \int_0^\tau \left(M e^{-i(\tau-\tilde{\tau})t^2 SP} M^{-1} \hat{P} \right) (Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1} \hat{P} (M^*)^{-1} NM^{-1} \left(M e^{-i\tilde{\tau}t^2 SP} M^{-1} \hat{P} \right) d\tilde{\tau} \\ &= i \int_0^\tau M_0 e^{-i(\tau-\tilde{\tau})t^2 M_0 \widehat{S} M_0} M_0^{-1} (Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1} t^3 \widehat{N}_Q M_0 e^{-i\tilde{\tau}t^2 M_0 \widehat{S} M_0} M_0^{-1} \hat{P} d\tilde{\tau}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (6.13) с учетом выражений для $G(t, \tau)$ и $\mathcal{G}(t, \tau)$ получаем (6.15).

Оценка (6.11) прямо вытекает из (6.15).

Неравенство (6.12) выводится из (6.15) по аналогии с (6.14). \square

Теорема 6.6. Пусть выполнены предположения пункта 5.1. Пусть $\mathcal{G}(t, \tau)$ — оператор (6.8). Тогда при $\varepsilon > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $|t| \leq t_0$ справедлива оценка

$$\|\mathcal{G}(t, \varepsilon^{-2}\tau)\| \frac{\varepsilon^6}{(t^2 + \varepsilon^2)^3} \leq \|M\| \|M^{-1}\| (C_{12} + C_{13}|\tau| + C_{14}\tau^2)\varepsilon^2. \quad (6.16)$$

Доказательство. Оценка (6.16) вытекает непосредственно из (3.4) и (6.11). \square

Аналогичным образом из теорем 3.5, 3.6 с помощью леммы 5.1 и леммы 6.5 выводятся следующие две теоремы.

Теорема 6.7. Пусть выполнены предположения пункта 5.1. Пусть $\mathcal{G}_0(t, \tau)$ — оператор (6.7). Пусть оператор \widehat{N}_Q , определенный в (5.5), равен нулю: $\widehat{N}_Q = 0$. Тогда при $\varepsilon > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $|t| \leq t_0$ справедлива оценка

$$\|\mathcal{G}_0(t, \varepsilon^{-2}\tau)\| \frac{\varepsilon^4}{(t^2 + \varepsilon^2)^2} \leq \|M\| \|M^{-1}\| (C_{12} + C_{11}|\tau|)\varepsilon^2.$$

Теорема 6.8. Пусть выполнены предположения пункта 5.1. Пусть $\mathcal{G}(t, \tau)$ — оператор (6.8). Пусть оператор $\widehat{N}_{0,Q}$, определенный в (5.15), равен нулю: $\widehat{N}_{0,Q} = 0$. Тогда при $\varepsilon > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $|t| \leq t^{00}$ выполнена оценка

$$\|\mathcal{G}(t, \varepsilon^{-2}\tau)\| \frac{\varepsilon^4}{(t^2 + \varepsilon^2)^2} \leq \|M\| \|M^{-1}\| (C_{15} + C_{16}|\tau|)\varepsilon^2.$$

6.3. **Аппроксимация оператора $M e^{-i\varepsilon^{-2}\tau A(t)} M^{-1}$ в энергетической норме.** Убедимся, что

$$\|A(t)^{1/2} G_0(t, \tau)\| = \|\widehat{A}(t)^{1/2} \mathcal{G}_0(t, \tau) M P\|. \quad (6.17)$$

Действительно, учитывая очевидные равенства $G_0(t, \tau) = G_0(t, \tau)P$, $P = M^{-1}MP = M^{-1}\widehat{P}MP$, а также тождество (6.13), имеем

$$\begin{aligned} \|A(t)^{1/2} G_0(t, \tau)\| &= \|(X_0 + tX_1)G_0(t, \tau)P\| \\ &= \|(\widehat{X}_0 + t\widehat{X}_1)MG_0(t, \tau)M^{-1}\widehat{P}MP\| = \|\widehat{A}(t)^{1/2} \mathcal{G}_0(t, \tau) M P\|. \end{aligned}$$

Лемма 6.9. Пусть выполнены предположения пункта 5.1. Пусть $G_0(t, \tau)$ — оператор (2.22) и $\mathcal{G}_0(t, \tau)$ — оператор (6.7). Справедливы оценки

$$\|\widehat{A}(t)^{1/2} \mathcal{G}_0(t, \tau)\| \leq \|M^{-1}\| \|A(t)^{1/2} G_0(t, \tau)\|, \quad (6.18)$$

$$\|A(t)^{1/2} G_0(t, \tau)\| \leq \|M\| \|\widehat{A}(t)^{1/2} \mathcal{G}_0(t, \tau)\|. \quad (6.19)$$

Доказательство. Оценка (6.19) непосредственно вытекает из (6.17).

Используя очевидные равенства $\mathcal{G}_0(t, \tau) = \mathcal{G}_0(t, \tau)\hat{P}$, $\hat{P} = MM^{-1}\hat{P} = MPM^{-1}\hat{P}$, получаем

$$\|\hat{A}(t)^{1/2}\mathcal{G}_0(t, \tau)\| = \|\hat{A}(t)^{1/2}\mathcal{G}_0(t, \tau)MPM^{-1}\hat{P}\| \leq \|M^{-1}\| \|\hat{A}(t)^{1/2}\mathcal{G}_0(t, \tau)MP\|.$$

Вместе с (6.17) это влечет оценку (6.18). \square

Теорема 6.10. Пусть выполнены предположения пункта 5.1. Пусть $\mathcal{G}_0(t, \tau)$ — оператор (6.7). Тогда при $\varepsilon > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $|t| \leq t_0$ справедлива оценка

$$\|\hat{A}(t)^{1/2}\mathcal{G}_0(t, \varepsilon^{-2}\tau)\| \frac{\varepsilon^4}{(t^2 + \varepsilon^2)^2} \leq \|M^{-1}\| (C_{19} + C_{20}|\tau|)\varepsilon^2. \quad (6.20)$$

Доказательство. Оценка (6.20) вытекает непосредственно из (3.5) и (6.18). \square

Аналогичным образом из теорем 3.8, 3.9 с помощью леммы 5.1 и леммы 6.9 выводятся следующие две теоремы.

Теорема 6.11. Пусть выполнены предположения пункта 5.1. Пусть $\mathcal{G}_0(t, \tau)$ — оператор (6.7). Пусть оператор \hat{N}_Q , определенный в (5.5), равен нулю: $\hat{N}_Q = 0$. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $|t| \leq t_0$ справедлива оценка

$$\|\hat{A}(t)^{1/2}\mathcal{G}_0(t, \varepsilon^{-2}\tau)\| \frac{\varepsilon^3}{(t^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \leq \|M^{-1}\| (C_{19} + C_{24}|\tau|^{1/2})\varepsilon^2.$$

Теорема 6.12. Пусть выполнены предположения пункта 5.1. Пусть $\mathcal{G}_0(t, \tau)$ — оператор (6.7). Пусть оператор $\hat{N}_{0,Q}$, определенный в (5.15), равен нулю: $\hat{N}_{0,Q} = 0$. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $|t| \leq t^{00}$ выполнена оценка

$$\|\hat{A}(t)^{1/2}\mathcal{G}_0(t, \varepsilon^{-2}\tau)\| \frac{\varepsilon^3}{(t^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \leq \|M^{-1}\| (C_{22} + C_{25}|\tau|^{1/2})\varepsilon^2.$$

§ 7. Подтверждение точности результатов § 6

7.1. Подтверждение точности результатов относительно сглаживающего множителя. Следующая теорема вытекает из теоремы 4.1 с помощью оценки (6.5). Она подтверждает точность теоремы 6.2 в общем случае; см. [Su6, теорема 5.10].

Теорема 7.1 ([Su6]). Пусть выполнены предположения пункта 5.1. Пусть $\mathcal{J}(t, \tau)$ — оператор (6.3). Пусть $\hat{N}_{0,Q} \neq 0$. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leq s < 3$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau) > 0$, чтобы оценка

$$\|\mathcal{J}(t, \varepsilon^{-2}\tau)\| \frac{\varepsilon^s}{(t^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq C(\tau)\varepsilon \quad (7.1)$$

выполнялась при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$.

Следующий результат выводится из теоремы 4.2 и подтверждает точность теорем 6.3 и 6.4; см. [D1, теорема 3.9].

Теорема 7.2 ([D1]). Пусть выполнены предположения пункта 5.1. Пусть $\hat{N}_{0,Q} = 0$ и $\hat{N}_Q^{(q)} \neq 0$ при некотором q (то есть, $\nu_l \neq 0$ при некотором l). Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leq s < 2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau) > 0$, чтобы оценка (7.1) выполнялась при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$.

Теперь подтвердим точность теоремы 6.6.

Теорема 7.3. Пусть выполнены предположения пункта 5.1. Пусть $\mathcal{G}(t, \tau)$ — оператор (6.8). Пусть $\hat{N}_{0,Q} \neq 0$. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leq s < 6$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau) > 0$, чтобы оценка

$$\|\mathcal{G}(t, \varepsilon^{-2}\tau)\| \frac{\varepsilon^s}{(t^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq C(\tau)\varepsilon^2 \quad (7.2)$$

выполнялась при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$.

Доказательство. В силу леммы 5.1 условие $\widehat{N}_{0,Q} \neq 0$ равносильно условию $N_0 \neq 0$.

Доказательство проведем от противного. Предположим, что при некоторых $0 \leq s < 6$ и $\tau \neq 0$ выполнено неравенство (7.2) при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$. Тогда в силу (6.12) выполнено также и неравенство (4.2). Но это противоречит утверждению теоремы 4.3. \square

Покажем, что результаты теорем 6.7, 6.8 нельзя улучшить в общей ситуации.

Теорема 7.4. *Пусть выполнены условия пункта 5.1. Пусть $\mathcal{G}(t, \tau)$ – оператор (6.8). Пусть $\widehat{N}_{0,Q} = 0$ и $\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q)} \neq 0$ при некотором q (то есть, $\nu_l \neq 0$ при некотором l). Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leq s < 4$. Не существует такой постоянной $C(\tau) > 0$, чтобы оценка (7.2) выполнялась при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$.*

Доказательство. В силу леммы 5.1 условие $\widehat{N}_{0,Q} = 0$ равносильно условию $N_0 = 0$. Далее, согласно предложению 5.3 условие $\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q)} \neq 0$ при некотором q означает, что $\nu_l \neq 0$ при некотором $l \in \{i(q), \dots, i(q) + k_q - 1\}$. В силу предложения 1.8 отсюда следует, что $\mathcal{N}^{(q)} \neq 0$. Таким образом, выполнены условия теоремы 4.4.

Рассуждая от противного и применяя (6.12), получаем неравенство вида (4.2) с некоторым $s < 4$, а это противоречит утверждению теоремы 4.4. \square

Убедимся в точности теоремы 6.10.

Теорема 7.5. *Пусть выполнены предположения пункта 5.1. Пусть $\mathcal{G}_0(t, \tau)$ – оператор (6.7). Пусть $\widehat{N}_{0,Q} \neq 0$. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leq s < 4$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau) > 0$, чтобы оценка*

$$\left\| \widehat{A}(t)^{1/2} \mathcal{G}_0(t, \varepsilon^{-2}\tau) \right\| \frac{\varepsilon^s}{(t^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq C(\tau) \varepsilon^2 \quad (7.3)$$

выполнялась при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$.

Доказательство. В силу леммы 5.1 условие $\widehat{N}_{0,Q} \neq 0$ равносильно условию $N_0 \neq 0$.

Рассуждая от противного и применяя (6.19), получаем, что выполнено неравенство (4.15) при некоторых $s < 4$, $\tau \neq 0$ и всех достаточно малых $|t|$ и ε . Но это противоречит утверждению теоремы 4.6. \square

Покажем, наконец, что результаты теорем 6.11, 6.12 нельзя улучшить.

Теорема 7.6. *Пусть выполнены условия пункта 5.1. Пусть $\mathcal{G}_0(t, \tau)$ – оператор (6.7). Пусть $\widehat{N}_{0,Q} = 0$ и $\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q)} \neq 0$ при некотором q (то есть, $\nu_l \neq 0$ при некотором l). Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leq s < 3$. Не существует такой постоянной $C(\tau) > 0$, чтобы оценка (7.3) выполнялась при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$.*

Доказательство. В условиях теоремы выполнены также условия теоремы 4.7.

Рассуждая от противного и применяя (6.19), получаем, что выполнено неравенство (4.15) при некоторых $s < 3$, $\tau \neq 0$ и всех достаточно малых $|t|$ и ε . Но это противоречит утверждению теоремы 4.7. \square

7.2. Подтверждение точности результатов относительно времени. Следующая теорема вытекает из теоремы 4.8 с помощью оценки (6.5). Она подтверждает точность теоремы 6.2 в отношении зависимости оценок от τ (при большом $|\tau|$); см. [D1, теорема 3.10].

Теорема 7.7 ([D1]). *Пусть выполнены предположения пункта 5.1. Пусть $\mathcal{J}(t, \tau)$ – оператор (6.3). Пусть $\widehat{N}_{0,Q} \neq 0$. Пусть $s \geq 3$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (7.1) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε .*

Аналогично, теорема 4.9 с помощью оценки (6.5) влечет следующий результат, демонстрирующий точность теорем 6.3 и 6.4. См. [D1, теорема 3.11].

Теорема 7.8 ([D1]). Пусть выполнены предположения пункта 5.1. Пусть $\mathcal{J}(t, \tau)$ — оператор (6.3). Пусть $\widehat{N}_{0,Q} = 0$ и $\widehat{N}_Q^{(q)} \neq 0$ при некотором q (то есть, $\nu_l \neq 0$ при некотором l). Пусть $s \geq 2$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (7.1) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε .

Подтвердим теперь точность теоремы 6.6. Следующее утверждение вытекает из теоремы 4.10 с помощью оценки (6.12).

Теорема 7.9. Пусть выполнены предположения пункта 5.1. Пусть $\mathcal{G}(t, \tau)$ — оператор (6.8). Пусть $\widehat{N}_{0,Q} \neq 0$. Пусть $s \geq 6$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/\tau^2 = 0$ и выполнена оценка (7.2) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε .

Аналогично, из теоремы 4.11 и оценки (6.12) вытекает следующий результат, показывающий, что теоремы 6.7, 6.8 точны.

Теорема 7.10. Пусть выполнены предположения пункта 5.1. Пусть $\mathcal{G}(t, \tau)$ — оператор (6.8). Пусть $\widehat{N}_{0,Q} = 0$ и $\widehat{N}_Q^{(q)} \neq 0$ при некотором q (то есть, $\nu_l \neq 0$ при некотором l). Пусть $s \geq 4$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (7.2) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε .

Точность теоремы 6.10 вытекает из теоремы 4.13 и оценки (6.19).

Теорема 7.11. Пусть выполнены предположения пункта 5.1. Пусть $\mathcal{G}_0(t, \tau)$ — оператор (6.7). Пусть $\widehat{N}_{0,Q} \neq 0$. Пусть $s \geq 4$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (7.3) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε .

Наконец, применение теоремы 4.14 и оценки (6.19) позволяет убедиться в точности теорем 6.11, 6.12.

Теорема 7.12. Пусть выполнены предположения пункта 5.1. Пусть $\mathcal{G}_0(t, \tau)$ — оператор (6.7). Пусть $\widehat{N}_{0,Q} = 0$ и $\widehat{N}_Q^{(q)} \neq 0$ при некотором q (то есть, $\nu_l \neq 0$ при некотором l). Пусть $s \geq 3$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (7.3) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и ε .

ГЛАВА 2. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$

§ 8. КЛАСС ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$

8.1. Решетки. Ряд Фурье. Пусть Γ — решетка в \mathbb{R}^d , порожденная базисом $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d$:

$$\Gamma = \left\{ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{a} = \sum_{j=1}^d n_j \mathbf{a}_j, n_j \in \mathbb{Z} \right\},$$

и пусть Ω — элементарная ячейка решетки Γ :

$$\Omega := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{x} = \sum_{j=1}^d \xi_j \mathbf{a}_j, 0 < \xi_j < 1 \right\}.$$

Базис $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d$, двойственный по отношению к $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d$, определяется из соотношений $\langle \mathbf{b}_l, \mathbf{a}_j \rangle = 2\pi\delta_{lj}$. Этот базис порождает решетку $\tilde{\Gamma}$, двойственную к решетке Γ :

$$\tilde{\Gamma} = \left\{ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{b} = \sum_{j=1}^d m_j \mathbf{b}_j, m_j \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Обозначим через $\tilde{\Omega}$ центральную зону Бриллюэна решетки $\tilde{\Gamma}$:

$$\tilde{\Omega} = \left\{ \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{k}| < |\mathbf{k} - \mathbf{b}|, 0 \neq \mathbf{b} \in \tilde{\Gamma} \right\}. \quad (8.1)$$

Будем пользоваться обозначениями $|\Omega| = \text{mes } \Omega$, $|\tilde{\Omega}| = \text{mes } \tilde{\Omega}$ и отметим, что $|\Omega||\tilde{\Omega}| = (2\pi)^d$. Пусть r_0 — радиус шара, *вписанного* в $\text{clos } \tilde{\Omega}$, и пусть $r_1 := \max_{\mathbf{k} \in \partial\tilde{\Omega}} |\mathbf{k}|$. Отметим, что

$$2r_0 = \min |\mathbf{b}|, \quad 0 \neq \mathbf{b} \in \tilde{\Gamma}. \quad (8.2)$$

С решеткой Γ связано дискретное преобразование Фурье

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = |\Omega|^{-1/2} \sum_{\mathbf{b} \in \tilde{\Gamma}} \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}} e^{i\langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (8.3)$$

которое унитарно отображает $l_2(\tilde{\Gamma}; \mathbb{C}^n)$ на $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$:

$$\int_{\Omega} |\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{b} \in \tilde{\Gamma}} |\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}}|^2. \quad (8.4)$$

Через $\tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$ обозначается подпространство тех функций из $H^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$, Γ -периодическое продолжение которых на \mathbb{R}^d принадлежит $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Имеет место равенство

$$\int_{\Omega} |(\mathbf{D} + \mathbf{k})\mathbf{v}|^2 d\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{b} \in \tilde{\Gamma}} |\mathbf{b} + \mathbf{k}|^2 |\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}}|^2, \quad \mathbf{v} \in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d, \quad (8.5)$$

причем сходимость ряда в правой части (8.5) равносильна включению $\mathbf{v} \in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$. Из (8.1), (8.4) и (8.5) следует оценка

$$\int_{\Omega} |(\mathbf{D} + \mathbf{k})\mathbf{v}|^2 d\mathbf{x} \geq \sum_{\mathbf{b} \in \tilde{\Gamma}} |\mathbf{k}|^2 |\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}}|^2 = |\mathbf{k}|^2 \int_{\Omega} |\mathbf{v}|^2 d\mathbf{x}, \quad \mathbf{v} \in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n), \quad \mathbf{k} \in \tilde{\Omega}. \quad (8.6)$$

8.2. Преобразование Гельфанда. Преобразование Гельфанды \mathcal{U} первоначально определяется на функциях из класса Шварца $\mathbf{v} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ формулой:

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = (\mathcal{U}\mathbf{v})(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = |\tilde{\Omega}|^{-1/2} \sum_{\mathbf{a} \in \Gamma} e^{-i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} + \mathbf{a} \rangle} \mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{a}), \quad \mathbf{v} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mathbf{k} \in \tilde{\Omega}.$$

При этом

$$\int_{\tilde{\Omega}} \int_{\Omega} |\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} d\mathbf{k} = \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$$

и \mathcal{U} продолжается по непрерывности до унитарного отображения:

$$\mathcal{U} : L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \rightarrow \int_{\tilde{\Omega}} \oplus L_2(\Omega; \mathbb{C}^n) d\mathbf{k} =: \mathcal{K}.$$

Включение $\mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ равносильно тому, что $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \cdot) \in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$ при п.в. $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и

$$\int_{\tilde{\Omega}} \int_{\Omega} (|(\mathbf{D} + \mathbf{k})\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \mathbf{x})|^2 + |\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \mathbf{x})|^2) d\mathbf{x} d\mathbf{k} < \infty.$$

Оператор умножения на ограниченную периодическую функцию в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ под действием \mathcal{U} переходит в умножение на ту же функцию в слоях прямого интеграла \mathcal{K} . Действие оператора $b(\mathbf{D})$ на $\mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ переходит в послойное действие оператора $b(\mathbf{D} + \mathbf{k})$ на $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \cdot) \in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$.

8.3. Факторизованные операторы \mathcal{A} второго порядка. Пусть $b(\mathbf{D}) = \sum_{l=1}^d b_l D_l$, где b_l — постоянные $(m \times n)$ -матрицы (вообще говоря, с комплексными элементами). Предполагается, что $m \geq n$. Рассмотрим символ $b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{l=1}^d b_l \xi_l$ и предположим, что $\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi}) = n$, $0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$. Это равносильно тому, что для некоторых $\alpha_0, \alpha_1 > 0$ выполнены неравенства:

$$\alpha_0 \mathbf{1}_n \leq b(\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta}) \leq \alpha_1 \mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad 0 < \alpha_0 \leq \alpha_1 < \infty. \quad (8.7)$$

Отметим, что из (8.7) вытекают оценки для норм матриц b_l :

$$|b_l| \leq \alpha_1^{1/2}, \quad l = 1, \dots, d. \quad (8.8)$$

Пусть $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, — Г-периодическая $(n \times n)$ -матричнозначная функция и $h(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, — Г-периодическая $(m \times m)$ -матричнозначная функция, причем

$$f, f^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d); \quad h, h^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d). \quad (8.9)$$

Рассмотрим ДО

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= hb(\mathbf{D})f: L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m), \\ \operatorname{Dom} \mathcal{X} &= \left\{ \mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n): f\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \right\}. \end{aligned}$$

Оператор \mathcal{X} замкнут. Самосопряженный оператор $\mathcal{A} = \mathcal{X}^* \mathcal{X}$ в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ порождается замкнутой квадратичной формой $\mathfrak{a}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \|\mathcal{X}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2$, $\mathbf{u} \in \operatorname{Dom} \mathcal{X}$. Формально,

$$\mathcal{A} = f(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f(\mathbf{x}), \quad (8.10)$$

где $g(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})^* h(\mathbf{x})$. Используя преобразование Фурье и (8.7), (8.9), легко проверить оценки

$$\alpha_0 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1} \|\mathbf{D}(f\mathbf{u})\|_{L_2}^2 \leq \mathfrak{a}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leq \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|\mathbf{D}(f\mathbf{u})\|_{L_2}^2, \quad \mathbf{u} \in \operatorname{Dom} \mathcal{X}. \quad (8.11)$$

8.4. Операторы $\mathcal{A}(\mathbf{k})$. Положим

$$\mathfrak{H} = L_2(\Omega; \mathbb{C}^n), \quad \mathfrak{H}_* = L_2(\Omega; \mathbb{C}^m) \quad (8.12)$$

и рассмотрим замкнутый оператор $\mathcal{X}(\mathbf{k}): \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_*$, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$, заданный соотношениями

$$\mathcal{X}(\mathbf{k}) = hb(\mathbf{D} + \mathbf{k})f, \quad \operatorname{Dom} \mathcal{X}(\mathbf{k}) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathfrak{H}: f\mathbf{u} \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n) \right\} =: \mathfrak{d}.$$

Самосопряженный оператор $\mathcal{A}(\mathbf{k}) = \mathcal{X}(\mathbf{k})^* \mathcal{X}(\mathbf{k}): \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$ порождается замкнутой квадратичной формой

$$\mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|_{\mathfrak{H}_*}^2, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{d}.$$

Формально можно записать

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}) = f(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D} + \mathbf{k}) f(\mathbf{x}).$$

Используя разложение функции $\mathbf{v} = f\mathbf{u}$ в ряд Фурье (8.3) и условия (8.7), (8.9), легко проверить оценки

$$\alpha_0 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1} \|(\mathbf{D} + \mathbf{k})f\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leq \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|(\mathbf{D} + \mathbf{k})f\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{d}. \quad (8.13)$$

Из нижней оценки (8.13) и из (8.6) вытекает, что

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}) \geq c_* |\mathbf{k}|^2 I, \quad \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}, \quad (8.14)$$

$$c_* = \alpha_0 \|f^{-1}\|_{L_\infty}^{-2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1}. \quad (8.15)$$

Положим

$$\mathfrak{N} := \operatorname{Ker} \mathcal{A}(0) = \operatorname{Ker} \mathcal{X}(0). \quad (8.16)$$

Соотношения (8.13) при $\mathbf{k} = 0$ показывают, что

$$\mathfrak{N} = \left\{ \mathbf{u} \in L_2(\Omega; \mathbb{C}^n): f\mathbf{u} = \mathbf{c} \in \mathbb{C}^m \right\}, \quad \dim \mathfrak{N} = n. \quad (8.17)$$

Как видно из (8.2) и (8.5) при $\mathbf{k} = 0$, для функции $\mathbf{v} \in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$ такой, что $\int_{\Omega} \mathbf{v} d\mathbf{x} = 0$, т.е. $\hat{\mathbf{v}}_0 = 0$, выполнено

$$\|\mathbf{D}\mathbf{v}\|_{L_2(\Omega)}^2 \geq 4r_0^2 \|\mathbf{v}\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad \mathbf{v} \in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n), \quad \int_{\Omega} \mathbf{v} d\mathbf{x} = 0. \quad (8.18)$$

Из (8.18) и из нижней оценки (8.13) при $\mathbf{k} = 0$ следует, что расстояние d^0 от точки $\lambda_0 = 0$ до остального спектра оператора $\mathcal{A}(0)$ подчинено оценке

$$d^0 \geq 4c_* r_0^2. \quad (8.19)$$

8.5. Зонные функции. Обозначим через $E_j(\mathbf{k})$, $j \in \mathbb{N}$, последовательные (с учетом кратностей) собственные значения оператора $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ (зонные функции):

$$E_1(\mathbf{k}) \leq E_2(\mathbf{k}) \leq \dots \leq E_j(\mathbf{k}) \leq \dots, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d.$$

Зонные функции $E_j(\mathbf{k})$ непрерывны и $\tilde{\Gamma}$ -периодичны. Как показано в [BSu1, гл. 2, п. 2.2] (на основании вариационных соображений), зонные функции удовлетворяют следующим оценкам:

$$\begin{aligned} E_j(\mathbf{k}) &\geq c_* |\mathbf{k}|^2, \quad \mathbf{k} \in \text{clos } \tilde{\Omega}, \quad j = 1, \dots, n, \\ E_{n+1}(\mathbf{k}) &\geq c_* r_0^2, \quad \mathbf{k} \in \text{clos } \tilde{\Omega}, \\ E_{n+1}(0) &\geq 4c_* r_0^2. \end{aligned} \quad (8.20)$$

8.6. Прямой интеграл для оператора \mathcal{A} . Под действием преобразования Гельфанда \mathcal{U} оператор \mathcal{A} раскладывается в прямой интеграл по операторам $\mathcal{A}(\mathbf{k})$:

$$\mathcal{U}\mathcal{A}\mathcal{U}^{-1} = \int_{\tilde{\Omega}} \oplus \mathcal{A}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (8.21)$$

Это означает следующее. Пусть $\mathbf{u} \in \text{Dom } \mathcal{X}$, тогда

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \cdot) \in \mathfrak{d} \quad \text{при п.в. } \mathbf{k} \in \tilde{\Omega}, \quad (8.22)$$

$$\mathfrak{a}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \int_{\tilde{\Omega}} \mathfrak{a}(\mathbf{k}) [\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \cdot), \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \cdot)] d\mathbf{k}. \quad (8.23)$$

Обратно, если для $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{K}$ выполнено (8.22) и интеграл в (8.23) конечен, тогда $\mathbf{u} \in \text{Dom } \mathcal{X}$ и выполнено (8.23).

Из (8.21) следует, что спектр оператора \mathcal{A} совпадает с объединением отрезков (зон) $\text{Ran } E_j$, $j \in \mathbb{N}$. Из (8.16), (8.17) видно, что

$$\min_{\mathbf{k}} E_j(\mathbf{k}) = E_j(0) = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

т. е. первые n спектральных зон оператора \mathcal{A} перекрываются и имеют общий нижний край $\lambda_0 = 0$, а $(n+1)$ -ая зона отделена от нуля (см. (8.20)).

8.7. Включение операторов $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ в абстрактную схему. Если $d > 1$, то операторы $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ зависят от многомерного параметра \mathbf{k} . Следуя [BSu1, гл. 2], введем одномерный параметр $t = |\mathbf{k}|$. Будем использовать схему главы 1. При этом все построения будут зависеть от дополнительного параметра $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}| \in \mathbb{S}^{d-1}$ и мы должны следить за равномерностью оценок по $\boldsymbol{\theta}$. Пространства \mathfrak{H} и \mathfrak{H}_* определены в (8.12). Положим $X(t) = X(t, \boldsymbol{\theta}) := \mathcal{X}(t\boldsymbol{\theta})$. При этом выполнено $X(t, \boldsymbol{\theta}) = X_0 + tX_1(\boldsymbol{\theta})$, где $X_0 = h(\mathbf{x})b(\mathbf{D})f(\mathbf{x})$, $\text{Dom } X_0 = \mathfrak{d}$, а $X_1(\boldsymbol{\theta})$ — ограниченный оператор умножения на матрицу $h(\mathbf{x})b(\boldsymbol{\theta})f(\mathbf{x})$. Далее, положим $A(t) = A(t, \boldsymbol{\theta}) := \mathcal{A}(t\boldsymbol{\theta})$. Ядро $\mathfrak{N} = \text{Ker } X_0 = \text{Ker } \mathcal{A}(0)$ определено в (8.17), $\dim \mathfrak{N} = n$. Число d^0 удовлетворяет оценке (8.19). Как было показано в [BSu1, гл. 2, §3], условие $n \leq n_* = \dim \text{Ker } X_0^*$ также выполнено. Более того, либо $n_* = n$ (если $m = n$), либо $n_* = \infty$ (если $m > n$). Таким образом, все предположения абстрактной схемы выполнены.

Следуя пункту 1.1, мы должны фиксировать число $\delta > 0$ такое, что $\delta < d^0/8$. Учитывая (8.15) и (8.19), положим

$$\delta = \frac{1}{4} c_* r_0^2 = \frac{1}{4} \alpha_0 \|f^{-1}\|_{L_\infty}^{-2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1} r_0^2. \quad (8.24)$$

Отметим, что в силу (8.7) и (8.9) справедлива оценка

$$\|X_1(\boldsymbol{\theta})\| \leq \alpha_1^{1/2} \|h\|_{L_\infty} \|f\|_{L_\infty}, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}. \quad (8.25)$$

Для t_0 (см. (1.1)) примем следующее значение:

$$t_0 = \delta^{1/2} \alpha_1^{-1/2} \|h\|_{L_\infty}^{-1} \|f\|_{L_\infty}^{-1} = \frac{r_0}{2} \alpha_0^{1/2} \alpha_1^{-1/2} (\|h\|_{L_\infty} \|h^{-1}\|_{L_\infty} \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty})^{-1}, \quad (8.26)$$

которое подходит при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Отметим, что $t_0 \leq r_0/2$. Следовательно, шар $|\mathbf{k}| \leq t_0$ целиком лежит внутри $\tilde{\Omega}$. Важно, что величины c_* , δ , t_0 (см. (8.15), (8.24), (8.26)) не зависят от $\boldsymbol{\theta}$.

В силу (8.14) выполнено условие 1.4. Росток $S(\boldsymbol{\theta})$ оператора $A(t, \boldsymbol{\theta})$ невырожден равномерно по $\boldsymbol{\theta}$: выполнено

$$S(\boldsymbol{\theta}) \geq c_* I_{\mathfrak{N}} \quad (8.27)$$

(ср. (1.27)).

§ 9. ЭФФЕКТИВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОПЕРАТОРА $\widehat{\mathcal{A}}$

9.1. Оператор $A(t, \boldsymbol{\theta})$ в случае $f = \mathbf{1}_n$. Особую роль играет оператор \mathcal{A} при $f = \mathbf{1}_n$. Условимся в этом случае отмечать все объекты шляпкой “ $\widehat{}$ ”. Тогда для оператора

$$\widehat{\mathcal{A}} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \quad (9.1)$$

семейство

$$\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D} + \mathbf{k})$$

обозначается $\widehat{A}(t, \boldsymbol{\theta})$. Ядро (8.17) принимает вид

$$\widehat{\mathfrak{N}} = \{\mathbf{u} \in L_2(\Omega; \mathbb{C}^n) : \mathbf{u} = \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n\}, \quad (9.2)$$

т. е. $\widehat{\mathfrak{N}}$ состоит из постоянных вектор-функций. Ортопроектор \widehat{P} пространства $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ на подпространство (9.2) есть оператор усреднения по ячейке:

$$\widehat{P}\mathbf{u} = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (9.3)$$

В случае $f = \mathbf{1}_n$ постоянные (8.15), (8.24) и (8.26) принимают вид

$$\widehat{c}_* = \alpha_0 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1}, \quad (9.4)$$

$$\widehat{\delta} = \frac{1}{4} \alpha_0 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1} r_0^2, \quad (9.5)$$

$$\widehat{t}_0 = \frac{r_0}{2} \alpha_0^{1/2} \alpha_1^{-1/2} (\|g\|_{L_\infty} \|g^{-1}\|_{L_\infty})^{-1/2}. \quad (9.6)$$

Неравенство (8.25) превращается в

$$\|\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta})\| \leq \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2}. \quad (9.7)$$

9.2. Операторы $\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta})$, $\widehat{R}(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$. Операторы $\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta})$, $\widehat{R}(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$ для семейства $\widehat{A}(t, \boldsymbol{\theta})$ (в абстрактных терминах определенные в п. 1.2) теперь зависят от $\boldsymbol{\theta}$. Они были найдены в [BSu3, п. 4.1] и [BSu1, гл. 3, §1].

Пусть $\Lambda \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ — Г-периодическая $(n \times m)$ -матричнозначная функция, удовлетворяющая уравнению

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) = 0, \quad \int_{\Omega} \Lambda(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \quad (9.8)$$

Тогда операторы $\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta}) : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$ и $\widehat{R}(\boldsymbol{\theta}) : \widehat{\mathfrak{N}} \rightarrow \mathfrak{N}_*$ представимы в виде

$$\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta}) = [\Lambda] b(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P}, \quad \widehat{R}(\boldsymbol{\theta}) = [h(b(\mathbf{D})\Lambda + \mathbf{1}_m)] b(\boldsymbol{\theta}). \quad (9.9)$$

Здесь и ниже квадратные скобки обозначают оператор умножения на функцию.

Спектральный росток $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{R}(\boldsymbol{\theta})^* \widehat{R}(\boldsymbol{\theta})$ семейства $\widehat{A}(t, \boldsymbol{\theta})$, действующий в $\widehat{\mathfrak{N}}$, имеет вид

$$\widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta}), \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad (9.10)$$

где $b(\boldsymbol{\theta})$ — символ оператора $b(\mathbf{D})$, а g^0 — так называемая эффективная матрица. Эффективная матрица g^0 может быть определена в терминах матрицы $\Lambda(\mathbf{x})$:

$$\tilde{g}(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m), \quad (9.11)$$

$$g^0 = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \tilde{g}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (9.12)$$

Выясняется, что матрица g^0 положительно определена.

На основании (9.8) легко проверить оценки

$$\|g^{1/2}b(\mathbf{D})\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leq |\Omega|^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2}, \quad (9.13)$$

$$\|\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leq |\Omega|^{1/2} M_1, \quad M_1 := (2r_0)^{-1} \alpha_0^{-1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}, \quad (9.14)$$

$$\|\mathbf{D}\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leq |\Omega|^{1/2} M_2, \quad M_2 := \alpha_0^{-1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}. \quad (9.15)$$

9.3. Эффективный оператор. Рассмотрим символ

$$\widehat{S}(\mathbf{k}) := t^2 \widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) = b(\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d. \quad (9.16)$$

Отметим оценку

$$\widehat{S}(\mathbf{k}) \geq \widehat{c}_* |\mathbf{k}|^2 \mathbf{1}_n, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d,$$

вытекающую из (8.27) (при $f = \mathbf{1}_n$). Выражение (9.16) является символом ДО

$$\widehat{\mathcal{A}}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}), \quad (9.17)$$

действующего в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и называемого *эффективным оператором* для оператора $\widehat{\mathcal{A}}$.

Пусть $\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})$ — операторное семейство в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$, отвечающее эффективному оператору (9.17). Тогда $\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) = b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{D} + \mathbf{k})$ при периодических граничных условиях. Отсюда с учетом (9.3) и (9.16) вытекает тождество

$$\widehat{S}(\mathbf{k}) \widehat{P} = \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) \widehat{P}. \quad (9.18)$$

9.4. Свойства эффективной матрицы. Следующие свойства матрицы g^0 были проверены в [BSu1, гл. 3, теорема 1.5].

Предложение 9.1 ([BSu1]). Для эффективной матрицы справедливы оценки

$$\underline{g} \leq g^0 \leq \bar{g}, \quad (9.19)$$

где

$$\bar{g} := |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \underline{g} := \left(|\Omega|^{-1} \int_{\Omega} g(\mathbf{x})^{-1} d\mathbf{x} \right)^{-1}.$$

В случае $m = n$ всегда выполнено $g^0 = \underline{g}$.

Оценки (9.19) известны в теории усреднения для конкретных ДО как вилка Фойгта–Рейсса. Отметим также неравенства, вытекающие из (9.19):

$$|g^0| \leq \|g\|_{L_\infty}, \quad |(g^0)^{-1}| \leq \|g^{-1}\|_{L_\infty}.$$

Теперь выделим условия, при которых реализуется верхняя или нижняя грань в (9.19). Следующие утверждения были проверены в [BSu1, гл. 3, предложения 1.6, 1.7].

Предложение 9.2 ([BSu1]). Равенство $g^0 = \bar{g}$ равносильно соотношениям

$$b(\mathbf{D})^* \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad (9.20)$$

где $\mathbf{g}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \dots, m$, — столбцы матрицы $g(\mathbf{x})$.

Предложение 9.3 ([BSu1]). Равенство $g^0 = \underline{g}$ равносильно представлениям

$$\mathbf{l}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{l}_k^0 + b(\mathbf{D})\mathbf{w}_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{l}_k^0 \in \mathbb{C}^m, \quad \mathbf{w}_k \in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n), \quad k = 1, \dots, m, \quad (9.21)$$

где $\mathbf{l}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \dots, m$, — столбцы матрицы $g(\mathbf{x})^{-1}$.

9.5. Аналитические ветви собственных значений и собственных элементов.

Аналитические (по t) ветви собственных значений $\widehat{\lambda}_l(t, \boldsymbol{\theta})$ и собственных элементов $\widehat{\varphi}_l(t, \boldsymbol{\theta})$ оператора $\widehat{A}(t, \boldsymbol{\theta})$ допускают степенные разложения вида (1.5), (1.6) с коэффициентами, зависящими от $\boldsymbol{\theta}$ (интервал сходимости $t = |\mathbf{k}| \leq t_*(\boldsymbol{\theta})$ мы не контролируем):

$$\widehat{\lambda}_l(t, \boldsymbol{\theta}) = \widehat{\gamma}_l(\boldsymbol{\theta})t^2 + \widehat{\mu}_l(\boldsymbol{\theta})t^3 + \widehat{\nu}_l(\boldsymbol{\theta})t^4 + \dots, \quad l = 1, \dots, n, \quad (9.22)$$

$$\widehat{\varphi}_l(t, \boldsymbol{\theta}) = \widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}) + t\widehat{\psi}_l^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) + \dots, \quad l = 1, \dots, n. \quad (9.23)$$

Согласно (1.8) числа $\widehat{\gamma}_l(\boldsymbol{\theta})$ и элементы $\widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta})$ являются собственными значениями и собственными элементами ростка:

$$b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta}) \widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{\gamma}_l(\boldsymbol{\theta}) \widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}), \quad l = 1, \dots, n.$$

9.6. Оператор $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})$. Опишем теперь оператор N (в абстрактных терминах определенный в (1.22)). Как проверено в [BSu3, §4], для семейства $\widehat{A}(t, \boldsymbol{\theta})$ этот оператор принимает вид

$$\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* L(\boldsymbol{\theta}) b(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P}, \quad (9.24)$$

где $L(\boldsymbol{\theta})$ — $(m \times m)$ -матричнозначная функция, заданная соотношением

$$L(\boldsymbol{\theta}) = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} (\Lambda(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta})^* \widetilde{g}(\mathbf{x}) + \widetilde{g}(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta}) \Lambda(\mathbf{x})) d\mathbf{x}. \quad (9.25)$$

Здесь $\Lambda(\mathbf{x})$ — Г-периодическое решение задачи (9.8), а $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ — матрица-функция (9.11).

Отметим, что эрмитова матричнозначная функция $L(\mathbf{k}) := tL(\boldsymbol{\theta})$, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$, однородна первой степени. Положим $\widehat{N}(\mathbf{k}) := t^3 \widehat{N}(\boldsymbol{\theta})$, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$. Тогда

$$\widehat{N}(\mathbf{k}) = b(\mathbf{k})^* L(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}) \widehat{P}. \quad (9.26)$$

Матрица-функция $b(\mathbf{k})^* L(\mathbf{k}) b(\mathbf{k})$ является однородным многочленом третьей степени от $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$. Отсюда следует, что либо $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ тождественно по $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$, либо $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) \neq 0$ в “большинстве” точек $\boldsymbol{\theta}$ (за исключением точек, являющихся корнями этого многочлена).

В [BSu3, §4] указаны некоторые достаточные условия, при которых оператор (9.24) обращается в ноль.

Предложение 9.4 ([BSu3]). Пусть выполнено хотя бы одно из следующих предположений:

1°. Оператор \widehat{A} имеет вид $\widehat{A} = \mathbf{D}^* g(\mathbf{x}) \mathbf{D}$, где $g(\mathbf{x})$ — симметричная матрица с вещественными элементами.

2°. Выполнены соотношения (9.20), т. е. $g^0 = \overline{g}$.

3°. Выполнены соотношения (9.21), т. е. $g^0 = \underline{g}$. (В частности, это автоматически выполнено, если $m = n$.)

Тогда $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

С другой стороны, в [BSu3, пп. 10.4, 13.2, 14.6] приведены примеры операторов \widehat{A} , для которых оператор $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})$ отличен от нуля. Это пример скалярного эллиптического оператора (случай $n = 1$) с комплексной эрмитовой матрицей коэффициентов, а также пример матричного оператора с вещественными коэффициентами. См. также [Su6, пример 8.7], [DSu1, п. 14.3]. Напомним (см. замечание 1.3), что справедливо представление $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) + \widehat{N}_*(\boldsymbol{\theta})$, где оператор $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta})$ диагонален в базисе $\{\widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta})\}_{l=1}^n$, а оператор $\widehat{N}_*(\boldsymbol{\theta})$ имеет нулевые диагональные элементы. При этом

$$(\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) \widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}), \widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)} = (\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) \widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}), \widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)} = \widehat{\mu}_l(\boldsymbol{\theta}), \quad l = 1, \dots, n. \quad (9.27)$$

В [BSu3, п. 4.3] проведено следующее рассуждение. Предположим, что $b(\boldsymbol{\theta})$ и $g(\mathbf{x})$ — матрицы с вещественными элементами. Тогда матрица $\Lambda(\mathbf{x})$ (см. (9.8)) имеет чисто мнимые элементы, а $\tilde{g}(\mathbf{x})$ и g^0 — вещественные матрицы. В этом случае $L(\boldsymbol{\theta})$ (см. (9.25)) и $b(\boldsymbol{\theta})^*L(\boldsymbol{\theta})b(\boldsymbol{\theta})$ — эрмитовы матрицы с чисто мнимыми элементами. Поэтому для любого вещественного вектора $\mathbf{q} \in \widehat{\mathfrak{N}}$ выполнено $(\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{q}, \mathbf{q}) = 0$. Если аналитические ветви собственных значений $\widehat{\lambda}_l(t, \boldsymbol{\theta})$ и аналитические ветви собственных векторов $\widehat{\varphi}_l(t, \boldsymbol{\theta})$ оператора $\widehat{A}(t, \boldsymbol{\theta})$ можно выбрать так, чтобы векторы $\widehat{\omega}_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, \widehat{\omega}_n(\boldsymbol{\theta})$ оказались вещественными, то в силу (9.27) выполнено $\widehat{\mu}_l(\boldsymbol{\theta}) = 0$, $l = 1, \dots, n$, то есть $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$. Мы приходим к следующему утверждению.

Предложение 9.5. *Пусть $b(\boldsymbol{\theta})$ и $g(\mathbf{x})$ — матрицы с вещественными элементами. Пусть в разложениях (9.23) для аналитических ветвей собственных векторов оператора $\widehat{A}(t, \boldsymbol{\theta})$ “зародыши” $\widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = 1, \dots, n$, можно выбрать вещественными. Тогда в (9.22) выполнено $\widehat{\mu}_l(\boldsymbol{\theta}) = 0$, $l = 1, \dots, n$, то есть $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$.*

В рассматриваемом “вещественном” случае росток $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$ представляет собой симметричную вещественную матрицу. Ясно, что в случае простого собственного значения $\widehat{\gamma}_j(\boldsymbol{\theta})$ ростка зародыш $\widehat{\omega}_j(\boldsymbol{\theta})$ определяется однозначно с точностью до фазового множителя, и его всегда можно выбрать вещественным. Мы получаем следующее следствие.

Следствие 9.6. *Пусть $b(\boldsymbol{\theta})$ и $g(\mathbf{x})$ — матрицы с вещественными элементами и пусть спектр ростка $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$ простой. Тогда $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$.*

Однако, как показывают примеры [Su6, пример 8.7], [DSu1, п. 14.3], в “вещественном” случае не всегда возможно выбрать векторы $\widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta})$ вещественными. Может случиться, что $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) \neq 0$ в некоторых точках $\boldsymbol{\theta}$.

9.7. Операторы $\widehat{Z}_2(\boldsymbol{\theta})$, $\widehat{R}_2(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{N}_1^0(\boldsymbol{\theta})$. Опишем операторы Z_2 , R_2 и N_1^0 (в абстрактных терминах определенные в пп. 1.3 и 1.8) для семейства $\widehat{A}(t, \boldsymbol{\theta})$. Пусть $\Lambda_l^{(2)}(\mathbf{x})$ — Г-периодическая $(n \times m)$ -матрица-функция, являющаяся решением задачи

$$b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda_l^{(2)}(\mathbf{x}) + b_l\Lambda(\mathbf{x})) = b_l^*(g^0 - \tilde{g}(\mathbf{x})), \quad \int_{\Omega} \Lambda_l^{(2)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

Положим

$$\Lambda^{(2)}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) := \sum_{l=1}^d \Lambda_l^{(2)}(\mathbf{x})\theta_l.$$

Как проверено в [VSu2, п. 6.3],

$$\widehat{Z}_2(\boldsymbol{\theta}) = [\Lambda^{(2)}(\cdot; \boldsymbol{\theta})]b(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}, \quad \widehat{R}_2(\boldsymbol{\theta}) = [h(b(\mathbf{D})\Lambda^{(2)}(\cdot; \boldsymbol{\theta}) + b(\boldsymbol{\theta})\Lambda)]b(\boldsymbol{\theta}).$$

Наконец, в [VSu2, п. 6.4] было получено представление

$$\widehat{N}_1^0(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^*L_2(\boldsymbol{\theta})b(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}, \tag{9.28}$$

$$\begin{aligned} L_2(\boldsymbol{\theta}) &= |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \left(\Lambda^{(2)}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})^*b(\boldsymbol{\theta})^*\tilde{g}(\mathbf{x}) + \tilde{g}(\mathbf{x})^*b(\boldsymbol{\theta})\Lambda^{(2)}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) \right) d\mathbf{x} \\ &\quad + |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \left(b(\mathbf{D})\Lambda^{(2)}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) + b(\boldsymbol{\theta})\Lambda(\mathbf{x}) \right)^* g(\mathbf{x}) \left(b(\mathbf{D})\Lambda^{(2)}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) + b(\boldsymbol{\theta})\Lambda(\mathbf{x}) \right) d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{9.29}$$

9.8. Кратности собственных значений ростка. В данном пункте считаем, что $n \geq 2$. Перейдем к обозначениям, принятым в п. 1.7, следя за кратностями собственных значений спектрального ростка $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$. Вообще говоря, количество $p(\boldsymbol{\theta})$ различных собственных значений $\widehat{\gamma}_1^\circ(\boldsymbol{\theta}), \dots, \widehat{\gamma}_{p(\boldsymbol{\theta})}^\circ(\boldsymbol{\theta})$ спектрального ростка $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$ и их кратности $k_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, k_{p(\boldsymbol{\theta})}(\boldsymbol{\theta})$ зависят от параметра $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. При каждом фиксированном $\boldsymbol{\theta}$ через $\widehat{P}_j(\boldsymbol{\theta})$ обозначим ортопроектор в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ на собственное подпространство $\widehat{\mathfrak{N}}_j(\boldsymbol{\theta})$ ростка $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$, отвечающее собственному

значению $\widehat{\gamma}_j^\circ(\boldsymbol{\theta})$. Справедливы инвариантные (не зависящие от выбора базиса) представления для операторов $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{N}_*(\boldsymbol{\theta})$:

$$\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^{p(\boldsymbol{\theta})} \widehat{P}_j(\boldsymbol{\theta}) \widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P}_j(\boldsymbol{\theta}), \quad (9.30)$$

$$\widehat{N}_*(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{\substack{1 \leq j, l \leq p(\boldsymbol{\theta}): \\ j \neq l}} \widehat{P}_j(\boldsymbol{\theta}) \widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P}_l(\boldsymbol{\theta}). \quad (9.31)$$

9.9. Коэффициенты $\widehat{\nu}_l(\boldsymbol{\theta})$. Коэффициенты $\widehat{\nu}_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = 1, \dots, n$, в разложениях (9.22) являются собственными значениями некоторой задачи. Нам понадобится описать эту задачу в случае, когда $\widehat{\mu}_l(\boldsymbol{\theta}) = 0$, $l = 1, \dots, n$, то есть, $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$. Применяя предложение 1.8, приходим к следующему утверждению. См. также [DSu2, предложение 8.7].

Предложение 9.7. Пусть $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$. Пусть $\widehat{\gamma}_1^\circ(\boldsymbol{\theta}), \dots, \widehat{\gamma}_{p(\boldsymbol{\theta})}^\circ(\boldsymbol{\theta})$ — различные собственные значения оператора (9.10), а $k_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, k_{p(\boldsymbol{\theta})}(\boldsymbol{\theta})$ — их кратности. Пусть $\widehat{P}_q(\boldsymbol{\theta})$ — ортопроекtor пространства $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ на подпространство $\widehat{\mathfrak{N}}_q(\boldsymbol{\theta}) = \text{Ker}(\widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) - \widehat{\gamma}_q^\circ(\boldsymbol{\theta}) I_{\widehat{\mathfrak{N}}})$, $q = 1, \dots, p(\boldsymbol{\theta})$. Пусть операторы $\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{N}_1^0(\boldsymbol{\theta})$ определены в (9.9) и (9.28), (9.29), соответственно. Введем операторы $\widehat{\mathcal{N}}^{(q)}(\boldsymbol{\theta})$, $q = 1, \dots, p(\boldsymbol{\theta})$: оператор $\widehat{\mathcal{N}}^{(q)}(\boldsymbol{\theta})$ действует в $\widehat{\mathfrak{N}}_q(\boldsymbol{\theta})$ и задается выражением

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{N}}^{(q)}(\boldsymbol{\theta}) := & \widehat{P}_q(\boldsymbol{\theta}) \left(\widehat{N}_1^0(\boldsymbol{\theta}) - \frac{1}{2} \widehat{Z}(\boldsymbol{\theta})^* \widehat{Z}(\boldsymbol{\theta}) \widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P} - \frac{1}{2} \widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P} \widehat{Z}(\boldsymbol{\theta})^* \widehat{Z}(\boldsymbol{\theta}) \right) \Big|_{\widehat{\mathfrak{N}}_q(\boldsymbol{\theta})} \\ & + \sum_{j=1, \dots, p(\boldsymbol{\theta}): j \neq q} (\widehat{\gamma}_q^\circ(\boldsymbol{\theta}) - \widehat{\gamma}_j^\circ(\boldsymbol{\theta}))^{-1} \widehat{P}_q(\boldsymbol{\theta}) \widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P}_j(\boldsymbol{\theta}) \widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\widehat{\mathfrak{N}}_q(\boldsymbol{\theta})}. \end{aligned} \quad (9.32)$$

Обозначим $i(q, \boldsymbol{\theta}) = k_1(\boldsymbol{\theta}) + \dots + k_{q-1}(\boldsymbol{\theta}) + 1$. Пусть $\widehat{\nu}_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = 1, \dots, n$, — коэффициенты при t^4 из разложений (9.22), а $\widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta})$ — зародивши из (9.23), $l = 1, \dots, n$. Тогда

$$\widehat{\mathcal{N}}^{(q)}(\boldsymbol{\theta}) \widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{\nu}_l(\boldsymbol{\theta}) \widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}), \quad l = i(q, \boldsymbol{\theta}), i(q, \boldsymbol{\theta}) + 1, \dots, i(q, \boldsymbol{\theta}) + k_q(\boldsymbol{\theta}) - 1.$$

§ 10. АППРОКСИМАЦИЯ ОПЕРАТОРА $e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})}$

10.1. Аппроксимация по операторной норме в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$. Общий случай. Рассмотрим оператор $\mathcal{H}_0 = -\Delta$ в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. При разложении в прямой интеграл оператору \mathcal{H}_0 отвечает семейство операторов $\mathcal{H}_0(\mathbf{k})$, действующих в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$. Оператор $\mathcal{H}_0(\mathbf{k})$ задается дифференциальным выражением $|\mathbf{D} + \mathbf{k}|^2$ при периодических граничных условиях. Введем обозначение

$$\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon) := \varepsilon^2 (\mathcal{H}_0(\mathbf{k}) + \varepsilon^2 I)^{-1}. \quad (10.1)$$

Отметим очевидное тождество

$$\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{s/2} \widehat{P} = \varepsilon^s (t^2 + \varepsilon^2)^{-s/2} \widehat{P}, \quad s > 0. \quad (10.2)$$

Заметим, что при $|\mathbf{k}| > \widehat{t}_0$ справедливо неравенство

$$\left\| \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{s/2} \widehat{P} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq (\widehat{t}_0)^{-s} \varepsilon^s, \quad \varepsilon > 0, \quad \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}, \quad |\mathbf{k}| > \widehat{t}_0. \quad (10.3)$$

Далее, используя дискретное преобразование Фурье, получаем оценку

$$\left\| \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{s/2} (I - \widehat{P}) \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \sup_{\mathbf{0} \neq \mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma}} \varepsilon^s (|\mathbf{b} + \mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-s/2} \leq r_0^{-s} \varepsilon^s, \quad \varepsilon > 0, \quad \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}. \quad (10.4)$$

Здесь учтено, что $|\mathbf{b} + \mathbf{k}| \geq r_0$ при $0 \neq \mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma}$ и $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ (см. (8.1) и (8.2)).

В силу (9.18) выполнено тождество

$$e^{-i\varepsilon^{-2}\tau t^2\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})}\widehat{P}=e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})}\widehat{P}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, \mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta} \in \widetilde{\Omega}. \quad (10.5)$$

Мы применим к оператору $\widehat{A}(t, \boldsymbol{\theta}) = \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ теоремы из §3. Согласно замечанию 3.10 мы можем отследить зависимость постоянных в оценках от данных задачи. Отметим, что $\widehat{c}_*, \widehat{\delta}$ и \widehat{t}_0 не зависят от $\boldsymbol{\theta}$ (см. (9.4)–(9.6)). Согласно (9.7) норму $\|\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta})\|$ можно заменить на $\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}$. Поэтому постоянные из теоремы 3.1 (примененной к оператору $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$) не будут зависеть от $\boldsymbol{\theta}$. Они будут зависеть только от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Теорема 10.1 ([BSu5]). *При $\tau \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ выполнена оценка*

$$\left\| \left(e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})} - e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})} \right) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \widehat{C}_1(1 + |\tau|)\varepsilon.$$

Постоянная \widehat{C}_1 зависит лишь от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Теорема 10.1 выводится из теоремы 3.1 и соотношений (10.2)–(10.5). Следует учесть также очевидные оценки

$$\|\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq 1, \quad (10.6)$$

$$\left\| e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})} - e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq 2. \quad (10.7)$$

Ранее теорема 10.1 была установлена в [BSu5, теорема 7.1].

10.2. Аппроксимация по операторной норме в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$. Усиление результатов при дополнительных предположениях. Теперь мы усиливаем результат теоремы 10.1 при дополнительных предположениях. Наложим следующее условие.

Условие 10.2. *Пусть оператор $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})$ определен в (9.24). Предположим, что $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.*

Из теоремы 3.2 выводится следующий результат, установленный в [D1, теорема 6.2].

Теорема 10.3 ([D1]). *Пусть выполнено условие 10.2. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ выполнена оценка*

$$\left\| \left(e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})} - e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})} \right) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon) \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \widehat{C}_2(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon.$$

Постоянная \widehat{C}_2 зависит лишь от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Теперь мы отказываемся от предположения $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$, но взамен предположим, что $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta}$. При этом считаем, что $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{N}_*(\boldsymbol{\theta}) \neq 0$ при некотором $\boldsymbol{\theta}$, а тогда и в “большинстве” точек $\boldsymbol{\theta}$. (Иначе применима теорема 10.3.) Нам хотелось бы применить “абстрактный” факт (теорему 3.3). Однако, возникает дополнительное осложнение, связанное с тем, что в некоторых точках $\boldsymbol{\theta}$ может меняться кратность спектра ростка $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$. При приближении к таким точкам расстояние между какой-то парой различных собственных значений ростка стремится к нулю и мы не можем выбрать величины $\widehat{c}_{jl}^\circ, \widehat{t}_{jl}^{00}$ не зависящими от $\boldsymbol{\theta}$. Поэтому мы вынуждены накладывать дополнительные условия. Заботиться надо только о тех собственных значениях, для которых соответствующее слагаемое в представлении (9.31) отлично от нуля. Из-за того, что количество различных собственных значений ростка и их кратности могут зависеть от $\boldsymbol{\theta}$, при формулировке дополнительного условия удобнее пользоваться исходной нумерацией собственных значений $\widehat{\gamma}_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, \widehat{\gamma}_n(\boldsymbol{\theta})$ ростка $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$ (каждое собственное значение повторяется столько раз, сколько его кратность), условившись нумеровать их в порядке неубывания:

$$\widehat{\gamma}_1(\boldsymbol{\theta}) \leq \widehat{\gamma}_2(\boldsymbol{\theta}) \leq \dots \leq \widehat{\gamma}_n(\boldsymbol{\theta}).$$

При каждом $\boldsymbol{\theta}$ через $\widehat{P}^{(k)}(\boldsymbol{\theta})$ обозначим ортопроектор пространства $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ на собственное подпространство оператора $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$, отвечающее собственному значению $\widehat{\gamma}_k(\boldsymbol{\theta})$. Ясно, что при jedem $\boldsymbol{\theta}$ оператор $\widehat{P}^{(k)}(\boldsymbol{\theta})$ совпадает с одним из проекtorов $\widehat{P}_j(\boldsymbol{\theta})$, введенных в п. 9.8 (но номер j может зависеть от $\boldsymbol{\theta}$ и меняется в точках перемены кратности спектра ростка).

Условие 10.4. 1°. Оператор $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta})$, определенный в (9.30), равен нулю: $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. 2°. Для каждой пары индексов (k, r) , $1 \leq k, r \leq n$, $k \neq r$, такой что $\widehat{\gamma}_k(\boldsymbol{\theta}_0) = \widehat{\gamma}_r(\boldsymbol{\theta}_0)$ при некотором $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$, выполнено $\widehat{P}^{(k)}(\boldsymbol{\theta})\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}^{(r)}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Условие 2° может быть переформулировано: мы требуем, чтобы для ненулевых (тождественно) “блоков” $\widehat{P}^{(k)}(\boldsymbol{\theta})\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}^{(r)}(\boldsymbol{\theta})$ оператора $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})$ соответствующие ветви собственных значений $\widehat{\gamma}_k(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{\gamma}_r(\boldsymbol{\theta})$ не пересекались. Разумеется, выполнение условия 10.4 гарантируется следующим более сильным условием.

Условие 10.5. 1°. Оператор $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta})$, определенный в (9.30), равен нулю: $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. 2°. Количество r различных собственных значений спектрального ростка $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$ не зависит от $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Замечание 10.6. Предположение пункта 2° условия 10.5 заведомо выполнено, если спектр ростка $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$ простой при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Итак, предполагаем выполненным условие 10.4. Нас интересуют только пары индексов из множества

$$\widehat{\mathcal{K}} := \{(k, r) : 1 \leq k, r \leq n, k \neq r, \widehat{P}^{(k)}(\boldsymbol{\theta})\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}^{(r)}(\boldsymbol{\theta}) \neq 0\}.$$

Введем обозначение

$$\widehat{c}_{kr}^\circ(\boldsymbol{\theta}) := \min\{\widehat{c}_*, n^{-1}|\widehat{\gamma}_k(\boldsymbol{\theta}) - \widehat{\gamma}_r(\boldsymbol{\theta})|\}, \quad (k, r) \in \widehat{\mathcal{K}}.$$

Поскольку оператор $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$ непрерывно зависит от $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$ (это многочлен второй степени), то из теории возмущений дискретного спектра следует, что $\widehat{\gamma}_j(\boldsymbol{\theta})$ — непрерывные функции на сфере \mathbb{S}^{d-1} . В силу условия 10.4(2°) при $(k, r) \in \widehat{\mathcal{K}}$ выполнено $|\widehat{\gamma}_k(\boldsymbol{\theta}) - \widehat{\gamma}_r(\boldsymbol{\theta})| > 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$, а тогда

$$\widehat{c}_{kr}^\circ := \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}} \widehat{c}_{kr}^\circ(\boldsymbol{\theta}) > 0, \quad (k, r) \in \widehat{\mathcal{K}}.$$

Положим

$$\widehat{c}^\circ := \min_{(k, r) \in \widehat{\mathcal{K}}} \widehat{c}_{kr}^\circ. \quad (10.8)$$

Ясно, что число (10.8) — это реализация величины (2.6), выбранная не зависящей от $\boldsymbol{\theta}$. Число, подчиненное (2.7), при условии 10.4 также можно выбрать не зависящим от $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. С учетом (9.5) и (9.7) положим

$$\widehat{t}^{00} = (8\beta_2)^{-1} r_0 \alpha_1^{-3/2} \alpha_0^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{-3/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1/2} \widehat{c}^\circ,$$

где \widehat{c}° определено в (10.8). (Условие $\widehat{t}^{00} \leq \widehat{t}_0$ выполнено автоматически, поскольку $\widehat{c}^\circ \leq \|\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})\| \leq \alpha_1 \|g\|_{L_\infty}$.)

Замечание 10.7. 1°. В отличие от числа \widehat{t}_0 (см. (9.6)), которое контролируется только через r_0 , α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$ и $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, величина \widehat{t}^{00} зависит от спектральной характеристики ростка — минимального расстояния между его различными собственными значениями $\widehat{\gamma}_k(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{\gamma}_r(\boldsymbol{\theta})$ (где (k, r) пробегает $\widehat{\mathcal{K}}$). 2°. Если отказаться от условия 10.4 и допустить пересечение ветвей $\widehat{\gamma}_k(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{\gamma}_r(\boldsymbol{\theta})$ (при некоторых $(k, r) \in \widehat{\mathcal{K}}$), то величина \widehat{c}° не будет положительно определена и мы не сможем выбрать число \widehat{t}^{00} не зависящим от $\boldsymbol{\theta}$.

При условии 10.4 из теоремы 3.3 выводим следующий результат (см. [D1, теорема 6.7]). Следует учитывать, что сейчас константы в оценках будут зависеть не только от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 , но и от \widehat{c}° и n ; см. замечание 3.10.

Теорема 10.8 ([D1]). Пусть выполнено условие 10.4 (или более сильное условие 10.5). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \bar{\Omega}$ выполнена оценка

$$\left\| \left(e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})} - e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})} \right) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon) \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \widehat{\mathcal{C}}_3 (1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon.$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_3$ зависит от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 , а также от n и \widehat{c}° .

10.3. Более точная аппроксимация по операторной норме в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$. Получим теперь более точную аппроксимацию операторной экспоненты для оператора $\widehat{A}(t, \boldsymbol{\theta}) = \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$.

В силу (9.9) имеем

$$t\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta})\widehat{P} = \Lambda b(\mathbf{k})\widehat{P} = \Lambda b(\mathbf{D} + \mathbf{k})\widehat{P}. \quad (10.9)$$

Из (9.26) следует, что

$$t^3\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})\widehat{P} = \widehat{N}(\mathbf{k})\widehat{P} = b(\mathbf{k})^*L(\mathbf{k})b(\mathbf{k})\widehat{P} = b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^*L(\mathbf{D} + \mathbf{k})b(\mathbf{D} + \mathbf{k})\widehat{P}. \quad (10.10)$$

Отметим, что из (1.2), (1.23) и (9.7) вытекают оценки

$$\|\widehat{X}_0\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \|\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta})\| \leq \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2}, \quad (10.11)$$

$$\|\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq (8\widehat{\delta})^{-1/2} \|\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta})\| \leq (8\widehat{\delta})^{-1/2} \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} =: C_{\widehat{Z}}, \quad (10.12)$$

$$\|\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq (2\widehat{\delta})^{-1/2} \|\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta})\|^3 \leq (2\widehat{\delta})^{-1/2} \alpha_1^{3/2} \|g\|_{L_\infty}^{3/2} =: C_{\widehat{N}}. \quad (10.13)$$

Положим

$$\widehat{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) := e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})} \left(I + \Lambda b(\mathbf{D} + \mathbf{k})\widehat{P} \right) - \left(I + \Lambda b(\mathbf{D} + \mathbf{k})\widehat{P} \right) e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})}, \quad (10.14)$$

$$\begin{aligned} \widehat{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) := & e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})} \left(I + \Lambda b(\mathbf{D} + \mathbf{k})\widehat{P} \right) - \left(I + \Lambda b(\mathbf{D} + \mathbf{k})\widehat{P} \right) e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})} \\ & + i\varepsilon^{-2} \int_0^\tau e^{-i\varepsilon^{-2}(\tau-\tilde{\tau})\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})} b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^*L(\mathbf{D} + \mathbf{k})b(\mathbf{D} + \mathbf{k})e^{-i\varepsilon^{-2}\tilde{\tau}\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})} d\tilde{\tau}. \end{aligned} \quad (10.15)$$

Оператор (10.14) ограничен, а оператор (10.15) в общем случае определен на $\widetilde{H}^3(\Omega; \mathbb{C}^n)$. Представим операторы (10.14), (10.15) в виде

$$\widehat{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) = e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})} - e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})} + \widehat{G}^{(2)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau), \quad (10.16)$$

$$\widehat{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) = e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})} - e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})} + \widehat{G}^{(2)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) + \widehat{G}^{(3)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau), \quad (10.17)$$

где

$$\widehat{G}^{(2)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) := e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})} \Lambda b(\mathbf{D} + \mathbf{k})\widehat{P} - \Lambda b(\mathbf{D} + \mathbf{k})\widehat{P} e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})}, \quad (10.18)$$

$$\widehat{G}^{(3)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) := i\varepsilon^{-2} \int_0^\tau e^{-i\varepsilon^{-2}(\tau-\tilde{\tau})\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})} b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^*L(\mathbf{D} + \mathbf{k})b(\mathbf{D} + \mathbf{k})e^{-i\varepsilon^{-2}\tilde{\tau}\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})} d\tilde{\tau}. \quad (10.19)$$

Из (10.9), (10.10), (10.12), (10.13), (10.16)–(10.19) при $\varepsilon > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $\mathbf{k} \in \bar{\Omega}$ следуют оценки

$$\|\widehat{G}^{(2)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq 2|\mathbf{k}| \|\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq 2C_{\widehat{Z}}|\mathbf{k}|, \quad (10.20)$$

$$\|\widehat{G}^{(3)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \varepsilon^{-2} |\tau| |\mathbf{k}|^3 \|\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_{\widehat{N}} \varepsilon^{-2} |\tau| |\mathbf{k}|^3,$$

$$\|\widehat{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq 2 + 2C_{\widehat{Z}}|\mathbf{k}|, \quad (10.21)$$

$$\|\widehat{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq 2 + 2C_{\widehat{Z}}|\mathbf{k}| + C_{\widehat{N}} \varepsilon^{-2} |\tau| |\mathbf{k}|^3. \quad (10.22)$$

Теорема 10.9. Пусть оператор $\widehat{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)$ определен в (10.15). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \bar{\Omega}$ выполнена оценка

$$\|\widehat{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^3\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \widehat{\mathcal{C}}_4 (1 + |\tau|)^2 \varepsilon^2. \quad (10.23)$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_4$ зависит лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Доказательство. Применяя теорему 3.4 и учитывая замечание 3.10 и соотношения (10.2), (10.5), (10.9), (10.10), получаем

$$\|\widehat{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^3\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \widehat{\mathcal{C}}'_4(1 + |\tau|)^2\varepsilon^2, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, |\mathbf{k}| \leq \widehat{t}_0. \quad (10.24)$$

Константа $\widehat{\mathcal{C}}'_4$ зависит только от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Оценки при $|\mathbf{k}| > \widehat{t}_0$ тривиальны. С учетом (10.2) и (10.22) имеем

$$\begin{aligned} \|\widehat{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^3\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq (2 + 2C_{\widehat{Z}}|\mathbf{k}| + C_{\widehat{N}}\varepsilon^{-2}|\tau||\mathbf{k}|^3) \frac{\varepsilon^6}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^3} \\ &\leq 2(\widehat{t}_0)^{-2}\varepsilon^2 + C_{\widehat{Z}}(\widehat{t}_0)^{-1}\varepsilon^2 + C_{\widehat{N}}(\widehat{t}_0)^{-1}|\tau|\varepsilon^2, \\ &\quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}, |\mathbf{k}| > \widehat{t}_0. \end{aligned} \quad (10.25)$$

Комбинируя (10.24) и (10.25), приходим к оценке

$$\|\widehat{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^3\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \widehat{\mathcal{C}}''_4(1 + |\tau|)^2\varepsilon^2, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}. \quad (10.26)$$

Константа $\widehat{\mathcal{C}}''_4$ зависит только от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Покажем теперь, что в пределах допустимой погрешности оператор $\widehat{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^3\widehat{P}$ в неравенстве (10.26) можно заменить на $\widehat{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^3$. Для этого оценим оператор

$$\begin{aligned} \widehat{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^3(I - \widehat{P}) &= \left(e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})} - e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})}\right)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^3(I - \widehat{P}) \\ &\quad + i\varepsilon^{-2} \int_0^\tau e^{-i\varepsilon^{-2}(\tau - \tilde{\tau})\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})} b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* L(\mathbf{D} + \mathbf{k}) b(\mathbf{D} + \mathbf{k}) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^3(I - \widehat{P}) e^{-i\varepsilon^{-2}\tilde{\tau}\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})} d\tilde{\tau}. \end{aligned}$$

Норма первого слагаемого не превосходит $2r_0^{-2}\varepsilon^2$ в силу (10.4), (10.6) и (10.7). Второе слагаемое легко оценить, используя дискретное преобразование Фурье. Его норма не превосходит величины

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{-2}|\tau| \|b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* L(\mathbf{D} + \mathbf{k}) b(\mathbf{D} + \mathbf{k}) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^3(I - \widehat{P})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ &= \varepsilon^{-2}|\tau| \sup_{0 \neq \mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma}} |b(\mathbf{b} + \mathbf{k})^* L(\mathbf{b} + \mathbf{k}) b(\mathbf{b} + \mathbf{k})| \frac{\varepsilon^6}{(|\mathbf{b} + \mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^3} \\ &\leq C_{\widehat{N}}|\tau| \sup_{0 \neq \mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma}} \frac{\varepsilon^4|\mathbf{b} + \mathbf{k}|^3}{(|\mathbf{b} + \mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^3} \leq C_{\widehat{N}}r_0^{-1}|\tau|\varepsilon^2. \end{aligned}$$

В итоге получаем:

$$\|\widehat{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^3(I - \widehat{P})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq (2r_0^{-2} + C_{\widehat{N}}r_0^{-1}|\tau|)\varepsilon^2, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}. \quad (10.27)$$

Сопоставляя оценки (10.26) и (10.27), приходим к искомому неравенству (10.23). \square

Теперь на основании теорем 3.5 и 3.6 мы усилим результат теоремы 10.9 при дополнительных предположениях.

Теорема 10.10. Пусть оператор $\widehat{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)$ определен в (10.14). Пусть выполнено условие 10.2. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ справедлива оценка

$$\|\widehat{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^2\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \widehat{\mathcal{C}}_5(1 + |\tau|)\varepsilon^2. \quad (10.28)$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_5$ зависит лишь от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Доказательство. Применяя теорему 3.5 и учитывая замечание 3.10 и соотношения (10.2), (10.5), (10.9), получаем

$$\|\widehat{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^2\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \widehat{\mathcal{C}}_5(1 + |\tau|)\varepsilon^2, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, |\mathbf{k}| \leq \widehat{t}_0. \quad (10.29)$$

Константа $\widehat{\mathcal{C}}_5$ зависит только от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

При $|\mathbf{k}| > \widehat{t}_0$ используем (10.2) и (10.21):

$$\begin{aligned} \|\widehat{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^2\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq (2 + 2C_{\widehat{Z}}|\mathbf{k}|) \frac{\varepsilon^4}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^2} \leq 2(\widehat{t}_0)^{-2}\varepsilon^2 + C_{\widehat{Z}}(\widehat{t}_0)^{-1}\varepsilon^2, \\ \varepsilon > 0, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}, \quad |\mathbf{k}| > \widehat{t}_0. \end{aligned} \quad (10.30)$$

Теперь рассмотрим оператор

$$\widehat{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^2(I - \widehat{P}) = \left(e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})} - e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})} \right) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^2(I - \widehat{P}). \quad (10.31)$$

Норма этого оператора оценивается через $2r_0^{-2}\varepsilon^2$ в силу (10.4), (10.6) и (10.7). Вместе с (10.29) и (10.30) это влечет искомую оценку (10.28). \square

Теорема 10.11. *Пусть оператор $\widehat{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)$ определен в (10.15). Пусть выполнено условие 10.4 (или более сильное условие 10.5). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ справедлива оценка*

$$\|\widehat{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^2\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \widehat{C}_6(1 + |\tau|)\varepsilon^2. \quad (10.32)$$

Постоянная \widehat{C}_6 зависит от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 , а также от n и \widehat{c}° .

Доказательство. Применяя теорему 3.6 и учитывая замечание 3.10 и соотношения (10.2), (10.5), (10.9), (10.10), получаем

$$\|\widehat{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^2\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \widehat{C}_6(1 + |\tau|)\varepsilon^2, \quad \varepsilon > 0, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad |\mathbf{k}| \leq \widehat{t}^{00}. \quad (10.33)$$

Постоянная \widehat{C}_6 зависит от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 , а также от n и \widehat{c}° .

При $|\mathbf{k}| > \widehat{t}^{00}$ используем (10.2) и (10.22):

$$\begin{aligned} \|\widehat{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^2\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq (2 + 2C_{\widehat{Z}}|\mathbf{k}| + C_{\widehat{N}}\varepsilon^{-2}|\tau||\mathbf{k}|^3) \frac{\varepsilon^4}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^2} \\ &\leq 2(\widehat{t}^{00})^{-2}\varepsilon^2 + C_{\widehat{Z}}(\widehat{t}^{00})^{-1}\varepsilon^2 + C_{\widehat{N}}(\widehat{t}^{00})^{-1}|\tau|\varepsilon^2, \\ \varepsilon > 0, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}, \quad |\mathbf{k}| > \widehat{t}^{00}. \end{aligned} \quad (10.34)$$

Рассмотрим теперь оператор

$$\begin{aligned} \widehat{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^2(I - \widehat{P}) &= \left(e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})} - e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})} \right) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^2(I - \widehat{P}) \\ &+ i\varepsilon^{-2} \int_0^\tau e^{-i\varepsilon^{-2}(\tau-\tilde{\tau})\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})} b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* L(\mathbf{D} + \mathbf{k}) b(\mathbf{D} + \mathbf{k}) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^2(I - \widehat{P}) e^{-i\varepsilon^{-2}\tilde{\tau}\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})} d\tilde{\tau}. \end{aligned}$$

В силу (10.4), (10.6) и (10.7) норма первого слагаемого справа не превосходит $2r_0^{-2}\varepsilon^2$. С помощью дискретного преобразования Фурье оценим норму второго слагаемого через величину

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-2}|\tau| \sup_{0 \neq \mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma}} |b(\mathbf{b} + \mathbf{k})^* L(\mathbf{b} + \mathbf{k}) b(\mathbf{b} + \mathbf{k})| \frac{\varepsilon^4}{(|\mathbf{b} + \mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^2} \\ \leq C_{\widehat{N}}|\tau| \sup_{0 \neq \mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma}} \frac{\varepsilon^2|\mathbf{b} + \mathbf{k}|^3}{(|\mathbf{b} + \mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^2} \leq C_{\widehat{N}}r_0^{-1}|\tau|\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|\widehat{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^2(I - \widehat{P})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq (2r_0^{-2} + C_{\widehat{N}}r_0^{-1}|\tau|)\varepsilon^2, \quad \varepsilon > 0, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}. \quad (10.35)$$

Сопоставляя (10.33), (10.34) и (10.35), приходим к искомой оценке (10.32). \square

10.4. Аппроксимация операторной экспоненты в “энергетической” норме. Отметим, что из (9.7), (10.9), (10.11), (10.12) и (10.14) вытекает оценка

$$\begin{aligned} & \left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \widehat{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) \widehat{P} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq 2 \left\| (\widehat{X}_0 + t\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta}))(\widehat{P} + t\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}) \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ & = 2 \left\| t\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta})\widehat{P} + t\widehat{X}_0\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta})\widehat{P} + t^2\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta})\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta})\widehat{P} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} (4|\mathbf{k}| + 2C_{\widehat{Z}}|\mathbf{k}|^2), \end{aligned} \quad (10.36)$$

справедливая при $\varepsilon > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$.

Из теоремы 3.7 выводим следующий результат.

Теорема 10.12. *Пусть оператор $\widehat{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)$ определен в (10.14). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ выполнена оценка*

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \widehat{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^2 \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \widehat{C}_7(1 + |\tau|)\varepsilon^2. \quad (10.37)$$

Постоянная \widehat{C}_7 зависит лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Доказательство. Применяя теорему 3.7 и учитывая замечание 3.10, получаем

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \widehat{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^2 \widehat{P} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \widehat{C}_7'(1 + |\tau|)\varepsilon^2, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, |\mathbf{k}| \leq \widehat{t}_0. \quad (10.38)$$

Постоянная \widehat{C}_7' зависит лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

При $|\mathbf{k}| > \widehat{t}_0$ оценки тривиальны. В силу (10.2) и (10.36) имеем:

$$\begin{aligned} & \left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \widehat{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^2 \widehat{P} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} (4|\mathbf{k}| + 2C_{\widehat{Z}}|\mathbf{k}|^2) \frac{\varepsilon^4}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^2} \\ & \leq \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} (2(\widehat{t}_0)^{-1} + C_{\widehat{Z}})\varepsilon^2, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}, |\mathbf{k}| > \widehat{t}_0. \end{aligned} \quad (10.39)$$

Далее, из (10.31) с помощью дискретного преобразования Фурье получаем

$$\begin{aligned} & \left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \widehat{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^2 (I - \widehat{P}) \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq 2 \left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^2 (I - \widehat{P}) \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ & = 2 \left\| g^{1/2} b(\mathbf{D} + \mathbf{k}) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^2 (I - \widehat{P}) \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq 2\alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \sup_{0 \neq \mathbf{b} \in \tilde{\Gamma}} \frac{|\mathbf{b} + \mathbf{k}| \varepsilon^4}{(|\mathbf{b} + \mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^2} \\ & \leq \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} r_0^{-1} \varepsilon^2, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}. \end{aligned} \quad (10.40)$$

Сопоставляя (10.38), (10.39) и (10.40), приходим к искомой оценке (10.37). \square

Теперь на основании теорем 3.8 и 3.9 мы усилим результат теоремы 10.12 при дополнительных предположениях.

Теорема 10.13. *Пусть оператор $\widehat{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)$ определен в (10.14). Пусть выполнено условие 10.2. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ справедлива оценка*

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \widehat{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \widehat{C}_8(1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon^2. \quad (10.41)$$

Постоянная \widehat{C}_8 зависит лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Доказательство. Применяя теорему 3.8 и учитывая замечание 3.10, получаем

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \widehat{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2} \widehat{P} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \widehat{C}_8'(1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon^2, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, |\mathbf{k}| \leq \widehat{t}_0. \quad (10.42)$$

Постоянная \widehat{C}_8' зависит лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

При $|\mathbf{k}| > \widehat{t}_0$ используем (10.2) и (10.36):

$$\begin{aligned} \left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \widehat{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2} \widehat{P} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} (4|\mathbf{k}| + 2C_{\widehat{Z}}|\mathbf{k}|^2) \frac{\varepsilon^3}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \\ &\leq \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} (2(\widehat{t}_0)^{-1} + C_{\widehat{Z}}) \varepsilon^2, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}, |\mathbf{k}| > \widehat{t}_0. \end{aligned} \quad (10.43)$$

По аналогии с (10.40) имеем

$$\begin{aligned} \left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \widehat{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2} (I - \widehat{P}) \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq 2 \left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2} (I - \widehat{P}) \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ &\leq 2\alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \sup_{0 \neq \mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma}} \frac{|\mathbf{b} + \mathbf{k}| \varepsilon^3}{(|\mathbf{b} + \mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \leq \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} r_0^{-1} \varepsilon^2, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}. \end{aligned} \quad (10.44)$$

В итоге, из (10.42)–(10.44) следует оценка (10.41). \square

Теорема 10.14. Пусть оператор $\widehat{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)$ определен в (10.14). Пусть выполнено условие 10.4 (или более сильное условие 10.5). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ справедлива оценка

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \widehat{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \widehat{C}_9 (1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon^2. \quad (10.45)$$

Постоянная \widehat{C}_9 зависит от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 , а также от n и \widehat{c}° .

Доказательство. Применяя теорему 3.9 и учитывая замечание 3.10, получаем

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \widehat{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2} \widehat{P} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \widehat{C}'_9 (1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon^2, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, |\mathbf{k}| \leq \widehat{t}^{00}. \quad (10.46)$$

Постоянная \widehat{C}'_9 зависит от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 , а также от n и \widehat{c}° .

Аналогично (10.43) имеем:

$$\begin{aligned} \left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \widehat{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2} \widehat{P} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} (2(\widehat{t}^{00})^{-1} + C_{\widehat{Z}}) \varepsilon^2, \\ &\quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}, |\mathbf{k}| > \widehat{t}^{00}. \end{aligned} \quad (10.47)$$

Заметим, что неравенство (10.44) сохраняет силу (оно справедливо без каких-либо дополнительных условий). Тогда из (10.44), (10.46) и (10.47) вытекает искомая оценка (10.45). \square

§ 11. ПОДТВЕРЖДЕНИЕ ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ § 10

11.1. Точность результатов относительно сглаживающего множителя. В утверждениях настоящего параграфа мы накладываем одно из следующих двух условий.

Условие 11.1. Пусть оператор $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta})$ определен в (9.30). Предположим, что хотя бы в одной точке $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ имеет место $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$.

Условие 11.2. Пусть операторы $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{N}^{(q)}(\boldsymbol{\theta})$ определены в (9.30) и (9.32) соответственно. Предположим, что $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$ и для некоторого $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ и некоторого $q \in \{1, \dots, p(\boldsymbol{\theta}_0)\}$ выполнено $\widehat{N}^{(q)}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$.

Нам понадобится следующая лемма (см. [Su6, лемма 9.9] и [DSu2, лемма 10.3]).

Лемма 11.3 ([Su6], [DSu2]). Пусть число $\widehat{\delta}$ определено в (9.5), а \widehat{t}_0 определено в (9.6). Пусть $\widehat{F}(\mathbf{k})$ — спектральный проектор оператора $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ для промежутка $[0, \widehat{\delta}]$. Тогда при $|\mathbf{k}| \leq \widehat{t}_0$, $|\mathbf{k}_0| \leq \widehat{t}_0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \widehat{F}(\mathbf{k}) - \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}_0)^{1/2} \widehat{F}(\mathbf{k}_0) \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq \widehat{C}' |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|, \\ \left\| e^{-i\tau \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})} \widehat{F}(\mathbf{k}) - e^{-i\tau \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}_0)} \widehat{F}(\mathbf{k}_0) \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq \widehat{C}''(\tau) |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|. \end{aligned}$$

В [Su6, теорема 9.8] на основании абстрактной теоремы 4.1 был установлен следующий результат, подтверждающий точность теоремы 10.1 относительно слаживающего множителя.

Теорема 11.4 ([Su6]). *Пусть выполнено условие 11.1. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq s < 3$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы оценка*

$$\left\| \left(e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})} - e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})} \right) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{s/2} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon \quad (11.1)$$

выполнялась при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Следующий результат подтверждает точность теорем 10.3, 10.8 и выводится из абстрактного факта (теоремы 4.2); см. [D1, теорема 6.9].

Теорема 11.5 ([D1]). *Пусть выполнено условие 11.2. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq s < 2$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы оценка (11.1) выполнялась при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.*

Теперь с помощью теоремы 4.3 мы убедимся в точности теоремы 10.9.

Теорема 11.6. *Пусть оператор $\widehat{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)$ определен в (10.15). Пусть выполнено условие 11.1. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq s < 6$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы оценка*

$$\left\| \widehat{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{s/2} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon^2 \quad (11.2)$$

выполнялась при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Достаточно считать, что $2 \leq s < 6$. Рассуждаем от противного. Предположим, что для некоторых $\tau \neq 0$ и $2 \leq s < 6$ найдется постоянная $\mathcal{C}(\tau) > 0$ такая, что выполнена оценка (11.2) при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$. Домножая оператор под знаком нормы в (11.2) на \widehat{P} и используя (10.2), убеждаемся, что выполнена оценка

$$\left\| \widehat{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) \widehat{P} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \frac{\varepsilon^s}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon^2 \quad (11.3)$$

при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

С учетом (10.15) оператор под знаком нормы в (11.3) имеет вид

$$\begin{aligned} \widehat{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) \widehat{P} &= e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})} (I + \Lambda b(\mathbf{k})) \widehat{P} - (I + \Lambda b(\mathbf{k})) e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})} \widehat{P} \\ &\quad + i\varepsilon^{-2} \int_0^\tau e^{-i\varepsilon^{-2}(\tau-\tilde{\tau})\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})} b(\mathbf{k})^* L(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}) e^{-i\varepsilon^{-2}\tilde{\tau}\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})} \widehat{P} d\tilde{\tau}. \end{aligned}$$

Пусть $|\mathbf{k}| \leq \widehat{t}_0$. В силу (1.15), (1.17), (1.21) и (10.9)

$$\left\| \widehat{F}(\mathbf{k}) \widehat{P} - (I + \Lambda b(\mathbf{k})) \widehat{P} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \widehat{C}_3 |\mathbf{k}|^2. \quad (11.4)$$

Из (11.3) и (11.4) вытекает, что для некоторой постоянной $\widetilde{\mathcal{C}}(\tau) > 0$ выполнено неравенство

$$\left\| \widehat{\mathfrak{G}}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \frac{\varepsilon^s}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq \widetilde{\mathcal{C}}(\tau)\varepsilon^2 \quad (11.5)$$

при почти всех \mathbf{k} в шаре $|\mathbf{k}| \leq \widehat{t}_0$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$. Здесь

$$\begin{aligned} \widehat{\mathfrak{G}}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) &= e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})} \widehat{F}(\mathbf{k}) \widehat{P} - (I + \Lambda b(\mathbf{k})) e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})} \widehat{P} \\ &\quad + i\varepsilon^{-2} \int_0^\tau e^{-i\varepsilon^{-2}(\tau-\tilde{\tau})\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})} b(\mathbf{k})^* L(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}) e^{-i\varepsilon^{-2}\tilde{\tau}\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})} \widehat{P} d\tilde{\tau}. \end{aligned}$$

Заметим, что проектор \widehat{P} является спектральным проектором оператора $\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})$ для промежутка $[0, \widehat{\delta}]$. Поэтому из леммы 11.3 (в применении к $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ и $\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})$) следует, что при фиксированных τ и ε оператор $\widehat{\mathfrak{G}}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)$ непрерывен по \mathbf{k} в шаре $|\mathbf{k}| \leq \widehat{t}_0$. Следовательно, оценка (11.5) справедлива

при всех значениях \mathbf{k} из данного шара. В частности, она верна в точке $\mathbf{k} = t\theta_0$, если $t \leq \hat{t}_0$. Применяя снова (11.4), получаем, что для некоторой постоянной $\widehat{\mathcal{C}}(\tau) > 0$ справедлива оценка

$$\|\widehat{G}(t\theta_0, \varepsilon^{-2}\tau)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \frac{\varepsilon^s}{(t^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq \widehat{\mathcal{C}}(\tau)\varepsilon^2 \quad (11.6)$$

при всех $t \leq \hat{t}_0$ и достаточно малом ε .

Оценка (11.6) отвечает абстрактной оценке (4.2). Поскольку $\widehat{N}_0(\theta_0) \neq 0$ в силу условия 11.1, то выполнены условия теоремы 4.3. Применяя эту теорему, приходим к противоречию. \square

Аналогичным образом, применение теоремы 4.4 позволяет подтвердить точность теорем 10.10 и 10.11.

Теорема 11.7. *Пусть оператор $\widehat{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)$ определен в (10.15). Пусть выполнено условие 11.2. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq s < 4$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы оценка (11.2) выполнялась при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.*

Теперь мы убедимся в точности теоремы 10.12, применяя абстрактную теорему 4.6.

Теорема 11.8. *Пусть оператор $\widehat{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)$ определен в (10.14). Пусть выполнено условие 11.1. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq s < 4$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы оценка*

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \widehat{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{s/2} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon^2 \quad (11.7)$$

выполнялась при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Достаточно считать, что $2 \leq s < 4$. Рассуждаем от противного. Предположим, что для некоторых $\tau \neq 0$ и $2 \leq s < 4$ найдется постоянная $\mathcal{C}(\tau) > 0$ такая, что выполнена оценка (11.7) при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$. Домножая оператор под знаком нормы в (11.7) на \widehat{P} и используя (10.2), убеждаемся, что выполнена оценка

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \widehat{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) \widehat{P} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \frac{\varepsilon^s}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon^2 \quad (11.8)$$

при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

С учетом (10.14) оператор под знаком нормы в (11.8) имеет вид

$$\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \widehat{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) \widehat{P} = e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})} \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} (I + \Lambda b(\mathbf{k})) \widehat{P} - \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} (I + \Lambda b(\mathbf{k})) e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})} \widehat{P}.$$

Пусть $|\mathbf{k}| \leq \hat{t}_0$. В силу (1.15), (1.21), (2.38) и (10.9)

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} (\widehat{F}(\mathbf{k}) \widehat{P} - (I + \Lambda b(\mathbf{k})) \widehat{P}) \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \widehat{C}_{18} |\mathbf{k}|^2. \quad (11.9)$$

Из (11.8) и (11.9) вытекает, что для некоторой постоянной $\widetilde{\mathcal{C}}(\tau) > 0$ выполнено неравенство

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathfrak{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \frac{\varepsilon^s}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq \widetilde{\mathcal{C}}(\tau)\varepsilon^2 \quad (11.10)$$

при почти всех \mathbf{k} в шаре $|\mathbf{k}| \leq \hat{t}_0$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$. Здесь

$$\mathfrak{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) = e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})} \widehat{F}(\mathbf{k}) \widehat{P} - \widehat{F}(\mathbf{k}) e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})} \widehat{P}.$$

Из леммы 11.3 (в применении к $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ и $\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})$) следует, что при фиксированных τ и ε оператор $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathfrak{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)$ непрерывен по \mathbf{k} в шаре $|\mathbf{k}| \leq \hat{t}_0$. Следовательно, оценка (11.10) справедлива при всех значениях \mathbf{k} из данного шара. В частности, она верна в точке $\mathbf{k} = t\theta_0$, если $t \leq \hat{t}_0$. Применяя снова (11.9), получаем, что для некоторой постоянной $\widehat{\mathcal{C}}(\tau) > 0$ справедлива оценка

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \widehat{G}_0(t\theta_0, \varepsilon^{-2}\tau) \widehat{P} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \frac{\varepsilon^s}{(t^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq \widehat{\mathcal{C}}(\tau)\varepsilon^2 \quad (11.11)$$

при всех $t \leq \hat{t}_0$ и достаточно малом ε .

Оценка (11.11) отвечает абстрактной оценке (4.15). Поскольку $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ в силу условия 11.1, то выполнены условия теоремы 4.6. Применяя эту теорему, приходим к противоречию. \square

Полностью аналогично доказательству теоремы 11.8 из теоремы 4.7 выводится следующее утверждение, подтверждающее точность теорем 10.13 и 10.14.

Теорема 11.9. *Пусть оператор $\widehat{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)$ определен в (10.14). Пусть выполнено условие 11.2. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq s < 3$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau) > 0$, чтобы оценка (11.7) выполнялась при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.*

11.2. Точность результатов относительно времени. В этом пункте мы подтверждаем точность результатов §10 относительно зависимости оценок от τ (при большом $|\tau|$). Следующее утверждение показывает точность теоремы 10.1. Оно легко выводится из теоремы 4.8; см. [D1, теорема 6.10].

Теорема 11.10 ([D1]). *Пусть выполнено условие 11.1. Пусть $s \geq 3$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (11.1) при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.*

Аналогичным образом из теоремы 4.9 выводится следующее утверждение, подтверждающее точность теорем 10.3 и 10.8; см. [D1, теорема 6.11].

Теорема 11.11 ([D1]). *Пусть выполнено условие 11.2. Пусть $s \geq 2$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (11.1) при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.*

Следующий результат, подтверждающий точность теоремы 10.9, вытекает из теоремы 4.10 с помощью тех же соображений, что были использованы при доказательстве теоремы 11.6.

Теорема 11.12. *Пусть выполнено условие 11.1. Пусть $s \geq 6$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/\tau^2 = 0$ и выполнена оценка (11.2) при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.*

Аналогичным образом из теоремы 4.11 выводится следующее утверждение, демонстрирующее точность теорем 10.10 и 10.11.

Теорема 11.13. *Пусть выполнено условие 11.2. Пусть $s \geq 4$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (11.2) при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.*

По аналогии с доказательством теоремы 11.8 из теоремы 4.13 выводится следующее утверждение, подтверждающее точность теоремы 10.12.

Теорема 11.14. *Пусть выполнено условие 11.1. Пусть $s \geq 4$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (11.7) при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.*

Наконец, применение теоремы 4.14 приводит к следующему утверждению, которое показывает, что теоремы 10.13 и 10.14 точны.

Теорема 11.15. *Пусть выполнено условие 11.2. Пусть $s \geq 3$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (11.7) при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.*

§ 12. ОПЕРАТОР $\mathcal{A}(\mathbf{k})$. ПРИМЕНЕНИЕ СХЕМЫ §5

12.1. Применение схемы §5 к оператору $\mathcal{A}(\mathbf{k})$. Оператор $\mathcal{A}(\mathbf{k}) = f^* \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) f$ изучается на основании схемы §5. Сейчас $\mathfrak{H} = \widehat{\mathfrak{H}} = L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$, $\mathfrak{H}_* = L_2(\Omega; \mathbb{C}^m)$, роль оператора $A(t)$ играет

$A(t, \boldsymbol{\theta}) = \mathcal{A}(\mathbf{k})$, роль оператора $\widehat{A}(t)$ играет $\widehat{A}(t, \boldsymbol{\theta}) = \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$. В качестве изоморфизма M выступает оператор умножения на матричнозначную функцию $f(\mathbf{x})$. Оператор Q является оператором умножения на матрицу-функцию

$$Q(\mathbf{x}) = (f(\mathbf{x})f(\mathbf{x})^*)^{-1}.$$

Блок оператора Q в подпространстве $\widehat{\mathfrak{N}}$ (см. (9.2)) — это оператор умножения на постоянную матрицу

$$\overline{Q} = (\underline{ff^*})^{-1} = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} (f(\mathbf{x})f(\mathbf{x})^*)^{-1} d\mathbf{x}.$$

Далее, M_0 есть оператор умножения на постоянную матрицу

$$f_0 = (\overline{Q})^{-1/2} = (\underline{ff^*})^{1/2}. \quad (12.1)$$

Отметим элементарные неравенства

$$|f_0| \leq \|f\|_{L_\infty}, \quad |f_0^{-1}| \leq \|f^{-1}\|_{L_\infty}. \quad (12.2)$$

В $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ определим оператор

$$\mathcal{A}^0 := f_0 \widehat{\mathcal{A}}^0 f_0 = f_0 b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) f_0. \quad (12.3)$$

Пусть $\mathcal{A}^0(\mathbf{k})$ — соответствующее операторное семейство в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$. Тогда

$$\mathcal{A}^0(\mathbf{k}) = f_0 \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) f_0 = f_0 b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{D} + \mathbf{k}) f_0 \quad (12.4)$$

при периодических граничных условиях. С учетом (9.18) справедливо тождество

$$f_0 \widehat{S}(\mathbf{k}) f_0 \widehat{P} = \mathcal{A}^0(\mathbf{k}) \widehat{P}. \quad (12.5)$$

12.2. Аналитические ветви собственных значений и собственных элементов. Согласно (5.3), спектральный росток $S(\boldsymbol{\theta})$ оператора $A(t, \boldsymbol{\theta})$, действующий в подпространстве \mathfrak{N} (см. (8.17)), представляется в виде

$$S(\boldsymbol{\theta}) = P f^* b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta}) f|_{\mathfrak{N}},$$

где P — ортопроектор пространства $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ на \mathfrak{N} . Положим $S(\mathbf{k}) := t^2 S(\boldsymbol{\theta}) = P f^* b(\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{k}) f|_{\mathfrak{N}}$.

Аналитические (по t) ветви собственных значений $\lambda_l(t, \boldsymbol{\theta})$ и собственных элементов $\varphi_l(t, \boldsymbol{\theta})$ оператора $A(t, \boldsymbol{\theta})$ допускают степенные разложения вида (1.5), (1.6) с коэффициентами, зависящими от $\boldsymbol{\theta}$:

$$\lambda_l(t, \boldsymbol{\theta}) = \gamma_l(\boldsymbol{\theta}) t^2 + \mu_l(\boldsymbol{\theta}) t^3 + \nu_l(\boldsymbol{\theta}) t^4 + \dots, \quad l = 1, \dots, n, \quad (12.6)$$

$$\varphi_l(t, \boldsymbol{\theta}) = \omega_l(\boldsymbol{\theta}) + t \psi_l^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) + \dots, \quad l = 1, \dots, n. \quad (12.7)$$

При этом $\omega_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, \omega_n(\boldsymbol{\theta})$ образуют ортонормированный базис в подпространстве \mathfrak{N} , а векторы

$$\zeta_l(\boldsymbol{\theta}) = f \omega_l(\boldsymbol{\theta}), \quad l = 1, \dots, n,$$

образуют базис в $\widehat{\mathfrak{N}}$ (см. (9.2)), ортонормированный с весом: $(\overline{Q} \zeta_l(\boldsymbol{\theta}), \zeta_j(\boldsymbol{\theta})) = \delta_{jl}$, $j, l = 1, \dots, n$.

Числа $\gamma_l(\boldsymbol{\theta})$ и элементы $\omega_l(\boldsymbol{\theta})$ являются собственными для спектрального ростка $S(\boldsymbol{\theta})$. Однако, удобнее перейти к обобщенной спектральной задаче для $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$. Согласно (5.12) числа $\gamma_l(\boldsymbol{\theta})$ и элементы $\zeta_l(\boldsymbol{\theta})$ являются собственными значениями и собственными элементами следующей обобщенной спектральной задачи:

$$b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta}) \zeta_l(\boldsymbol{\theta}) = \gamma_l(\boldsymbol{\theta}) \overline{Q} \zeta_l(\boldsymbol{\theta}), \quad l = 1, \dots, n. \quad (12.8)$$

12.3. **Операторы $\widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})$, $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})$.** Операторы \widehat{Z}_Q , \widehat{N}_Q (определенные в абстрактных терминах в п. 5.2) сейчас зависят от $\boldsymbol{\theta}$. Для их описания введем Г-периодическое решение $\Lambda_Q(\mathbf{x})$ задачи

$$b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda_Q(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) = 0, \quad \int_{\Omega} Q(\mathbf{x})\Lambda_Q(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \quad (12.9)$$

Ясно, что $\Lambda_Q(\mathbf{x})$ отличается от периодического решения $\Lambda(\mathbf{x})$ задачи (9.8) на постоянное слагаемое:

$$\Lambda_Q(\mathbf{x}) = \Lambda(\mathbf{x}) + \Lambda_Q^0, \quad \Lambda_Q^0 = -(\overline{Q})^{-1}(\overline{Q}\Lambda). \quad (12.10)$$

Как проверено в [BSu3, §5], операторы $\widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})$ сейчас принимают вид

$$\widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta}) = [\Lambda_Q]b(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}, \quad (12.11)$$

$$\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^*L_Q(\boldsymbol{\theta})b(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}, \quad (12.12)$$

где $L_Q(\boldsymbol{\theta})$ — $(m \times m)$ -матрица, заданная соотношением

$$L_Q(\boldsymbol{\theta}) = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} (\Lambda_Q(\mathbf{x})^*b(\boldsymbol{\theta})^*\tilde{g}(\mathbf{x}) + \tilde{g}(\mathbf{x})^*b(\boldsymbol{\theta})\Lambda_Q(\mathbf{x})) d\mathbf{x}. \quad (12.13)$$

Сопоставляя (12.10), (12.13) с (9.12), (9.25), убеждаемся, что справедливо равенство

$$L_Q(\boldsymbol{\theta}) = L(\boldsymbol{\theta}) + L_Q^0(\boldsymbol{\theta}), \quad L_Q^0(\boldsymbol{\theta}) = (\Lambda_Q^0)^*b(\boldsymbol{\theta})^*g^0 + g^0b(\boldsymbol{\theta})\Lambda_Q^0.$$

Отметим, что эрмитова матрица-функция $L_Q(\mathbf{k}) := tL_Q(\boldsymbol{\theta})$, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$, однородна первой степени. Положим $\widehat{N}_Q(\mathbf{k}) := t^3\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})$, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$. Тогда

$$\widehat{N}_Q(\mathbf{k}) = b(\mathbf{k})^*L_Q(\mathbf{k})b(\mathbf{k})\widehat{P}. \quad (12.14)$$

Матрица-функция $b(\mathbf{k})^*L_Q(\mathbf{k})b(\mathbf{k})$ является однородным многочленом третьей степени от $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$. Отсюда следует, что либо $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) = 0$ тождественно по $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$, либо $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) \neq 0$ в “большинстве” точек $\boldsymbol{\theta}$ (за исключением точек, являющихся корнями этого многочлена).

В [BSu3, §5] указаны некоторые достаточные условия, при которых оператор (12.12) обращается в ноль.

Предложение 12.1 ([BSu3]). *Пусть выполнено хотя бы одно из следующих предположений:*
 1°. *Оператор \mathcal{A} имеет вид $\mathcal{A} = f(\mathbf{x})^*\mathbf{D}^*g(\mathbf{x})\mathbf{D}f(\mathbf{x})$, где $g(\mathbf{x})$ — симметричная матрица с вещественными элементами.*
 2°. *Выполнены соотношения (9.20), т. е. $g^0 = \bar{g}$.*
Тогда $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Напомним (см. п. 5.2), что справедливо представление $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) + \widehat{N}_{*,Q}(\boldsymbol{\theta})$. Согласно (5.14)

$$\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{l=1}^n \mu_l(\boldsymbol{\theta})(\cdot, \overline{Q}\zeta_l(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)} \overline{Q}\zeta_l(\boldsymbol{\theta}).$$

При этом

$$(\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})\zeta_l(\boldsymbol{\theta}), \zeta_l(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)} = (\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta})\zeta_l(\boldsymbol{\theta}), \zeta_l(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)} = \mu_l(\boldsymbol{\theta}), \quad l = 1, \dots, n. \quad (12.15)$$

Предположим теперь, что $b(\boldsymbol{\theta})$, $g(\mathbf{x})$ и $Q(\mathbf{x})$ — матрицы с вещественными элементами. Тогда матрица $\Lambda_Q(\mathbf{x})$ (см. (12.9)) имеет чисто мнимые элементы, а $\tilde{g}(\mathbf{x})$ и g^0 — вещественные матрицы. В этом случае $L_Q(\boldsymbol{\theta})$ (см. (12.13)) и $b(\boldsymbol{\theta})^*L_Q(\boldsymbol{\theta})b(\boldsymbol{\theta})$ — эрмитовы матрицы с чисто мнимыми элементами. Если аналитические ветви собственных значений $\lambda_l(t, \boldsymbol{\theta})$ и аналитические ветви собственных векторов $\varphi_l(t, \boldsymbol{\theta})$ оператора $A(t, \boldsymbol{\theta})$ можно выбрать так, чтобы векторы $\zeta_l(\boldsymbol{\theta}) = f\omega_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = 1, \dots, n$, оказались вещественными, то в силу (12.15) выполнено $\mu_l(\boldsymbol{\theta}) = 0$, $l = 1, \dots, n$, то есть $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$. Мы приходим к следующему утверждению.

Предложение 12.2. Пусть $b(\boldsymbol{\theta})$, $g(\mathbf{x})$ и $Q(\mathbf{x})$ — матрицы с вещественными элементами. Пусть в разложениях (12.7) для аналитических ветвей собственных векторов оператора $A(t, \boldsymbol{\theta})$ “зародыши” $\omega_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = 1, \dots, n$, можно выбрать так, чтобы векторы $\zeta_l(\boldsymbol{\theta}) = f\omega_l(\boldsymbol{\theta})$ оказались вещественными. Тогда в (12.6) выполнено $\mu_l(\boldsymbol{\theta}) = 0$, $l = 1, \dots, n$, то есть, $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

В рассматриваемом “вещественном” случае росток $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$ представляет собой симметричную вещественную матрицу; матрица \overline{Q} тоже вещественна и симметрична. Ясно, что в случае простого собственного значения $\gamma_j(\boldsymbol{\theta})$ обобщенной задачи (12.8) собственный вектор $\zeta_j(\boldsymbol{\theta}) = f\omega_j(\boldsymbol{\theta})$ определяется однозначно с точностью до фазового множителя, и его всегда можно выбрать вещественным. Мы получаем следующее следствие.

Следствие 12.3. Пусть $b(\boldsymbol{\theta})$, $g(\mathbf{x})$ и $Q(\mathbf{x})$ — матрицы с вещественными элементами. Пусть обобщенная спектральная задача (12.8) имеет простой спектр. Тогда $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

12.4. Операторы $\widehat{Z}_{2,Q}(\boldsymbol{\theta})$, $\widehat{R}_{2,Q}(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{N}_{1,Q}^0(\boldsymbol{\theta})$. Опишем операторы $\widehat{Z}_{2,Q}$, $\widehat{R}_{2,Q}$ и $\widehat{N}_{1,Q}^0$ (в абстрактных терминах определенные в п. 5.3) для семейства $A(t, \boldsymbol{\theta})$. Сейчас эти операторы зависят от параметра $\boldsymbol{\theta}$. Пусть $\Lambda_{l,Q}^{(2)}(\mathbf{x})$ — Г-периодическое решение задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) (b(\mathbf{D}) \Lambda_{l,Q}^{(2)}(\mathbf{x}) + b_l \Lambda_Q(\mathbf{x})) = -b_l^* \tilde{g}(\mathbf{x}) + Q(\mathbf{x}) (\overline{Q})^{-1} b_l^* g^0, \quad \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}) \Lambda_{l,Q}^{(2)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

Положим

$$\Lambda_Q^{(2)}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) := \sum_{l=1}^d \Lambda_{l,Q}^{(2)}(\mathbf{x}) \theta_l.$$

Как проверено в [VSu2, п. 8.4],

$$\widehat{Z}_{2,Q}(\boldsymbol{\theta}) = [\Lambda_Q^{(2)}(\cdot; \boldsymbol{\theta})] b(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P}, \quad \widehat{R}_{2,Q}(\boldsymbol{\theta}) = [h(b(\mathbf{D}) \Lambda_Q^{(2)}(\cdot; \boldsymbol{\theta}) + b(\boldsymbol{\theta}) \Lambda_Q)] b(\boldsymbol{\theta}).$$

Наконец, в [VSu2, п. 8.5] было получено представление

$$\begin{aligned} \widehat{N}_{1,Q}^0(\boldsymbol{\theta}) &= b(\boldsymbol{\theta})^* L_{2,Q}(\boldsymbol{\theta}) b(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P}, \\ L_{2,Q}(\boldsymbol{\theta}) &= |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \left(\Lambda_Q^{(2)}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta})^* \tilde{g}(\mathbf{x}) + \tilde{g}(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta}) \Lambda_Q^{(2)}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) \right) d\mathbf{x} \\ &\quad + |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \left(b(\mathbf{D}) \Lambda_Q^{(2)}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) + b(\boldsymbol{\theta}) \Lambda_Q(\mathbf{x}) \right)^* g(\mathbf{x}) \left(b(\mathbf{D}) \Lambda_Q^{(2)}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) + b(\boldsymbol{\theta}) \Lambda_Q(\mathbf{x}) \right) d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{12.16}$$

12.5. Кратности собственных значений ростка. В данном пункте считаем, что $n \geq 2$. Перейдем к обозначениям, принятым в п. 1.7, следя за кратностями собственных значений спектрального ростка $S(\boldsymbol{\theta})$. Эти же значения являются собственными числами обобщенной задачи (12.8). Вообще говоря, количество $p(\boldsymbol{\theta})$ различных собственных значений $\gamma_1^\circ(\boldsymbol{\theta}), \dots, \gamma_{p(\boldsymbol{\theta})}^\circ(\boldsymbol{\theta})$ спектрального ростка $S(\boldsymbol{\theta})$ и их кратности $k_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, k_{p(\boldsymbol{\theta})}(\boldsymbol{\theta})$ зависят от параметра $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. При каждом фиксированном $\boldsymbol{\theta}$ через $\mathfrak{N}_j(\boldsymbol{\theta})$ обозначим собственное подпространство ростка $S(\boldsymbol{\theta})$, отвечающее собственному значению $\gamma_j^\circ(\boldsymbol{\theta})$. Тогда $f\mathfrak{N}_j(\boldsymbol{\theta}) = \text{Ker}(\widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) - \gamma_j^\circ(\boldsymbol{\theta}) \overline{Q}) =: \widehat{\mathfrak{N}}_{j,Q}(\boldsymbol{\theta})$ — собственное подпространство задачи (12.8), отвечающее тому же значению $\gamma_j^\circ(\boldsymbol{\theta})$. Введем обозначение $\mathcal{P}_j(\boldsymbol{\theta})$ для “косого” проектора пространства $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ на подпространство $\widehat{\mathfrak{N}}_{j,Q}(\boldsymbol{\theta})$; $\mathcal{P}_j(\boldsymbol{\theta})$ ортогонален относительно скалярного произведения с весом \overline{Q} .

Согласно (5.15) справедливы инвариантные представления для операторов $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{N}_{*,Q}(\boldsymbol{\theta})$:

$$\begin{aligned}\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{j=1}^{p(\boldsymbol{\theta})} \mathcal{P}_j(\boldsymbol{\theta})^* \widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) \mathcal{P}_j(\boldsymbol{\theta}), \\ \widehat{N}_{*,Q}(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{\substack{1 \leq j, l \leq p(\boldsymbol{\theta}): \\ j \neq l}} \mathcal{P}_j(\boldsymbol{\theta})^* \widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) \mathcal{P}_l(\boldsymbol{\theta}).\end{aligned}\quad (12.17)$$

12.6. Коэффициенты $\nu_l(\boldsymbol{\theta})$. Коэффициенты $\nu_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = 1, \dots, n$, в разложениях (12.6) являются собственными значениями некоторой задачи. Нам понадобится описать эту задачу в случае, когда $\mu_l(\boldsymbol{\theta}) = 0$, $l = 1, \dots, n$, то есть, $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$. Применяя предложение 5.3, приходим к следующему утверждению. См. также [DSu2, предложение 11.4].

Предложение 12.4. Пусть $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$. Пусть $\gamma_1^\circ(\boldsymbol{\theta}), \dots, \gamma_{p(\boldsymbol{\theta})}^\circ(\boldsymbol{\theta})$ – различные собственные значения задачи (12.8), а $k_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, k_{p(\boldsymbol{\theta})}(\boldsymbol{\theta})$ – их кратности. Пусть $\widehat{P}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta})$ – ортопроекtor пространства $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ на подпространство $\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta}) = \text{Ker}(\widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) - \gamma_q^\circ(\boldsymbol{\theta})\overline{Q})$, $q = 1, \dots, p(\boldsymbol{\theta})$. Пусть операторы $\widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})$, $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{N}_{1,Q}^0(\boldsymbol{\theta})$ определены в (12.11), (12.12) и (12.16), соответственно. Введем операторы $\widehat{N}_Q^{(q)}(\boldsymbol{\theta})$, $q = 1, \dots, p(\boldsymbol{\theta})$: оператор $\widehat{N}_Q^{(q)}(\boldsymbol{\theta})$ действует в $\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta})$ и задается выражением

$$\begin{aligned}\widehat{N}_Q^{(q)}(\boldsymbol{\theta}) := \widehat{P}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta}) &\left(\widehat{N}_{1,Q}^0(\boldsymbol{\theta}) - \frac{1}{2} \widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})^* Q \widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta}) Q^{-1} \widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P} - \frac{1}{2} \widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P} Q^{-1} \widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})^* Q \widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta}) \right) \Big|_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta})} \\ &+ \sum_{j=1, \dots, p(\boldsymbol{\theta}): j \neq q} (\gamma_q^\circ(\boldsymbol{\theta}) - \gamma_j^\circ(\boldsymbol{\theta}))^{-1} \widehat{P}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta}) \widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P}_{j,Q}(\boldsymbol{\theta}) Q^{-1} \widehat{P}_{j,Q}(\boldsymbol{\theta}) \widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta})}.\end{aligned}\quad (12.18)$$

Обозначим $i(q, \boldsymbol{\theta}) = k_1(\boldsymbol{\theta}) + \dots + k_{q-1}(\boldsymbol{\theta}) + 1$. Пусть $\nu_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = 1, \dots, n$, – коэффициенты при t^4 из разложений (12.6), $\omega_l(\boldsymbol{\theta})$ – зародыша из (12.7), и пусть $\zeta_l(\boldsymbol{\theta}) = f\omega_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = 1, \dots, n$. Обозначим $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta})} = \widehat{P}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta})Q|_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta})}$. Тогда

$$\widehat{N}_Q^{(q)}(\boldsymbol{\theta}) \zeta_l(\boldsymbol{\theta}) = \nu_l(\boldsymbol{\theta}) Q_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta})} \zeta_l(\boldsymbol{\theta}), \quad l = i(q, \boldsymbol{\theta}), i(q, \boldsymbol{\theta}) + 1, \dots, i(q, \boldsymbol{\theta}) + k_q(\boldsymbol{\theta}) - 1.$$

§ 13. АППРОКСИМАЦИЯ ОКАЙМЛЕННОГО ОПЕРАТОРА $e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})}$

13.1. Аппроксимация по операторной норме в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$. Общий случай. Положим

$$\mathcal{J}(\mathbf{k}, \tau) := fe^{-i\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})}f^{-1} - f_0e^{-i\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})}f_0^{-1}. \quad (13.1)$$

Мы применим к оператору $A(t, \boldsymbol{\theta}) = \mathcal{A}(\mathbf{k})$ теоремы из §6. В силу замечания 3.10 мы можем отследить зависимость постоянных в оценках от данных задачи. Отметим, что c_* , δ и t_0 не зависят от $\boldsymbol{\theta}$ (см. (8.15), (8.24), (8.26)). Согласно (8.25) норму $\|X_1(\boldsymbol{\theta})\|$ можно заменить на $\alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|f\|_{L_\infty}$. Поэтому постоянные из теоремы 6.2 (примененной к оператору $\mathcal{A}(\mathbf{k})$) не будут зависеть от $\boldsymbol{\theta}$. Они будут зависеть только от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Теорема 13.1 ([BSu5]). Пусть оператор $\mathcal{J}(\mathbf{k}, \tau)$ определен в (13.1). При $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ выполнена оценка

$$\|\mathcal{J}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_1(1 + |\tau|)\varepsilon. \quad (13.2)$$

Постоянная C_1 зависит лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Теорема 13.1 выводится из теоремы 6.2 и соотношений (10.2)–(10.4). Следует учесть также равенство

$$e^{-i\varepsilon^{-2}\tau t^2 f_0 \widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) f_0} \widehat{P} = e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})} \widehat{P}, \quad (13.3)$$

вытекающее из (12.5), и очевидную оценку (см. (12.2))

$$\|\mathcal{J}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq 2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}. \quad (13.4)$$

Ранее оценка (13.2) была получена в [BSu5, теорема 8.1].

13.2. Аппроксимация по операторной норме в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$. Усиление результатов при дополнительных предположениях. Теперь мы усиливаем результат теоремы 13.1 при дополнительных предположениях. Наложим следующее условие.

Условие 13.2. Пусть оператор $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})$ определен в (12.12). Предположим, что $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Из теоремы 6.3 выводится следующий результат, установленный в [D1, теорема 8.2].

Теорема 13.3 ([D1]). Пусть оператор $\mathcal{J}(\mathbf{k}, \tau)$ определен в (13.1). Пусть выполнено условие 13.2. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ справедлива оценка

$$\|\mathcal{J}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mathcal{C}_2(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon.$$

Постоянная \mathcal{C}_2 зависит лишь от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Теперь мы отказываемся от условия 13.2, но взамен предположим, что $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta}$. При этом считаем, что $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{N}_{*,Q}(\boldsymbol{\theta}) \neq 0$ при некотором $\boldsymbol{\theta}$, а тогда и в “большинстве” точек $\boldsymbol{\theta}$. (Иначе применима теорема 13.3.) Как и в п. 10.2, для того, чтобы применить “абстрактную” теорему 6.4, приходится накладывать дополнительные условия. Используем исходную нумерацию собственных значений $\gamma_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, \gamma_n(\boldsymbol{\theta})$ ростка $S(\boldsymbol{\theta})$ (каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность), условившись нумеровать их в порядке неубывания:

$$\gamma_1(\boldsymbol{\theta}) \leq \gamma_2(\boldsymbol{\theta}) \leq \dots \leq \gamma_n(\boldsymbol{\theta}). \quad (13.5)$$

Как уже отмечалось, числа (13.5) одновременно являются собственными значениями обобщенной спектральной задачи (12.8). При каждом $\boldsymbol{\theta}$ через $\mathcal{P}^{(k)}(\boldsymbol{\theta})$ обозначим “косой” (ортогональный с весом \overline{Q}) проектор пространства $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ на собственное подпространство задачи (12.8), отвечающее собственному значению $\gamma_k(\boldsymbol{\theta})$. Ясно, что при каждом $\boldsymbol{\theta}$ оператор $\mathcal{P}^{(k)}(\boldsymbol{\theta})$ совпадает с одним из проекторов $\mathcal{P}_j(\boldsymbol{\theta})$, введенных в п. 12.5 (но номер j может зависеть от $\boldsymbol{\theta}$ и меняется в точках перемены кратности спектра ростка).

Условие 13.4. 1°. Оператор $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta})$, определенный в (12.17), равен нулю: $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. 2°. Для каждой пары индексов $(k, r), 1 \leq k, r \leq n, k \neq r$, такой что $\gamma_k(\boldsymbol{\theta}_0) = \gamma_r(\boldsymbol{\theta}_0)$ при некотором $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$, выполнено $(\mathcal{P}^{(k)}(\boldsymbol{\theta}))^* \widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) \mathcal{P}^{(r)}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Условие 2° может быть переформулировано: мы требуем, чтобы для ненулевых (тождественно) “блоков” $(\mathcal{P}^{(k)}(\boldsymbol{\theta}))^* \widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) \mathcal{P}^{(r)}(\boldsymbol{\theta})$ оператора $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})$ соответствующие ветви собственных значений $\gamma_k(\boldsymbol{\theta})$ и $\gamma_r(\boldsymbol{\theta})$ не пересекались. Разумеется, выполнение условия 13.4 гарантируется следующим более сильным условием.

Условие 13.5. 1°. Оператор $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta})$, определенный в (12.17), равен нулю: $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. 2°. Предположим, что количество r различных собственных значений обобщенной спектральной задачи (12.8) не зависит от $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Замечание 13.6. Предположение пункта 2° условия 13.5 заведомо выполнено, если спектр задачи (12.8) простой при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Итак, предполагаем выполненным условие 13.4. Нас интересуют только пары индексов из множества

$$\mathcal{K} := \{(k, r) : 1 \leq k, r \leq n, k \neq r, (\mathcal{P}^{(k)}(\boldsymbol{\theta}))^* \widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) \mathcal{P}^{(r)}(\boldsymbol{\theta}) \neq 0\}.$$

Введем обозначение

$$c_{kr}^\circ(\boldsymbol{\theta}) := \min\{c_*, n^{-1}|\gamma_k(\boldsymbol{\theta}) - \gamma_r(\boldsymbol{\theta})|\}, \quad (k, r) \in \mathcal{K}.$$

Поскольку оператор $S(\boldsymbol{\theta})$ непрерывно зависит от $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$ (это многочлен второй степени), то из теории возмущений дискретного спектра следует, что $\gamma_j(\boldsymbol{\theta})$ — непрерывные функции на сфере \mathbb{S}^{d-1} . В силу условия 13.4(2°) при $(k, r) \in \mathcal{K}$ выполнено $|\gamma_k(\boldsymbol{\theta}) - \gamma_r(\boldsymbol{\theta})| > 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$, а тогда

$$c_{kr}^\circ := \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}} c_{kr}^\circ(\boldsymbol{\theta}) > 0, \quad (k, r) \in \mathcal{K}.$$

Положим

$$c^\circ := \min_{(k, r) \in \mathcal{K}} c_{kr}^\circ. \quad (13.6)$$

Ясно, что число (13.6) — это реализация величины (2.6), выбранная не зависящей от $\boldsymbol{\theta}$. Число t^{00} , подчиненное (2.7), при условии 13.4 также можно выбрать не зависящим от $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. С учетом (8.24) и (8.25) положим

$$t^{00} = (8\beta_2)^{-1} r_0 \alpha_1^{-3/2} \alpha_0^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{-3/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1/2} \|f\|_{L_\infty}^{-3} \|f^{-1}\|_{L_\infty}^{-1} c^\circ,$$

где c° определено в (13.6). (Условие $t^{00} \leq t_0$ выполнено автоматически, поскольку $c^\circ \leq \|S(\boldsymbol{\theta})\| \leq \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|f\|_{L_\infty}^2$.)

При условии 13.4 из теоремы 6.4 выводим следующий результат (см. [D1, теорема 8.6]). Следует учитывать, что сейчас константы в оценках будут зависеть не только от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 , но также и от c° и n ; см. замечание 3.10.

Теорема 13.7 ([D1]). *Пусть оператор $\mathcal{J}(\mathbf{k}, \tau)$ определен в (13.1). Пусть выполнено условие 13.4 (или более сильное условие 13.5). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ выполнена оценка*

$$\|\mathcal{J}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mathcal{C}_3(1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon.$$

Постоянная \mathcal{C}_3 зависит от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}, r_0$, а также от c° и n .

13.3. Более точная аппроксимация по операторной норме в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$. Получим теперь более точную аппроксимацию окаймленной операторной экспоненты для оператора $A(t, \boldsymbol{\theta}) = \mathcal{A}(\mathbf{k})$ с помощью теоремы 6.6.

В силу (12.11) имеем

$$t\widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})\widehat{P} = \Lambda_Q b(\mathbf{k})\widehat{P} = \Lambda_Q b(\mathbf{D} + \mathbf{k})\widehat{P}. \quad (13.7)$$

Из (12.14) следует, что

$$t^3 \widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})\widehat{P} = \widehat{N}_Q(\mathbf{k})\widehat{P} = b(\mathbf{k})^* L_Q(\mathbf{k}) b(\mathbf{k})\widehat{P} = b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* L_Q(\mathbf{D} + \mathbf{k}) b(\mathbf{D} + \mathbf{k})\widehat{P}. \quad (13.8)$$

Отметим, что из (5.7)–(5.9) и (8.25) вытекают оценки

$$\|\widehat{X}_0 \widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \|X_1(\boldsymbol{\theta})\| \|f^{-1}\|_{L_\infty} \leq \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty}, \quad (13.9)$$

$$\begin{aligned} \|\widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq (8\delta)^{-1/2} \|X_1(\boldsymbol{\theta})\| \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty} \\ &\leq (8\delta)^{-1/2} \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|f\|_{L_\infty}^2 \|f^{-1}\|_{L_\infty} =: C_Z, \end{aligned} \quad (13.10)$$

$$\begin{aligned} \|\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq (2\delta)^{-1/2} \|X_1(\boldsymbol{\theta})\|^3 \|f^{-1}\|_{L_\infty}^2 \\ &\leq (2\delta)^{-1/2} \alpha_1^{3/2} \|g\|_{L_\infty}^{3/2} \|f\|_{L_\infty}^3 \|f^{-1}\|_{L_\infty}^2 =: C_N. \end{aligned} \quad (13.11)$$

Положим

$$\mathcal{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) := f e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})} f^{-1} \left(I + \Lambda_Q b(\mathbf{D} + \mathbf{k})\widehat{P} \right) - \left(I + \Lambda_Q b(\mathbf{D} + \mathbf{k})\widehat{P} \right) f_0 e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})} f_0^{-1}, \quad (13.12)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) &:= f e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})} f^{-1} \left(I + \Lambda_Q b(\mathbf{D} + \mathbf{k})\widehat{P} \right) - \left(I + \Lambda_Q b(\mathbf{D} + \mathbf{k})\widehat{P} \right) f_0 e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})} f_0^{-1} \\ &\quad + i\varepsilon^{-2} \int_0^\tau f_0 e^{-i\varepsilon^{-2}(\tau-\tilde{\tau})\mathcal{A}^0(\mathbf{k})} f_0 b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* L_Q(\mathbf{D} + \mathbf{k}) b(\mathbf{D} + \mathbf{k}) f_0 e^{-i\varepsilon^{-2}\tilde{\tau}\mathcal{A}^0(\mathbf{k})} f_0^{-1} d\tilde{\tau}. \end{aligned} \quad (13.13)$$

Оператор (13.12) ограничен, а оператор (13.13) в общем случае определен на $\widetilde{H}^3(\Omega; \mathbb{C}^n)$.

Представим операторы (13.12), (13.13) в виде

$$\mathcal{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) = \mathcal{J}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) + \mathcal{G}^{(2)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau), \quad (13.14)$$

$$\mathcal{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) = \mathcal{J}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) + \mathcal{G}^{(2)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) + \mathcal{G}^{(3)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau), \quad (13.15)$$

где

$$\mathcal{G}^{(2)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) := fe^{-i\varepsilon^{-2}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})}f^{-1}\Lambda_Q b(\mathbf{D} + \mathbf{k})\widehat{P} - \Lambda_Q b(\mathbf{D} + \mathbf{k})\widehat{P}f_0e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})}f_0^{-1}, \quad (13.16)$$

$$\mathcal{G}^{(3)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) := i\varepsilon^{-2} \int_0^\tau f_0e^{-i\varepsilon^{-2}(\tau-\tilde{\tau})\mathcal{A}^0(\mathbf{k})}f_0b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^*L_Q(\mathbf{D} + \mathbf{k})b(\mathbf{D} + \mathbf{k})f_0e^{-i\varepsilon^{-2}\tilde{\tau}\mathcal{A}^0(\mathbf{k})}f_0^{-1}d\tilde{\tau}. \quad (13.17)$$

Из (12.2), (13.4), (13.7), (13.8), (13.10), (13.11), (13.14)–(13.17) при $\varepsilon > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ следуют оценки

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}^{(2)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leqslant 2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}|\mathbf{k}|\|\widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ &\leqslant 2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}C_Z|\mathbf{k}|, \end{aligned} \quad (13.18)$$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}^{(3)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leqslant \varepsilon^{-2}|\tau||\mathbf{k}|^3\|f\|_{L_\infty}^3\|f^{-1}\|_{L_\infty}\|\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ &\leqslant \|f\|_{L_\infty}^3\|f^{-1}\|_{L_\infty}C_N\varepsilon^{-2}|\tau||\mathbf{k}|^3, \end{aligned}$$

$$\|\mathcal{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leqslant 2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}(1 + C_Z|\mathbf{k}|), \quad (13.19)$$

$$\|\mathcal{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}(2 + 2C_Z|\mathbf{k}| + C_N\|f\|_{L_\infty}^2\varepsilon^{-2}|\tau||\mathbf{k}|^3). \quad (13.20)$$

Применяя теорему 6.6 и учитывая замечание 3.10 и соотношения (10.2), (13.3), (13.7), (13.8), получаем

$$\|\mathcal{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^3\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}'_4(1 + |\tau|)^2\varepsilon^2, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, |\mathbf{k}| \leqslant t_0. \quad (13.21)$$

Константа \mathcal{C}'_4 зависит только от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Оценки при $|\mathbf{k}| > t_0$ тривиальны. С учетом (10.2) и (13.20) выполнена оценка

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^3\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ &\leqslant \|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}(2 + 2C_Z|\mathbf{k}| + C_N\|f\|_{L_\infty}^2\varepsilon^{-2}|\tau||\mathbf{k}|^3) \frac{\varepsilon^6}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^3} \\ &\leqslant \|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}(2t_0^{-2} + C_Zt_0^{-1} + C_N\|f\|_{L_\infty}^2t_0^{-1}|\tau|)\varepsilon^2, \\ &\quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}, |\mathbf{k}| > t_0. \end{aligned} \quad (13.22)$$

Комбинируя (13.21) и (13.22), приходим к оценке

$$\|\mathcal{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^3\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}''_4(1 + |\tau|)^2\varepsilon^2, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}. \quad (13.23)$$

Константа \mathcal{C}''_4 зависит только от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Оценим теперь оператор

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^3(I - \widehat{P}) &= \left(fe^{-i\varepsilon^{-2}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})}f^{-1} - f_0e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})}f_0^{-1}\right)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^3(I - \widehat{P}) \\ &+ i\varepsilon^{-2} \int_0^\tau f_0e^{-i\varepsilon^{-2}(\tau-\tilde{\tau})\mathcal{A}^0(\mathbf{k})}f_0b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^*L_Q(\mathbf{D} + \mathbf{k})b(\mathbf{D} + \mathbf{k})f_0\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^3(I - \widehat{P})e^{-i\varepsilon^{-2}\tilde{\tau}\mathcal{A}^0(\mathbf{k})}f_0^{-1}d\tilde{\tau}. \end{aligned}$$

Норма первого слагаемого не превосходит $2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}r_0^{-2}\varepsilon^2$ в силу (10.4), (10.6) и (13.4). Второе слагаемое легко оценить, используя дискретное преобразование Фурье. Его норма не

превосходит величины

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-2} |\tau| \|f\|_{L_\infty}^3 \|f^{-1}\|_{L_\infty} \|b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* L_Q(\mathbf{D} + \mathbf{k}) b(\mathbf{D} + \mathbf{k}) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^3 (I - \hat{P})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ &= \varepsilon^{-2} |\tau| \|f\|_{L_\infty}^3 \|f^{-1}\|_{L_\infty} \sup_{0 \neq \mathbf{b} \in \tilde{\Gamma}} |b(\mathbf{b} + \mathbf{k})^* L_Q(\mathbf{b} + \mathbf{k}) b(\mathbf{b} + \mathbf{k})| \frac{\varepsilon^6}{(|\mathbf{b} + \mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^3} \\ &\leq C_N \|f\|_{L_\infty}^3 \|f^{-1}\|_{L_\infty} |\tau| \sup_{0 \neq \mathbf{b} \in \tilde{\Gamma}} \frac{\varepsilon^4 |\mathbf{b} + \mathbf{k}|^3}{(|\mathbf{b} + \mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^3} \leq C_N \|f\|_{L_\infty}^3 \|f^{-1}\|_{L_\infty} r_0^{-1} |\tau| \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Мы учли (12.2) и (13.11). В итоге получаем:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2} \tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^3 (I - \hat{P})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty} (2r_0^{-2} + C_N \|f\|_{L_\infty}^2 r_0^{-1} |\tau|) \varepsilon^2, \\ \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, \mathbf{k} \in \tilde{\Omega}. \end{aligned} \quad (13.24)$$

Сопоставляя оценки (13.23) и (13.24), приходим к следующему результату.

Теорема 13.8. Пусть оператор $\mathcal{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2} \tau)$ определен в (13.13). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ выполнена оценка

$$\|\mathcal{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2} \tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^3\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mathcal{C}_4 (1 + |\tau|)^2 \varepsilon^2.$$

Постоянная \mathcal{C}_4 зависит лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Теперь на основании теорем 6.7 и 6.8 мы усилим результат теоремы 13.8 при дополнительных предположениях.

Теорема 13.9. Пусть оператор $\mathcal{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2} \tau)$ определен в (13.12). Пусть выполнено условие 13.2. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ справедлива оценка

$$\|\mathcal{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2} \tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^2\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mathcal{C}_5 (1 + |\tau|) \varepsilon^2. \quad (13.25)$$

Постоянная \mathcal{C}_5 зависит лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Доказательство. Применяя теорему 6.7 и учитывая замечание 3.10 и соотношения (10.2), (13.3), (13.7), получаем

$$\|\mathcal{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2} \tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^2 \hat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mathcal{C}'_5 (1 + |\tau|) \varepsilon^2, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, |\mathbf{k}| \leq t_0. \quad (13.26)$$

Константа \mathcal{C}'_5 зависит только от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

При $|\mathbf{k}| > t_0$ используем (10.2) и (13.19):

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2} \tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^2 \hat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq 2 \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty} (1 + C_Z |\mathbf{k}|) \frac{\varepsilon^4}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^2} \\ &\leq \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty} (2t_0^{-2} + C_Z t_0^{-1}) \varepsilon^2, \\ \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, \mathbf{k} \in \tilde{\Omega}, |\mathbf{k}| > t_0. \end{aligned} \quad (13.27)$$

Теперь рассмотрим оператор

$$\mathcal{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2} \tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^2 (I - \hat{P}) = \left(f e^{-i\varepsilon^{-2} \tau \mathcal{A}(\mathbf{k})} f^{-1} - f_0 e^{-i\varepsilon^{-2} \tau \mathcal{A}^0(\mathbf{k})} f_0^{-1} \right) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^2 (I - \hat{P}).$$

Норма этого оператора оценивается через $2 \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty} r_0^{-2} \varepsilon^2$ в силу (10.4), (10.6) и (13.4). Вместе с (13.26) и (13.27) это влечет искомую оценку (13.25). \square

Теорема 13.10. Пусть оператор $\mathcal{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2} \tau)$ определен в (13.13). Пусть выполнено условие 13.4 (или более сильное условие 13.5). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ справедлива оценка

$$\|\mathcal{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2} \tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^2\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mathcal{C}_6 (1 + |\tau|) \varepsilon^2. \quad (13.28)$$

Постоянная \mathcal{C}_6 зависит от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 , а также от n и c° .

Доказательство. Применяя теорему 6.8 и учитывая замечание 3.10 и соотношения (10.2), (13.3), (13.7), (13.8), получаем

$$\|\mathcal{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^2\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C'_6(1 + |\tau|)\varepsilon^2, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, |\mathbf{k}| \leq t^{00}. \quad (13.29)$$

Постоянная C'_6 зависит от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}, r_0$, а также от n и c° .

При $|\mathbf{k}| > t^{00}$ используем (10.2) и (13.20):

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^2\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ & \leq \|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}(2 + 2C_Z|\mathbf{k}| + C_N\|f\|_{L_\infty}^2\varepsilon^{-2}|\tau||\mathbf{k}|^3)\frac{\varepsilon^4}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^2} \\ & \leq \|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}(2(t^{00})^{-2} + C_Z(t^{00})^{-1} + C_N\|f\|_{L_\infty}^2(t^{00})^{-1}|\tau|)\varepsilon^2, \\ & \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}, |\mathbf{k}| > t^{00}. \end{aligned} \quad (13.30)$$

Рассмотрим теперь оператор

$$\begin{aligned} & \mathcal{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^2(I - \widehat{P}) = \left(f e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})}f^{-1} - f_0 e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})}f_0^{-1}\right)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^2(I - \widehat{P}) \\ & + i\varepsilon^{-2}\int_0^\tau f_0 e^{-i\varepsilon^{-2}(\tau-\tilde{\tau})\mathcal{A}^0(\mathbf{k})}f_0 b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^*L_Q(\mathbf{D} + \mathbf{k})b(\mathbf{D} + \mathbf{k})f_0 \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^2(I - \widehat{P})e^{-i\varepsilon^{-2}\tilde{\tau}\mathcal{A}^0(\mathbf{k})}f_0^{-1}d\tilde{\tau}. \end{aligned}$$

Норма первого слагаемого не превосходит $2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}r_0^{-2}\varepsilon^2$ в силу (10.4), (10.6) и (13.4). С помощью дискретного преобразования Фурье оценим норму второго слагаемого через величину

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-2}|\tau|\|f\|_{L_\infty}^3\|f^{-1}\|_{L_\infty}\sup_{0 \neq \mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma}}|b(\mathbf{b} + \mathbf{k})^*L_Q(\mathbf{b} + \mathbf{k})b(\mathbf{b} + \mathbf{k})|\frac{\varepsilon^4}{(|\mathbf{b} + \mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^2} \\ & \leq C_N\|f\|_{L_\infty}^3\|f^{-1}\|_{L_\infty}|\tau|\sup_{0 \neq \mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma}}\frac{\varepsilon^2|\mathbf{b} + \mathbf{k}|^3}{(|\mathbf{b} + \mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^2} \leq C_N\|f\|_{L_\infty}^3\|f^{-1}\|_{L_\infty}r_0^{-1}|\tau|\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Мы учли (12.2) и (13.11). Таким образом,

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^2(I - \widehat{P})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}(2r_0^{-2} + C_N\|f\|_{L_\infty}^2r_0^{-1}|\tau|)\varepsilon^2, \\ & \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}. \end{aligned} \quad (13.31)$$

Сопоставляя (13.29), (13.30) и (13.31), приходим к искомой оценке (13.28). \square

13.4. Аппроксимация окаймленной операторной экспоненты в “энергетической” норме. Из (13.7) и (13.12) вытекает оценка

$$\begin{aligned} & \|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\mathcal{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} = \|(\widehat{X}_0 + t\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta}))\mathcal{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ & \leq \|(\widehat{X}_0 + t\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta}))fe^{-i\varepsilon^{-2}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})}f^{-1}(\widehat{P} + t\widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})\widehat{P})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ & + \|(\widehat{X}_0 + t\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta}))(\widehat{P} + t\widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})\widehat{P})f_0 e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})}f_0^{-1}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (13.32)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & \|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}fu\|_{L_2(\Omega)} = \|(\widehat{X}_0 + t\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta}))fu\|_{L_2(\Omega)} = \|(X_0 + tX_1(\boldsymbol{\theta}))u\|_{L_2(\Omega)} = \|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}u\|_{L_2(\Omega)}, \\ & fu \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n), \end{aligned} \quad (13.33)$$

$$\|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}f^{-1}v\|_{L_2(\Omega)} = \|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}v\|_{L_2(\Omega)}, \quad v \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n). \quad (13.34)$$

Поэтому первое слагаемое в правой части (13.32) принимает вид

$$\begin{aligned} & \left\| \mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2} e^{-i\varepsilon^{-2}\tau \mathcal{A}(\mathbf{k})} f^{-1} (\widehat{P} + t\widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}) \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} = \left\| \mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2} f^{-1} (\widehat{P} + t\widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}) \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ & = \left\| (\widehat{X}_0 + t\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta})) (\widehat{P} + t\widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}) \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

В силу (12.2) второе слагаемое в правой части (13.32) не превосходит величины

$$\|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty} \left\| (\widehat{X}_0 + t\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta})) (\widehat{P} + t\widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}) \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)}.$$

В итоге получаем

$$\begin{aligned} & \left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathcal{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) \widehat{P} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ & \leq (1 + \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty}) \left\| (\widehat{X}_0 + t\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta})) (\widehat{P} + t\widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}) \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (13.35)$$

Далее, с учетом (9.7), (13.9) и (13.10) получаем

$$\begin{aligned} & \left\| (\widehat{X}_0 + t\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta})) (\widehat{P} + t\widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}) \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ & = \left\| t\widehat{X}_0 \widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P} + t\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P} + t^2 \widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta}) \widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \check{\mathfrak{C}}_1 |\mathbf{k}| + \check{\mathfrak{C}}_2 |\mathbf{k}|^2, \end{aligned}$$

при $\varepsilon > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$, где $\check{\mathfrak{C}}_1 = \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} (1 + \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty})$, $\check{\mathfrak{C}}_2 = \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} C_Z$. Отсюда и из (13.35) вытекает оценка

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathcal{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) \widehat{P} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mathfrak{C}_1 |\mathbf{k}| + \mathfrak{C}_2 |\mathbf{k}|^2, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}, \quad (13.36)$$

где $\mathfrak{C}_1 = (1 + \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty}) \check{\mathfrak{C}}_1$, $\mathfrak{C}_2 = (1 + \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty}) \check{\mathfrak{C}}_2$.

Из теоремы 6.10 выводим следующий результат.

Теорема 13.11. Пусть оператор $\mathcal{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)$ определен в (13.12). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ выполнена оценка

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathcal{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^2 \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mathcal{C}_7 (1 + |\tau|) \varepsilon^2. \quad (13.37)$$

Постоянная \mathcal{C}_7 зависит лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Доказательство. Применяя теорему 6.10 и учитывая замечание 3.10, получаем

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathcal{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^2 \widehat{P} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mathcal{C}'_7 (1 + |\tau|) \varepsilon^2, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, |\mathbf{k}| \leq t_0. \quad (13.38)$$

Постоянная \mathcal{C}'_7 зависит лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

При $|\mathbf{k}| > t_0$ оценки тривиальны. В силу (10.2) и (13.36) имеем:

$$\begin{aligned} & \left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathcal{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^2 \widehat{P} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq (\mathfrak{C}_1 |\mathbf{k}| + \mathfrak{C}_2 |\mathbf{k}|^2) \frac{\varepsilon^4}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^2} \\ & \leq (\mathfrak{C}_1 t_0^{-1} + \mathfrak{C}_2) \varepsilon^2, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}, |\mathbf{k}| > t_0. \end{aligned} \quad (13.39)$$

Далее, из (13.12), (13.33) и (13.34) вытекает оценка

$$\begin{aligned} & \left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathcal{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^2 (I - \widehat{P}) \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ & \leq (1 + \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty}) \left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^2 (I - \widehat{P}) \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ & \leq (1 + \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty}) \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} r_0^{-1} \varepsilon^2, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}. \end{aligned} \quad (13.40)$$

В последнем переходе мы учли (10.40).

Сопоставляя (13.38), (13.39) и (13.40), приходим к искомой оценке (13.37). \square

Теперь на основании теорем 6.11 и 6.12 мы усилим результат теоремы 13.11 при дополнительных предположениях.

Теорема 13.12. *Пусть оператор $\mathcal{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)$ определен в (13.12). Пусть выполнено условие 13.2. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ справедлива оценка*

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathcal{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_8 (1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon^2. \quad (13.41)$$

Постоянная C_8 зависит лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Доказательство. Применяя теорему 6.11 и учитывая замечание 3.10, получаем

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathcal{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2} \widehat{P} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C'_8 (1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon^2, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, |\mathbf{k}| \leq t_0. \quad (13.42)$$

Постоянная C'_8 зависит лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

При $|\mathbf{k}| > t_0$ используем (10.2) и (13.36):

$$\begin{aligned} \left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathcal{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2} \widehat{P} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq (\mathfrak{C}_1 |\mathbf{k}| + \mathfrak{C}_2 |\mathbf{k}|^2) \frac{\varepsilon^3}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \\ &\leq (\mathfrak{C}_1 t_0^{-1} + \mathfrak{C}_2) \varepsilon^2, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, \mathbf{k} \in \tilde{\Omega}, |\mathbf{k}| > t_0. \end{aligned} \quad (13.43)$$

По аналогии с (13.40) с учетом (10.44) имеем

$$\begin{aligned} &\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathcal{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2} (I - \widehat{P}) \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ &\leq (1 + \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty}) \left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2} (I - \widehat{P}) \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ &\leq (1 + \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty}) \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} r_0^{-1} \varepsilon^2, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, \mathbf{k} \in \tilde{\Omega}. \end{aligned} \quad (13.44)$$

В итоге, из (13.42)–(13.44) следует оценка (13.41). \square

Теорема 13.13. *Пусть оператор $\mathcal{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)$ определен в (13.12). Пусть выполнено условие 13.4 (или более сильное условие 13.5). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ справедлива оценка*

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathcal{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_9 (1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon^2. \quad (13.45)$$

Постоянная C_9 зависит от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 , а также от n и c° .

Доказательство. Применяя теорему 6.12 и учитывая замечание 3.10, получаем

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathcal{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2} \widehat{P} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C'_9 (1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon^2, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, |\mathbf{k}| \leq t^{00}. \quad (13.46)$$

Постоянная C'_9 зависит от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 , а также от n и c° .

Аналогично (13.43) имеем:

$$\begin{aligned} &\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathcal{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2} \widehat{P} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ &\leq (\mathfrak{C}_1 (t^{00})^{-1} + \mathfrak{C}_2) \varepsilon^2, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, \mathbf{k} \in \tilde{\Omega}, |\mathbf{k}| > t^{00}. \end{aligned} \quad (13.47)$$

Заметим, что неравенство (13.44) сохраняет силу (оно справедливо без каких-либо дополнительных условий). Вместе с (13.46) и (13.47) это влечет искомую оценку (13.45). \square

§ 14. ПОДТВЕРЖДЕНИЕ ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ § 13

14.1. Точность результатов относительно сглаживающего множителя. В утверждениях настоящего параграфа мы накладываем одно из следующих двух условий.

Условие 14.1. Пусть оператор $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta})$ определен в (12.17). Предположим, что $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ в некоторой точке $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Условие 14.2. Пусть операторы $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{N}_Q^{(q)}(\boldsymbol{\theta})$ определены в (12.17) и (12.18) соответственно. Предположим, что $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$ и для некоторого $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ и некоторого $q \in \{1, \dots, p(\boldsymbol{\theta}_0)\}$ выполнено $\widehat{N}_Q^{(q)}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$.

Нам понадобится следующая лемма (см. [Su6, лемма 11.8], [DSu2, лемма 13.3]).

Лемма 14.3 ([Su6], [DSu2]). Пусть число δ определено в (8.24), а t_0 определено в (8.26). Пусть $F(\mathbf{k}) = F(t, \boldsymbol{\theta})$ — спектральный проектор оператора $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ для промежутка $[0, \delta]$. Тогда при $|\mathbf{k}| \leq t_0$, $|\mathbf{k}_0| \leq t_0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2} F(\mathbf{k}) - \mathcal{A}(\mathbf{k}_0)^{1/2} F(\mathbf{k}_0) \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq C' |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|, \\ \left\| e^{-i\tau \mathcal{A}(\mathbf{k})} F(\mathbf{k}) - e^{-i\tau \mathcal{A}(\mathbf{k}_0)} F(\mathbf{k}_0) \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq C''(\tau) |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|. \end{aligned}$$

Применение теоремы 7.1 позволяет подтвердить точность результата теоремы 13.1; см. [Su6, теорема 11.7].

Теорема 14.4 ([Su6]). Пусть оператор $\mathcal{J}(\mathbf{k}, \tau)$ определен в (13.1). Пусть выполнено условие 14.1. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq s < 3$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau) > 0$, чтобы оценка

$$\left\| \mathcal{J}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{s/2} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C(\tau) \varepsilon \quad (14.1)$$

выполнялась при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Точность теорем 13.3, 13.7 выводится из абстрактной теоремы 7.2; см. [D1, теорема 8.8].

Теорема 14.5 ([D1]). Пусть оператор $\mathcal{J}(\mathbf{k}, \tau)$ определен в (13.1). Пусть выполнено условие 14.2. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq s < 2$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau) > 0$, чтобы оценка (14.1) выполнялась при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Применение теоремы 7.3 позволяет подтвердить точность результата теоремы 13.8.

Теорема 14.6. Пусть оператор $\mathcal{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)$ определен в (13.13). Пусть выполнено условие 14.1. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq s < 6$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau) > 0$, чтобы оценка

$$\left\| \mathcal{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{s/2} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C(\tau) \varepsilon^2 \quad (14.2)$$

выполнялась при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Рассуждаем от противного. Предположим, что для некоторых $\tau \neq 0$ и $2 \leq s < 6$ найдется постоянная $C(\tau) > 0$ такая, что выполнена оценка (14.2) при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$. Домножая оператор под знаком нормы в (14.2) на \widehat{P} и используя (10.2), убеждаемся, что выполнена оценка

$$\left\| \mathcal{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) \widehat{P} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \frac{\varepsilon^s}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq C(\tau) \varepsilon^2 \quad (14.3)$$

при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

С учетом (13.13) оператор под знаком нормы в (14.3) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\widehat{P} &= fe^{-i\varepsilon^{-2}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})}f^{-1}(I + \Lambda_Q b(\mathbf{k}))\widehat{P} - (I + \Lambda_Q b(\mathbf{k}))f_0e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})}f_0^{-1}\widehat{P} \\ &\quad + i\varepsilon^{-2}\int_0^\tau f_0e^{-i\varepsilon^{-2}(\tau-\tilde{\tau})\mathcal{A}^0(\mathbf{k})}f_0b(\mathbf{k})^*L_Q(\mathbf{k})b(\mathbf{k})f_0e^{-i\varepsilon^{-2}\tilde{\tau}\mathcal{A}^0(\mathbf{k})}f_0^{-1}\widehat{P}d\tilde{\tau}. \end{aligned} \quad (14.4)$$

В силу (5.4) и (13.7) имеем:

$$f^{-1}\Lambda_Q b(\mathbf{k})\widehat{P} = f^{-1}t\widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})\widehat{P} = tZ(\boldsymbol{\theta})f^{-1}\widehat{P}. \quad (14.5)$$

Поскольку $f^{-1}\widehat{P} = Pf^{-1}\widehat{P}$, то первое слагаемое в правой части (14.4) можно записать в виде $fe^{-i\varepsilon^{-2}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})}(P + tZ(\boldsymbol{\theta})P)f^{-1}\widehat{P}$.

Пусть $|\mathbf{k}| \leq t_0$. В силу (1.15), (1.17) и (1.21)

$$\|F(\mathbf{k})P - (P + tZ(\boldsymbol{\theta})P)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_3|\mathbf{k}|^2. \quad (14.6)$$

Из (14.3)–(14.6) вытекает, что для некоторой постоянной $\tilde{\mathcal{C}}(\tau) > 0$ выполнено неравенство

$$\|\mathfrak{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \frac{\varepsilon^s}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq \tilde{\mathcal{C}}(\tau)\varepsilon^2 \quad (14.7)$$

при почти всех \mathbf{k} в шаре $|\mathbf{k}| \leq t_0$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$. Здесь

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) &= fe^{-i\varepsilon^{-2}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})}F(\mathbf{k})Pf^{-1}\widehat{P} - (I + \Lambda_Q b(\mathbf{k}))f_0e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})}f_0^{-1}\widehat{P} \\ &\quad + i\varepsilon^{-2}\int_0^\tau f_0e^{-i\varepsilon^{-2}(\tau-\tilde{\tau})\mathcal{A}^0(\mathbf{k})}f_0b(\mathbf{k})^*L_Q(\mathbf{k})b(\mathbf{k})f_0e^{-i\varepsilon^{-2}\tilde{\tau}\mathcal{A}^0(\mathbf{k})}f_0^{-1}\widehat{P}d\tilde{\tau}. \end{aligned}$$

Из леммы 14.3 (в применении к $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ и $\mathcal{A}^0(\mathbf{k})$) следует, что при фиксированных τ и ε оператор $\mathfrak{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)$ непрерывен по \mathbf{k} в шаре $|\mathbf{k}| \leq t_0$. Следовательно, оценка (14.7) справедлива при всех значениях \mathbf{k} из данного шара. В частности, она верна в точке $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}_0$, если $t \leq t_0$. Применяя снова (14.6), получаем, что для некоторой постоянной $\check{\mathcal{C}}(\tau) > 0$ справедлива оценка

$$\|\mathcal{G}(t\boldsymbol{\theta}_0, \varepsilon^{-2}\tau)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \frac{\varepsilon^s}{(t^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq \check{\mathcal{C}}(\tau)\varepsilon^2 \quad (14.8)$$

при всех $t \leq t_0$ и достаточно малом ε .

Оценка (14.8) отвечает абстрактной оценке (7.2). Поскольку $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ в силу условия 14.1, то выполнены условия теоремы 7.3. Применяя эту теорему, приходим к противоречию. \square

Теперь мы подтверждаем точность теорем 13.9, 13.10. Следующий результат выводится из теоремы 7.4 вполне аналогично доказательству теоремы 14.6.

Теорема 14.7. Пусть выполнено условие 14.2. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq s < 4$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы оценка (14.2) выполнялась при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

С помощью абстрактной теоремы 7.5 мы подтверждим теперь точность теоремы 13.11.

Теорема 14.8. Пусть оператор $\mathcal{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)$ определен в (13.12). Пусть выполнено условие 14.1. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq s < 4$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы оценка

$$\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\mathcal{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{s/2}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon^2 \quad (14.9)$$

выполнялась при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Достаточно считать, что $2 \leq s < 4$. Рассуждаем от противного. Предположим, что для некоторых $\tau \neq 0$ и $2 \leq s < 4$ найдется постоянная $\mathcal{C}(\tau) > 0$ такая, что выполнена оценка (14.9) при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$. Домножая оператор под знаком нормы в (14.9) на \widehat{P} и используя (10.2), убеждаемся, что выполнена оценка

$$\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\mathcal{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \frac{\varepsilon^s}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon^2 \quad (14.10)$$

при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

В силу (13.12), (13.33), (14.5) и равенства $f^{-1}\hat{P} = Pf^{-1}\hat{P}$ оценка (14.10) перепишется в виде

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2} \left(e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})} (I+tZ(\boldsymbol{\theta}))Pf^{-1}\hat{P} - (I+tZ(\boldsymbol{\theta}))Pf^{-1}f_0e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})}f_0^{-1}\hat{P} \right) \right\| \frac{\varepsilon^s}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \\ \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon^2, \quad (14.11) \end{aligned}$$

при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Пусть $|\mathbf{k}| \leq t_0$. В силу (1.15), (1.21) и (2.38)

$$\left\| \mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2} (F(\mathbf{k})P - (I+tZ(\boldsymbol{\theta}))P) \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_{18}|\mathbf{k}|^2. \quad (14.12)$$

Из (14.11) и (14.12) вытекает, что для некоторой постоянной $\check{\mathcal{C}}(\tau) > 0$ выполнено неравенство

$$\left\| \mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2} \left(e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})} F(\mathbf{k})Pf^{-1}\hat{P} - F(\mathbf{k})Pf^{-1}f_0e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})}f_0^{-1}\hat{P} \right) \right\| \frac{\varepsilon^s}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq \check{\mathcal{C}}(\tau)\varepsilon^2 \quad (14.13)$$

при почти всех \mathbf{k} в шаре $|\mathbf{k}| \leq t_0$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$. Из леммы 14.3 (в применении к $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ и $\mathcal{A}^0(\mathbf{k})$) следует, что при фиксированных τ и ε оператор под знаком нормы в (14.13) непрерывен по \mathbf{k} в шаре $|\mathbf{k}| \leq t_0$. Следовательно, оценка (14.13) справедлива при всех значениях \mathbf{k} из данного шара. В частности, она верна в точке $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}_0$, если $t \leq t_0$. Применяя снова (14.12), получаем, что для некоторой постоянной $\check{\mathcal{C}}'(\tau) > 0$ справедлива оценка

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathcal{G}_0(t\boldsymbol{\theta}_0, \varepsilon^{-2}\tau) \widehat{P} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \frac{\varepsilon^s}{(t^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq \check{\mathcal{C}}'(\tau)\varepsilon^2 \quad (14.14)$$

при всех $t \leq t_0$ и достаточно малом ε .

Оценка (14.14) отвечает абстрактной оценке (7.3). Поскольку $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ в силу условия 14.1, то выполнены условия теоремы 7.5. Применяя эту теорему, приходим к противоречию. \square

Полностью аналогично доказательству теоремы 14.8 из теоремы 7.6 выводится следующее утверждение, подтверждающее точность теорем 13.12 и 13.13.

Теорема 14.9. *Пусть оператор $\mathcal{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)$ определен в (13.12). Пусть выполнено условие 14.2. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq s < 3$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы оценка (14.9) выполнялась при почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.*

14.2. Точность результатов относительно времени. В этом пункте мы подтверждаем точность результатов §13 относительно зависимости оценок от τ (при большом $|\tau|$). Следующее утверждение показывает точность теоремы 13.1. Оно легко выводится из теоремы 7.7; см. [D1, теорема 8.9].

Теорема 14.10 ([D1]). *Пусть выполнено условие 14.1. Пусть $s \geq 3$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (14.1) при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.*

Аналогичным образом из теоремы 7.8 выводится следующее утверждение, подтверждающее точность теорем 13.3 и 13.7; см. [D1, теорема 8.10].

Теорема 14.11 ([D1]). *Пусть выполнено условие 14.2. Пусть $s \geq 2$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (14.1) при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.*

Следующий результат, подтверждающий точность теоремы 13.8, вытекает из теоремы 7.9 с помощью тех же соображений, что были использованы при доказательстве теоремы 14.6.

Теорема 14.12. *Пусть выполнено условие 14.1. Пусть $s \geq 6$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\tau)/\tau^2 = 0$ и выполнена оценка (14.2) при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.*

Аналогичным образом из теоремы 7.10 выводится следующее утверждение, демонстрирующее точность теорем 13.9 и 13.10.

Теорема 14.13. *Пусть выполнено условие 14.2. Пусть $s \geq 4$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (14.2) при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.*

По аналогии с доказательством теоремы 14.8 из теоремы 7.11 выводится следующее утверждение, подтверждающее точность теоремы 13.11.

Теорема 14.14. *Пусть выполнено условие 14.1. Пусть $s \geq 4$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (14.9) при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.*

Наконец, применение теоремы 7.12 приводит к следующему утверждению, которое показывает, что теоремы 13.12 и 13.13 точны.

Теорема 14.15. *Пусть выполнено условие 14.2. Пусть $s \geq 3$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (14.9) при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.*

§ 15. АППРОКСИМАЦИЯ ОПЕРАТОРА $e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\hat{\mathcal{A}}}$

15.1. Аппроксимация оператора $e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\hat{\mathcal{A}}}$ в старшем порядке. В $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор $\hat{\mathcal{A}} = b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x})b(\mathbf{D})$ (см. (9.1)). Пусть $\hat{\mathcal{A}}^0$ — эффективный оператор (9.17). Напомним обозначение $\mathcal{H}_0 = -\Delta$ и положим

$$\mathcal{R}(\varepsilon) := \varepsilon^2(\mathcal{H}_0 + \varepsilon^2 I)^{-1}. \quad (15.1)$$

Оператор $\mathcal{R}(\varepsilon)$ раскладывается в прямой интеграл по операторам (10.1):

$$\mathcal{R}(\varepsilon) = \mathcal{U}^{-1} \left(\int_{\tilde{\Omega}} \oplus \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon) d\mathbf{k} \right) \mathcal{U}. \quad (15.2)$$

Отсюда и из разложений вида (8.21) для $\hat{\mathcal{A}}$ и $\hat{\mathcal{A}}^0$ следует равенство

$$\begin{aligned} & \left\| (e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\hat{\mathcal{A}}} - e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\hat{\mathcal{A}}^0}) \mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &= \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}} \left\| (e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})} - e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\hat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})}) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{s/2} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (15.3)$$

Поэтому из теорем 10.1, 10.3, 10.8 прямо вытекают следующие утверждения. Для краткости ниже мы *объединяем формулировки* (по усилению результатов), а потому нам удобно начать новую нумерацию констант.

Теорема 15.1 ([BSu5]). *При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\left\| (e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\hat{\mathcal{A}}} - e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\hat{\mathcal{A}}^0}) \mathcal{R}(\varepsilon)^{3/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \hat{C}_1(1 + |\tau|)\varepsilon. \quad (15.4)$$

Постоянная \hat{C}_1 зависит только от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Ранее оценка (15.4) была получена в [BSu5, теорема 9.1].

Теорема 15.2 ([D1]). *Пусть выполнено условие 10.2 либо условие 10.4 (или более сильное условие 10.5). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\left\| (e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\hat{\mathcal{A}}} - e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\hat{\mathcal{A}}^0}) \mathcal{R}(\varepsilon) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \hat{C}_2(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon. \quad (15.5)$$

При условии 10.2 постоянная \hat{C}_2 зависит только от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 . При условии 10.4 эта константа зависит от тех же параметров и от n, \hat{C}° .

Оценка (15.5) была получена в [D1, теоремы 9.2, 9.3].

15.2. Более точная аппроксимация. Нам потребуется оператор $\Pi = \mathcal{U}^{-1}[\widehat{P}]\mathcal{U}$, действующий в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Здесь $[\widehat{P}]$ — это оператор ортогонального проектирования в $\mathcal{K} = \int_{\widetilde{\Omega}} \oplus L_2(\Omega; \mathbb{C}^n) d\mathbf{k}$, действующий в слоях прямого интеграла как оператор \widehat{P} усреднения по ячейке. В [BSu3, (6.8)] показано, что Π задается формулой

$$(\Pi \mathbf{u})(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\widetilde{\Omega}} e^{i\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} \widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi},$$

где $\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})$ — Фурье-образ функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. То есть, Π является псевдодифференциальным оператором (ПДО) в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, символ которого есть характеристическая функция $\chi_{\widetilde{\Omega}}(\boldsymbol{\xi})$ множества $\widetilde{\Omega}$.

Положим

$$\widehat{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau) := e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}} (I + \Lambda b(\mathbf{D})\Pi) - (I + \Lambda b(\mathbf{D})\Pi) e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}, \quad (15.6)$$

$$\begin{aligned} \widehat{G}(\varepsilon^{-2}\tau) &:= e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}} (I + \Lambda b(\mathbf{D})\Pi) - (I + \Lambda b(\mathbf{D})\Pi) e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}^0} \\ &\quad + i\varepsilon^{-2} \int_0^\tau e^{-i\varepsilon^{-2}(\tau-\tilde{\tau})\widehat{\mathcal{A}}^0} b(\mathbf{D})^* L(\mathbf{D}) b(\mathbf{D}) e^{-i\varepsilon^{-2}\tilde{\tau}\widehat{\mathcal{A}}^0} d\tilde{\tau}. \end{aligned} \quad (15.7)$$

Оператор (15.6) ограничен, а оператор (15.7) в общем случае определен на $H^3(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Ниже мы увидим, что при условии 10.4 оператор (15.7) определен на $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ (это вытекает из представления (15.9) и предложения 15.6). Представим операторы (15.6) и (15.7) в виде

$$\widehat{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau) = e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}} - e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}^0} + \widehat{G}^{(2)}(\varepsilon^{-2}\tau), \quad (15.8)$$

$$\widehat{G}(\varepsilon^{-2}\tau) = e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}} - e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}^0} + \widehat{G}^{(2)}(\varepsilon^{-2}\tau) + \widehat{G}^{(3)}(\varepsilon^{-2}\tau), \quad (15.9)$$

где

$$\widehat{G}^{(2)}(\varepsilon^{-2}\tau) := e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}} \Lambda b(\mathbf{D})\Pi - \Lambda b(\mathbf{D})\Pi e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}, \quad (15.10)$$

$$\widehat{G}^{(3)}(\varepsilon^{-2}\tau) := i\varepsilon^{-2} \int_0^\tau e^{-i\varepsilon^{-2}(\tau-\tilde{\tau})\widehat{\mathcal{A}}^0} b(\mathbf{D})^* L(\mathbf{D}) b(\mathbf{D}) e^{-i\varepsilon^{-2}\tilde{\tau}\widehat{\mathcal{A}}^0} d\tilde{\tau}. \quad (15.11)$$

Пусть операторы $\widehat{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)$ и $\widehat{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)$ определены в (10.14) и (10.15). Операторы (15.6) и (15.7) раскладываются в прямые интегралы:

$$\begin{aligned} \widehat{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau) &= \mathcal{U}^{-1} \left(\int_{\widetilde{\Omega}} \oplus \widehat{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) d\mathbf{k} \right) \mathcal{U}, \\ \widehat{G}(\varepsilon^{-2}\tau) &= \mathcal{U}^{-1} \left(\int_{\widetilde{\Omega}} \oplus \widehat{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) d\mathbf{k} \right) \mathcal{U}. \end{aligned}$$

С учетом (15.2) отсюда следуют соотношения

$$\left\| \widehat{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} = \text{ess sup}_{\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}} \left\| \widehat{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{s/2} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)}, \quad (15.12)$$

$$\left\| \widehat{G}(\varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} = \text{ess sup}_{\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}} \left\| \widehat{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{s/2} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)}. \quad (15.13)$$

Из (15.12), (15.13) и теорем 10.9, 10.10, 10.11 вытекают следующие утверждения.

Теорема 15.3. Пусть оператор $\widehat{G}(\varepsilon^{-2}\tau)$ определен в (15.7). При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\left\| \widehat{G}(\varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\varepsilon)^3 \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_3 (1 + |\tau|)^2 \varepsilon^2.$$

Постоянная \widehat{C}_3 зависит только от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Теорема 15.4. Пусть оператор $\widehat{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau)$ определен в (15.6). Пусть выполнено условие 10.2. При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\left\| \widehat{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^2 \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_4(1 + |\tau|)\varepsilon^2.$$

Постоянная \widehat{C}_4 зависит только от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Теорема 15.5. Пусть оператор $\widehat{G}(\varepsilon^{-2}\tau)$ определен в (15.7). Пусть выполнено условие 10.4 (или более сильное условие 10.5). При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\left\| \widehat{G}(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^2 \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_5(1 + |\tau|)\varepsilon^2.$$

Постоянная \widehat{C}_5 зависит от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, r_0$, а также от n и \widehat{c}° .

Для целей интерполяции в главе 3 нам понадобятся следующие утверждения.

Предложение 15.6. Пусть выполнено условие 10.4. Тогда оператор $\widehat{G}^{(3)}(\varepsilon^{-2}\tau)$, определенный в (15.11), допускает представление в виде ПДО с символом

$$\widehat{g}(\xi; \varepsilon^{-2}\tau) = |\xi| \sum_{\substack{1 \leq j, l \leq p(\hat{\xi}): \\ j \neq l}} \frac{e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\gamma}_l^\circ(\hat{\xi})|\xi|^2} - e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\gamma}_j^\circ(\hat{\xi})|\xi|^2}}{\widehat{\gamma}_j^\circ(\hat{\xi}) - \widehat{\gamma}_l^\circ(\hat{\xi})} \widehat{P}_j(\hat{\xi}) b(\hat{\xi})^* L(\hat{\xi}) b(\hat{\xi}) \widehat{P}_l(\hat{\xi}), \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (15.14)$$

Здесь $\xi = |\xi|\hat{\xi}$, $\hat{\xi} \in \mathbb{S}^{d-1}$, числа $\widehat{\gamma}_l^\circ(\hat{\xi})$, $l = 1, \dots, p(\hat{\xi})$, — различные собственные значения матрицы $\widehat{S}(\hat{\xi}) = b(\hat{\xi})^* g^0 b(\hat{\xi})$, а $\widehat{P}_l(\hat{\xi})$ — ортопроектор в \mathbb{C}^n на собственное подпространство оператора $\widehat{S}(\hat{\xi})$, отвечающее собственному значению $\widehat{\gamma}_l^\circ(\hat{\xi})$. Справедлива оценка

$$|\widehat{g}(\xi; \varepsilon^{-2}\tau)| \leq 2C_{\widehat{N}} n^2 (\widehat{c}^\circ)^{-1} |\xi|, \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (15.15)$$

Доказательство. Оператор (15.11) можно записать в Фурье-представлении как ПДО с символом

$$\widehat{g}(\xi; \varepsilon^{-2}\tau) = i\varepsilon^{-2} \int_0^\tau e^{-i\varepsilon^{-2}(\tau-\tilde{\tau})\widehat{S}(\hat{\xi})|\xi|^2} |\xi|^3 b(\hat{\xi})^* L(\hat{\xi}) b(\hat{\xi}) e^{-i\varepsilon^{-2}\tilde{\tau}\widehat{S}(\hat{\xi})|\xi|^2} d\tilde{\tau}.$$

При условии 10.4 выполнено $\widehat{N}(\hat{\xi}) = \widehat{N}_*(\hat{\xi})$, а потому согласно (9.31) для матрицы $\widehat{N}(\hat{\xi}) = b(\hat{\xi})^* L(\hat{\xi}) b(\hat{\xi})$ справедливо представление

$$\widehat{N}(\hat{\xi}) = \sum_{\substack{1 \leq j, l \leq p(\hat{\xi}): \\ j \neq l}} \widehat{P}_j(\hat{\xi}) \widehat{N}(\hat{\xi}) \widehat{P}_l(\hat{\xi}).$$

Поскольку $\widehat{P}_l(\hat{\xi})$ — ортопроектор в \mathbb{C}^n на собственное подпространство оператора $\widehat{S}(\hat{\xi})$, отвечающее собственному значению $\widehat{\gamma}_l^\circ(\hat{\xi})$, то

$$\begin{aligned} \widehat{g}(\xi; \varepsilon^{-2}\tau) &= i\varepsilon^{-2} \sum_{\substack{1 \leq j, l \leq p(\hat{\xi}): \\ j \neq l}} \int_0^\tau e^{-i\varepsilon^{-2}(\tau-\tilde{\tau})\widehat{\gamma}_j^\circ(\hat{\xi})|\xi|^2} |\xi|^3 \widehat{P}_j(\hat{\xi}) b(\hat{\xi})^* L(\hat{\xi}) b(\hat{\xi}) \widehat{P}_l(\hat{\xi}) e^{-i\varepsilon^{-2}\tilde{\tau}\widehat{\gamma}_l^\circ(\hat{\xi})|\xi|^2} d\tilde{\tau} \\ &= i\varepsilon^{-2} |\xi|^3 \sum_{\substack{1 \leq j, l \leq p(\hat{\xi}): \\ j \neq l}} e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\gamma}_j^\circ(\hat{\xi})|\xi|^2} \widehat{P}_j(\hat{\xi}) b(\hat{\xi})^* L(\hat{\xi}) b(\hat{\xi}) \widehat{P}_l(\hat{\xi}) \int_0^\tau e^{i\varepsilon^{-2}\tilde{\tau}(\widehat{\gamma}_j^\circ(\hat{\xi}) - \widehat{\gamma}_l^\circ(\hat{\xi}))|\xi|^2} d\tilde{\tau}. \end{aligned}$$

Вычисляя интегралы справа, приходим к представлению (15.14). Оценка (15.15) вытекает из (15.14) и оценок $|b(\hat{\xi})^* L(\hat{\xi}) b(\hat{\xi})| \leq C_{\widehat{N}}$, $|\widehat{\gamma}_j^\circ(\hat{\xi}) - \widehat{\gamma}_l^\circ(\hat{\xi})| \geq \widehat{c}^\circ$, $j \neq l$. \square

Предложение 15.7. Пусть операторы $\widehat{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau)$ и $\widehat{G}(\varepsilon^{-2}\tau)$ определены в (15.6) и (15.7).

1°. При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|\widehat{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_6^\circ(1 + |\tau|)\varepsilon, \quad (15.16)$$

$$\|\widehat{G}(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_6(1 + |\tau|)\varepsilon. \quad (15.17)$$

Постоянные \widehat{C}_6° и \widehat{C}_6 зависят лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

2°. Пусть выполнено условие 10.2. При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|\widehat{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_7(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon. \quad (15.18)$$

Постоянная \widehat{C}_7 зависит лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

3°. Пусть выполнено условие 10.4 (или более сильное условие 10.5). При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|\widehat{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_8(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon, \quad (15.19)$$

$$\|\widehat{G}(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_8(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon. \quad (15.20)$$

Постоянны \widehat{C}_8° , \widehat{C}_8 зависят от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 , а также от n и \widehat{c}° .

Доказательство. 1°. Воспользуемся представлениями (15.8), (15.9). В силу теоремы 15.1 для оператора $e^{-i\varepsilon^{-2}\tau}\widehat{\mathcal{A}} - e^{-i\varepsilon^{-2}\tau}\widehat{\mathcal{A}}^0$ справедлива оценка (15.4).

Заметим, что оператор (15.10) раскладывается в прямой интеграл по операторам (10.18). Отсюда с учетом (10.2), (10.20) и равенства $\widehat{G}^{(2)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) = \widehat{G}^{(2)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\widehat{P}$ вытекает оценка

$$\begin{aligned} \|\widehat{G}^{(2)}(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= \sup_{\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}} \|\widehat{G}^{(2)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ &\leq 2C_{\widehat{Z}} \sup_{\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}} \frac{|\mathbf{k}|\varepsilon^3}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \leq C_{\widehat{Z}}\varepsilon, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (15.21)$$

Из (15.4), (15.8) и (15.21) вытекает неравенство (15.16).

Далее, из (15.11) с помощью преобразования Фурье получаем

$$\begin{aligned} \|\widehat{G}^{(3)}(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \varepsilon^{-2}|\tau| \|b(\mathbf{D})^*L(\mathbf{D})b(\mathbf{D})\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \varepsilon^{-2}|\tau| \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} |b(\xi)^*L(\xi)b(\xi)| \frac{\varepsilon^3}{(|\xi|^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \leq C_{\widehat{N}}|\tau|\varepsilon \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \frac{|\xi|^3}{(|\xi|^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \leq C_{\widehat{N}}|\tau|\varepsilon. \end{aligned}$$

Комбинируя это неравенство с (15.4), (15.9) и (15.21), получаем оценку (15.17).

2°. Воспользуемся представлением (15.8). При выполнении условия 10.2 в силу теоремы 15.2 для оператора $e^{-i\varepsilon^{-2}\tau}\widehat{\mathcal{A}} - e^{-i\varepsilon^{-2}\tau}\widehat{\mathcal{A}}^0$ справедлива оценка (15.5).

По аналогии с (15.21) получаем

$$\|\widehat{G}^{(2)}(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 2C_{\widehat{Z}} \sup_{\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}} \frac{|\mathbf{k}|\varepsilon^2}{|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2} \leq C_{\widehat{Z}}\varepsilon. \quad (15.22)$$

Из (15.5), (15.8) и (15.22) вытекает неравенство (15.18).

3°. Воспользуемся представлениями (15.8), (15.9). При выполнении условия 10.4 в силу теоремы 15.2 для оператора $e^{-i\varepsilon^{-2}\tau}\widehat{\mathcal{A}} - e^{-i\varepsilon^{-2}\tau}\widehat{\mathcal{A}}^0$ справедлива оценка (15.5). Оценка (15.22) для оператора $\widehat{G}^{(2)}(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)$ сохраняет силу. Из (15.5), (15.8) и (15.22) вытекает (15.19).

Далее, при условии 10.4 применимо предложение 15.6, которое дает оценку

$$\begin{aligned} \|\widehat{G}^{(3)}(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} |\widehat{\mathbf{g}}(\xi; \varepsilon^{-2}\tau)| \frac{\varepsilon^2}{|\xi|^2 + \varepsilon^2} \\ &\leqslant 2C_{\widehat{N}} n^2(\widehat{c}^\circ)^{-1} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \frac{|\xi|\varepsilon^2}{|\xi|^2 + \varepsilon^2} \leqslant C_{\widehat{N}} n^2(\widehat{c}^\circ)^{-1} \varepsilon. \end{aligned} \quad (15.23)$$

В итоге соотношения (15.5), (15.9), (15.22) и (15.23) влекут неравенство (15.20). \square

15.3. Аппроксимация в “энергетической” норме. Аналогично (15.12) имеем

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}^{1/2} \widehat{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} = \text{ess sup}_{\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}} \left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \widehat{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{s/2} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)}.$$

Поэтому из теорем 10.12, 10.13, 10.14 вытекают следующие утверждения.

Теорема 15.8. Пусть оператор $\widehat{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau)$ определен в (15.6). При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}^{1/2} \widehat{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\varepsilon)^2 \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{C}_9 (1 + |\tau|) \varepsilon^2.$$

Постоянная \widehat{C}_9 зависит только от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Теорема 15.9. Пусть оператор $\widehat{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau)$ определен в (15.6). Пусть выполнено условие 10.2 либо условие 10.4 (или более сильное условие 10.5). При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}^{1/2} \widehat{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\varepsilon)^{3/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{C}_{10} (1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon^2.$$

При условии 10.2 постоянная \widehat{C}_{10} зависит только от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 . При условии 10.4 эта константа зависит от тех же параметров и от n , \widehat{c}° .

Для целей интерполяции в главе 3 нам понадобится также следующее утверждение.

Предложение 15.10. Пусть оператор $\widehat{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau)$ определен в (15.6). При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\left\| \widehat{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{C}_{11}^\circ, \quad (15.24)$$

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}^{1/2} \widehat{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{C}_{11}. \quad (15.25)$$

Постоянны \widehat{C}_{11}° , \widehat{C}_{11} зависят лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 и r_1 .

Доказательство. Воспользуемся представлением (15.8). Очевидно, что

$$\left\| (e^{-i\varepsilon^{-2}\tau}\widehat{\mathcal{A}} - e^{-i\varepsilon^{-2}\tau}\widehat{\mathcal{A}}^0) \mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2. \quad (15.26)$$

По аналогии с (15.21) получаем

$$\left\| \widehat{G}^{(2)}(\varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2C_{\widehat{Z}} \sup_{\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}} \frac{|\mathbf{k}| \varepsilon}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{1/2}} \leqslant 2C_{\widehat{Z}} r_1. \quad (15.27)$$

Из (15.8), (15.26) и (15.27) вытекает (15.24).

Проверим справедливость оценки (15.25). С помощью преобразования Фурье имеем

$$\begin{aligned} &\left\| \widehat{\mathcal{A}}^{1/2} (e^{-i\varepsilon^{-2}\tau}\widehat{\mathcal{A}} - e^{-i\varepsilon^{-2}\tau}\widehat{\mathcal{A}}^0) \mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant 2 \left\| \widehat{\mathcal{A}}^{1/2} \mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2 \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|b(\mathbf{D}) \mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant 2 \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \alpha_1^{1/2} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \frac{|\xi| \varepsilon}{(|\xi|^2 + \varepsilon^2)^{1/2}} \leqslant 2 \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \alpha_1^{1/2} \varepsilon. \end{aligned} \quad (15.28)$$

Далее, используя разложение в прямой интеграл, с учетом (9.13), (10.9), (10.12) и (10.18) получаем

$$\begin{aligned}
 & \|\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\widehat{G}^{(2)}(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} = \sup_{\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}}\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\widehat{G}^{(2)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} \\
 & \leqslant 2\sup_{\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}}\|g^{1/2}b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\Lambda b(\mathbf{k})\widehat{P}\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} \\
 & \leqslant 2|\Omega|^{-1/2}\|g^{1/2}b(\mathbf{D})\Lambda\|_{L_2(\Omega)}\alpha_1^{1/2}\sup_{\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}}\frac{|\mathbf{k}|\varepsilon}{(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{1/2}} + 2\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\alpha_1^{1/2}C_{\widehat{Z}}\sup_{\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}}\frac{|\mathbf{k}|^2\varepsilon}{(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{1/2}} \\
 & \leqslant 2\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\alpha_1^{1/2}(1+C_{\widehat{Z}}r_1)\varepsilon.
 \end{aligned} \tag{15.29}$$

В итоге из (15.8), (15.28) и (15.29) вытекает оценка (15.25). \square

15.4. Подтверждение точности теорем из пунктов 15.1–15.3. Применяя теоремы из § 11, мы подтверждаем точность результатов пунктов 15.1–15.3. Начнем с точности относительно сглаживающего множителя.

Покажем, что общие результаты (теоремы 15.1, 15.3, 15.8) точны.

Теорема 15.11. Пусть выполнено условие 11.1.

1°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leqslant s < 3$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнялось

$$\|(e^{-i\varepsilon^{-2}\tau}\widehat{\mathcal{A}} - e^{-i\varepsilon^{-2}\tau}\widehat{\mathcal{A}}^0)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon. \tag{15.30}$$

2°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leqslant s < 6$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнялось

$$\|\widehat{G}(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon^2. \tag{15.31}$$

3°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leqslant s < 4$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнялось

$$\|\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\widehat{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon^2. \tag{15.32}$$

Доказательство. Доказательство утверждения 1° проведем от противного. Предположим, что при некоторых $\tau \neq 0$ и $0 \leqslant s < 3$ найдется такая постоянная $\mathcal{C}(\tau) > 0$, что выполнено (15.30) при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. В силу (15.3) это означает, что при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом ε выполнена оценка (11.1). Но это противоречит утверждению теоремы 11.4.

Аналогичным образом утверждение 2° выводится из теоремы 11.6, а утверждение 3° — из теоремы 11.8. \square

Утверждение 1° ранее было получено в [Sub, теорема 12.4].

Покажем теперь, что усиленные результаты (теоремы 15.2, 15.4, 15.5, 15.9) тоже точны.

Теорема 15.12. Пусть выполнено условие 11.2.

1°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leqslant s < 2$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы оценка (15.30) выполнялась при достаточно малом $\varepsilon > 0$.

2°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leqslant s < 4$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы оценка (15.31) выполнялась при достаточно малом $\varepsilon > 0$.

3°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leqslant s < 3$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы оценка (15.32) выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Утверждение 1° выводится из теоремы 11.5. Утверждение 2° вытекает из теоремы 11.7, а утверждение 3° — из теоремы 11.9. \square

Утверждение 1° было установлено в [D1, теорема 9.5].

Перейдем к подтверждению точности относительно зависимости оценок от параметра τ . Убедимся в точности общих результатов (теорем 15.1, 15.3, 15.8).

Теорема 15.13. Пусть выполнено условие 11.1.

- 1°. Пусть $s \geq 3$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (15.30) при $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.
- 2°. Пусть $s \geq 6$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\tau)/\tau^2 = 0$ и выполнена оценка (15.31) при $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.
- 3°. Пусть $s \geq 4$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (15.32) при $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Утверждение 1° следует из теоремы 11.10, утверждение 2° — из теоремы 11.12, а утверждение 3° — из теоремы 11.14. \square

Утверждение 1° ранее было установлено в [D1, теорема 9.6].

Наконец, покажем, что усиленные результаты (теоремы 15.2, 15.4, 15.5, 15.9) тоже точны.

Теорема 15.14. Пусть выполнено условие 11.2.

- 1°. Пусть $s \geq 2$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (15.30) при $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.
- 2°. Пусть $s \geq 4$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (15.31) при $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.
- 3°. Пусть $s \geq 3$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (15.32) при $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Утверждение 1° вытекает из теоремы 11.11, утверждение 2° — из теоремы 11.13, утверждение 3° — из теоремы 11.15. \square

Ранее утверждение 1° было проверено в [D1, теорема 9.7].

§ 16. АППРОКСИМАЦИЯ ОКАЙМЛЕННОЙ ЭКСПОНЕНТЫ $e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\mathcal{A}}$

16.1. Аппроксимация окаймленного оператора $e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\mathcal{A}}$ в старшем порядке. В $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор (8.10). Пусть f_0 — матрица (12.1) и \mathcal{A}^0 — оператор (12.3). Обозначим

$$\mathcal{J}(\tau) := f e^{-i\tau\mathcal{A}} f^{-1} - f_0 e^{-i\tau\mathcal{A}^0} f_0^{-1}. \quad (16.1)$$

Напомним обозначение (13.1). Из разложений вида (8.21) для \mathcal{A} и \mathcal{A}^0 с учетом (15.2) следует равенство

$$\|\mathcal{J}(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} = \text{ess sup}_{\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}} \|\mathcal{J}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{s/2}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)}.$$

Поэтому из теорем 13.1, 13.3, 13.7 прямо вытекают следующие утверждения.

Теорема 16.1 ([BSu5]). Пусть оператор $\mathcal{J}(\tau)$ определен в (16.1). При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|\mathcal{J}(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_1(1 + |\tau|)\varepsilon. \quad (16.2)$$

Постоянная C_1 зависит только от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Теорема 16.2 ([D1]). Пусть оператор $\mathcal{J}(\tau)$ определен в (16.1). Пусть выполнено условие 13.2 либо условие 13.4 (или более сильное условие 13.5). При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|\mathcal{J}(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_2(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon. \quad (16.3)$$

При условии 13.2 постоянная C_2 зависит только от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 . При условии 13.4 эта константа зависит от тех же параметров и от n, c° .

Ранее теорема 16.1 была получена в [BSu5, теорема 10.1], а теорема 16.2 была установлена в [D1, теоремы 9.9, 9.10].

16.2. Более точная аппроксимация.

Положим

$$\mathcal{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau) := fe^{-i\varepsilon^{-2}\tau\mathcal{A}}f^{-1}(I + \Lambda_Q b(\mathbf{D})\Pi) - (I + \Lambda_Q b(\mathbf{D})\Pi)f_0e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\mathcal{A}^0}f_0^{-1}, \quad (16.4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\varepsilon^{-2}\tau) &:= fe^{-i\varepsilon^{-2}\tau\mathcal{A}}f^{-1}(I + \Lambda_Q b(\mathbf{D})\Pi) - (I + \Lambda_Q b(\mathbf{D})\Pi)f_0e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\mathcal{A}^0}f_0^{-1} \\ &\quad + i\varepsilon^{-2} \int_0^\tau f_0e^{-i\varepsilon^{-2}(\tau-\tilde{\tau})\mathcal{A}^0}f_0b(\mathbf{D})^*L_Q(\mathbf{D})b(\mathbf{D})f_0e^{-i\varepsilon^{-2}\tilde{\tau}\mathcal{A}^0}f_0^{-1}d\tilde{\tau}. \end{aligned} \quad (16.5)$$

Оператор (16.4) ограничен, а оператор (16.5) в общем случае определен на $H^3(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. При условии 13.4 оператор (16.5) определен на $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ (это вытекает из представления (16.7) и предложения 16.6).

Представим операторы (16.4) и (16.5) в виде

$$\mathcal{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau) = \mathcal{J}(\varepsilon^{-2}\tau) + \mathcal{G}^{(2)}(\varepsilon^{-2}\tau), \quad (16.6)$$

$$\mathcal{G}(\varepsilon^{-2}\tau) = \mathcal{J}(\varepsilon^{-2}\tau) + \mathcal{G}^{(2)}(\varepsilon^{-2}\tau) + \mathcal{G}^{(3)}(\varepsilon^{-2}\tau), \quad (16.7)$$

где

$$\mathcal{G}^{(2)}(\varepsilon^{-2}\tau) := fe^{-i\varepsilon^{-2}\tau\mathcal{A}}f^{-1}\Lambda_Q b(\mathbf{D})\Pi - \Lambda_Q b(\mathbf{D})\Pi f_0e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\mathcal{A}^0}f_0^{-1}, \quad (16.8)$$

$$\mathcal{G}^{(3)}(\varepsilon^{-2}\tau) := i\varepsilon^{-2} \int_0^\tau f_0e^{-i\varepsilon^{-2}(\tau-\tilde{\tau})\mathcal{A}^0}f_0b(\mathbf{D})^*L_Q(\mathbf{D})b(\mathbf{D})f_0e^{-i\varepsilon^{-2}\tilde{\tau}\mathcal{A}^0}f_0^{-1}d\tilde{\tau}. \quad (16.9)$$

Пусть операторы $\mathcal{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)$ и $\mathcal{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)$ определены в (13.12), (13.13). Аналогично (15.12), (15.13) имеем:

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= \text{ess sup}_{\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}} \left\| \mathcal{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{s/2} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)}, \\ \left\| \mathcal{G}(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= \text{ess sup}_{\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}} \left\| \mathcal{G}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{s/2} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (16.10)$$

Отсюда и из теорем 13.8, 13.9, 13.10 непосредственно вытекают следующие утверждения.

Теорема 16.3. *Пусть оператор $\mathcal{G}(\varepsilon^{-2}\tau)$ определен в (16.5). При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\|\mathcal{G}(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^3\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_3(1 + |\tau|)^2\varepsilon^2.$$

Постоянная C_3 зависит только от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Теорема 16.4. *Пусть оператор $\mathcal{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau)$ определен в (16.4). Пусть выполнено условие 13.2. При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\|\mathcal{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^2\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_4(1 + |\tau|)\varepsilon^2.$$

Постоянная C_4 зависит только от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Теорема 16.5. *Пусть оператор $\mathcal{G}(\varepsilon^{-2}\tau)$ определен в (16.5). Пусть выполнено условие 13.4 (или более сильное условие 13.5). При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\|\mathcal{G}(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^2\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_5(1 + |\tau|)\varepsilon^2.$$

Постоянная C_5 зависит от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}, r_0$, а также от n и c° .

Для целей интерполяции в главе 3 нам понадобятся следующие утверждения. Первое из них несложно проверить по аналогии с доказательством предложения 15.6.

Предложение 16.6. *Пусть выполнено условие 13.4. Тогда оператор $\mathcal{G}^{(3)}(\varepsilon^{-2}\tau)$, определенный в (16.9), допускает представление в виде ПДО с символом*

$$g(\xi; \varepsilon^{-2}\tau) = |\xi|f_0^2 \sum_{\substack{1 \leq j, l \leq p(\hat{\xi}): \\ j \neq l}} \frac{e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\gamma_j^\circ(\hat{\xi})}|\xi|^2 - e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\gamma_l^\circ(\hat{\xi})}|\xi|^2}{\gamma_j^\circ(\hat{\xi}) - \gamma_l^\circ(\hat{\xi})} \mathcal{P}_j(\hat{\xi})^*b(\hat{\xi})^*L_Q(\hat{\xi})b(\hat{\xi})\mathcal{P}_l(\hat{\xi}), \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Здесь $\xi = |\xi| \hat{\xi}$, $\hat{\xi} \in \mathbb{S}^{d-1}$, числа $\gamma_l^\circ(\hat{\xi})$, $l = 1, \dots, p(\hat{\xi})$, — различные собственные значения обобщенной задачи $\widehat{S}(\hat{\xi})\mathbf{c} = \gamma \overline{Q}\mathbf{c}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^n$, а $\mathcal{P}_l(\hat{\xi})$ — проектор в \mathbb{C}^n на соответствующее собственное подпространство, ортогональный с весом \overline{Q} . Справедлива оценка

$$|\mathfrak{g}(\xi; \varepsilon^{-2}\tau)| \leq 2C_N \|f\|_{L_\infty}^2 n^2(c^\circ)^{-1} |\xi|, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Предложение 16.7. Пусть операторы $\mathcal{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau)$ и $\mathcal{G}(\varepsilon^{-2}\tau)$ определены в (16.4) и (16.5).

1°. При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|\mathcal{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_6^\circ(1 + |\tau|)\varepsilon, \quad (16.11)$$

$$\|\mathcal{G}(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_6(1 + |\tau|)\varepsilon. \quad (16.12)$$

Постоянные C_6° и C_6 зависят лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

2°. Пусть выполнено условие 13.2. При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|\mathcal{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_7(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon. \quad (16.13)$$

Постоянная C_7 зависит лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

3°. Пусть выполнено условие 13.4 (или более сильное условие 13.5). При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|\mathcal{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_8^\circ(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon, \quad (16.14)$$

$$\|\mathcal{G}(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_8(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon. \quad (16.15)$$

Постоянныe C_8° , C_8 зависят от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 , а также от n и c° .

Доказательство. 1°. Воспользуемся представлениями (16.6), (16.7). В силу теоремы 16.1 для оператора $\mathcal{J}(\varepsilon^{-2}\tau)$ справедлива оценка (16.2).

Заметим, что оператор (16.8) раскладывается в прямой интеграл по операторам (13.16). Отсюда с учетом (10.2), (13.18) и равенства $\mathcal{G}^{(2)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau) = \mathcal{G}^{(2)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\widehat{P}$ вытекает оценка

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}^{(2)}(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= \sup_{\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}} \|\mathcal{G}^{(2)}(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ &\leq 2\|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty} C_Z \sup_{\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}} \frac{|\mathbf{k}| \varepsilon^3}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \leq \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty} C_Z \varepsilon, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (16.16)$$

Из (16.2), (16.6) и (16.16) вытекает неравенство (16.11).

Далее, из (16.9) с помощью преобразования Фурье получаем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}^{(3)}(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \varepsilon^{-2} |\tau| \|f\|_{L_\infty}^3 \|f^{-1}\|_{L_\infty} \|b(\mathbf{D})^* L_Q(\mathbf{D}) b(\mathbf{D}) \mathcal{R}(\varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \varepsilon^{-2} |\tau| \|f\|_{L_\infty}^3 \|f^{-1}\|_{L_\infty} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} |b(\xi)^* L_Q(\xi) b(\xi)| \frac{\varepsilon^3}{(|\xi|^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \\ &\leq \|f\|_{L_\infty}^3 \|f^{-1}\|_{L_\infty} C_N |\tau| \varepsilon \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \frac{|\xi|^3}{(|\xi|^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \leq \|f\|_{L_\infty}^3 \|f^{-1}\|_{L_\infty} C_N |\tau| \varepsilon. \end{aligned}$$

Комбинируя это неравенство с (16.2), (16.7) и (16.16), получаем оценку (16.12).

2°. Воспользуемся представлением (16.6). При выполнении условия 13.2 в силу теоремы 16.2 для оператора $\mathcal{J}(\varepsilon^{-2}\tau)$ справедлива оценка (16.3).

По аналогии с (16.16) получаем

$$\|\mathcal{G}^{(2)}(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 2\|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty} C_Z \sup_{\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}} \frac{|\mathbf{k}| \varepsilon^2}{|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2} \leq \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty} C_Z \varepsilon. \quad (16.17)$$

Из (16.3), (16.6) и (16.17) вытекает неравенство (16.13).

3°. Воспользуемся представлениями (16.6), (16.7). При выполнении условия 13.4 в силу теоремы 16.2 для оператора $\mathcal{J}(\varepsilon^{-2}\tau)$ справедлива оценка (16.3). Оценка (16.17) для оператора $\mathcal{G}^{(2)}(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)$ сохраняет силу. Из (16.3), (16.6) и (16.17) вытекает (16.14).

Далее, при условии 13.4 применимо предложение 16.6, которое дает оценку

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}^{(3)}(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} |\mathfrak{g}(\xi; \varepsilon^{-2}\tau)| \frac{\varepsilon^2}{|\xi|^2 + \varepsilon^2} \\ &\leq 2C_N \|f\|_{L_\infty}^2 n^2(c^\circ)^{-1} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \frac{|\xi|\varepsilon^2}{|\xi|^2 + \varepsilon^2} \leq C_N \|f\|_{L_\infty}^2 n^2(c^\circ)^{-1} \varepsilon. \end{aligned} \quad (16.18)$$

В итоге соотношения (16.3), (16.7), (16.17) и (16.18) влекут неравенство (16.15). \square

16.3. Аппроксимация по “энергетической” норме. Аналогично (16.10) имеем

$$\|\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\mathcal{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} = \text{ess sup}_{\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}} \|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\mathcal{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{s/2}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)},$$

где оператор $\mathcal{G}_0(\mathbf{k}, \varepsilon^{-2}\tau)$ определен в (13.12). Поэтому из теорем 13.11, 13.12, 13.13 вытекают следующие утверждения.

Теорема 16.8. Пусть оператор $\mathcal{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau)$ определен в (16.4). При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\mathcal{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^2\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_9(1 + |\tau|)\varepsilon^2.$$

Постоянная C_9 зависит только от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Теорема 16.9. Пусть оператор $\mathcal{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau)$ определен в (16.4). Пусть выполнено условие 13.2 либо условие 13.4 (или более сильное условие 13.5). При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\mathcal{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{10}(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon^2.$$

При условии 13.2 постоянная C_{10} зависит только от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 . При условии 13.4 эта константа зависит от тех же параметров и от n, c° .

Для целей интерполяции в главе 3 нам понадобится также следующее утверждение.

Предложение 16.10. Пусть оператор $\mathcal{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau)$ определен в (16.4). При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|\mathcal{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{11}^\circ, \quad (16.19)$$

$$\|\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\mathcal{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{11}\varepsilon. \quad (16.20)$$

Постоянны C_{11}°, C_{11} зависят лишь от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}, r_0$ и r_1 .

Доказательство. Воспользуемся представлением (16.6).

Очевидно, что

$$\|\mathcal{J}(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}. \quad (16.21)$$

По аналогии с (16.16) получаем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}^{(2)}(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq 2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty} C_Z \sup_{\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}} \frac{|\mathbf{k}|\varepsilon}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{1/2}} \leq 2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty} C_Z r_1. \end{aligned} \quad (16.22)$$

Из (16.6), (16.21) и (16.22) вытекает (16.19).

Проверим справедливость оценки (16.20). С учетом (15.28) имеем

$$\begin{aligned} \|\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\mathcal{J}(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq (1 + \|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}) \|\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq (1 + \|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}) \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \alpha_1^{1/2} \varepsilon. \end{aligned} \quad (16.23)$$

Далее, используя разложение в прямой интеграл, по аналогии с (15.29) получаем

$$\begin{aligned} \|\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\mathcal{G}^{(2)}(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant (1 + \|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty})\|\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\Lambda_Q b(\mathbf{D})\Pi\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &= (1 + \|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty})\sup_{\mathbf{k}\in\Omega}\|g^{1/2}b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\Lambda_Q b(\mathbf{k})\widehat{P}\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} \\ &\leqslant (1 + \|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty})\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\alpha_1^{1/2}(1 + C_Zr_1)\varepsilon. \end{aligned} \quad (16.24)$$

В итоге из (16.6), (16.23) и (16.24) вытекает оценка (16.20). \square

16.4. Подтверждение точности результатов пунктов 16.1–16.3. Из теорем §14 вытекает точность результатов пунктов 16.1–16.3. Начнем с точности относительно слаживающего множителя.

Покажем, что общие результаты (теоремы 16.1, 16.3, 16.8) точны.

Теорема 16.11. Пусть выполнено условие 14.1.

1°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leqslant s < 3$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнялось

$$\|\mathcal{J}(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon. \quad (16.25)$$

2°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leqslant s < 6$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнялось

$$\|\mathcal{G}(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon^2. \quad (16.26)$$

3°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leqslant s < 4$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнялось

$$\|\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\mathcal{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2}\|_{L_2(\Omega)\rightarrow L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon^2. \quad (16.27)$$

Доказательство. Утверждение 1° выводится из теоремы 14.4, утверждение 2° — из теоремы 14.6, утверждение 3° — из теоремы 14.8. \square

Утверждение 1° ранее было установлено в [Sub, теорема 12.8].

Убедимся, что усиленные результаты (теоремы 16.2, 16.4, 16.5, 16.9) тоже точны.

Теорема 16.12. Пусть выполнено условие 14.2.

1°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leqslant s < 2$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы оценка (16.25) выполнялась при достаточно малом $\varepsilon > 0$.

2°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leqslant s < 4$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы оценка (16.26) выполнялась при достаточно малом $\varepsilon > 0$.

3°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leqslant s < 3$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы оценка (16.27) выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Утверждение 1° следует из теоремы 14.5, утверждение 2° — из теоремы 14.7, а утверждение 3° — из теоремы 14.9. \square

Утверждение 1° было установлено в [D1, теорема 9.12].

Перейдем к точности относительно зависимости оценок от параметра τ .

Убедимся в точности общих результатов (теорем 16.1, 16.3, 16.8).

Теорема 16.13. Пусть выполнено условие 14.1.

1°. Пусть $s \geqslant 3$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau\rightarrow\infty}\mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (16.25) при $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

2°. Пусть $s \geqslant 6$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau\rightarrow\infty}\mathcal{C}(\tau)/\tau^2 = 0$ и выполнена оценка (16.26) при $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

3°. Пусть $s \geqslant 4$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau\rightarrow\infty}\mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (16.27) при $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Утверждение 1° следует из теоремы 14.10, утверждение 2° — из теоремы 14.12, а утверждение 3° — из теоремы 14.14. \square

Утверждение 1° ранее было установлено в [D1, теорема 9.13].

Наконец, покажем, что усиленные результаты (теоремы 16.2, 16.4, 16.5, 16.9) тоже точны.

Теорема 16.14. *Пусть выполнено условие 14.2.*

1°. *Пусть $s \geq 2$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (16.25) при $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.*

2°. *Пусть $s \geq 4$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (16.26) при $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.*

3°. *Пусть $s \geq 3$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (16.27) при $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.*

Доказательство. Утверждение 1° вытекает из теоремы 14.11, утверждение 2° — из теоремы 14.13, утверждение 3° — из теоремы 14.15. \square

Ранее утверждение 1° было проверено в [D1, теорема 9.14].

ГЛАВА 3. УСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТИПА ШРЁДИНГЕРА

§ 17. АППРОКСИМАЦИЯ ОПЕРАТОРА $e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$

17.1. Операторы $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$, \mathcal{A}_ε . Постановка задачи. Если $\psi(\mathbf{x})$ — измеримая Г-периодическая функция в \mathbb{R}^d , условимся использовать обозначение $\psi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \psi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$, $\varepsilon > 0$. Наши основные объекты — операторы $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$, \mathcal{A}_ε , действующие в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, формально заданные выражениями

$$\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon := b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \quad (17.1)$$

$$\mathcal{A}_\varepsilon := (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon(\mathbf{x}). \quad (17.2)$$

Строгие определения даются через соответствующие квадратичные формы (ср. п. 8.3). Коэффициенты операторов (17.1) и (17.2) быстро осциллируют при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Наша цель — получить аппроксимации операторов $e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$ и $f^\varepsilon e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}(f^\varepsilon)^{-1}$ при малом ε и применить полученные результаты к усреднению решений задачи Коши для уравнений типа Шрёдингера.

17.2. Масштабное преобразование. Пусть T_ε — унитарный в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ оператор масштабного преобразования:

$$(T_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x}) = \varepsilon^{d/2} \mathbf{u}(\varepsilon \mathbf{x}), \quad \varepsilon > 0.$$

Если $\psi(\mathbf{x})$ — Г-периодическая измеримая функция, то оператор $[\psi^\varepsilon]$ умножения на функцию $\psi^\varepsilon(\mathbf{x})$ под действием масштабного преобразования перейдет в оператор $[\psi]$ умножения на $\psi(\mathbf{x})$:

$$[\psi^\varepsilon] = T_\varepsilon^* [\psi] T_\varepsilon.$$

Справедливо тождество $\mathcal{A}_\varepsilon = \varepsilon^{-2} T_\varepsilon^* \mathcal{A} T_\varepsilon$. Следовательно,

$$e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} = T_\varepsilon^* e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}} T_\varepsilon, \quad f^\varepsilon e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}(f^\varepsilon)^{-1} = T_\varepsilon^* f e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\mathcal{A}} f^{-1} T_\varepsilon. \quad (17.3)$$

Применяя масштабное преобразование к резольвенте оператора $\mathcal{H}_0 = -\Delta$, получаем

$$(\mathcal{H}_0 + I)^{-1} = \varepsilon^2 T_\varepsilon^* (\mathcal{H}_0 + \varepsilon^2 I)^{-1} T_\varepsilon = T_\varepsilon^* \mathcal{R}(\varepsilon) T_\varepsilon. \quad (17.4)$$

Здесь использовано обозначение (15.1).

17.3. Аппроксимация оператора $e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$ в старшем порядке. Применяя (17.3) для операторов $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ и $\widehat{\mathcal{A}}^0$, а также (17.4), при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ получаем

$$\left(e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0} \right) (\mathcal{H}_0 + I)^{-s/2} = T_\varepsilon^* \left(e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}} - e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}^0} \right) \mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2} T_\varepsilon. \quad (17.5)$$

Заметим, что оператор $(\mathcal{H}_0 + I)^{s/2}$ осуществляет изометрический изоморфизм пространства Соболева $H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ на $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. С учетом этого, применяя теоремы 15.1, 15.2 и соотношение (17.5), непосредственно получаем следующие две теоремы.

Теорема 17.1 ([BSu5]). *Пусть $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ — оператор (17.1) и пусть $\widehat{\mathcal{A}}^0$ — эффективный оператор (9.17). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\|e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{H^3(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_1(1 + |\tau|)\varepsilon. \quad (17.6)$$

Постоянная \widehat{C}_1 зависит только от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Теорема 17.2 ([D1]). *Пусть выполнены условия теоремы 17.1. Пусть выполнено условие 10.2 либо условие 10.4 (или более сильное условие 10.5). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\|e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_2(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon. \quad (17.7)$$

При условии 10.2 постоянная \widehat{C}_2 зависит только от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 . При условии 10.4 эта константа зависит от тех же параметров и от n, \widehat{c}° .

Теорема 17.1 была установлена ранее в [BSu5, теорема 12.1], а теорема 17.2 — в [D1, теоремы 10.2, 10.3].

С помощью интерполяции из теорем 17.1, 17.2 выводим следствия.

Следствие 17.3. *В условиях теоремы 17.1 справедлива оценка*

$$\|e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_1(s)(1 + |\tau|)^{s/3}\varepsilon^{s/3}, \quad 0 \leq s \leq 3, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0. \quad (17.8)$$

Здесь $\widehat{\mathfrak{C}}_1(s) = 2^{1-s/3}\widehat{C}_1^{s/3}$.

Доказательство. Очевидно,

$$\|e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 2, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0. \quad (17.9)$$

Интерполируя между (17.9) и (17.6), приходим к оценке (17.8) с постоянной $\widehat{\mathfrak{C}}_1(s) = 2^{1-s/3}\widehat{C}_1^{s/3}$. \square

Следствие 17.4. *В условиях теоремы 17.2 справедлива оценка*

$$\|e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_2(s)(1 + |\tau|)^{s/4}\varepsilon^{s/2}, \quad 0 \leq s \leq 2, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0. \quad (17.10)$$

Здесь $\widehat{\mathfrak{C}}_2(s) = 2^{1-s/2}\widehat{C}_2^{s/2}$.

Доказательство. Интерполируя между (17.9) и (17.7), приходим к оценке (17.10). \square

Замечание 17.5. 1) В условиях теоремы 17.1 можно рассмотреть большие значения времени $\tau = O(\varepsilon^{-\alpha})$, $0 < \alpha < 1$, и получить квалифицированную оценку:

$$\|e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon^{s(1-\alpha)/3}), \quad 0 \leq s \leq 3.$$

2) В условиях теоремы 17.2 можно рассмотреть значения $\tau = O(\varepsilon^{-\alpha})$, $0 < \alpha < 2$, и получить квалифицированную оценку:

$$\|e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon^{s(2-\alpha)/4}), \quad 0 \leq s \leq 2.$$

17.4. Более точная аппроксимация. Положим $\Pi_\varepsilon := T_\varepsilon^* \Pi T_\varepsilon$. Тогда Π_ε — это ПДО в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ с символом $\chi_{\tilde{\Omega}/\varepsilon}(\xi)$:

$$(\Pi_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\tilde{\Omega}/\varepsilon} e^{i\langle \mathbf{x}, \xi \rangle} \hat{\mathbf{u}}(\xi) d\xi.$$

Положим

$$\widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau) := e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} (I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon) - (I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon) e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}, \quad (17.11)$$

$$\begin{aligned} \widehat{G}_\varepsilon(\tau) &:= e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} (I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon) - (I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon) e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0} \\ &\quad + i\varepsilon \int_0^\tau e^{-i(\tau-\tilde{\tau})\widehat{\mathcal{A}}^0} b(\mathbf{D})^* L(\mathbf{D}) b(\mathbf{D}) e^{-i\tilde{\tau}\widehat{\mathcal{A}}^0} d\tilde{\tau}. \end{aligned} \quad (17.12)$$

Оператор (17.11) ограничен, а оператор (17.12) в общем случае определен на $H^3(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. При условии 10.4 оператор (17.12) определен на $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$; см. п. 15.2.

Пусть операторы $\widehat{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau)$ и $\widehat{G}(\varepsilon^{-2}\tau)$ определены в (15.6), (15.7). Применяя масштабное преобразование, получаем

$$\widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau)(\mathcal{H}_0 + I)^{-s/2} = T_\varepsilon^* \widehat{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2} T_\varepsilon, \quad (17.13)$$

$$\widehat{G}_\varepsilon(\tau)(\mathcal{H}_0 + I)^{-s/2} = T_\varepsilon^* \widehat{G}(\varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2} T_\varepsilon. \quad (17.14)$$

Отсюда и из теорем 15.3, 15.4, 15.5 с учетом унитарности оператора T_ε непосредственно вытекают следующие утверждения.

Теорема 17.6. Пусть оператор $\widehat{G}_\varepsilon(\tau)$ определен в (17.12). При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|\widehat{G}_\varepsilon(\tau)\|_{H^6(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_3(1 + |\tau|)^2 \varepsilon^2. \quad (17.15)$$

Постоянная \widehat{C}_3 зависит только от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Теорема 17.7. Пусть оператор $\widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau)$ определен в (17.11). Пусть выполнено условие 10.2. При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|\widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^4(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_4(1 + |\tau|)\varepsilon^2. \quad (17.16)$$

Постоянная \widehat{C}_4 зависит только от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Теорема 17.8. Пусть оператор $\widehat{G}_\varepsilon(\tau)$ определен в (17.12). Пусть выполнено условие 10.4 (или более сильное условие 10.5). При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|\widehat{G}_\varepsilon(\tau)\|_{H^4(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_5(1 + |\tau|)\varepsilon^2. \quad (17.17)$$

Постоянная \widehat{C}_5 зависит от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, r_0$, а также от n и \widehat{c}° .

Аналогичным образом из предложения 15.7 и соотношений (17.13), (17.14) вытекает следующее утверждение.

Предложение 17.9. Пусть операторы $\widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau)$ и $\widehat{G}_\varepsilon(\tau)$ определены в (17.11), (17.12).

1°. При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|\widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^3(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_6^\circ(1 + |\tau|)\varepsilon, \quad (17.18)$$

$$\|\widehat{G}_\varepsilon(\tau)\|_{H^3(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_6(1 + |\tau|)\varepsilon. \quad (17.19)$$

Постоянны \widehat{C}_6° и \widehat{C}_6 зависят лишь от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

2°. Пусть выполнено условие 10.2. При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|\widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_7(1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon. \quad (17.20)$$

Постоянная \widehat{C}_7 зависит лишь от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

3°. Пусть выполнено условие 10.4 (или более сильное условие 10.5). При $\tau \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|\widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_8^\circ (1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon, \quad (17.21)$$

$$\|\widehat{G}_\varepsilon(\tau)\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_8 (1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon. \quad (17.22)$$

Постоянные $\widehat{C}_8^\circ, \widehat{C}_8$ зависят от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 , а также от n и \widehat{c}° .

С помощью интерполяции из теорем 17.6, 17.7, 17.8 и предложения 17.9 выводятся следующие результаты.

Следствие 17.10. В условиях теоремы 17.6 справедлива оценка

$$\|\widehat{G}_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_3(s) (1 + |\tau|)^{s/3} \varepsilon^{s/3}, \quad 3 \leq s \leq 6, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0. \quad (17.23)$$

Здесь $\widehat{\mathfrak{C}}_3(s) = \widehat{C}_6^{2-s/3} \widehat{C}_3^{s/3-1}$.

Доказательство. Интерполируя между (17.19) и (17.15), приходим к оценке (17.23). \square

Следствие 17.11. В условиях теоремы 17.7 справедлива оценка

$$\|\widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_4(s) (1 + |\tau|)^{s/4} \varepsilon^{s/2}, \quad 2 \leq s \leq 4, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0. \quad (17.24)$$

Здесь $\widehat{\mathfrak{C}}_4(s) = \widehat{C}_7^{2-s/2} \widehat{C}_4^{s/2-1}$.

Доказательство. Интерполируя между (17.20) и (17.16), получаем (17.24). \square

Следствие 17.12. В условиях теоремы 17.8 справедлива оценка

$$\|\widehat{G}_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_5(s) (1 + |\tau|)^{s/4} \varepsilon^{s/2}, \quad 2 \leq s \leq 4, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0. \quad (17.25)$$

Здесь $\widehat{\mathfrak{C}}_5(s) = \widehat{C}_8^{2-s/2} \widehat{C}_5^{s/2-1}$.

Доказательство. Интерполируя между (17.22) и (17.17), получаем (17.25). \square

Замечание 17.13. 1) В условиях теоремы 17.6 можно рассмотреть большие значения времени $\tau = O(\varepsilon^{-\alpha}), 0 < \alpha < 1$, и получить квалифицированную оценку

$$\|\widehat{G}_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon^{s(1-\alpha)/3}), \quad 3 \leq s \leq 6.$$

2) В условиях теоремы 17.7 можно рассмотреть значения $\tau = O(\varepsilon^{-\alpha}), 0 < \alpha < 2$, и получить квалифицированную оценку

$$\|\widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon^{s(2-\alpha)/4}), \quad 2 \leq s \leq 4.$$

3) В условиях теоремы 17.8 можно рассмотреть значения $\tau = O(\varepsilon^{-\alpha}), 0 < \alpha < 2$, и получить оценку

$$\|\widehat{G}_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon^{s(2-\alpha)/4}), \quad 2 \leq s \leq 4.$$

17.5. Аппроксимация по энергетической норме. Получим теперь аппроксимацию оператора $e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} (I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon)$ по $(H^s \rightarrow H^1)$ -норме (“энергетической” норме), а также аппроксимацию оператора $g^\varepsilon b(\mathbf{D})e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} (I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon)$ (отвечающего “потоку”) по $(H^s \rightarrow L_2)$ -норме. Положим

$$\widehat{\Xi}_\varepsilon(\tau) := g^\varepsilon b(\mathbf{D})e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} (I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}. \quad (17.26)$$

Применяя масштабное преобразование, получаем

$$\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2} \widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau) (\mathcal{H}_0 + I)^{-s/2} = \varepsilon^{-1} T_\varepsilon^* \widehat{\mathcal{A}}^{1/2} \widehat{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2} T_\varepsilon. \quad (17.27)$$

Отсюда и из теорем 15.8, 15.9 выводятся следующие результаты.

Теорема 17.14. Пусть $\widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau)$ — оператор (17.11) и $\widehat{\Xi}_\varepsilon(\tau)$ — оператор (17.26). При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|\widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^4(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_{12}(1 + |\tau|)\varepsilon, \quad (17.28)$$

$$\|\widehat{\Xi}_\varepsilon(\tau)\|_{H^4(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_{13}(1 + |\tau|)\varepsilon. \quad (17.29)$$

Постоянные \widehat{C}_{12} , \widehat{C}_{13} зависят лишь от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Доказательство. Используя (17.27) и унитарность оператора T_ε , из теоремы 15.8 получаем оценку

$$\|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2} \widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^4(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_9(1 + |\tau|)\varepsilon. \quad (17.30)$$

Аналогично (8.11) имеем:

$$\widehat{c}_* \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2} \mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^n). \quad (17.31)$$

Следовательно,

$$\|\mathbf{D}\widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^4(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{c}_*^{-1/2} \widehat{C}_9(1 + |\tau|)\varepsilon.$$

Вместе с (17.18) это влечет (17.28).

Теперь проверим оценку (17.29). Из (17.30) вытекает, что

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^4(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \widehat{C}_9(1 + |\tau|)\varepsilon. \quad (17.32)$$

С учетом (9.11) имеем:

$$\begin{aligned} g^\varepsilon b(\mathbf{D})(I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon) e^{-i\tau \widehat{\mathcal{A}}^0} &= \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon e^{-i\tau \widehat{\mathcal{A}}^0} \\ &+ g^\varepsilon b(\mathbf{D})(I - \Pi_\varepsilon) e^{-i\tau \widehat{\mathcal{A}}^0} + \varepsilon g^\varepsilon \sum_{l=1}^d b_l \Lambda^\varepsilon D_l b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon e^{-i\tau \widehat{\mathcal{A}}^0}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\widehat{\Xi}_\varepsilon(\tau) = g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau) + g^\varepsilon b(\mathbf{D})(I - \Pi_\varepsilon) e^{-i\tau \widehat{\mathcal{A}}^0} + \varepsilon g^\varepsilon \sum_{l=1}^d b_l \Lambda^\varepsilon D_l b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon e^{-i\tau \widehat{\mathcal{A}}^0}. \quad (17.33)$$

С помощью масштабного преобразования и преобразования Фурье получаем

$$\begin{aligned} \|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(I - \Pi_\varepsilon) e^{-i\tau \widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{H^4(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= \varepsilon^{-1} \|gb(\mathbf{D})(I - \Pi)e^{-i\varepsilon^{-2}\tau \widehat{\mathcal{A}}^0} \mathcal{R}(\varepsilon)^2\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \varepsilon^{-1} \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} \sup_{|\xi| \geq r_0} \frac{|\xi| \varepsilon^4}{(|\xi|^2 + \varepsilon^2)^2} \leq r_0^{-1} \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} \varepsilon. \end{aligned} \quad (17.34)$$

Далее, применяя масштабное преобразование и разложение в прямой интеграл и учитывая соотношения (8.8), (10.9) и (10.12), имеем

$$\begin{aligned} &\left\| \varepsilon g^\varepsilon \sum_{l=1}^d b_l \Lambda^\varepsilon D_l b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon e^{-i\tau \widehat{\mathcal{A}}^0} \right\|_{H^4(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \varepsilon \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} \sum_{l=1}^d \|\Lambda \varepsilon^{-2} D_l b(\mathbf{D}) \Pi e^{-i\varepsilon^{-2}\tau \widehat{\mathcal{A}}^0} \mathcal{R}(\varepsilon)^2\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &= \varepsilon^{-1} \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} \sum_{l=1}^d \sup_{\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}} \|[\Lambda] k_l b(\mathbf{k}) \widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \frac{\varepsilon^4}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^2} \\ &\leq \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} d^{1/2} C_{\tilde{Z}} \sup_{\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}} \frac{\varepsilon^3 |\mathbf{k}|^2}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^2} \leq \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} d^{1/2} C_{\tilde{Z}} \varepsilon. \end{aligned} \quad (17.35)$$

Комбинируя (17.32)–(17.35), приходим к искомой оценке (17.29). \square

Теорема 17.15. Пусть выполнено условие 10.2 либо условие 10.4 (или более сильное условие 10.5). Пусть $\widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau)$ — оператор (17.11) и $\widehat{\Xi}_\varepsilon(\tau)$ — оператор (17.26). При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|\widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^3(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_{14}(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon, \quad (17.36)$$

$$\|\widehat{\Xi}_\varepsilon(\tau)\|_{H^3(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_{15}(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon. \quad (17.37)$$

При условии 10.2 постоянные \widehat{C}_{14} , \widehat{C}_{15} зависят только от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 . При условии 10.4 они зависят от тех же параметров, а также от n и \widehat{c}° .

Доказательство. Из (17.27) и теоремы 15.9 вытекает оценка

$$\|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}\widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^3(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_{10}(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon. \quad (17.38)$$

Учитывая (17.31), отсюда получаем

$$\|\mathbf{D}\widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^3(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{c}_*^{-1/2}\widehat{C}_{10}(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon.$$

Вместе с (17.20) (при условии 10.2) или (17.21) (при условии 10.4) это влечет (17.36).

Теперь проверим оценку (17.37). Из (17.38) вытекает, что

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^3(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \|g\|_{L_\infty}^{1/2}\widehat{C}_{10}(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon. \quad (17.39)$$

Воспользуемся представлением (17.33).

Аналогично (17.34) имеем:

$$\begin{aligned} \|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(I - \Pi_\varepsilon)e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{H^3(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= \varepsilon^{-1}\|gb(\mathbf{D})(I - \Pi)e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \varepsilon^{-1}\|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}\sup_{|\boldsymbol{\xi}| \geq r_0}\frac{|\boldsymbol{\xi}|\varepsilon^3}{(|\boldsymbol{\xi}|^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \leq r_0^{-1}\|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}\varepsilon. \end{aligned} \quad (17.40)$$

По аналогии с (17.35) получаем

$$\begin{aligned} &\left\|\varepsilon g^\varepsilon \sum_{l=1}^d b_l \Lambda^\varepsilon D_l b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\right\|_{H^3(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \varepsilon\|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}\sum_{l=1}^d\|\Lambda\varepsilon^{-2}D_l b(\mathbf{D})\Pi e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &= \varepsilon^{-1}\|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}\sum_{l=1}^d\sup_{\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}}\|[\Lambda]k_l b(\mathbf{k})P\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)}\frac{\varepsilon^3}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \\ &\leq \|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}d^{1/2}C_{\widehat{Z}}\sup_{\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}}\frac{\varepsilon^2|\mathbf{k}|^2}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \leq \|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}d^{1/2}C_{\widehat{Z}}\varepsilon. \end{aligned} \quad (17.41)$$

Комбинируя (17.33), (17.39)–(17.41), приходим к искомой оценке (17.37). \square

Предложение 17.16. Пусть $\widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau)$ — оператор (17.11) и $\widehat{\Xi}_\varepsilon(\tau)$ — оператор (17.26). При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|\widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_{16}, \quad (17.42)$$

$$\|\widehat{\Xi}_\varepsilon(\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_{17}. \quad (17.43)$$

Постоянные \widehat{C}_{16} , \widehat{C}_{17} зависят только от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 и r_1 .

Доказательство. Используя (17.13), (17.27) и предложение 15.10, получаем оценки

$$\begin{aligned}\|\widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{C}_{11}^\circ, \\ \|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2} \widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{C}_{11}.\end{aligned}\quad (17.44)$$

С учетом (17.31) отсюда вытекает неравенство (17.42).

Из (17.44) следует, что

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_{11} \|g\|_{L_\infty}^{1/2}.$$

Отсюда с помощью представления (17.33) нетрудно вывести оценку (17.43) (по аналогии с (17.34) и (17.35)). \square

С помощью интерполяции из теорем 17.14, 17.15 и предложения 17.16 выводим следующие утверждения.

Следствие 17.17. В условиях теоремы 17.14 справедливы оценки

$$\|\widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_6(s)(1+|\tau|)^{(s-1)/3} \varepsilon^{(s-1)/3}, \quad 1 \leq s \leq 4, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0, \quad (17.45)$$

$$\|\widehat{\Xi}_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_7(s)(1+|\tau|)^{(s-1)/3} \varepsilon^{(s-1)/3}, \quad 1 \leq s \leq 4, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0. \quad (17.46)$$

Здесь $\widehat{\mathfrak{C}}_6(s) = \widehat{C}_{16}^{(4-s)/3} \widehat{C}_{12}^{(s-1)/3}$, $\widehat{\mathfrak{C}}_7(s) = \widehat{C}_{17}^{(4-s)/3} \widehat{C}_{13}^{(s-1)/3}$.

Доказательство. Интерполируя между (17.42) и (17.28), получаем (17.45).

Интерполируя между (17.43) и (17.29), приходим к (17.46). \square

Следствие 17.18. В условиях теоремы 17.15 справедливы оценки

$$\|\widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_8(s)(1+|\tau|)^{(s-1)/4} \varepsilon^{(s-1)/2}, \quad 1 \leq s \leq 3, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0, \quad (17.47)$$

$$\|\widehat{\Xi}_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_9(s)(1+|\tau|)^{(s-1)/4} \varepsilon^{(s-1)/2}, \quad 1 \leq s \leq 3, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0. \quad (17.48)$$

Здесь $\widehat{\mathfrak{C}}_8(s) = \widehat{C}_{16}^{(3-s)/2} \widehat{C}_{14}^{(s-1)/2}$, $\widehat{\mathfrak{C}}_9(s) = \widehat{C}_{17}^{(3-s)/2} \widehat{C}_{15}^{(s-1)/2}$.

Доказательство. Интерполируя между (17.42) и (17.36), получаем (17.47).

Интерполируя между (17.43) и (17.37), приходим к (17.48). \square

Замечание 17.19. 1) В условиях теоремы 17.14 можно рассмотреть большие значения времени $\tau = O(\varepsilon^{-\alpha})$, $0 < \alpha < 1$, и получить квалифицированные оценки

$$\|\widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon^{(s-1)(1-\alpha)/3}), \quad 1 \leq s \leq 4,$$

$$\|\widehat{\Xi}_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon^{(s-1)(1-\alpha)/3}), \quad 1 \leq s \leq 4.$$

2) В условиях теоремы 17.15 можно рассмотреть значения $\tau = O(\varepsilon^{-\alpha})$, $0 < \alpha < 2$, и получить оценки

$$\|\widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon^{(s-1)(2-\alpha)/4}), \quad 1 \leq s \leq 3,$$

$$\|\widehat{\Xi}_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon^{(s-1)(2-\alpha)/4}), \quad 1 \leq s \leq 3.$$

17.6. Обсуждение. Результаты пунктов 17.4, 17.5 дают приближение не для самой экспоненты $e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$, а для композиции $e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}(I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon)$. Если бы нам удалось приблизить “проблемный член” $e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon$ с нужной точностью, это привело бы к аппроксимациям для экспоненты $e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$. Однако, не представляется возможным приблизить этот член в прежних терминах (в терминах спектральных характеристик оператора $\widehat{\mathcal{A}}$ на краю спектра). Действительно, после масштабного преобразования и разложения в прямой интеграл “проблемный член” перейдет в оператор $e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})[\Lambda]b(\mathbf{k})\widehat{P}}$, действующий в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$. Поскольку выполнено тождество $[\Lambda]b(\mathbf{k})\widehat{P} = \widehat{P}^\perp[\Lambda]b(\mathbf{k})\widehat{P}$, а в пределах допустимой погрешности \widehat{P}^\perp можно заменить на

$\widehat{F}(\mathbf{k})^\perp$, приходим к “новому проблемному члену” $e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})}\widehat{F}(\mathbf{k})^\perp[\Lambda]b(\mathbf{k})\widehat{P}$. Ясно, что оператор $e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})}\widehat{F}(\mathbf{k})^\perp$ нельзя приблизить в “пороговых” терминах, так как $\widehat{F}(\mathbf{k})^\perp$ — это спектральный проектор оператора $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$, отвечающий интервалу $[3\delta, \infty)$. См. замечание 2.5, где этот вопрос обсуждался в абстрактной постановке.

17.7. Подтверждение точности результатов пунктов 17.3–17.5. Применяя теоремы из пункта 15.4, подтверждим точность результатов пунктов 17.3–17.5. Сначала обсудим точность относительно типа операторной нормы.

Покажем, что общие результаты (теоремы 17.1, 17.6, 17.14) точны.

Теорема 17.20. *Пусть выполнено условие 11.1.*

1°. *Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq s < 3$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнялось*

$$\|e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon. \quad (17.49)$$

2°. *Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq s < 6$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнялось*

$$\|\widehat{G}_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon^2. \quad (17.50)$$

3°. *Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq s < 4$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнялось*

$$\|\widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon. \quad (17.51)$$

Доказательство. Проверим утверждение 1°. Предположим, что при некоторых $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq s < 3$ оценка (17.49) выполняется при достаточно малом ε . Применяя масштабное преобразование (см. (17.5)), получаем, что выполнена также оценка (15.30). Но это противоречит утверждению 1° теоремы 15.11.

Аналогичным образом утверждение 2° выводится из утверждения 2° теоремы 15.11.

Проверим утверждение 3°. Предположим, что при некоторых $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq s < 4$ оценка (17.51) выполняется при достаточно малом ε . Тогда

$$\|\mathbf{D}\widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau)(\mathcal{H}_0 + I)^{-s/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon,$$

а потому выполнена также оценка

$$\|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}\widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau)(\mathcal{H}_0 + I)^{-s/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widetilde{\mathcal{C}}(\tau)\varepsilon$$

при достаточно малом ε (с некоторой постоянной $\widetilde{\mathcal{C}}(\tau) > 0$). Применяя масштабное преобразование (см. (17.27)), получаем, что выполнена также оценка (15.32). Но это противоречит утверждению 3° теоремы 15.11. \square

Ранее утверждение 1° было получено в [Su6, теорема 13.6].

По аналогии с доказательством теоремы 17.20, из теоремы 15.12 с помощью масштабного преобразования вытекает, что усиленные результаты (теоремы 17.2, 17.7, 17.8, 17.15) тоже точны.

Теорема 17.21. *Пусть выполнено условие 11.2.*

1°. *Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq s < 2$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы оценка (17.49) выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.*

2°. *Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq s < 4$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы оценка (17.50) выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.*

3°. *Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq s < 3$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы оценка (17.51) выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.*

Утверждение 1° было ранее установлено в [D1, теорема 10.7].

Перейдем к подтверждению точности относительно зависимости оценок от параметра τ . Из теоремы 15.13 с помощью масштабного преобразования вытекает следующий результат, подтверждающий точность общих результатов (теорем 17.1, 17.6, 17.14).

Теорема 17.22. *Пусть выполнено условие 11.1.*

- 1°. *Пусть $s \geq 3$. Не существует положительной функции $C(\tau) > 0$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (17.49) при $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.*
- 2°. *Пусть $s \geq 6$. Не существует положительной функции $C(\tau) > 0$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/\tau^2 = 0$ и выполнена оценка (17.50) при $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.*
- 3°. *Пусть $s \geq 4$. Не существует положительной функции $C(\tau) > 0$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (17.51) при $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.*

Утверждение 1° ранее было получено в [D1, теорема 10.6].

Наконец, из теоремы 15.14 с помощью масштабного преобразования выводим следующий результат, демонстрирующий точность усиленных результатов (теорем 17.2, 17.7, 17.8, 17.15).

Теорема 17.23. *Пусть выполнено условие 11.2.*

- 1°. *Пусть $s \geq 2$. Не существует положительной функции $C(\tau) > 0$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (17.49) при $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.*
- 2°. *Пусть $s \geq 4$. Не существует положительной функции $C(\tau) > 0$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (17.50) при $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.*
- 3°. *Пусть $s \geq 3$. Не существует положительной функции $C(\tau) > 0$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (17.51) при $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.*

Ранее утверждение 1° было получено в [D1, теорема 10.7].

17.8. О возможности устранения сглаживающего оператора Π_ε в аппроксимациях. Рассмотрим теперь вопрос о возможности устранения оператора Π_ε в аппроксимациях (то есть, замены Π_ε тождественным оператором с сохранением порядка погрешностей) в результатах пунктов 17.4 и 17.5.

Лемма 17.24. *Пусть $s \geq 1$. При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\|b(\mathbf{D})(I - \Pi)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^{s-1}(\mathbb{R}^d)} \leq C(s)\varepsilon^s. \quad (17.52)$$

Постоянная $C(s)$ зависит от α_1 , r_0 и s .

Доказательство. Записывая норму в левой части (17.52) в Фурье-представлении и вспоминая, что символ оператора Π есть $\chi_{\tilde{\Omega}}(\xi)$, получаем:

$$\begin{aligned} & \|b(\mathbf{D})(I - \Pi)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^{s-1}(\mathbb{R}^d)} \\ &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^{(s-1)/2} (1 - \chi_{\tilde{\Omega}}(\xi)) |b(\xi)| \frac{\varepsilon^s}{(|\xi|^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \\ &\leq \alpha_1^{1/2} \varepsilon^s \sup_{|\xi| \geq r_0} \frac{(1 + |\xi|^2)^{(s-1)/2} |\xi|}{(|\xi|^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq C(s)\varepsilon^s, \end{aligned}$$

где $C(s) = \alpha_1^{1/2} (1 + r_0^{-2})^{(s-1)/2}$. □

Положим

$$\widehat{G}'_{0,\varepsilon}(\tau) := e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} (I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})) - (I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})) e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}, \quad (17.53)$$

$$\begin{aligned} \widehat{G}'_\varepsilon(\tau) &:= e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} (I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})) - (I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})) e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0} \\ &+ i\varepsilon \int_0^\tau e^{-i(\tau-\tilde{\tau})\widehat{\mathcal{A}}^0} b(\mathbf{D})^* L(\mathbf{D}) b(\mathbf{D}) e^{-i\tilde{\tau}\widehat{\mathcal{A}}^0} d\tilde{\tau}. \end{aligned} \quad (17.54)$$

Из (17.11), (17.12), (17.53) и (17.54) следуют соотношения

$$\widehat{G}'_\varepsilon(\tau) - \widehat{G}_\varepsilon(\tau) = \widehat{G}'_{0,\varepsilon}(\tau) - \widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau) = e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(I - \Pi_\varepsilon) - \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(I - \Pi_\varepsilon) e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}. \quad (17.55)$$

Из следствия 17.10 и леммы 17.24 выводится следующее утверждение. Ниже $[\Lambda]$ — оператор умножения на Г-периодическое решение задачи (9.8).

Теорема 17.25. *Пусть оператор $\widehat{G}'_\varepsilon(\tau)$ определен в (17.54). Пусть $3 \leq s \leq 6$ и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка*

$$\|\widehat{G}'_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}'_3(s)(1 + |\tau|)^{s/3}\varepsilon^{s/3}. \quad (17.56)$$

Константа $\widehat{\mathfrak{C}}'_3(s)$ зависит от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, r_0, s$, а также от нормы $\|[\Lambda]\|_{H^{s-1} \rightarrow L_2}$.

Доказательство. В силу (17.55) с помощью масштабного преобразования получаем

$$\begin{aligned} \|\widehat{G}'_\varepsilon(\tau) - \widehat{G}_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq 2\varepsilon \|\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(I - \Pi_\varepsilon)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &= 2\|\Lambda b(\mathbf{D})(I - \Pi)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq 2\|[\Lambda]\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \|b(\mathbf{D})(I - \Pi)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^{s-1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq 2\|[\Lambda]\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} C(s)\varepsilon^s, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (17.57)$$

В последнем переходе мы воспользовались оценкой (17.52). Вместе со следствием 17.10 с учетом ограничения $0 < \varepsilon \leq 1$ это влечет искомую оценку (17.56). \square

Аналогичным образом из следствий 17.11, 17.12 и леммы 17.24 вытекают следующие результаты.

Теорема 17.26. *Пусть оператор $\widehat{G}'_{0,\varepsilon}(\tau)$ определен в (17.53). Пусть выполнено условие 10.2. Пусть $2 \leq s \leq 4$ и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка*

$$\|\widehat{G}'_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}'_4(s)(1 + |\tau|)^{s/4}\varepsilon^{s/2}, \quad 2 \leq s \leq 4. \quad (17.58)$$

Постоянная $\widehat{\mathfrak{C}}'_4(s)$ зависит от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, r_0, s$, а также от нормы $\|[\Lambda]\|_{H^{s-1} \rightarrow L_2}$.

Теорема 17.27. *Пусть оператор $\widehat{G}'_\varepsilon(\tau)$ определен в (17.54). Пусть выполнено условие 10.4 (или более сильное условие 10.5). Пусть $2 \leq s \leq 4$ и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$. При $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка*

$$\|\widehat{G}'_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}'_5(s)(1 + |\tau|)^{s/4}\varepsilon^{s/2}.$$

Постоянная $\widehat{\mathfrak{C}}'_5(s)$ зависит от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, r_0, n, \tilde{c}^\circ, s$, а также от нормы $\|[\Lambda]\|_{H^{s-1} \rightarrow L_2}$.

Рассмотрим теперь вопрос о возможности устранения оператора Π_ε в аппроксимациях операторной экспоненты по энергетической норме. Положим

$$\widehat{\Xi}'_\varepsilon(\tau) := g^\varepsilon b(\mathbf{D})e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} (I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})) - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}. \quad (17.59)$$

Из следствия 17.17 и леммы 17.24 выводится следующее утверждение.

Теорема 17.28. *Пусть операторы $\widehat{G}'_{0,\varepsilon}(\tau)$ и $\widehat{\Xi}'_\varepsilon(\tau)$ определены в (17.53), (17.59). Пусть $2 \leq s \leq 4$ и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ в $H^1(\mathbb{R}^d)$. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедливы оценки*

$$\|\widehat{G}'_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}'_6(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/3}\varepsilon^{(s-1)/3}, \quad (17.60)$$

$$\|\widehat{\Xi}'_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}'_7(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/3}\varepsilon^{(s-1)/3}. \quad (17.61)$$

Постоянные $\widehat{\mathfrak{C}}'_6(s)$, $\widehat{\mathfrak{C}}'_7(s)$ зависят от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 , s , а также от нормы $\|[\Lambda]\|_{H^{s-1} \rightarrow H^1}$.

Замечание 17.29. Формально утверждение теоремы 17.28 верно при $1 \leq s \leq 4$, но условие на Λ при $1 \leq s < 2$ может выполняться только в случае $\Lambda = 0$.

Доказательство. По аналогии с (17.57) имеем

$$\|\widehat{G}'_{0,\varepsilon}(\tau) - \widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 2\|[\Lambda]\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} C(s) \varepsilon^s. \quad (17.62)$$

С помощью масштабного преобразования, (17.55) и леммы 17.24 получаем

$$\begin{aligned} \|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}(\widehat{G}'_{0,\varepsilon}(\tau) - \widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau))\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq 2\|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(I - \Pi_\varepsilon)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &= 2\varepsilon^{-1}\|\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\Lambda b(\mathbf{D})(I - \Pi)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq 2\varepsilon^{-1}\|g^{1/2}b(\mathbf{D})[\Lambda]\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \|b(\mathbf{D})(I - \Pi)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^{s-1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq 2\|g\|_{L_\infty}^{1/2} \alpha_1^{1/2} \|\mathbf{D}[\Lambda]\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} C(s) \varepsilon^{s-1}. \end{aligned} \quad (17.63)$$

Из (17.62) и (17.63) с учетом (17.31) и ограничения $0 < \varepsilon \leq 1$ вытекает оценка

$$\|\widehat{G}'_{0,\varepsilon}(\tau) - \widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}''_6(s) \varepsilon^{s-1}. \quad (17.64)$$

Постоянная $\widehat{\mathfrak{C}}''_6(s)$ зависит от α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, r_0 , s , а также от нормы $\|[\Lambda]\|_{H^{s-1} \rightarrow H^1}$. Из (17.45) и (17.64) вытекает (17.60).

Рассмотрим теперь оператор

$$\widehat{\Xi}'_\varepsilon(\tau) - \widehat{\Xi}_\varepsilon(\tau) = g^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(I - \Pi_\varepsilon) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(I - \Pi_\varepsilon) e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}. \quad (17.65)$$

Первое слагаемое справа легко оценить с помощью (17.63):

$$\begin{aligned} \|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(I - \Pi_\varepsilon)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2} \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(I - \Pi_\varepsilon)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \alpha_1^{1/2} \|\mathbf{D}[\Lambda]\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} C(s) \varepsilon^{s-1}. \end{aligned} \quad (17.66)$$

Рассмотрим второе слагаемое в правой части (17.65). Поскольку $\widetilde{g} = g(b(\mathbf{D})\Lambda + \mathbf{1})$ и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ в $H^1(\mathbb{R}^d)$, то согласно [MaSh, п. 1.3.2, лемма 1] оператор $[\widetilde{g}]$ непрерывен из $H^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$. При этом норма $\|[\widetilde{g}]\|_{H^{s-1} \rightarrow L_2}$ контролируется через $\|[\Lambda]\|_{H^{s-1} \rightarrow H^1}$ и $\|g\|_{L_\infty}$. С помощью масштабного преобразования с учетом леммы 17.24 получаем

$$\begin{aligned} \|\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(I - \Pi_\varepsilon) e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \|\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(I - \Pi_\varepsilon)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &= \varepsilon^{-1} \|\widetilde{g} b(\mathbf{D})(I - \Pi)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \|\widetilde{g}\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} C(s) \varepsilon^{s-1}. \end{aligned} \quad (17.67)$$

Из (17.65)–(17.67) вытекает оценка

$$\|\widehat{\Xi}'_\varepsilon(\tau) - \widehat{\Xi}_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}''_7(s) \varepsilon^{s-1},$$

где постоянная $\widehat{\mathfrak{C}}''_7(s)$ зависит от α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, r_0 , s , а также от нормы $\|[\Lambda]\|_{H^{s-1} \rightarrow H^1}$. Отсюда и из (17.46) вытекает (17.61). \square

Аналогичным образом из следствия 17.18 и леммы 17.24 вытекает следующий результат.

Теорема 17.30. Пусть операторы $\widehat{G}'_{0,\varepsilon}(\tau)$ и $\widehat{\Xi}'_\varepsilon(\tau)$ определены в (17.53), (17.59). Пусть выполнено условие 10.2 либо условие 10.4 (или более сильное условие 10.5). Пусть $2 \leq s \leq 3$

и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ в $H^1(\mathbb{R}^d)$. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедливы оценки

$$\|\widehat{G}'_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}'_8(s)(1+|\tau|)^{(s-1)/4}\varepsilon^{(s-1)/2}, \quad 2 \leq s \leq 3, \quad (17.68)$$

$$\|\widehat{\Xi}'_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}'_9(s)(1+|\tau|)^{(s-1)/4}\varepsilon^{(s-1)/2}, \quad 2 \leq s \leq 3. \quad (17.69)$$

При условии 10.2 постоянные $\widehat{\mathfrak{C}}'_8(s)$, $\widehat{\mathfrak{C}}'_9(s)$ зависят от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 , s , а также от нормы $\|[\Lambda]\|_{H^{s-1} \rightarrow H^1}$. При условии 10.4 эти константы зависят от тех же параметров и от n , \widehat{c}° .

Укажем некоторые случаи, когда одно из условий на оператор $[\Lambda]$ (из теорем 17.25–17.30) выполнено. Нам понадобятся следующие вспомогательные факты.

Предложение 17.31. Пусть $l \geq 0$. Пусть Υ – Г-периодическая функция в \mathbb{R}^d , причем

$$\Upsilon \in L_p(\Omega), \quad p = 2 \text{ при } 2l > d, \quad p > 2 \text{ при } 2l = d, \quad p = \frac{d}{l} \text{ при } 2l < d. \quad (17.70)$$

Тогда оператор $[\Upsilon]$ непрерывен из $H^l(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$, причем

$$\|[\Upsilon]\|_{H^l(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq c(d, l, \Omega) \|\Upsilon\|_{L_p(\Omega)}. \quad (17.71)$$

Доказательство. В силу теоремы вложения пространство $H^l(\Omega)$ вкладывается в $L_q(\Omega)$, где

$$q = \infty \text{ при } 2l > d, \quad q < \infty \text{ при } 2l = d, \quad q = \frac{2d}{d-2l} \text{ при } 2l < d. \quad (17.72)$$

При этом

$$\|v\|_{L_q(\Omega)} \leq c(d, l, \Omega) \|v\|_{H^l(\Omega)}, \quad v \in H^l(\Omega). \quad (17.73)$$

Константа вложения $c(d, l, \Omega)$ зависит от d , l , Ω , а при $2l = d$ зависит также от q .

Пусть $\mathbf{a} \in \Gamma$ и $v \in H^l(\mathbb{R}^d)$. Тогда в силу неравенства Гёльдера с учетом (17.73)

$$\int_{\Omega+\mathbf{a}} |\Upsilon(\mathbf{x})v(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \leq \|\Upsilon\|_{L_p(\Omega)}^2 \|v\|_{L_q(\Omega+\mathbf{a})}^2 \leq c(d, l, \Omega)^2 \|\Upsilon\|_{L_p(\Omega)}^2 \|v\|_{H^l(\Omega+\mathbf{a})}^2. \quad (17.74)$$

Здесь p – показатель из условия (17.70), а q удовлетворяет (17.72); при $2l = d$ полагаем $q = \frac{2p}{p-2}$.

Суммируя (17.74) по $\mathbf{a} \in \Gamma$, получаем

$$\|\Upsilon v\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq c(d, l, \Omega) \|\Upsilon\|_{L_p(\Omega)} \|v\|_{H^l(\mathbb{R}^d)}.$$

□

Следствие 17.32. Пусть $s \geq 1$.

1°. При $d \leq 2s$ оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$, причем норма $\|[\Lambda]\|_{H^{s-1} \rightarrow L_2}$ контролируется через d , α_0 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и параметры решетки Γ .

2°. При $d > 2s$ для непрерывности оператора $[\Lambda]$ из $H^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$ достаточно, чтобы $\Lambda \in L_{d/(s-1)}(\Omega)$. Норма $\|[\Lambda]\|_{H^{s-1} \rightarrow L_2}$ контролируется через d , параметры решетки Γ и норму $\|\Lambda\|_{L_{d/(s-1)}(\Omega)}$.

Доказательство. Поскольку $\Lambda \in H^1(\Omega)$, то в силу теоремы вложения

$$\Lambda \in L_r(\Omega), \quad r = \infty \text{ при } d = 1, \quad r < \infty \text{ при } d = 2, \quad r = \frac{2d}{d-2} \text{ при } d \geq 3. \quad (17.75)$$

При этом

$$\|\Lambda\|_{L_r(\Omega)} \leq \tilde{c}(d, \Omega) \|\Lambda\|_{H^1(\Omega)}, \quad (17.76)$$

где константа вложения $\tilde{c}(d, \Omega)$ зависит от d и Ω (и от r в случае $d = 2$).

Если $d \leq 2s$, из (17.75) следует, что выполнены условия предложения 17.31 при $l = s - 1$ и $\Upsilon = \Lambda$. Следовательно, оператор $[\Lambda]$ непрерывен из H^{s-1} в L_2 . Нужная оценка его нормы вытекает из (17.71), (17.76) и неравенств (9.14), (9.15). Этим доказано утверждение 1°.

Утверждение 2° следует непосредственно из предложения 17.31. \square

Следующее утверждение установлено в [Su3, предложение 9.3].

Предложение 17.33 ([Su3]). *Пусть Λ — Г-периодическое решение задачи (9.8). Пусть $l = 1$ при $d = 1$, $l > 1$ при $d = 2$ и $l = d/2$ при $d \geq 3$. Тогда оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^l(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$ в $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, причем норма $\|[\Lambda]\|_{H^l \rightarrow H^1}$ контролируется через d , α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и параметры решетки Γ , а при $d = 2$ зависит также от l .*

Из предложения 17.33 непосредственно вытекает следствие.

Следствие 17.34. *Пусть $s \geq 2$. При $d \leq 2s - 2$ оператор $[\Lambda]$ заведомо непрерывен из $H^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ в $H^1(\mathbb{R}^d)$, причем норма $\|[\Lambda]\|_{H^{s-1} \rightarrow H^1}$ контролируется через d , α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и параметры решетки Γ .*

Далее, справедливо следующее утверждение.

Предложение 17.35. *Пусть Λ — Г-периодическое решение задачи (9.8). Пусть $l \geq 1$ и $d > 2l - 2$. Предположим, что $\Lambda \in L_{d/(l-1)}(\Omega)$. Тогда оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^l(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$ в $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, причем норма $\|[\Lambda]\|_{H^l \rightarrow H^1}$ контролируется через d , l , α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, параметры решетки Γ и норму $\|\Lambda\|_{L_{d/(l-1)}(\Omega)}$.*

Это утверждение при $l = 2$ было проверено в [M5, лемма 8.7]; случай произвольного $l \geq 1$ рассматривается аналогично.

Укажем другие достаточные условия непрерывности оператора $[\Lambda]$ из L_2 в L_2 и из H^1 в H^1 . (Отметим, что из непрерывности оператора $[\Lambda]$ из L_2 в L_2 следует его непрерывность из H^{s-1} в L_2 при любом $s \geq 1$, а из непрерывности оператора $[\Lambda]$ из H^1 в H^1 следует его непрерывность из H^{s-1} в H^1 при любом $s \geq 2$.)

Предложение 17.36. *Пусть выполнено хотя бы одно из следующих предположений:*

1°) *размерность d произвольна и $\widehat{\mathcal{A}} = \mathbf{D}^* g(\mathbf{x}) \mathbf{D}$, причем матрица $g(\mathbf{x})$ имеет вещественные элементы;*

2°) *размерность d произвольна и $g^0 = \underline{g}$ (т. е., выполнены соотношения (9.21)).*

Тогда оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$ в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и из $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$ в $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, причем нормы $\|[\Lambda]\|_{L_2 \rightarrow L_2}$ и $\|[\Lambda]\|_{H^1 \rightarrow H^1}$ контролируются через d , α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и параметры решетки Γ .

Доказательство. В случае 1° из теоремы 13.1 главы III книги [LaU] следует включение $\Lambda \in L_\infty$ (вместе с оценкой нормы $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ в терминах d , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и Ω). Остается применить следствия 17.32, 17.34 и предложение 17.35.

В случае $g^0 = \underline{g}$ включение $\Lambda \in L_\infty$ (вместе с подходящей оценкой нормы $\|\Lambda\|_{L_\infty}$) установлено в [BSu3, предложение 6.9]. Снова применяем следствия 17.32, 17.34 и предложение 17.35. \square

17.9. Специальные случаи. Рассмотрим теперь специальные случаи, когда $g^0 = \bar{g}$ или $g^0 = \underline{g}$.

Предложение 17.37. *Пусть $g^0 = \bar{g}$, т. е. выполнены соотношения (9.20). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки*

$$\|e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_{10}(s)(1 + |\tau|)^{s/4}\varepsilon^{s/2}, \quad 0 \leq s \leq 4, \quad (17.77)$$

$$\|e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_8(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/4}\varepsilon^{(s-1)/2}, \quad 1 \leq s \leq 3, \quad (17.78)$$

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - g^\varepsilon b(\mathbf{D})e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}'_9(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/4}\varepsilon^{(s-1)/2}, \quad 1 \leq s \leq 3. \quad (17.79)$$

Постоянные $\widehat{\mathfrak{C}}_8(s)$, $\widehat{\mathfrak{C}}'_9(s)$, $\widehat{\mathfrak{C}}_{10}(s)$ зависят только от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 и s .

Доказательство. Если выполнены соотношения (9.20), то $\Lambda(\mathbf{x}) = 0$. Тогда выполнено условие 10.2, а оператор (17.11) принимает вид $\widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau) = e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}$. Поэтому оценка (17.77) прямо вытекает из следствий 17.4 и 17.11; при этом $\widehat{\mathfrak{C}}_{10}(s) = \widehat{\mathfrak{C}}_2(s)$ при $0 \leq s \leq 2$ и $\widehat{\mathfrak{C}}_{10}(s) = \widehat{\mathfrak{C}}_4(s)$ при $2 < s \leq 4$. Оценка (17.78) вытекает из следствия 17.18, а (17.79) следует из (17.78); при этом $\widehat{\mathfrak{C}}'_9(s) = \|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}\widehat{\mathfrak{C}}_8(s)$. \square

Предложение 17.38. Пусть $g^0 = g$, т. е. выполнены соотношения (9.21). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки (17.10), (17.58), (17.68), а оценка (17.69) принимает вид

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}(I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})) - g^0 b(\mathbf{D})e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}'_9(s)(1+|\tau|)^{(s-1)/4}\varepsilon^{(s-1)/2}, \quad 1 \leq s \leq 3.$$

Доказательство. Если выполнены соотношения (9.21), то $\tilde{g}(\mathbf{x}) = g^0 = g$. Согласно предложению 9.4(3°) выполнено условие 10.2. В силу следствия 17.4 справедлива оценка (17.10). С учетом предложения 17.36(2°) применимы результаты “без сглаживателя”: теоремы 17.26 и 17.30, которые дают оценки (17.58), (17.68), (17.69). \square

§ 18. АППРОКСИМАЦИЯ ОКАЙМЛЕННОЙ ОПЕРАТОРНОЙ ЭКСПОНЕНТЫ $e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}$

18.1. Аппроксимация оператора $f^\varepsilon e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}(f^\varepsilon)^{-1}$ в старшем порядке. Переидем теперь к рассмотрению оператора \mathcal{A}_ε (см. (17.2)). Пусть \mathcal{A}^0 — оператор (12.3). Положим:

$$\mathcal{J}_\varepsilon(\tau) := f^\varepsilon e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}(f^\varepsilon)^{-1} - f_0 e^{-i\tau\mathcal{A}^0} f_0^{-1}. \quad (18.1)$$

Из (17.3), (17.4) вытекает тождество

$$\mathcal{J}_\varepsilon(\tau)(\mathcal{H}_0 + I)^{-s/2} = T_\varepsilon^* \mathcal{J}(\varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2} T_\varepsilon, \quad (18.2)$$

где оператор $\mathcal{J}(\tau)$ определен в (16.1).

Применяя теоремы 16.1 и 16.2, с учетом (18.2) получаем следующие две теоремы.

Теорема 18.1 ([BSu5]). Пусть \mathcal{A}_ε — оператор (17.2) и пусть \mathcal{A}^0 — оператор (12.3). Пусть оператор $\mathcal{J}_\varepsilon(\tau)$ определен в (18.1). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|\mathcal{J}_\varepsilon(\tau)\|_{H^3(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_1(1+|\tau|)\varepsilon. \quad (18.3)$$

Постоянная C_1 зависит от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Теорема 18.2 ([D1]). Пусть выполнены условия теоремы 18.1. Пусть выполнено условие 13.2 либо условие 13.4 (или более сильное условие 13.5). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|\mathcal{J}_\varepsilon(\tau)\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_2(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon. \quad (18.4)$$

При условии 13.2 постоянная C_2 зависит от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 . При условии 13.4 эта константа зависит от тех же параметров и от n, c° .

Теорема 18.1 ранее была установлена в [BSu5, теорема 12.3], а теорема 18.2 — в [D1, теорема 10.9].

С помощью интерполяции из теорем 18.1, 18.2 выводим следствия.

Следствие 18.3. В условиях теоремы 18.1 справедлива оценка

$$\|\mathcal{J}_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_1(s)(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{s/3}, \quad 0 \leq s \leq 3, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0. \quad (18.5)$$

Здесь $\mathfrak{C}_1(s) = (2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty})^{1-s/3}C_1^{s/3}$.

Доказательство. С учетом (12.2) имеем

$$\|\mathcal{J}_\varepsilon(\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0. \quad (18.6)$$

Интерполируя между (18.6) и (18.3), приходим к оценке (18.5) с постоянной $\mathfrak{C}_1(s) = (2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty})^{1-s/3}C_1^{s/3}$. \square

Следствие 18.4. В условиях теоремы 18.2 справедлива оценка

$$\|\mathcal{J}_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_2(s)(1+|\tau|)^{s/4}\varepsilon^{s/2}, \quad 0 \leq s \leq 2, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0. \quad (18.7)$$

Здесь $\mathfrak{C}_2(s) = (2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty})^{1-s/2}C_2^{s/2}$.

Доказательство. Интерполируя между (18.6) и (18.4), приходим к оценке (18.7) с постоянной $\mathfrak{C}_2(s) = (2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty})^{1-s/2}C_2^{s/2}$. \square

Замечание 18.5. 1) В условиях теоремы 18.1 можно рассмотреть большие значения времени $\tau = O(\varepsilon^{-\alpha})$, $0 < \alpha < 1$, и получить квалифицированную оценку

$$\|\mathcal{J}_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon^{s(1-\alpha)/3}), \quad 0 \leq s \leq 3.$$

2) В условиях теоремы 18.2 можно рассмотреть значения $\tau = O(\varepsilon^{-\alpha})$, $0 < \alpha < 2$, и получить квалифицированную оценку

$$\|\mathcal{J}_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon^{s(2-\alpha)/4}), \quad 0 \leq s \leq 2.$$

18.2. Более точная аппроксимация. Положим

$$\mathcal{G}_{0,\varepsilon}(\tau) := f^\varepsilon e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}(f^\varepsilon)^{-1} (I + \varepsilon\Lambda_Q^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon) - (I + \varepsilon\Lambda_Q^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon) f_0 e^{-i\tau\mathcal{A}^0} f_0^{-1}, \quad (18.8)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\varepsilon(\tau) := & f^\varepsilon e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}(f^\varepsilon)^{-1} (I + \varepsilon\Lambda_Q^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon) - (I + \varepsilon\Lambda_Q^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon) f_0 e^{-i\tau\mathcal{A}^0} f_0^{-1} \\ & + i\varepsilon \int_0^\tau f_0 e^{-i(\tau-\tilde{\tau})\mathcal{A}^0} f_0 b(\mathbf{D})^* L_Q(\mathbf{D}) b(\mathbf{D}) f_0 e^{-i\tilde{\tau}\mathcal{A}^0} f_0^{-1} d\tilde{\tau}. \end{aligned} \quad (18.9)$$

Оператор (18.8) ограничен, а оператор (18.9) в общем случае определен на $H^3(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. При условии 13.4 оператор (18.9) определен на $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$.

Пусть операторы $\mathcal{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau)$ и $\mathcal{G}(\varepsilon^{-2}\tau)$ определены в (16.4), (16.5). Применяя масштабное преобразование, получаем

$$\mathcal{G}_{0,\varepsilon}(\tau)(\mathcal{H}_0 + I)^{-s/2} = T_\varepsilon^* \mathcal{G}_0(\varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2} T_\varepsilon, \quad (18.10)$$

$$\mathcal{G}_\varepsilon(\tau)(\mathcal{H}_0 + I)^{-s/2} = T_\varepsilon^* \mathcal{G}(\varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2} T_\varepsilon. \quad (18.11)$$

Отсюда и из теорем 16.3, 16.4, 16.5 с учетом унитарности оператора T_ε непосредственно вытекают следующие утверждения.

Теорема 18.6. Пусть оператор $\mathcal{G}_\varepsilon(\tau)$ определен в (18.9). При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|\mathcal{G}_\varepsilon(\tau)\|_{H^6(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_3(1+|\tau|)^2\varepsilon^2. \quad (18.12)$$

Постоянная C_3 зависит только от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Теорема 18.7. Пусть оператор $\mathcal{G}_{0,\varepsilon}(\tau)$ определен в (18.8). Пусть выполнено условие 13.2. При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|\mathcal{G}_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^4(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_4(1+|\tau|)\varepsilon^2. \quad (18.13)$$

Постоянная C_4 зависит только от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Теорема 18.8. Пусть оператор $\mathcal{G}_\varepsilon(\tau)$ определен в (18.9). Пусть выполнено условие 13.4 (или более сильное условие 13.5). При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|\mathcal{G}_\varepsilon(\tau)\|_{H^4(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_5(1+|\tau|)\varepsilon^2. \quad (18.14)$$

Постоянная C_5 зависит от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}, r_0$, а также от n и c° .

Аналогичным образом из предложения 16.7 и соотношений (18.10), (18.11) вытекает следующее утверждение.

Предложение 18.9. Пусть операторы $\mathcal{G}_{0,\varepsilon}(\tau)$ и $\mathcal{G}_\varepsilon(\tau)$ определены в (18.8), (18.9).

1°. При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|\mathcal{G}_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^3(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_6^\circ(1 + |\tau|)\varepsilon, \quad (18.15)$$

$$\|\mathcal{G}_\varepsilon(\tau)\|_{H^3(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_6(1 + |\tau|)\varepsilon. \quad (18.16)$$

Постоянные C_6° и C_6 зависят лишь от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

2°. Пусть выполнено условие 13.2. При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|\mathcal{G}_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_7(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon. \quad (18.17)$$

Постоянная C_7 зависит лишь от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

3°. Пусть выполнено условие 13.4 (или более сильное условие 13.5). При $\tau \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|\mathcal{G}_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_8^\circ(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon, \quad (18.18)$$

$$\|\mathcal{G}_\varepsilon(\tau)\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_8(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon. \quad (18.19)$$

Постоянныe C_8°, C_8 зависят от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 , а также от n и c° .

С помощью интерполяции из теорем 18.6, 18.7, 18.8 и предложения 18.9 выводятся следующие результаты.

Следствие 18.10. В условиях теоремы 18.6 справедлива оценка

$$\|\mathcal{G}_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_3(s)(1 + |\tau|)^{s/3}\varepsilon^{s/3}, \quad 3 \leq s \leq 6, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0. \quad (18.20)$$

Здесь $\mathfrak{C}_3(s) = C_6^{2-s/3}C_3^{s/3-1}$.

Доказательство. Интерполируя между (18.16) и (18.12), приходим к оценке (18.20). \square

Следствие 18.11. В условиях теоремы 18.7 справедлива оценка

$$\|\mathcal{G}_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_4(s)(1 + |\tau|)^{s/4}\varepsilon^{s/2}, \quad 2 \leq s \leq 4, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0. \quad (18.21)$$

Здесь $\mathfrak{C}_4(s) = C_7^{2-s/2}C_4^{s/2-1}$.

Доказательство. Интерполируя между (18.17) и (18.13), получаем (18.21). \square

Следствие 18.12. В условиях теоремы 18.8 справедлива оценка

$$\|\mathcal{G}_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_5(s)(1 + |\tau|)^{s/4}\varepsilon^{s/2}, \quad 2 \leq s \leq 4, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0. \quad (18.22)$$

Здесь $\mathfrak{C}_5(s) = C_8^{2-s/2}C_5^{s/2-1}$.

Доказательство. Интерполируя между (18.19) и (18.14), получаем (18.22). \square

Замечание 18.13. 1) В условиях теоремы 18.6 можно рассмотреть большие значения времени $\tau = O(\varepsilon^{-\alpha})$, $0 < \alpha < 1$, и получить квалифицированную оценку

$$\|\mathcal{G}_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon^{s(1-\alpha)/3}), \quad 3 \leq s \leq 6.$$

2) В условиях теоремы 18.7 можно рассмотреть значения $\tau = O(\varepsilon^{-\alpha})$, $0 < \alpha < 2$, и получить квалифицированную оценку

$$\|\mathcal{G}_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon^{s(2-\alpha)/4}), \quad 2 \leq s \leq 4.$$

3) В условиях теоремы 18.8 можно рассмотреть значения $\tau = O(\varepsilon^{-\alpha})$, $0 < \alpha < 2$, и получить оценку

$$\|\mathcal{G}_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon^{s(2-\alpha)/4}), \quad 2 \leq s \leq 4.$$

18.3. Аппроксимация по энергетической норме. Положим

$$\Xi_\varepsilon(\tau) := g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon e^{-i\tau A_\varepsilon} (f^\varepsilon)^{-1} (I + \varepsilon \Lambda_Q^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon) - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon f_0 e^{-i\tau A^0} f_0^{-1}. \quad (18.23)$$

Пусть оператор $\mathcal{G}_{0,\varepsilon}(\varepsilon^{-2}\tau)$ определен в (16.4). Применяя масштабное преобразование, получаем

$$\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2} \mathcal{G}_{0,\varepsilon}(\tau) (\mathcal{H}_0 + I)^{-s/2} = \varepsilon^{-1} T_\varepsilon^* \widehat{\mathcal{A}}^{1/2} \mathcal{G}_{0,\varepsilon}(\varepsilon^{-2}\tau) \mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2} T_\varepsilon. \quad (18.24)$$

По аналогии с доказательством теоремы 17.14, используя это тождество, а также оценку (18.15), из теоремы 16.8 легко вывести следующий результат.

Теорема 18.14. *Пусть операторы $\mathcal{G}_{0,\varepsilon}(\tau)$ и $\Xi_\varepsilon(\tau)$ определены в (18.8) и (18.23). При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки*

$$\|\mathcal{G}_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^4(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C_{12}(1 + |\tau|)\varepsilon, \quad (18.25)$$

$$\|\Xi_\varepsilon(\tau)\|_{H^4(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{13}(1 + |\tau|)\varepsilon. \quad (18.26)$$

Постоянные C_{12} , C_{13} зависят от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 .

Далее, по аналогии с доказательством теоремы 17.15, применяя теорему 16.9 и учитывая (18.24), а также (18.17) (при условии 13.2) либо (18.18) (при условии 13.4), получаем следующий результат.

Теорема 18.15. *Пусть операторы $\mathcal{G}_{0,\varepsilon}(\tau)$ и $\Xi_\varepsilon(\tau)$ определены в (18.8) и (18.23). Пусть выполнено условие 13.2 либо условие 13.4 (или более сильное условие 13.5). При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки*

$$\|\mathcal{G}_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^3(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C_{14}(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon, \quad (18.27)$$

$$\|\Xi_\varepsilon(\tau)\|_{H^3(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{15}(1 + |\tau|)^{1/2}\varepsilon. \quad (18.28)$$

При условии 13.2 постоянные C_{14} , C_{15} зависят от только от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0 . При условии 13.4 они зависят от тех же параметров, а также от n , c° .

По аналогии с доказательством предложения 17.16, из предложения 16.10 нетрудно вывести следующее утверждение.

Предложение 18.16. *Пусть операторы $\mathcal{G}_{0,\varepsilon}(\tau)$ и $\Xi_\varepsilon(\tau)$ определены в (18.8) и (18.23). При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки*

$$\|\mathcal{G}_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C_{16}, \quad (18.29)$$

$$\|\Xi_\varepsilon(\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{17}. \quad (18.30)$$

Постоянныe C_{16} , C_{17} зависят только от α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0 и r_1 .

С помощью интерполяции из теорем 18.14, 18.15 и предложения 18.16 получаем следствия.

Следствие 18.17. *В условиях теоремы 18.14 справедливы оценки*

$$\|\mathcal{G}_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_6(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/3}\varepsilon^{(s-1)/3}, \quad 1 \leq s \leq 4, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0, \quad (18.31)$$

$$\|\Xi_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_7(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/3}\varepsilon^{(s-1)/3}, \quad 1 \leq s \leq 4, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0. \quad (18.32)$$

Здесь $\mathfrak{C}_6(s) = C_{16}^{(4-s)/3} C_{12}^{(s-1)/3}$, $\mathfrak{C}_7(s) = C_{17}^{(4-s)/3} C_{13}^{(s-1)/3}$.

Доказательство. Интерполируя между (18.29) и (18.31), приходим к оценке (18.31).

Интерполируя между (18.30) и (18.26), получаем (18.32). \square

Следствие 18.18. *В условиях теоремы 18.15 справедливы оценки*

$$\|\mathcal{G}_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_8(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/4}\varepsilon^{(s-1)/2}, \quad 1 \leq s \leq 3, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0, \quad (18.33)$$

$$\|\Xi_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_9(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/4}\varepsilon^{(s-1)/2}, \quad 1 \leq s \leq 3, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0. \quad (18.34)$$

Здесь $\mathfrak{C}_8(s) = C_{16}^{(3-s)/2} C_{14}^{(s-1)/2}$, $\mathfrak{C}_9(s) = C_{17}^{(3-s)/2} C_{15}^{(s-1)/2}$.

Доказательство. Интерполируя между (18.29) и (18.27), приходим к оценке (18.33).

Интерполируя между (18.30) и (18.28), получаем (18.34). \square

Замечание 18.19. 1) В условиях теоремы 18.14 можно рассмотреть большие значения времени $\tau = O(\varepsilon^{-\alpha})$, $0 < \alpha < 1$, и получить квалифицированные оценки

$$\begin{aligned}\|\mathcal{G}_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} &= O(\varepsilon^{(s-1)(1-\alpha)/3}), \quad 1 \leq s \leq 4, \\ \|\Xi_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= O(\varepsilon^{(s-1)(1-\alpha)/3}), \quad 1 \leq s \leq 4.\end{aligned}$$

2) В условиях теоремы 18.15 можно рассмотреть значения $\tau = O(\varepsilon^{-\alpha})$, $0 < \alpha < 2$, и получить квалифицированные оценки

$$\begin{aligned}\|\mathcal{G}_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} &= O(\varepsilon^{(s-1)(2-\alpha)/4}), \quad 1 \leq s \leq 3, \\ \|\Xi_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= O(\varepsilon^{(s-1)(2-\alpha)/4}), \quad 1 \leq s \leq 3.\end{aligned}$$

18.4. Подтверждение точности результатов пунктов 18.1–18.3. Применяя теоремы из пункта 16.4, подтверждим точность результатов пунктов 18.1–18.3. Начнем с точности относительно типа операторной нормы.

С помощью масштабного преобразования из теоремы 16.11 выводим следующую теорему, которая демонстрирует точность общих результатов (теорем 18.1, 18.6, 18.14).

Теорема 18.20. Пусть выполнено условие 14.1.

1°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq s < 3$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнялось

$$\|\mathcal{J}_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon. \quad (18.35)$$

2°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq s < 6$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнялось

$$\|\mathcal{G}_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon^2. \quad (18.36)$$

3°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq s < 4$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнялось

$$\|\mathcal{G}_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \mathcal{C}(\tau)\varepsilon. \quad (18.37)$$

Ранее утверждение 1° было получено в [Sub, теорема 13.12].

Аналогично, из теоремы 16.12 с помощью масштабного преобразования вытекает, что усиленные результаты (теоремы 18.2, 18.7, 18.8, 18.15) тоже точны.

Теорема 18.21. Пусть выполнено условие 14.2.

1°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq s < 2$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы оценка (18.35) выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

2°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq s < 4$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы оценка (18.36) выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

3°. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leq s < 3$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы оценка (18.37) выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Утверждение 1° было ранее установлено в [D1, теорема 10.12].

Перейдем к подтверждению точности относительно зависимости оценок от параметра τ .

Из теоремы 16.13 с помощью масштабного преобразования вытекает следующий результат, подтверждающий точность общих результатов (теорем 18.1, 18.6, 18.14).

Теорема 18.22. Пусть выполнено условие 14.1.

- 1°. Пусть $s \geq 3$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (18.35) при $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.
- 2°. Пусть $s \geq 6$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\tau)/\tau^2 = 0$ и выполнена оценка (18.36) при $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.
- 3°. Пусть $s \geq 4$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (18.37) при $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Утверждение 1° ранее было установлено в [D1, теорема 10.13].

Наконец, точность усиленных результатов (теорем 18.2, 18.7, 18.8, 18.15) вытекает из теоремы 16.14 с помощью масштабного преобразования.

Теорема 18.23. Пусть выполнено условие 14.2.

- 1°. Пусть $s \geq 2$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (18.35) при $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.
- 2°. Пусть $s \geq 4$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (18.36) при $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.
- 3°. Пусть $s \geq 3$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (18.37) при $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Утверждение 1° ранее было получено в [D1, теорема 10.14].

18.5. О возможности устранения сглаживающего оператора Π_ε в аппроксимациях. Рассмотрим теперь вопрос о возможности устранения оператора Π_ε в аппроксимациях в результатах пунктов 18.2 и 18.3. Положим

$$\mathcal{G}'_{0,\varepsilon}(\tau) := f^\varepsilon e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}(f^\varepsilon)^{-1} (I + \varepsilon\Lambda_Q^\varepsilon b(\mathbf{D})) - (I + \varepsilon\Lambda_Q^\varepsilon b(\mathbf{D})) f_0 e^{-i\tau\mathcal{A}^0} f_0^{-1}, \quad (18.38)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}'_\varepsilon(\tau) := f^\varepsilon e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}(f^\varepsilon)^{-1} (I + \varepsilon\Lambda_Q^\varepsilon b(\mathbf{D})) - (I + \varepsilon\Lambda_Q^\varepsilon b(\mathbf{D})) f_0 e^{-i\tau\mathcal{A}^0} f_0^{-1} \\ + i\varepsilon \int_0^\tau f_0 e^{-i(\tau-\tilde{\tau})\mathcal{A}^0} f_0 b(\mathbf{D})^* L_Q(\mathbf{D}) b(\mathbf{D}) f_0 e^{-i\tilde{\tau}\mathcal{A}^0} f_0^{-1} d\tilde{\tau}. \end{aligned} \quad (18.39)$$

Из (18.8), (18.9), (18.38) и (18.39) следуют соотношения

$$\mathcal{G}'_\varepsilon(\tau) - \mathcal{G}_\varepsilon(\tau) = \mathcal{G}'_{0,\varepsilon}(\tau) - \mathcal{G}_{0,\varepsilon}(\tau) = f^\varepsilon e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}(f^\varepsilon)^{-1} \varepsilon \Lambda_Q^\varepsilon b(\mathbf{D})(I - \Pi_\varepsilon) - \varepsilon \Lambda_Q^\varepsilon b(\mathbf{D})(I - \Pi_\varepsilon) f_0 e^{-i\tau\mathcal{A}^0} f_0^{-1}. \quad (18.40)$$

По аналогии с доказательством теоремы 17.25, из следствия 18.10 с помощью (18.40) и леммы 17.24 нетрудно вывести следующее утверждение. При этом следует учесть, что матрицы-функции Λ_Q и Λ отличаются на постоянное слагаемое, а потому имеют одинаковые свойства мультипликаторности (в пространствах Соболева).

Теорема 18.24. Пусть оператор $\mathcal{G}'_\varepsilon(\tau)$ определен в (18.39). Пусть $3 \leq s \leq 6$ и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка

$$\|\mathcal{G}'_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}'_3(s)(1+|\tau|)^{s/3} \varepsilon^{s/3}, \quad 3 \leq s \leq 6. \quad (18.41)$$

Константа $\mathfrak{C}'_3(s)$ зависит от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}, r_0, s$, а также от нормы $\|[\Lambda]\|_{H^{s-1} \rightarrow L_2}$.

Аналогичным образом из следствий 18.11, 18.12 и леммы 17.24 вытекают следующие результаты.

Теорема 18.25. Пусть оператор $\mathcal{G}'_{0,\varepsilon}(\tau)$ определен в (18.38). Пусть выполнено условие 13.2. Пусть $2 \leq s \leq 4$ и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка

$$\|\mathcal{G}'_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}'_4(s)(1+|\tau|)^{s/4} \varepsilon^{s/2}.$$

Постоянная $\mathfrak{C}'_4(s)$ зависит от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}, r_0, s$, а также от нормы $\|[\Lambda]\|_{H^{s-1} \rightarrow L_2}$.

Теорема 18.26. Пусть оператор $\mathcal{G}'_\varepsilon(\tau)$ определен в (18.39). Пусть выполнено условие 13.4 (или более сильное условие 13.5). Пусть $2 \leq s \leq 4$ и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$. При $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка

$$\|\mathcal{G}'_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}'_5(s)(1 + |\tau|)^{s/4}\varepsilon^{s/2}.$$

Постоянная $\mathfrak{C}'_5(s)$ зависит от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}, r_0, n, c^\circ, s$, а также от нормы $\|[\Lambda]\|_{H^{s-1} \rightarrow L_2}$.

Рассмотрим теперь вопрос о возможности устранения оператора Π_ε в аппроксимациях операторной экспоненты по энергетической норме. Положим

$$\Xi'_\varepsilon(\tau) := g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon e^{-i\tau A_\varepsilon} (f^\varepsilon)^{-1} (I + \varepsilon \Lambda_Q^\varepsilon b(\mathbf{D})) - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) f_0 e^{-i\tau \widehat{A}^0} f_0^{-1}. \quad (18.42)$$

По аналогии с доказательством теоремы 17.28, из следствия 18.17 и леммы 17.24 нетрудно вывести следующее утверждение.

Теорема 18.27. Пусть операторы $\mathcal{G}'_{0,\varepsilon}(\tau)$ и $\Xi'_\varepsilon(\tau)$ определены в (18.38), (18.42). Пусть $2 \leq s \leq 4$ и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ в $H^1(\mathbb{R}^d)$. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедливы оценки

$$\|\mathcal{G}'_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}'_6(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/3}\varepsilon^{(s-1)/3}, \quad 2 \leq s \leq 4, \quad (18.43)$$

$$\|\Xi'_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}'_7(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/3}\varepsilon^{(s-1)/3}, \quad 2 \leq s \leq 4. \quad (18.44)$$

Постоянные $\mathfrak{C}'_6(s), \mathfrak{C}'_7(s)$ зависят от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}, r_0, s$, а также от нормы $\|[\Lambda]\|_{H^{s-1} \rightarrow H^1}$.

Точно так же из следствия 18.18 и леммы 17.24 вытекает следующий результат.

Теорема 18.28. Пусть операторы $\mathcal{G}'_{0,\varepsilon}(\tau)$ и $\Xi'_\varepsilon(\tau)$ определены в (18.38), (18.42). Пусть выполнено условие 13.2 либо условие 13.4 (или более сильное условие 13.5). Пусть $2 \leq s \leq 3$ и оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ в $H^1(\mathbb{R}^d)$. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}'_{0,\varepsilon}(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}'_8(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/4}\varepsilon^{(s-1)/2}, \\ \|\Xi'_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}'_9(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/4}\varepsilon^{(s-1)/2}. \end{aligned}$$

При условии 13.2 постоянные $\mathfrak{C}'_8(s), \mathfrak{C}'_9(s)$ зависят от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}, r_0, s$, а также от нормы $\|[\Lambda]\|_{H^{s-1} \rightarrow H^1}$. При условии 10.4 эти константы зависят от тех же параметров и от n, c° .

Напомним, что некоторые случаи, когда одно из условий на оператор $[\Lambda]$ (из теорем 18.24–18.28) заведомо выполняется, указаны в следствиях 17.32, 17.34 и предложениях 17.35, 17.36.

18.6. Специальные случаи. Рассмотрим теперь специальные случаи, когда $g^0 = \bar{g}$ или $g^0 = g$.

Предложение 18.29. Пусть $g^0 = \bar{g}$, т. е. выполнены соотношения (9.20). Пусть $\mathcal{J}_\varepsilon(\tau)$ – оператор (18.1). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|\mathcal{J}_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_{10}(s)(1 + |\tau|)^{s/4}\varepsilon^{s/2}, \quad 0 \leq s \leq 4, \quad (18.45)$$

$$\|\mathcal{J}_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_8(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/4}\varepsilon^{(s-1)/2}, \quad 1 \leq s \leq 3, \quad (18.46)$$

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon e^{-i\tau \widehat{A}_\varepsilon} (f^\varepsilon)^{-1} - g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f_0 e^{-i\tau \widehat{A}^0} f_0^{-1}\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}'_9(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/4}\varepsilon^{(s-1)/2}, \quad 1 \leq s \leq 3. \quad (18.47)$$

Постоянны $\mathfrak{C}_8(s), \mathfrak{C}'_9(s), \mathfrak{C}_{10}(s)$ зависят только от $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}, r_0$ и s .

Доказательство. Если выполнены соотношения (9.20), то $\Lambda(\mathbf{x}) = 0$ и $\Lambda_Q(\mathbf{x}) = 0$. Тогда выполнено условие 13.2, а оператор (18.8) принимает вид $\mathcal{G}_{0,\varepsilon}(\tau) = \mathcal{J}_\varepsilon(\tau)$. Поэтому оценка (18.45) прямо вытекает из следствий 18.4 и 18.11; при этом $\mathfrak{C}_{10}(s) = \mathfrak{C}_2(s)$ при $0 \leq s \leq 2$ и $\mathfrak{C}_{10}(s) = \mathfrak{C}_4(s)$ при $2 < s \leq 4$. Оценка (18.46) вытекает из следствия 18.18, а (18.47) следует из (18.46); при этом $\mathfrak{C}'_9(s) = \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} \mathfrak{C}_8(s)$. \square

Предложение 18.30. *Пусть $g^0 = \underline{g}$, т. е. выполнены соотношения (9.21). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки (18.5), (18.41), (18.43), а оценка (18.44) принимает вид*

$$\begin{aligned} & \|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon e^{-i\tau \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} (f^\varepsilon)^{-1} (I + \varepsilon \Lambda_Q^\varepsilon b(\mathbf{D})) - g^0 b(\mathbf{D}) f_0 e^{-i\tau \widehat{\mathcal{A}}^0} f_0^{-1}\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq \widehat{\mathfrak{C}}'_9(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/4} \varepsilon^{(s-1)/2}, \quad 1 \leq s \leq 3. \end{aligned} \quad (18.48)$$

Доказательство. Если выполнены соотношения (9.21), то $\tilde{g}(\mathbf{x}) = g^0 = \underline{g}$. В силу следствия 18.3 справедлива оценка (18.5). С учетом предложения 17.36(2°) применимы результаты “без сглаживателя”: теоремы 18.24 и 18.27, которые дают оценки (18.41), (18.43), (18.44). \square

§ 19. УСРЕДНЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА ШРЁДИНГЕРА

19.1. Обычная задача Коши с оператором $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$. Старший член аппроксимации решения. Пусть $\check{\mathbf{u}}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)$ — решение следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} i \frac{\partial \check{\mathbf{u}}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \check{\mathbf{u}}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau), \\ \check{\mathbf{u}}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (19.1)$$

где $\phi \in L_2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^n)$. Для решения этой задачи справедливо представление

$$\check{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) = e^{-i\tau \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} \phi. \quad (19.2)$$

Пусть $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \tau)$ — решение “усредненной” задачи:

$$\begin{cases} i \frac{\partial \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \tau), \\ \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (19.3)$$

Тогда

$$\mathbf{u}_0(\cdot, \tau) = e^{-i\tau \widehat{\mathcal{A}}^0} \phi. \quad (19.4)$$

Теорема 19.1. *Пусть $\check{\mathbf{u}}_\varepsilon$ — решение задачи (19.1) и \mathbf{u}_0 — решение усредненной задачи (19.3). 1°. Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $0 \leq s \leq 3$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\|\check{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{u}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_1(s)(1 + |\tau|)^{s/3} \varepsilon^{s/3} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}. \quad (19.5)$$

2°. Если $\phi \in L_2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^n)$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\check{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{u}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Оценка (19.5) прямо вытекает из следствия 17.3 и представлений (19.2), (19.4). Утверждение 2° следует из 1° по теореме Банаха–Штейнгауза. \square

Утверждение 1° теоремы 19.1 можно усилить при дополнительных предположениях. Из следствия 17.4 вытекает следующий результат.

Теорема 19.2. *Пусть $\check{\mathbf{u}}_\varepsilon$ — решение задачи (19.1) и \mathbf{u}_0 — решение усредненной задачи (19.3). Пусть выполнено условие 10.2 либо условие 10.4 (или более сильное условие 10.5). Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $0 \leq s \leq 2$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\|\check{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{u}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_2(s)(1 + |\tau|)^{s/4} \varepsilon^{s/2} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

19.2. Задача Коши с оператором $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ с начальными данными из специального класса. Более точная аппроксимация решения. Результаты с корректорами (см. пункты 17.4, 17.5) применимы к задаче Коши с данными ϕ_ε из специального класса.

Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)$ — решение следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} i \frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau), \\ \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \phi_\varepsilon(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (19.6)$$

где

$$\phi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) + \varepsilon \Lambda^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})(\Pi_\varepsilon \phi)(\mathbf{x}), \quad (19.7)$$

а $\phi \in L_2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^n)$. Для решения этой задачи справедливо представление

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) = e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} (I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon) \phi. \quad (19.8)$$

Замечание 19.3. Оператор $I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon$ обратим, причем

$$(I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon)^{-1} = I - \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon.$$

В этом легко убедиться, используя равенство $\Pi_\varepsilon[\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon = 0$, которое с помощью масштабного преобразования и разложения в прямой интеграл сводится к соотношению $\widehat{P}[\Lambda]b(\mathbf{k})\widehat{P} = 0$. Последнее вытекает из условия $\int_{\Omega} \Lambda(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$. Поэтому справедливо равенство $\phi = (I - \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon) \phi_\varepsilon$.

Пусть $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \tau)$ — решение прежней усредненной задачи (19.3). Пусть $\mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \tau)$ — решение задачи

$$\begin{cases} i \frac{\partial \mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) \mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \tau) + b(\mathbf{D})^* L(\mathbf{D}) b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \tau), \\ \mathbf{w}_0(\mathbf{x}, 0) = 0. \end{cases} \quad (19.9)$$

Тогда справедливо представление

$$\mathbf{w}_0(\cdot, \tau) = -i \int_0^\tau e^{-i(\tau-\tilde{\tau})\widehat{\mathcal{A}}^0} b(\mathbf{D})^* L(\mathbf{D}) b(\mathbf{D}) e^{-i\tilde{\tau}\widehat{\mathcal{A}}^0} \phi d\tilde{\tau}. \quad (19.10)$$

Наконец, положим

$$\mathbf{p}_\varepsilon := g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon, \quad (19.11)$$

$$\mathbf{v}_\varepsilon := \mathbf{u}_0 + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(\Pi_\varepsilon \mathbf{u}_0). \quad (19.12)$$

Теорема 19.4. Пусть \mathbf{u}_ε — решение задачи (19.6) с начальным данным вида (19.7), а \mathbf{p}_ε определено в (19.11). Пусть \mathbf{u}_0 — решение усредненной задачи (19.3), а \mathbf{v}_ε определено в (19.12). Пусть \mathbf{w}_0 — решение задачи (19.9).

1°. Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $0 \leq s \leq 3$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{u}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}'_1(s) (1 + |\tau|)^{s/3} \varepsilon^{s/3} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}. \quad (19.13)$$

2°. Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $3 \leq s \leq 6$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \varepsilon \mathbf{w}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_3(s) (1 + |\tau|)^{s/3} \varepsilon^{s/3} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}. \quad (19.14)$$

3°. Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $1 \leq s \leq 4$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot, \tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_6(s) (1 + |\tau|)^{(s-1)/3} \varepsilon^{(s-1)/3} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}, \quad (19.15)$$

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(\Pi_\varepsilon \mathbf{u}_0)(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_7(s) (1 + |\tau|)^{(s-1)/3} \varepsilon^{(s-1)/3} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}. \quad (19.16)$$

Доказательство. 1°. Из представлений (19.4) и (19.8) следует, что

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{u}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \| (e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}) \phi \|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon \| e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon \phi \|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \quad (19.17)$$

Первое слагаемое справа оценим с помощью следствия 17.3:

$$\|(e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0})\phi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_1(s)(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{s/3}\|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}, \quad 0 \leq s \leq 3. \quad (19.18)$$

Второе слагаемое оценим с помощью масштабного преобразования и разложения в прямой интеграл. При $0 \leq s \leq 3$ с учетом (10.9), (10.12) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon \|e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon \phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= \|\Lambda b(\mathbf{D}) \Pi \mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &= \sup_{\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}} \|\Lambda b(\mathbf{k}) \widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \frac{\varepsilon^s}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq C_{\tilde{Z}} \sup_{\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}} \frac{|\mathbf{k}| \varepsilon^s}{(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \leq C_{\tilde{Z}} r_1^{1-s/3} \varepsilon^{s/3}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\varepsilon \|e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon \phi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{\tilde{Z}} r_1^{1-s/3} \varepsilon^{s/3} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}, \quad 0 \leq s \leq 3. \quad (19.19)$$

В итоге, из (19.17)–(19.19) вытекает искомая оценка (19.13).

2°. Из представлений (19.4), (19.8), (19.10) и (19.12) следует, что

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \varepsilon \mathbf{w}_0(\cdot, \tau) = \widehat{G}_\varepsilon(\tau) \phi,$$

где $\widehat{G}_\varepsilon(\tau)$ — оператор (17.12). Отсюда и из следствия 17.10 вытекает оценка (19.14).

3°. Из представлений (19.4), (19.8), (19.11) и (19.12) получаем соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot, \tau) &= \widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau) \phi, \\ \mathbf{p}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(\Pi_\varepsilon \mathbf{u}_0)(\cdot, \tau) &= \widehat{\Xi}_\varepsilon(\tau) \phi, \end{aligned}$$

где операторы $\widehat{G}_{0,\varepsilon}(\tau)$, $\widehat{\Xi}_\varepsilon(\tau)$ определены в (17.11), (17.26). Отсюда и из следствия 17.17 следуют оценки (19.15), (19.16). \square

При дополнительных предположениях результаты теоремы 19.4 допускают усиление. По аналогии с доказательством теоремы 19.4 из следствий 17.4, 17.11, 17.12, 17.18 выводим следующий результат.

Теорема 19.5. *Пусть выполнены условия теоремы 19.4. Пусть выполнено условие 10.2 либо условие 10.4 (или более сильное условие 10.5).*

1°. *Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $0 \leq s \leq 2$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{u}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}'_2(s)(1+|\tau|)^{s/4}\varepsilon^{s/2}\|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

2°. *При условии 10.2, если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $2 \leq s \leq 4$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_4(s)(1+|\tau|)^{s/4}\varepsilon^{s/2}\|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

3°. *При условии 10.4, если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $2 \leq s \leq 4$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \varepsilon \mathbf{w}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_5(s)(1+|\tau|)^{s/4}\varepsilon^{s/2}\|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

4°. *Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $1 \leq s \leq 3$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot, \tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_8(s)(1+|\tau|)^{(s-1)/4}\varepsilon^{(s-1)/2}\|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)},$$

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(\Pi_\varepsilon \mathbf{u}_0)(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_9(s)(1+|\tau|)^{(s-1)/4}\varepsilon^{(s-1)/2}\|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

19.3. Случай, когда можно устраниить сглаживатель. Рассмотрим теперь случай, когда выполнены условия на Λ , позволяющие устраниить сглаживающий оператор Π_ε в аппроксимациях; см. п. 17.8. Предполагая, что оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$, где $s \geq 1$, рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} i \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau), \\ \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \tilde{\phi}_\varepsilon(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (19.20)$$

где

$$\tilde{\phi}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) + \varepsilon \Lambda^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \phi(\mathbf{x}), \quad (19.21)$$

а $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^n)$. Для решения этой задачи справедливо представление

$$\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) = e^{-i\tau\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon}(I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}))\phi. \quad (19.22)$$

Пусть $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \tau)$ — решение прежней усредненной задачи (19.3), а $\mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \tau)$ — решение задачи (19.9). Положим

$$\tilde{\mathbf{p}}_\varepsilon := g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon, \quad (19.23)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon := \mathbf{u}_0 + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0. \quad (19.24)$$

Из следствия 17.3 и теорем 17.25, 17.28 выводим следующий результат.

Теорема 19.6. Пусть $\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon$ — решение задачи (19.20) с начальным данным вида (19.21), а $\tilde{\mathbf{p}}_\varepsilon$ определено в (19.23). Пусть \mathbf{u}_0 — решение усредненной задачи (19.3), а $\tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon$ определено в (19.24). Пусть \mathbf{w}_0 — решение задачи (19.9).

1°. Пусть $1 \leq s \leq 3$. Предположим, что оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{u}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathcal{C}}_1''(s)(1 + |\tau|)^{s/3} \varepsilon^{s/3} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}. \quad (19.25)$$

2°. Пусть $3 \leq s \leq 6$. Предположим, что оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \varepsilon \mathbf{w}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathcal{C}}_3'(s)(1 + |\tau|)^{s/3} \varepsilon^{s/3} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}. \quad (19.26)$$

3°. Пусть $2 \leq s \leq 4$. Предположим, что оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ в $H^1(\mathbb{R}^d)$. Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедливы оценки

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon(\cdot, \tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathcal{C}}_6'(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/3} \varepsilon^{(s-1)/3} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}, \quad (19.27)$$

$$\|\tilde{\mathbf{p}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathcal{C}}_7'(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/3} \varepsilon^{(s-1)/3} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}. \quad (19.28)$$

Доказательство. 1°. Из представлений (19.4) и (19.22) следует, что

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{u}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \| (e^{-i\tau\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\hat{\mathcal{A}}^0}) \phi \|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon \| e^{-i\tau\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon} \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \phi \|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \quad (19.29)$$

Для первого слагаемого справа справедлива оценка (19.18). Второе слагаемое оценим с помощью масштабного преобразования. Имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon \| e^{-i\tau\hat{\mathcal{A}}_\varepsilon} \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= \| \Lambda b(\mathbf{D}) \mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2} \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \| [\Lambda] \|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \| b(\mathbf{D}) \mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2} \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^{s-1}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

С помощью преобразования Фурье получаем

$$\begin{aligned} \| b(\mathbf{D}) \mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2} \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^{s-1}(\mathbb{R}^d)} &\leq \alpha_1^{1/2} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \frac{|\xi|(1 + |\xi|^2)^{(s-1)/2} \varepsilon^s}{(|\xi|^2 + \varepsilon^2)^{s/2}} \\ &\leq \alpha_1^{1/2} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2}\right)^{(s-1)/2} \varepsilon^s \leq 2^{(s-1)/2} \alpha_1^{1/2} \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \end{aligned}$$

В итоге приходим к оценке

$$\varepsilon \|e^{-i\tau \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \|[\Lambda]\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} 2^{(s-1)/2} \alpha_1^{1/2} \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (19.30)$$

Из (19.18), (19.29) и (19.30) с учетом ограничения $0 < \varepsilon \leq 1$ вытекает искомая оценка (19.25).

2°. Из представлений (19.4), (19.10), (19.22) и (19.24) следует, что

$$\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \varepsilon \mathbf{w}_0(\cdot, \tau) = \widehat{G}'_\varepsilon(\tau) \phi,$$

где оператор $\widehat{G}'_\varepsilon(\tau)$ определен в (17.54). Отсюда и из теоремы 17.25 следует оценка (19.26).

3°. Из представлений (19.4), (19.22), (19.23) и (19.24) вытекают соотношения

$$\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon(\cdot, \tau) = \widehat{G}'_{0,\varepsilon}(\tau) \phi,$$

$$\tilde{\mathbf{p}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0(\cdot, \tau) = \widehat{\Xi}'_\varepsilon(\tau) \phi,$$

где операторы $\widehat{G}'_{0,\varepsilon}(\tau)$, $\widehat{\Xi}'_\varepsilon(\tau)$ определены в (17.53), (17.59). Отсюда и из теоремы 17.28 следуют оценки (19.27), (19.28). \square

При дополнительных предположениях результаты теоремы 19.6 допускают усиление. По аналогии с доказательством теоремы 19.6 из следствия 17.4 и теорем 17.26, 17.27, 17.30 выводим следующий результат.

Теорема 19.7. *Пусть выполнены условия теоремы 19.6. Пусть выполнено условие 10.2 либо условие 10.4 (или более сильное условие 10.5).*

1°. *Пусть $1 \leq s \leq 2$. Предположим, что оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка*

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{u}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_2''(s) (1 + |\tau|)^{s/4} \varepsilon^{s/2} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

2°. *Пусть $2 \leq s \leq 4$. Предположим, что оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$. При условии 10.2, если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_4'(s) (1 + |\tau|)^{s/4} \varepsilon^{s/2} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

3°. *Пусть $2 \leq s \leq 4$. Предположим, что оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$. При условии 10.4, если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \varepsilon \mathbf{w}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_5'(s) (1 + |\tau|)^{s/4} \varepsilon^{s/2} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

4°. *Пусть $2 \leq s \leq 3$. Предположим, что оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ в $H^1(\mathbb{R}^d)$. Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки*

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon(\cdot, \tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_8'(s) (1 + |\tau|)^{(s-1)/4} \varepsilon^{(s-1)/2} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)},$$

$$\|\tilde{\mathbf{p}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathfrak{C}}_9'(s) (1 + |\tau|)^{(s-1)/4} \varepsilon^{(s-1)/2} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

19.4. Обычная задача Коши с оператором \mathcal{A}_ε . Старший член аппроксимации решения. Пусть $\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)$ — решение следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} i \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau), \\ f^\varepsilon(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (19.31)$$

где $\phi \in L_2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^n)$. Для решения этой задачи справедливо представление

$$\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) = e^{-i\tau \mathcal{A}_\varepsilon} (f^\varepsilon)^{-1} \phi. \quad (19.32)$$

Пусть $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \tau)$ — решение “усредненной” задачи:

$$\begin{cases} i \frac{\partial \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = f_0 b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) f_0 \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \tau), \\ f_0 \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (19.33)$$

Тогда

$$\mathbf{u}_0(\cdot, \tau) = e^{-i\tau\mathcal{A}^0} f_0^{-1} \phi. \quad (19.34)$$

Теорема 19.8. Пусть $\check{\mathbf{u}}_\varepsilon$ — решение задачи (19.31) и \mathbf{u}_0 — решение усредненной задачи (19.33).
 1° . Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $0 \leq s \leq 3$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|f^\varepsilon \check{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - f_0 \mathbf{u}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_1(s)(1 + |\tau|)^{s/3} \varepsilon^{s/3} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}. \quad (19.35)$$

2° . Если $\phi \in L_2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^n)$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f^\varepsilon \check{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - f_0 \mathbf{u}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Оценка (19.35) прямо вытекает из следствия 18.3 и представлений (19.32), (19.34). Утверждение 2° следует из 1° по теореме Банаха–Штейнгауза. \square

Утверждение 1° теоремы 19.8 можно усилить при дополнительных предположениях. Из следствия 18.4 вытекает следующий результат.

Теорема 19.9. Пусть $\check{\mathbf{u}}_\varepsilon$ — решение задачи (19.31) и \mathbf{u}_0 — решение усредненной задачи (19.33). Пусть выполнено условие 13.2 либо условие 13.4 (или более сильное условие 13.5). Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $0 \leq s \leq 2$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|f^\varepsilon \check{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - f_0 \mathbf{u}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_2(s)(1 + |\tau|)^{s/4} \varepsilon^{s/2} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

19.5. Задача Коши с оператором \mathcal{A}_ε с начальными данными из специального класса.
Более точная аппроксимация решения. Результаты с корректорами (см. пункты 18.2, 18.3) применимы к задаче Коши с данными ϕ_ε из специального класса.

Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)$ — решение следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} i \frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau), \\ f^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \phi_\varepsilon(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (19.36)$$

где

$$\phi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) + \varepsilon \Lambda_Q^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})(\Pi_\varepsilon \phi)(\mathbf{x}), \quad (19.37)$$

а $\phi \in L_2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^n)$. Для решения этой задачи справедливо представление

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) = e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon} (f^\varepsilon)^{-1} (I + \varepsilon \Lambda_Q^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon) \phi. \quad (19.38)$$

Пусть $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \tau)$ — решение прежней усредненной задачи (19.33). Пусть $\mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \tau)$ — решение задачи

$$\begin{cases} i \frac{\partial \mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = f_0 b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) f_0 \mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \tau) + f_0 b(\mathbf{D})^* L_Q(\mathbf{D}) b(\mathbf{D}) f_0 \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \tau), \\ \mathbf{w}_0(\mathbf{x}, 0) = 0. \end{cases} \quad (19.39)$$

Тогда справедливо представление

$$\mathbf{w}_0(\cdot, \tau) = -i \int_0^\tau e^{-i(\tau-\tilde{\tau})\mathcal{A}^0} f_0 b(\mathbf{D})^* L_Q(\mathbf{D}) b(\mathbf{D}) f_0 e^{-i\tilde{\tau}\mathcal{A}^0} f_0^{-1} \phi d\tilde{\tau}. \quad (19.40)$$

Положим

$$\mathbf{p}_\varepsilon := g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon, \quad (19.41)$$

$$\mathbf{v}_\varepsilon := f_0 \mathbf{u}_0 + \varepsilon \Lambda_Q^\varepsilon b(\mathbf{D})(\Pi_\varepsilon f_0 \mathbf{u}_0). \quad (19.42)$$

По аналогии с доказательством теоремы 19.4, из следствий 18.3, 18.10, 18.17 и представлений (19.34), (19.38), (19.40)–(19.42) выводим следующий результат.

Теорема 19.10. Пусть \mathbf{u}_ε — решение задачи (19.36) с начальным данным вида (19.37), а \mathbf{p}_ε определено в (19.41). Пусть \mathbf{u}_0 — решение усредненной задачи (19.33), а \mathbf{v}_ε определено в (19.42). Пусть \mathbf{w}_0 — решение задачи (19.39).

1°. Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $0 \leq s \leq 3$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - f_0 \mathbf{u}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}'_1(s)(1 + |\tau|)^{s/3} \varepsilon^{s/3} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

2°. Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $3 \leq s \leq 6$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \varepsilon f_0 \mathbf{w}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_3(s)(1 + |\tau|)^{s/3} \varepsilon^{s/3} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

3°. Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $1 \leq s \leq 4$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot, \tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_6(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/3} \varepsilon^{(s-1)/3} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)},$$

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(\Pi_\varepsilon f_0 \mathbf{u}_0)(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_7(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/3} \varepsilon^{(s-1)/3} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

При дополнительных предположениях результаты теоремы 19.10 допускают усиление. Из следствий 18.4, 18.11, 18.12, 18.18 вытекает следующий результат.

Теорема 19.11. Пусть выполнены условия теоремы 19.10. Пусть выполнено условие 13.2 либо условие 13.4 (или более сильное условие 13.5).

1°. Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $0 \leq s \leq 2$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - f_0 \mathbf{u}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}'_2(s)(1 + |\tau|)^{s/4} \varepsilon^{s/2} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

2°. При условии 13.2, если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $2 \leq s \leq 4$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_4(s)(1 + |\tau|)^{s/4} \varepsilon^{s/2} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

3°. При условии 13.4, если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $2 \leq s \leq 4$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \varepsilon f_0 \mathbf{w}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_5(s)(1 + |\tau|)^{s/4} \varepsilon^{s/2} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

4°. Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $1 \leq s \leq 3$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot, \tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_8(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/4} \varepsilon^{(s-1)/2} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)},$$

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(\Pi_\varepsilon f_0 \mathbf{u}_0)(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_9(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/4} \varepsilon^{(s-1)/2} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

19.6. Случай, когда можно устраниить сглаживатель. Рассмотрим теперь случай, когда выполнены условия на Λ , позволяющие устраниить сглаживающий оператор Π_ε в аппроксимациях; см. п. 18.5. Предполагая, что оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$, где $s \geq 1$, рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} i \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau), \\ f^\varepsilon(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \tilde{\phi}_\varepsilon(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (19.43)$$

где

$$\tilde{\phi}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) + \varepsilon \Lambda_Q^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \phi(\mathbf{x}), \quad (19.44)$$

а $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^n)$. Для решения этой задачи справедливо представление

$$\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) = e^{-i\tau \mathcal{A}_\varepsilon}(f^\varepsilon)^{-1}(I + \varepsilon \Lambda_Q^\varepsilon b(\mathbf{D}))\phi. \quad (19.45)$$

Пусть $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \tau)$ — решение прежней усредненной задачи (19.33), а $\mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \tau)$ — решение задачи (19.39). Положим

$$\tilde{\mathbf{p}}_\varepsilon := g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon, \quad (19.46)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon := f_0 \mathbf{u}_0 + \varepsilon \Lambda_Q^\varepsilon b(\mathbf{D}) f_0 \mathbf{u}_0. \quad (19.47)$$

По аналогии с доказательством теоремы 19.6, из следствия 18.3 и теорем 18.24, 18.27 выводим следующий результат.

Теорема 19.12. *Пусть $\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon$ — решение задачи (19.43) с начальным данным вида (19.44), а $\tilde{\mathbf{p}}_\varepsilon$ определено в (19.46). Пусть \mathbf{u}_0 — решение усредненной задачи (19.33), а $\tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon$ определено в (19.47). Пусть \mathbf{w}_0 — решение задачи (19.39).*

1°. *Пусть $1 \leq s \leq 3$. Предположим, что оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка*

$$\|f^\varepsilon \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - f_0 \mathbf{u}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}'_1(s)(1 + |\tau|)^{s/3} \varepsilon^{s/3} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

2°. *Пусть $3 \leq s \leq 6$. Предположим, что оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка*

$$\|f^\varepsilon \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \varepsilon f_0 \mathbf{w}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}'_3(s)(1 + |\tau|)^{s/3} \varepsilon^{s/3} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

3°. *Пусть $2 \leq s \leq 4$. Предположим, что оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ в $H^1(\mathbb{R}^d)$. Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедливы оценки*

$$\|f^\varepsilon \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon(\cdot, \tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}'_6(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/3} \varepsilon^{(s-1)/3} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)},$$

$$\|\tilde{\mathbf{p}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) f_0 \mathbf{u}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}'_7(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/3} \varepsilon^{(s-1)/3} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

При дополнительных предположениях результаты теоремы 19.12 допускают усиление. Из следствия 18.4 и теорем 18.25, 18.26, 18.28 вытекает следующий результат.

Теорема 19.13. *Пусть выполнены условия теоремы 19.12. Пусть выполнено условие 13.2 либо условие 13.4 (или более сильное условие 13.5).*

1°. *Пусть $1 \leq s \leq 2$. Предположим, что оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка*

$$\|f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - f_0 \mathbf{u}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}'_2(s)(1 + |\tau|)^{s/4} \varepsilon^{s/2} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

2°. *Пусть $2 \leq s \leq 4$. Предположим, что оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$. При условии 13.2, если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\|f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}'_4(s)(1 + |\tau|)^{s/4} \varepsilon^{s/2} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

3°. *Пусть $2 \leq s \leq 4$. Предположим, что оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$. При условии 13.4, если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\|f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \varepsilon f_0 \mathbf{w}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}'_5(s)(1 + |\tau|)^{s/4} \varepsilon^{s/2} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

4°. *Пусть $2 \leq s \leq 3$. Предположим, что оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ в $H^1(\mathbb{R}^d)$. Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки*

$$\|f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot, \tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}'_8(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/4} \varepsilon^{(s-1)/2} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)},$$

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) f_0 \mathbf{u}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}'_9(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/4} \varepsilon^{(s-1)/2} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

§ 20. ПРИМЕНЕНИЕ ОБЩИХ РЕЗУЛЬТАТОВ: УРАВНЕНИЕ ТИПА ШРЁДИНГЕРА СО СКАЛЯРНЫМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ $\mathbf{D}^* g^\varepsilon \mathbf{D}$

20.1. **Скалярный эллиптический оператор.** В $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим оператор

$$\hat{\mathcal{A}} = \mathbf{D}^* g(\mathbf{x}) \mathbf{D} = -\operatorname{div} g(\mathbf{x}) \nabla. \quad (20.1)$$

Здесь $g(\mathbf{x})$ — Г-периодическая эрмитова $(d \times d)$ -матрица-функция такая, что $g(\mathbf{x}) > 0$ и $g, g^{-1} \in L_\infty$. Оператор (20.1) является частным случаем оператора (9.1). В этом случае $n = 1$, $m = d$ и $b(\mathbf{D}) = \mathbf{D}$. Очевидно, условие (8.7) выполнено при $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$. Согласно (9.17) эффективный оператор для оператора (20.1) имеет вид $\hat{\mathcal{A}}^0 = \mathbf{D}^* g^0 \mathbf{D} = -\operatorname{div} g^0 \nabla$. В соответствии

с (9.11), (9.12), эффективная матрица g^0 определяется следующим образом. Пусть $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$ — стандартный ортонормированный базис в \mathbb{R}^d . Пусть $\Phi_j \in \tilde{H}^1(\Omega)$ — слабое Г-периодическое решение задачи

$$\operatorname{div} g(\mathbf{x}) (\nabla \Phi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j) = 0, \quad \int_{\Omega} \Phi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \quad (20.2)$$

Тогда $\Lambda(\mathbf{x})$ — это матрица-строка: $\Lambda(\mathbf{x}) = i(\Phi_1(\mathbf{x}), \dots, \Phi_d(\mathbf{x}))$, а $\tilde{g}(\mathbf{x})$ — это $(d \times d)$ -матрица со столбцами $\tilde{\mathbf{g}}_j(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})(\nabla \Phi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j)$, $j = 1, \dots, d$. Эффективная матрица определяется соотношением $g^0 = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \tilde{g}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$. В случае $d = 1$ выполнено $m = n = 1$, а потому $g^0 = \underline{g}$.

Первое собственное значение оператора $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = \widehat{A}(t, \boldsymbol{\theta})$ допускает степенное разложение

$$\widehat{\lambda}(t, \boldsymbol{\theta}) = \widehat{\gamma}(\boldsymbol{\theta})t^2 + \widehat{\mu}(\boldsymbol{\theta})t^3 + \widehat{\nu}(\boldsymbol{\theta})t^4 + \dots,$$

здесь $\widehat{\gamma}(\boldsymbol{\theta}) = \langle g^0 \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta} \rangle$. Поскольку $n = 1$, то оператор $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta})$ есть оператор умножения на $\widehat{\mu}(\boldsymbol{\theta})$.

Если $g(\mathbf{x})$ — симметричная матрица с вещественными элементами, то в силу предложения 9.4(1°) выполнено $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$, то есть выполнено условие 10.2. В силу предложения 17.36 оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $L_2(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$ и из $H^1(\mathbb{R}^d)$ в $H^1(\mathbb{R}^d)$.

Если же $g(\mathbf{x})$ — эрмитова матрица с комплексными элементами, то в общей ситуации оператор $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})$ отличен от нуля. Вычисление (см. [BSu3, п. 10.3]) показывает, что

$$\begin{aligned} \widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) &= \widehat{\mu}(\boldsymbol{\theta}) = -i \sum_{j,l,k=1}^d (a_{jlk} - a_{jlk}^*) \theta_j \theta_l \theta_k, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}, \\ a_{jlk} &= |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \Phi_j(\mathbf{x})^* \langle g(\mathbf{x})(\nabla \Phi_l(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_l), \mathbf{e}_k \rangle d\mathbf{x}, \quad j, l, k = 1, \dots, d. \end{aligned} \quad (20.3)$$

Следующий пример заимствован из [BSu3, п. 10.4].

Пример 20.1. Пусть $d = 2$, $\Gamma = (2\pi\mathbb{Z})^2$ и матрица $g(\mathbf{x})$ имеет вид

$$g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & i\beta'(x_1) \\ -i\beta'(x_1) & 1 \end{pmatrix},$$

где $\beta(x_1)$ — гладкая (2π) -периодическая вещественная функция такая, что $1 - (\beta'(x_1))^2 > 0$ и $\int_0^{2\pi} \beta(x_1) dx_1 = 0$. Тогда $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = -\alpha\pi^{-1}\theta_2^3$, где $\alpha = \int_0^{2\pi} \beta(x_1)(\beta'(x_1))^2 dx_1$. Легко привести конкретный пример, когда $\alpha \neq 0$: если $\beta(x_1) = c(\sin x_1 + \cos 2x_1)$ при $0 < c < 1/3$, то $\alpha = -(3\pi/2)c^3 \neq 0$. В данном примере $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{\mu}(\boldsymbol{\theta}) \neq 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^1$ за исключением точек $(\pm 1, 0)$.

Опишем теперь оператор $\widehat{N}^{(1)}(\boldsymbol{\theta})$ — оператор умножения на $\widehat{\nu}(\boldsymbol{\theta})$. Пусть $\Psi_{jl}(\mathbf{x})$ — Г-периодическое решение задачи

$$-\operatorname{div} g(\mathbf{x}) (\nabla \Psi_{jl}(\mathbf{x}) - \Phi_j(\mathbf{x})\mathbf{e}_l) = g_{lj}^0 - \tilde{g}_{lj}(\mathbf{x}), \quad \int_{\Omega} \Psi_{jl}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

Как проверено в [VSu2, п. 14.5],

$$\begin{aligned} \widehat{N}^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) &= \widehat{\nu}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{p,q,l,k} (\alpha_{pqlk} - (\overline{\Phi_p^* \Phi_q}) g_{lk}^0) \theta_p \theta_q \theta_l \theta_k, \\ \alpha_{pqlk} &= |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} (\tilde{g}_{lp}(\mathbf{x}) \Psi_{qk}(\mathbf{x}) + \tilde{g}_{kq}(\mathbf{x}) \Psi_{pl}(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \\ &\quad + |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \langle g(\mathbf{x})(\nabla \Psi_{qk}(\mathbf{x}) - \Phi_q(\mathbf{x})\mathbf{e}_k, \nabla \Psi_{pl}(\mathbf{x}) - \Phi_p(\mathbf{x})\mathbf{e}_l) \rangle d\mathbf{x}, \quad p, q, l, k = 1, \dots, d. \end{aligned}$$

Замечание 20.2. В [D1, лемма 12.2] показано, что при $d = 1$ и $g(x) \neq \text{const}$ всегда выполнено $\widehat{\nu}(1) = \widehat{\nu}(-1) \neq 0$. Поэтому автор полагает, что и в многомерном случае, как правило, $\widehat{\nu}_j(\boldsymbol{\theta}) \neq 0$.

20.2. Усреднение. К оператору

$$\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{D} = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x}) \nabla \quad (20.4)$$

в общем случае применимы теоремы 17.1, 17.6, 17.14 и следствия 17.3, 17.10, 17.17. В “вещественном” случае применимы “улучшенные” результаты: теоремы 17.2, 17.7, 17.15 и следствия 17.4, 17.11, 17.18, а также результаты “без сглаживателя”: теоремы 17.26, 17.30.

Рассмотрим задачу Коши вида (19.6):

$$\begin{cases} i \frac{\partial u_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{D} u_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau), \\ u_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}) + \varepsilon \sum_{j=1}^d \Phi_j^\varepsilon(\mathbf{x}) \partial_j (\Pi_\varepsilon \phi)(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (20.5)$$

где $\phi \in L_2(\mathbb{R}^d)$.

Пусть u_0 — решение усредненной задачи

$$\begin{cases} i \frac{\partial u_0(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = \mathbf{D}^* g^0(\mathbf{x}) \mathbf{D} u_0(\mathbf{x}, \tau), \\ u_0(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (20.6)$$

Пусть w_0 — решение задачи вида (19.9):

$$\begin{cases} i \frac{\partial w_0(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = \mathbf{D}^* g^0(\mathbf{x}) \mathbf{D} w_0(\mathbf{x}, \tau) + \sum_{j,l,k=1}^d (a_{jlk} - a_{jlk}^*) \partial_j \partial_l \partial_k u_0(\mathbf{x}, \tau), \\ w_0(\mathbf{x}, 0) = 0. \end{cases} \quad (20.7)$$

Положим

$$v_\varepsilon = u_0 + \varepsilon \sum_{j=1}^d \Phi_j^\varepsilon \partial_j (\Pi_\varepsilon u_0). \quad (20.8)$$

Применяя теорему 19.4 в общем случае и теорему 19.5 в “вещественном” случае, получаем следующий результат.

Предложение 20.3. Пусть u_ε — решение задачи (20.5) и u_0 — решение усредненной задачи (20.6). Пусть w_0 — решение задачи (20.7). Пусть v_ε определено в (20.8).

1°. Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d)$, где $0 \leq s \leq 3$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|u_\varepsilon(\cdot, \tau) - u_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(s)(1 + |\tau|)^{s/3} \varepsilon^{s/3} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d)$, где $3 \leq s \leq 6$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|u_\varepsilon(\cdot, \tau) - v_\varepsilon(\cdot, \tau) - \varepsilon w_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(s)(1 + |\tau|)^{s/3} \varepsilon^{s/3} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d)$, где $1 \leq s \leq 4$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon(\cdot, \tau) - v_\varepsilon(\cdot, \tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} &\leq C(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/3} \varepsilon^{(s-1)/3} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}, \\ \|g^\varepsilon \nabla u_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{g}^\varepsilon \nabla (\Pi_\varepsilon u_0)(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq C(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/3} \varepsilon^{(s-1)/3} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

2°. Пусть $g(\mathbf{x})$ — симметрическая матрица с вещественными элементами.

Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d)$, где $0 \leq s \leq 2$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|u_\varepsilon(\cdot, \tau) - u_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(s)(1 + |\tau|)^{s/4} \varepsilon^{s/2} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d)$, где $2 \leq s \leq 4$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|u_\varepsilon(\cdot, \tau) - v_\varepsilon(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(s)(1 + |\tau|)^{s/4} \varepsilon^{s/2} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d)$, где $1 \leq s \leq 3$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned}\|u_\varepsilon(\cdot, \tau) - v_\varepsilon(\cdot, \tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} &\leq C(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/4}\varepsilon^{(s-1)/2}\|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}, \\ \|g^\varepsilon \nabla u_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{g}^\varepsilon \nabla (\Pi_\varepsilon u_0)(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq C(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/4}\varepsilon^{(s-1)/2}\|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

В случае, когда $g(\mathbf{x})$ — симметричная матрица с вещественными элементами, рассмотрим задачу Коши вида (19.20):

$$\begin{cases} i \frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{D} \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau), \\ \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}) + \varepsilon \sum_{j=1}^d \Phi_j^\varepsilon(\mathbf{x}) \partial_j \phi(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (20.9)$$

Пусть u_0 — решение прежней усредненной задачи (20.6). Положим

$$\tilde{v}_\varepsilon = u_0 + \varepsilon \sum_{j=1}^d \Phi_j^\varepsilon \partial_j u_0. \quad (20.10)$$

Применяя теорему 19.7 и учитывая, что в “вещественном” случае выполнено условие 10.2, получаем следующий результат.

Предложение 20.4. Пусть $g(\mathbf{x})$ — симметричная матрица с вещественными элементами. Пусть \tilde{u}_ε — решение задачи (20.9) и u_0 — решение усредненной задачи (20.6). Пусть \tilde{v}_ε определено в (20.10).

Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d)$, где $1 \leq s \leq 2$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|\tilde{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - u_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(s)(1 + |\tau|)^{s/4}\varepsilon^{s/2}\|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d)$, где $2 \leq s \leq 4$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|\tilde{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{v}_\varepsilon(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(s)(1 + |\tau|)^{s/4}\varepsilon^{s/2}\|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d)$, где $2 \leq s \leq 3$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{v}_\varepsilon(\cdot, \tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} &\leq C(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/4}\varepsilon^{(s-1)/2}\|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}, \\ \|g^\varepsilon \nabla \tilde{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{g}^\varepsilon \nabla u_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq C(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/4}\varepsilon^{(s-1)/2}\|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

§ 21. ПРИМЕНЕНИЕ ОБЩИХ РЕЗУЛЬТАТОВ: НЕСТАЦИОНАРНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЁДИНГЕРА С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

21.1. Периодический оператор Шрёдингера. Факторизация. (См. [BSu1, гл. 6, п. 1.1].) В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим оператор Шрёдингера вида

$$\mathcal{H} = \mathbf{D}^* \check{g}(\mathbf{x}) \mathbf{D} + V(\mathbf{x}), \quad (21.1)$$

с Γ -периодическими метрикой $\check{g}(\mathbf{x})$ и потенциалом $V(\mathbf{x})$. Предполагается, что $\check{g}(\mathbf{x})$ — симметричная $(d \times d)$ -матрица-функция с вещественными элементами, причем $\check{g}, \check{g}^{-1} \in L_\infty$ и $\check{g}(\mathbf{x}) > 0$. Потенциал $V(\mathbf{x})$ считается вещественным и таким, что

$$V \in L_q(\Omega), \quad q = 1 \text{ при } d = 1, \quad 2q > d \text{ при } d \geq 2. \quad (21.2)$$

Точное определение самосопряженного в $L_2(\mathbb{R}^d)$ оператора \mathcal{H} дается через квадратичную форму

$$\mathfrak{h}[u, u] = \int_{\mathbb{R}^d} (\langle \check{g}(\mathbf{x}) \mathbf{D}u(\mathbf{x}), \mathbf{D}u(\mathbf{x}) \rangle + V(\mathbf{x})|u(\mathbf{x})|^2) d\mathbf{x}, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^d). \quad (21.3)$$

При сделанных предположениях форма (21.3) полуограничена снизу и замкнута. За счет добавления к $V(\mathbf{x})$ подходящей постоянной будем считать, что точка $\lambda_0 = 0$ является нижним краем спектра оператора \mathcal{H} .

Тогда уравнение $\mathbf{D}^* \check{g}(\mathbf{x}) \mathbf{D}\omega(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x}) = 0$ имеет (слабое) положительное Г-периодическое решение $\omega \in \tilde{H}^1(\Omega)$. При этом $\omega \in C^\sigma$ при некотором $\sigma > 0$. Кроме того, функция ω — мультипликатор в классах $H^1(\mathbb{R}^d)$ и $\tilde{H}^1(\Omega)$. Фиксируем выбор решения ω условием нормировки

$$\int_{\Omega} \omega^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = |\Omega|. \quad (21.4)$$

Подстановка $u = \omega v$ преобразует форму (21.3) к виду

$$\mathfrak{h}[u, u] = \int_{\mathbb{R}^d} \omega^2(\mathbf{x}) \langle \check{g}(\mathbf{x}) \mathbf{D}v(\mathbf{x}), \mathbf{D}v(\mathbf{x}) \rangle d\mathbf{x}, \quad u = \omega v, \quad v \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

Это означает, что оператор (21.1) допускает факторизацию вида

$$\mathcal{H} = \omega^{-1} \mathbf{D}^* \omega^2 \check{g} \mathbf{D} \omega^{-1}. \quad (21.5)$$

Таким образом, оператор \mathcal{H} имеет вид (8.10), причем $n = 1$, $m = d$, $b(\mathbf{D}) = \mathbf{D}$, $g = \omega^2 \check{g}$, $f = \omega^{-1}$.

Замечание 21.1. Выражение (21.5) можно принять за определение оператора \mathcal{H} , считая, что ω — произвольная Г-периодическая функция, удовлетворяющая условиям $\omega, \omega^{-1} \in L_\infty$, $\omega(\mathbf{x}) > 0$, а также условию (21.4). Вернутся к записи вида (21.1) можно, полагая $V = -\omega^{-1}(\mathbf{D}^* \check{g} \mathbf{D} \omega)$. Получающийся потенциал $V(\mathbf{x})$ может оказаться сингулярной обобщенной функцией.

Оператор (21.5) связан с оператором (20.1) (при $g = \omega^2 \check{g}$) соотношением $\mathcal{H} = \omega^{-1} \hat{\mathcal{A}} \omega^{-1}$. Пусть g^0 — эффективная матрица для оператора (20.1), найденная в пункте 20.1. Функция $Q = (ff^*)^{-1}$ сейчас принимает вид $Q(\mathbf{x}) = \omega^2(\mathbf{x})$. В силу условия (21.4) выполнено $\bar{Q} = 1$, а потому $f_0 = (\bar{Q})^{-1/2} = 1$. Оператор (12.3) сейчас принимает вид

$$\mathcal{H}^0 = \mathbf{D}^* g^0 \mathbf{D}. \quad (21.6)$$

Тем самым, \mathcal{H}^0 совпадает с эффективным оператором для оператора $\hat{\mathcal{A}} = \mathbf{D}^* g \mathbf{D} = \mathbf{D}^* \omega^2 \check{g} \mathbf{D}$.

Матрица $\Lambda_Q(\mathbf{x})$ — это матрица-строка $\Lambda_Q(\mathbf{x}) = i(\Phi_{1,Q}(\mathbf{x}), \dots, \Phi_{d,Q}(\mathbf{x}))$, где $\Phi_{j,Q} \in \tilde{H}^1(\Omega)$ — слабое Г-периодическое решение задачи

$$\operatorname{div} g(\mathbf{x})(\nabla \Phi_{j,Q}(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j) = 0, \quad \int_{\Omega} \omega^2(\mathbf{x}) \Phi_{j,Q}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

В силу предложения 12.1(1°) выполнено $\hat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$, то есть выполнено условие 13.2. Первое собственное значение оператора $\mathcal{H}(\mathbf{k})$ допускает степенное разложение

$$\lambda(t, \boldsymbol{\theta}) = \gamma(\boldsymbol{\theta})t^2 + \nu(\boldsymbol{\theta})t^4 + \dots,$$

где $\gamma(\boldsymbol{\theta}) = \langle g^0 \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta} \rangle$. (Отметим, что в квантовой механике матрицу $(2g^0)^{-1}$ называют *тензором эффективных масс*.)

21.2. Усреднение нестационарного уравнения Шрёдингера. Рассмотрим теперь оператор

$$\mathcal{H}_\varepsilon = (\omega^\varepsilon)^{-1} \mathbf{D}^* g^\varepsilon \mathbf{D} (\omega^\varepsilon)^{-1}, \quad g^\varepsilon = (\omega^\varepsilon)^2 \check{g}^\varepsilon. \quad (21.7)$$

Если выполнено условие (21.2), то можно переписать это выражение в исходных терминах:

$$\mathcal{H}_\varepsilon = \mathbf{D}^* \check{g}^\varepsilon \mathbf{D} + \varepsilon^{-2} V^\varepsilon. \quad (21.8)$$

Из-за наличия большого множителя ε^{-2} перед быстро осциллирующей функцией V^ε мы называем второе слагаемое в (21.8) “сильно сингулярным потенциалом”. К оператору \mathcal{H}_ε применимы “улучшенные” результаты: теоремы 18.2, 18.7, 18.15 и следствия 18.4, 18.11, 18.18, а также результаты без сглаживателя: теоремы 18.25, 18.28.

Рассмотрим задачу Коши вида (19.36):

$$\begin{cases} i \frac{\partial u_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = \mathcal{H}_\varepsilon u_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau), \\ (\omega^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1} u_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}) + \varepsilon \sum_{j=1}^d \Phi_{j,Q}^\varepsilon(\mathbf{x}) \partial_j (\Pi_\varepsilon \phi)(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (21.9)$$

Пусть u_0 — решение усредненной задачи

$$\begin{cases} i \frac{\partial u_0(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = \mathcal{H}^0 u_0(\mathbf{x}, \tau), \\ u_0(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (21.10)$$

Положим

$$v_\varepsilon = u_0 + \varepsilon \sum_{j=1}^d \Phi_{j,Q}^\varepsilon \partial_j (\Pi_\varepsilon u_0). \quad (21.11)$$

Применяя теорему 19.11, получаем следующий результат.

Предложение 21.2. Пусть u_ε — решение задачи (21.9) и u_0 — решение усредненной задачи (21.10). Пусть v_ε определено в (21.11).

Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d)$, где $0 \leq s \leq 2$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|(\omega^\varepsilon)^{-1} u_\varepsilon(\cdot, \tau) - u_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(s)(1 + |\tau|)^{s/4} \varepsilon^{s/2} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d)$, где $2 \leq s \leq 4$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|(\omega^\varepsilon)^{-1} u_\varepsilon(\cdot, \tau) - v_\varepsilon(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(s)(1 + |\tau|)^{s/4} \varepsilon^{s/2} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d)$, где $1 \leq s \leq 3$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|(\omega^\varepsilon)^{-1} u_\varepsilon(\cdot, \tau) - v_\varepsilon(\cdot, \tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} &\leq C(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/4} \varepsilon^{(s-1)/2} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}, \\ \|g^\varepsilon \nabla (\omega^\varepsilon)^{-1} u_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{g}^\varepsilon \nabla (\Pi_\varepsilon u_0)(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq C(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/4} \varepsilon^{(s-1)/2} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь задачу Коши вида (19.43):

$$\begin{cases} i \frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = \mathcal{H}_\varepsilon \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau), \\ (\omega^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1} \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}) + \varepsilon \sum_{j=1}^d \Phi_{j,Q}^\varepsilon(\mathbf{x}) \partial_j \phi(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (21.12)$$

Положим

$$\tilde{v}_\varepsilon = u_0 + \varepsilon \sum_{j=1}^d \Phi_{j,Q}^\varepsilon \partial_j u_0. \quad (21.13)$$

Применяя теорему 19.13, получаем следующий результат.

Предложение 21.3. Пусть \tilde{u}_ε — решение задачи (21.12) и u_0 — решение усредненной задачи (21.10). Пусть \tilde{v}_ε определено в (21.13).

Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d)$, где $1 \leq s \leq 2$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|(\omega^\varepsilon)^{-1} \tilde{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - u_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(s)(1 + |\tau|)^{s/4} \varepsilon^{s/2} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d)$, где $2 \leq s \leq 4$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|(\omega^\varepsilon)^{-1} \tilde{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{v}_\varepsilon(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(s)(1 + |\tau|)^{s/4} \varepsilon^{s/2} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d)$, где $1 \leq s \leq 3$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|(\omega^\varepsilon)^{-1} \tilde{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{v}_\varepsilon(\cdot, \tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} &\leq C(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/4} \varepsilon^{(s-1)/2} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}, \\ \|g^\varepsilon \nabla (\omega^\varepsilon)^{-1} \tilde{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{g}^\varepsilon \nabla u_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq C(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/4} \varepsilon^{(s-1)/2} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

21.3. Периодический магнитный оператор Шрёдингера с малым магнитным потенциалом. Факторизация. В $L_2(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 2$, рассмотрим магнитный оператор Шрёдингера

$$\mathcal{M} = (\mathbf{D} - \mathbf{A}(\mathbf{x}))^* \check{g}(\mathbf{x}) (\mathbf{D} - \mathbf{A}(\mathbf{x})) + V(\mathbf{x})$$

с Γ -периодическими метрикой $\check{g}(\mathbf{x})$, магнитным потенциалом $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ и электрическим потенциалом $V(\mathbf{x})$. Предполагается, что $\check{g}(\mathbf{x})$ — симметричная $(d \times d)$ -матрица-функция с вещественными элементами, причем $\check{g}, \check{g}^{-1} \in L_\infty$ и $\check{g}(\mathbf{x}) > 0$. При $d \geq 3$ предположим дополнительно, что $\check{g} \in C^\sigma$ при некотором $0 < \sigma < 1$. Векторный потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ со значениями в \mathbb{R}^d и вещественный потенциал $V(\mathbf{x})$ подчинены условиям

$$\mathbf{A} \in L_{2q}(\Omega), \quad V \in L_q(\Omega), \quad 2q > d.$$

Точное определение самосопряженного в $L_2(\mathbb{R}^d)$ оператора \mathcal{M} дается через замкнутую и полуограниченную снизу квадратичную форму

$$\mathfrak{m}[u, u] = \int_{\mathbb{R}^d} (\langle \check{g}(\mathbf{x})(\mathbf{D} - \mathbf{A}(\mathbf{x}))u(\mathbf{x}), (\mathbf{D} - \mathbf{A}(\mathbf{x}))u(\mathbf{x}) \rangle + V(\mathbf{x})|u(\mathbf{x})|^2) d\mathbf{x}, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

За счет добавления к $V(\mathbf{x})$ подходящей постоянной будем считать, что точка $\lambda_0 = 0$ является нижним краем спектра оператора \mathcal{M} .

Согласно [Sht], при сделанных предположениях и при достаточно малом потенциале \mathbf{A} (по $L_{2q}(\Omega)$ -норме) оператор \mathcal{M} допускает подходящую факторизацию. Для описания этой факторизации рассмотрим семейство операторов $\mathcal{M}(\mathbf{k})$ в $L_2(\Omega)$, возникающее при разложении оператора \mathcal{M} в прямой интеграл. Условие $\inf \text{spec } \mathcal{M} = 0$ означает, что при некотором $\mathbf{k}_0 \in \bar{\Omega}$ точка $\lambda_0 = 0$ является собственным значением оператора $\mathcal{M}(\mathbf{k}_0)$. Если потенциал \mathbf{A} достаточно мал, точка \mathbf{k}_0 единственна и $\lambda_0 = 0$ — простое собственное значение оператора $\mathcal{M}(\mathbf{k}_0)$. Пусть $\eta(\mathbf{x})$ — соответствующая собственная функция, удовлетворяющая условию нормировки $\int_{\Omega} |\eta(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = |\Omega|$ (выбор фазового множителя не имеет значения). Тогда $\eta \in \tilde{H}^1(\Omega)$ и $\eta, \eta^{-1} \in L_\infty$. Как показано в [Sht], $\eta(\mathbf{x})$ является мультипликатором в классах $H^1(\mathbb{R}^d)$ и $\tilde{H}^1(\Omega)$. Положим

$$\widetilde{\mathcal{M}} := [e^{-i\langle \mathbf{k}_0, \cdot \rangle}] \mathcal{M} [e^{i\langle \mathbf{k}_0, \cdot \rangle}].$$

Ясно, что коэффициенты оператора $\widetilde{\mathcal{M}}$ периодичны. В силу [Sht, теоремы 2.7, 2.8], если норма $\|\mathbf{A}\|_{L_{2q}(\Omega)}$ достаточно мала, то оператор $\widetilde{\mathcal{M}}$ допускает следующую факторизацию:

$$\widetilde{\mathcal{M}} = (\eta^*)^{-1} \mathbf{D}^* g \mathbf{D} \eta^{-1}. \quad (21.14)$$

Здесь эрмитова Γ -периодическая матрица-функция $g(\mathbf{x})$ имеет вид

$$g(\mathbf{x}) = |\eta(\mathbf{x})|^2 \check{g}(\mathbf{x}) + i g_2(\mathbf{x}), \quad (21.15)$$

где антисимметричная вещественная матрица-функция $g_2(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению

$$(\text{div } g_2(\mathbf{x}))^t = -2|\eta(\mathbf{x})|^2 \check{g}(\mathbf{x}) (\mathbf{A}(\mathbf{x}) - \mathbf{k}_0) + 2 \text{Im} (\eta(\mathbf{x})^* \check{g}(\mathbf{x}) \nabla \eta(\mathbf{x})). \quad (21.16)$$

Как показано в [Sht], матрица (21.15) положительно определена, причем $g, g^{-1} \in L_\infty$.

Таким образом, оператор (21.14) имеет вид (8.10), причем $n = 1$, $m = d$, $b(\mathbf{D}) = \mathbf{D}$, g определено в (21.15), (21.16) и $f = \eta^{-1}$. Пусть g^0 — эффективная матрица для оператора $\widehat{\mathcal{A}} = \mathbf{D}^* g \mathbf{D}$. Далее, функция $Q = (f f^*)^{-1}$ имеет вид $Q(\mathbf{x}) = |\eta(\mathbf{x})|^2$. В силу условия нормировки имеем $\overline{Q} = 1$, а потому $f_0 = 1$. Роль оператора (12.3) сейчас играет $\widetilde{\mathcal{M}}^0 = \mathbf{D}^* g^0 \mathbf{D}$. Пусть $\lambda(t, \boldsymbol{\theta})$ — первое собственное значение оператора $\widetilde{\mathcal{M}}(\mathbf{k})$. Справедливо степенное разложение

$$\lambda(t, \boldsymbol{\theta}) = \gamma(\boldsymbol{\theta}) t^2 + \mu(\boldsymbol{\theta}) t^3 + \dots,$$

здесь $\gamma(\boldsymbol{\theta}) = \langle g^0 \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta} \rangle$.

Матрица $\Lambda(\mathbf{x})$ — это матрица-строка $\Lambda(\mathbf{x}) = i(\Phi_1(\mathbf{x}), \dots, \Phi_d(\mathbf{x}))$, где $\Phi_j \in \tilde{H}^1(\Omega)$ — слабое Г-периодическое решение задачи (20.2). Матрица $\Lambda_Q(\mathbf{x})$ — это матрица-строка $\Lambda_Q(\mathbf{x}) = i(\Psi_1(\mathbf{x}), \dots, \Psi_d(\mathbf{x}))$, где $\Psi_j \in \tilde{H}^1(\Omega)$ — слабое Г-периодическое решение задачи

$$\operatorname{div} g(\mathbf{x})(\nabla \Psi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j) = 0, \quad \int_{\Omega} |\eta(\mathbf{x})|^2 \Psi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

Опишем оператор $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})$. Поскольку $n = 1$ и $\overline{Q} = 1$, то оператор $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta})$ действует как умножение на $\mu(\boldsymbol{\theta})$. Вычисление показывает, что

$$\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) = \mu(\boldsymbol{\theta}) = -i \sum_{j,l,k=1}^d (a_{jlk} - a_{jlk}^*) \theta_j \theta_l \theta_k + 2 \langle g^0 \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta} \rangle \sum_{j=1}^d \operatorname{Im}(\overline{|\eta|^2 \Phi_j}) \theta_j, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1},$$

где коэффициенты a_{jlk} определены в (20.3). См. [Su6, п. 15.4]. В общем случае оператор $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})$ отличен от нуля.

Пусть $\widehat{N}_Q(\mathbf{D})$ — ДО третьего порядка с символом

$$\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\xi}) = -i \sum_{j,l,k=1}^d (a_{jlk} - a_{jlk}^*) \xi_j \xi_l \xi_k + 2 \langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle \sum_{j=1}^d \operatorname{Im}(\overline{|\eta|^2 \Phi_j}) \xi_j, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d.$$

То есть,

$$\widehat{N}_Q(\mathbf{D}) = \sum_{j,l,k=1}^d (a_{jlk} - a_{jlk}^*) \partial_j \partial_l \partial_k + 2 \mathbf{D}^* g^0 \mathbf{D} \sum_{j=1}^d \operatorname{Im}(\overline{|\eta|^2 \Phi_j}) D_j. \quad (21.17)$$

21.4. Усреднение нестационарного магнитного уравнения Шрёдингера. Рассмотрим теперь операторы

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{\varepsilon} = ((\eta^{\varepsilon})^*)^{-1} \mathbf{D}^* g^{\varepsilon} \mathbf{D} (\eta^{\varepsilon})^{-1}, \quad \mathcal{M}_{\varepsilon} = [e^{i\varepsilon^{-1}\langle \mathbf{k}_0, \cdot \rangle}] \widetilde{\mathcal{M}}_{\varepsilon} [e^{-i\varepsilon^{-1}\langle \mathbf{k}_0, \cdot \rangle}]. \quad (21.18)$$

В исходных терминах имеем

$$\mathcal{M}_{\varepsilon} = (\mathbf{D} - \varepsilon^{-1} \mathbf{A}^{\varepsilon})^* \check{g}^{\varepsilon} (\mathbf{D} - \varepsilon^{-1} \mathbf{A}^{\varepsilon}) + \varepsilon^{-2} V^{\varepsilon}. \quad (21.19)$$

Отметим, что выражение (21.19) содержит большой множитель ε^{-1} перед магнитным потенциалом \mathbf{A}^{ε} и большой множитель ε^{-2} перед электрическим потенциалом V^{ε} . К оператору $\widetilde{\mathcal{M}}_{\varepsilon}$ применимы общие результаты: теоремы 18.1, 18.6, 18.14 и следствия 18.3, 18.10, 18.17.

Пусть \check{u}_{ε} — решение задачи Коши для нестационарного магнитного уравнения Шрёдингера:

$$\begin{cases} i \frac{\partial \check{u}_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = \mathcal{M}_{\varepsilon} \check{u}_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \tau), \\ (\eta^{\varepsilon}(\mathbf{x}))^{-1} e^{-i\varepsilon^{-1}\langle \mathbf{k}_0, \mathbf{x} \rangle} \check{u}_{\varepsilon}(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}) + \varepsilon \sum_{j=1}^d \Psi_j^{\varepsilon}(\mathbf{x}) \partial_j (\Pi_{\varepsilon} \phi)(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (21.20)$$

Тогда функция $u_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \tau) = e^{-i\varepsilon^{-1}\langle \mathbf{k}_0, \mathbf{x} \rangle} \check{u}_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \tau)$ является решением задачи вида (19.36):

$$\begin{cases} i \frac{\partial u_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = \widetilde{\mathcal{M}}_{\varepsilon} u_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \tau), \\ (\eta^{\varepsilon}(\mathbf{x}))^{-1} u_{\varepsilon}(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}) + \varepsilon \sum_{j=1}^d \Psi_j^{\varepsilon}(\mathbf{x}) \partial_j (\Pi_{\varepsilon} \phi)(\mathbf{x}). \end{cases}$$

Пусть u_0 — решение усредненной задачи

$$\begin{cases} i \frac{\partial u_0(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = \mathbf{D}^* g^0 \mathbf{D} u_0(\mathbf{x}, \tau), \\ u_0(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (21.21)$$

Положим

$$v_\varepsilon = u_0 + \varepsilon \sum_{j=1}^d \Psi_j^\varepsilon \partial_j(\Pi_\varepsilon u_0). \quad (21.22)$$

Пусть w_0 — решение задачи

$$\begin{cases} i \frac{\partial w_0(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = \mathbf{D}^* g^0 \mathbf{D} w_0(\mathbf{x}, \tau) + \widehat{N}_Q(\mathbf{D}) u_0(\mathbf{x}, \tau), \\ w_0(\mathbf{x}, 0) = 0. \end{cases} \quad (21.23)$$

Здесь оператор $\widehat{N}_Q(\mathbf{D})$ определен в (21.17).

Применяя теорему 19.10, получаем следующий результат.

Предложение 21.4. Пусть \check{u}_ε — решение задачи (21.20) и u_0 — решение усредненной задачи (21.21). Пусть v_ε определено в (21.22) и w_0 — решение задачи (21.23).

Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d)$, где $0 \leq s \leq 3$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|(\eta^\varepsilon)^{-1} e^{-i\varepsilon^{-1}\langle \mathbf{k}_0, \cdot \rangle} \check{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - u_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(s)(1 + |\tau|)^{s/3} \varepsilon^{s/3} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d)$, где $3 \leq s \leq 6$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|(\eta^\varepsilon)^{-1} e^{-i\varepsilon^{-1}\langle \mathbf{k}_0, \cdot \rangle} \check{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - v_\varepsilon(\cdot, \tau) - \varepsilon w_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(s)(1 + |\tau|)^{s/3} \varepsilon^{s/3} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d)$, где $1 \leq s \leq 4$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|(\eta^\varepsilon)^{-1} e^{-i\varepsilon^{-1}\langle \mathbf{k}_0, \cdot \rangle} \check{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - v_\varepsilon(\cdot, \tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/3} \varepsilon^{(s-1)/3} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)},$$

$$\|g^\varepsilon \nabla (\eta^\varepsilon)^{-1} e^{-i\varepsilon^{-1}\langle \mathbf{k}_0, \cdot \rangle} \check{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{g}^\varepsilon \nabla (\Pi_\varepsilon u_0)(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/3} \varepsilon^{(s-1)/3} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

§ 22. ПРИМЕНЕНИЕ ОБЩИХ РЕЗУЛЬТАТОВ: ДВУМЕРНОЕ УРАВНЕНИЕ ПАУЛИ

22.1. Определение двумерного оператора Паули. Факторизация. (См. [BSu1, гл. 6, п. 2.1].) Пусть $d = 2$ и магнитный потенциал задается вектор-функцией $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \{A_1(\mathbf{x}), A_2(\mathbf{x})\}$, где $A_j(\mathbf{x})$, $j = 1, 2$, — вещественные Г-периодические функции в \mathbb{R}^2 , причем

$$A_j \in L_\rho(\Omega), \quad \rho > 2, \quad j = 1, 2. \quad (22.1)$$

Рассмотрим в $L_2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$ оператор

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= (D_1 - A_1)\sigma_1 + (D_2 - A_2)\sigma_2, \quad \text{Dom } \mathcal{D} = H^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2), \\ \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Оператор \mathcal{D} — это безмассовый оператор Дирака. По определению, оператор Паули \mathcal{P} есть квадрат оператора \mathcal{D} :

$$\mathcal{P} = \mathcal{D}^2 = \begin{pmatrix} P_- & 0 \\ 0 & P_+ \end{pmatrix}. \quad (22.2)$$

Строгое определение оператора \mathcal{P} дается через замкнутую в $L_2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$ квадратичную форму

$$\|\mathcal{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}^2, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2).$$

Если $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ — липшицева вектор-функция, то блоки P_\pm оператора (22.2) записываются в виде

$$P_\pm = (\mathbf{D} - \mathbf{A}(\mathbf{x}))^2 \pm B(\mathbf{x}), \quad B(\mathbf{x}) := \partial_1 A_2(\mathbf{x}) - \partial_2 A_1(\mathbf{x}).$$

Функция $B(\mathbf{x})$ имеет смысл напряженности магнитного поля.

Воспользуемся известной факторизацией для оператора (22.2). За счет калибровочного преобразования потенциал \mathbf{A} можно подчинить условиям

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{x}) = 0, \quad \int_\Omega \mathbf{A}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \quad (22.3)$$

При условиях (22.1), (22.3) существует единственная вещественная Γ -периодическая функция $\varphi(\mathbf{x})$, удовлетворяющая условиям

$$\nabla \varphi(\mathbf{x}) = \{A_2(\mathbf{x}), -A_1(\mathbf{x})\}, \quad \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

Как проверено в [BSu1, гл. 6, п. 2.1], $\varphi \in C^\sigma$, $\sigma = 1 - 2\rho^{-1}$. Положим $\omega_{\pm}(\mathbf{x}) := e^{\pm\varphi(\mathbf{x})}$. Оператор \mathcal{P} допускает факторизацию вида

$$\mathcal{P} = f_{\times}(\mathbf{x}) b_{\times}(\mathbf{D}) g_{\times}(\mathbf{x}) b_{\times}(\mathbf{D}) f_{\times}(\mathbf{x}), \quad (22.4)$$

где

$$b_{\times}(\mathbf{D}) = \begin{pmatrix} 0 & D_1 - iD_2 \\ D_1 + iD_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_{\times}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \omega_+(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \omega_-(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad g_{\times}(\mathbf{x}) = f_{\times}^2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \omega_+^2(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \omega_-^2(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Блоки P_{\pm} оператора (22.2) допускают запись

$$P_+ = \omega_-(D_1 + iD_2)\omega_+^2(D_1 - iD_2)\omega_-, \quad P_- = \omega_+(D_1 - iD_2)\omega_-^2(D_1 + iD_2)\omega_+. \quad (22.5)$$

Замечание 22.1. 1°. Выражения (22.4), (22.5) можно принять за определение операторов \mathcal{P} и P_{\pm} , предполагая, что $\omega_{\pm}(\mathbf{x})$ — произвольные Γ -периодические функции, удовлетворяющие условиям

$$\omega_+, \omega_- \in L_\infty; \quad \omega_{\pm}(\mathbf{x}) > 0; \quad \omega_+(\mathbf{x})\omega_-(\mathbf{x}) = 1.$$

Строго говоря, оператор \mathcal{P} порождается замкнутой квадратичной формой

$$\mathfrak{p}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \int_{\mathbb{R}^2} \langle g_{\times}(\mathbf{x}) b_{\times}(\mathbf{D}) f_{\times}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}), b_{\times}(\mathbf{D}) f_{\times}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \rangle d\mathbf{x}, \quad f_{\times} \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2),$$

а оператор P_{\pm} отвечает квадратичной форме

$$\mathfrak{p}_{\pm}[u, u] = \int_{\mathbb{R}^2} \omega_{\pm}^2(\mathbf{x}) |(D_1 \mp iD_2)\omega_{\mp}(\mathbf{x})u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}, \quad \omega_{\mp} u \in H^1(\mathbb{R}^2).$$

2°. Операторы P_+ и P_- унитарно эквивалентны. Более того, операторы $P_+(\mathbf{k})$ и $P_-(\mathbf{k})$, действующие в $L_2(\Omega)$, также унитарно эквивалентны.

22.2. Эффективные характеристики операторов P_{\pm} . Усреднение. Оператор P_{\pm} имеет вид (8.10) при $m = n = 1$, $b(\mathbf{D}) = D_1 \mp iD_2$, $g(\mathbf{x}) = \omega_{\pm}^2(\mathbf{x})$ и $f(\mathbf{x}) = \omega_{\mp}(\mathbf{x})$. Роль оператора $\widehat{\mathcal{A}}$ для P_{\pm} играет оператор $\widehat{\mathcal{A}}_{\pm} = (D_1 \pm iD_2)\omega_{\pm}^2(D_1 \mp iD_2)$.

Роль функции $\Lambda(\mathbf{x})$ для оператора P_{\pm} играет $\Lambda_{\pm}(\mathbf{x})$ — Γ -периодическое решение задачи

$$(D_1 \pm iD_2)\omega_{\pm}^2(\mathbf{x}) ((D_1 \mp iD_2)\Lambda_{\pm}(\mathbf{x}) + 1) = 0, \quad \int_{\Omega} \Lambda_{\pm}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

Тогда функция $\tilde{g}_{\pm}(\mathbf{x}) := \omega_{\pm}^2(\mathbf{x}) ((D_1 \mp iD_2)\Lambda_{\pm}(\mathbf{x}) + 1)$ постоянна. По определению, эффективная константа g_{\pm}^0 — это среднее значение от $\tilde{g}_{\pm}(\mathbf{x})$. Следовательно,

$$\omega_{\pm}^2(\mathbf{x}) ((D_1 \mp iD_2)\Lambda_{\pm}(\mathbf{x}) + 1) = g_{\pm}^0.$$

Деля на ω_{\pm}^2 и интегрируя по Ω , получаем

$$g_{\pm}^0 = \underline{\omega}_{\pm}^2 = \left(|\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \omega_{\mp}^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{-1} =: \omega_{\pm,0}^2. \quad (22.6)$$

(Это согласуется с предложением 9.1: в случае $m = n$ выполнено $g^0 = \underline{g}$.) Таким образом, $\Lambda_{\pm}(\mathbf{x})$ является Γ -периодическим решением задачи

$$(D_1 \mp iD_2)\Lambda_{\pm}(\mathbf{x}) = g_{\pm}^0 \omega_{\mp}^2(\mathbf{x}) - 1, \quad \int_{\Omega} \Lambda_{\pm}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \quad (22.7)$$

Роль $Q(\mathbf{x})$ для оператора P_{\pm} играет функция $Q_{\pm}(\mathbf{x}) = \omega_{\pm}^2(\mathbf{x})$. Тогда $\overline{Q_{\pm}} = (g_{\mp}^0)^{-1}$. Роль f_0 играет константа $(\overline{Q_{\pm}})^{-1/2} = (g_{\mp}^0)^{1/2} = \omega_{\mp,0}$. Далее, роль оператора \mathcal{A}^0 для P_{\pm} играет оператор P_{\pm}^0 , где

$$\begin{aligned} P_{+}^0 &= \omega_{-,0}(D_1 + iD_2)g_{+}^0(D_1 - iD_2)\omega_{-,0} = -\gamma\Delta, \\ P_{-}^0 &= \omega_{+,0}(D_1 - iD_2)g_{-}^0(D_1 + iD_2)\omega_{+,0} = -\gamma\Delta. \end{aligned}$$

Здесь

$$\gamma := g_{+}^0 g_{-}^0 = |\Omega|^2 \|\omega_{+}\|_{L_2(\Omega)}^{-2} \|\omega_{-}\|_{L_2(\Omega)}^{-2}. \quad (22.8)$$

Пусть $\lambda_{\pm}(t, \boldsymbol{\theta})$ — первое собственное значение оператора $P_{\pm}(\mathbf{k})$ и

$$\lambda_{\pm}(t, \boldsymbol{\theta}) = \gamma_{\pm}(\boldsymbol{\theta})t^2 + \mu_{\pm}(\boldsymbol{\theta})t^3 + \dots$$

— соответствующее разложение в степенной ряд. Поскольку операторы $P_{+}(\mathbf{k})$ и $P_{-}(\mathbf{k})$ унитарно эквивалентны, то $\lambda_{+}(t, \boldsymbol{\theta}) = \lambda_{-}(t, \boldsymbol{\theta})$, а тогда и $\gamma_{+}(\boldsymbol{\theta}) = \gamma_{-}(\boldsymbol{\theta})$, $\mu_{+}(\boldsymbol{\theta}) = \mu_{-}(\boldsymbol{\theta})$. Как показано в [BSu1, гл. 6, §2], числа $\gamma_{\pm}(\boldsymbol{\theta})$ не зависят от $\boldsymbol{\theta}$ и заданы соотношением

$$\gamma_{+}(\boldsymbol{\theta}) = \gamma_{-}(\boldsymbol{\theta}) = \gamma,$$

где γ определено в (22.8).

Аналогично (22.7), роль Λ_Q для оператора P_{\pm} играет $\Lambda_{Q,\pm}(\mathbf{x})$ — Γ -периодическое решение задачи

$$(D_1 \mp iD_2)\Lambda_{Q,\pm}(\mathbf{x}) = g_{\pm}^0 \omega_{\mp}^2(\mathbf{x}) - 1, \quad \int_{\Omega} \omega_{\pm}^2(\mathbf{x}) \Lambda_{Q,\pm}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

Ясно, что выполнены соотношения

$$\Lambda_{Q,\pm}(\mathbf{x}) = \Lambda_{\pm}(\mathbf{x}) + \Lambda_{\pm}^0, \quad \Lambda_{\pm}^0 = -g_{\mp}^0 \overline{\omega_{\pm}^2 \Lambda_{\pm}}.$$

Опишем теперь оператор $\widehat{N}_{Q,\pm}(\boldsymbol{\theta})$, играющий роль $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})$ для P_{\pm} ; см. [BSu3, п. 12.4]. Имеем

$$\widehat{N}_{Q,\pm}(\boldsymbol{\theta}) = -2\gamma \left(\theta_1 \operatorname{Re} \overline{\omega_{\pm}^2 \Lambda_{\pm}} \pm \theta_2 \operatorname{Im} \overline{\omega_{\pm}^2 \Lambda_{\pm}} \right), \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^1. \quad (22.9)$$

В соответствии с (12.15),

$$\mu_{\pm}(\boldsymbol{\theta}) = -2g_{\mp}^0 \gamma \left(\theta_1 \operatorname{Re} \overline{\omega_{\pm}^2 \Lambda_{\pm}} \pm \theta_2 \operatorname{Im} \overline{\omega_{\pm}^2 \Lambda_{\pm}} \right), \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^1. \quad (22.10)$$

Хотя нам известно, что $\mu_{+}(\boldsymbol{\theta}) = \mu_{-}(\boldsymbol{\theta}) =: \mu(\boldsymbol{\theta})$, это не так просто усмотреть из (22.10).

Вообще говоря, оператор (22.9) не равен нулю тождественно, то есть условие 13.2 не выполняется. Следующий пример заимствован из [Su6, пример 16.2].

Пример 22.2. Пусть $\Gamma = (2\pi\mathbb{Z})^2$ и $\omega_{-}^2(\mathbf{x}) = 1 + c(\sin x_2 + 4 \sin 2x_2)$ при достаточно малом $c > 0$, $\omega_{+}^2(\mathbf{x})\omega_{-}^2(\mathbf{x}) = 1$. Тогда $\mu(\boldsymbol{\theta}) \neq 0$ при $\theta_1 \neq 0$.

Пусть $\widehat{N}_{Q,\pm}(\mathbf{D})$ — ДО третьего порядка с символом $-2\gamma|\boldsymbol{\xi}|^2 \left(\xi_1 \operatorname{Re} \overline{\omega_{\pm}^2 \Lambda_{\pm}} \pm \xi_2 \operatorname{Im} \overline{\omega_{\pm}^2 \Lambda_{\pm}} \right)$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2$. Тогда

$$\widehat{N}_{Q,\pm}(\mathbf{D}) = 2\gamma\Delta \left((\operatorname{Re} \overline{\omega_{\pm}^2 \Lambda_{\pm}}) D_1 \pm (\operatorname{Im} \overline{\omega_{\pm}^2 \Lambda_{\pm}}) D_2 \right).$$

Рассмотрим теперь операторы

$$\begin{aligned} P_{+,\varepsilon} &= \omega_{-}^{\varepsilon}(D_1 + iD_2)(\omega_{+}^{\varepsilon})^2(D_1 - iD_2)\omega_{-}^{\varepsilon}, \\ P_{-,\varepsilon} &= \omega_{+}^{\varepsilon}(D_1 - iD_2)(\omega_{-}^{\varepsilon})^2(D_1 + iD_2)\omega_{+}^{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (22.11)$$

Если вектор-функция $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ липшицева, то операторы (22.11) можно записать в виде

$$P_{\pm,\varepsilon} = (\mathbf{D} - \varepsilon^{-1} \mathbf{A}^{\varepsilon})^2 \pm \varepsilon^{-2} B^{\varepsilon}.$$

К операторам (22.11) применимы теоремы 18.1, 18.6, 18.14 и следствия 18.3, 18.10, 18.17. Поскольку сейчас реализуется случай, когда $g^0 = g$, то в силу предложения 17.36 применимы также результаты “без сглаживателя”: теоремы 18.24, 18.27.

Рассмотрим задачу Коши вида (19.36):

$$\begin{cases} i \frac{\partial u_{\pm,\varepsilon}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = P_{\pm,\varepsilon} u_{\pm,\varepsilon}(\mathbf{x}, \tau), \\ \omega_{\mp}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) u_{\pm,\varepsilon}(\mathbf{x}, 0) = \phi_{\pm}(\mathbf{x}) + \varepsilon \Lambda_{Q,\pm}^{\varepsilon}(\mathbf{x})(D_1 \mp i D_2)(\Pi_{\varepsilon} \phi_{\pm})(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (22.12)$$

Пусть $u_{0,\pm}$ — решение усредненной задачи

$$\begin{cases} i \frac{\partial u_{0,\pm}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = -\gamma \Delta u_{0,\pm}(\mathbf{x}, \tau), \\ \omega_{\mp,0} u_{0,\pm}(\mathbf{x}, 0) = \phi_{\pm}(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (22.13)$$

Положим

$$v_{\pm,\varepsilon} = \omega_{\mp,0} u_{0,\pm} + \varepsilon \Lambda_{Q,\pm}^{\varepsilon}(D_1 \mp i D_2)(\Pi_{\varepsilon} \omega_{\mp,0} u_{0,\pm}). \quad (22.14)$$

Пусть $w_{0,\pm}$ — решение задачи

$$\begin{cases} i \frac{\partial w_{0,\pm}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = -\gamma \Delta w_{0,\pm}(\mathbf{x}, \tau) + g_{\mp}^0 \widehat{N}_{Q,\pm}(\mathbf{D}) u_{0,\pm}(\mathbf{x}, \tau), \\ w_{0,\pm}(\mathbf{x}, 0) = 0. \end{cases} \quad (22.15)$$

Применяя теорему 19.10, получаем следующий результат.

Предложение 22.3. Пусть $u_{\pm,\varepsilon}$ — решение задачи (22.12) и $u_{0,\pm}$ — решение усредненной задачи (22.13). Пусть $v_{\pm,\varepsilon}$ определено в (22.14), а $w_{0,\pm}$ — решение задачи (22.15). Если $\phi_{\pm} \in H^s(\mathbb{R}^2)$, где $0 \leq s \leq 3$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|\omega_{\mp}^{\varepsilon} u_{\pm,\varepsilon}(\cdot, \tau) - \omega_{\mp,0} u_{0,\pm}(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} \leq C(s)(1 + |\tau|)^{s/3} \varepsilon^{s/3} \|\phi_{\pm}\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}.$$

Если $\phi_{\pm} \in H^s(\mathbb{R}^2)$, где $3 \leq s \leq 6$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|\omega_{\mp}^{\varepsilon} u_{\pm,\varepsilon}(\cdot, \tau) - v_{\pm,\varepsilon}(\cdot, \tau) - \varepsilon \omega_{\mp,0} w_{0,\pm}(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} \leq C(s)(1 + |\tau|)^{s/3} \varepsilon^{s/3} \|\phi_{\pm}\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}.$$

Если $\phi_{\pm} \in H^s(\mathbb{R}^2)$, где $1 \leq s \leq 4$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\omega_{\mp}^{\varepsilon} u_{\pm,\varepsilon}(\cdot, \tau) - v_{\pm,\varepsilon}(\cdot, \tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} &\leq C(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/3} \varepsilon^{(s-1)/3} \|\phi_{\pm}\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}, \\ \|(\omega_{\pm}^{\varepsilon})^2(D_1 \mp i D_2) \omega_{\mp}^{\varepsilon} u_{\pm,\varepsilon}(\cdot, \tau) - g_{\pm}^0(D_1 \mp i D_2)(\Pi_{\varepsilon} \omega_{\mp,0} u_{0,\pm})(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq C(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/3} \varepsilon^{(s-1)/3} \|\phi_{\pm}\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь задачу Коши вида (19.43):

$$\begin{cases} i \frac{\partial \tilde{u}_{\pm,\varepsilon}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = P_{\pm,\varepsilon} \tilde{u}_{\pm,\varepsilon}(\mathbf{x}, \tau), \\ \omega_{\mp}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) \tilde{u}_{\pm,\varepsilon}(\mathbf{x}, 0) = \phi_{\pm}(\mathbf{x}) + \varepsilon \Lambda_{Q,\pm}^{\varepsilon}(\mathbf{x})(D_1 \mp i D_2) \phi_{\pm}(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (22.16)$$

Пусть $u_{0,\pm}$ — решение прежней усредненной задачи (22.13). Положим

$$\tilde{v}_{\pm,\varepsilon} = \omega_{\mp,0} u_{0,\pm} + \varepsilon \Lambda_{Q,\pm}^{\varepsilon}(D_1 \mp i D_2) \omega_{\mp,0} u_{0,\pm}. \quad (22.17)$$

Применяя теорему 19.12, получаем следующий результат.

Предложение 22.4. Пусть $\tilde{u}_{\pm,\varepsilon}$ — решение задачи (22.16) и $u_{0,\pm}$ — решение усредненной задачи (22.13). Пусть $\tilde{v}_{\pm,\varepsilon}$ определено в (22.17), а $w_{0,\pm}$ — решение задачи (22.15).

Если $\phi_{\pm} \in H^s(\mathbb{R}^2)$, где $1 \leq s \leq 3$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|\omega_{\mp}^{\varepsilon} \tilde{u}_{\pm,\varepsilon}(\cdot, \tau) - \omega_{\mp,0} u_{0,\pm}(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} \leq C(s)(1 + |\tau|)^{s/3} \varepsilon^{s/3} \|\phi_{\pm}\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}.$$

Если $\phi_{\pm} \in H^s(\mathbb{R}^2)$, где $3 \leq s \leq 6$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|\omega_{\mp}^{\varepsilon} \tilde{u}_{\pm,\varepsilon}(\cdot, \tau) - \tilde{v}_{\pm,\varepsilon}(\cdot, \tau) - \varepsilon \omega_{\mp,0} w_{0,\pm}(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} \leq C(s)(1 + |\tau|)^{s/3} \varepsilon^{s/3} \|\phi_{\pm}\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}.$$

Если $\phi_{\pm} \in H^s(\mathbb{R}^2)$, где $2 \leq s \leq 4$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\omega_{\mp}^{\varepsilon} \tilde{u}_{\pm, \varepsilon}(\cdot, \tau) - \tilde{v}_{\pm, \varepsilon}(\cdot, \tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} &\leq C(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/3} \varepsilon^{(s-1)/3} \|\phi_{\pm}\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}, \\ \|(\omega_{\pm}^{\varepsilon})^2(D_1 \mp iD_2) \omega_{\mp}^{\varepsilon} \tilde{u}_{\pm, \varepsilon}(\cdot, \tau) - g_{\pm}^0(D_1 \mp iD_2) \omega_{\mp, 0} u_{0, \pm}(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq C(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/3} \varepsilon^{(s-1)/3} \|\phi_{\pm}\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

22.3. Эффективные характеристики для оператора \mathcal{P} . Усреднение. Оператор \mathcal{P} имеет вид (8.10) при $m = n = 2$, $b(\mathbf{D}) = b_{\times}(\mathbf{D})$, $g(\mathbf{x}) = g_{\times}(\mathbf{x})$ и $f(\mathbf{x}) = f_{\times}(\mathbf{x})$. Роль оператора $\widehat{\mathcal{A}}$ для \mathcal{P} играет оператор $\widehat{\mathcal{A}}_{\times} = b_{\times}(\mathbf{D})g_{\times}(\mathbf{x})b_{\times}(\mathbf{D})$.

Роль матрицы-функции $\Lambda(\mathbf{x})$ для оператора \mathcal{P} играет $\Lambda_{\times}(\mathbf{x})$ — Г-периодическое решение задачи

$$b_{\times}(\mathbf{D})g_{\times}(\mathbf{x})(b_{\times}(\mathbf{D})\Lambda_{\times}(\mathbf{x}) + \mathbf{1}) = 0, \quad \int_{\Omega} \Lambda_{\times}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

Легко видеть, что

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_{-}(\mathbf{x}) \\ \Lambda_{+}(\mathbf{x}) & 0 \end{pmatrix},$$

где периодические функции $\Lambda_{\pm}(\mathbf{x})$ определены в п. 22.2. Поскольку $m = n$, эффективная матрица имеет вид

$$g_{\times}^0 = \underline{g_{\times}} = \begin{pmatrix} g_{+}^0 & 0 \\ 0 & g_{-}^0 \end{pmatrix},$$

где g_{\pm}^0 определены в (22.6). Роль $Q(\mathbf{x})$ для оператора \mathcal{P} играет матрица $Q_{\times}(\mathbf{x}) = (f_{\times}(\mathbf{x}))^{-2} = (g_{\times}(\mathbf{x}))^{-1}$. Тогда

$$\overline{Q_{\times}} = \begin{pmatrix} (g_{+}^0)^{-1} & 0 \\ 0 & (g_{-}^0)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Роль матрицы f_0 играет

$$f_{\times, 0} = (\overline{Q_{\times}})^{-1/2} = \begin{pmatrix} \omega_{+, 0} & 0 \\ 0 & \omega_{-, 0} \end{pmatrix}.$$

Оператор (12.3) принимает вид

$$\mathcal{P}^0 = f_{\times, 0} b_{\times}(\mathbf{D}) g_{\times}^0 b_{\times}(\mathbf{D}) f_{\times, 0} = \begin{pmatrix} -\gamma\Delta & 0 \\ 0 & -\gamma\Delta \end{pmatrix}.$$

Роль Λ_Q для оператора \mathcal{P} играет матрица-функция

$$\Lambda_{Q, \times}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_{Q, -}(\mathbf{x}) \\ \Lambda_{Q, +}(\mathbf{x}) & 0 \end{pmatrix},$$

где периодические функции $\Lambda_{Q, \pm}(\mathbf{x})$ определены в п. 22.2.

Далее, оператор $\widehat{N}_{Q, \times}(\boldsymbol{\theta})$, играющий роль оператора $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})$ для \mathcal{P} , имеет вид

$$\widehat{N}_{Q, \times}(\boldsymbol{\theta}) = -\gamma b_{\times}(\boldsymbol{\theta}) (\overline{Q_{\times} \Lambda_{\times}})^* - \gamma (\overline{Q_{\times} \Lambda_{\times}}) b_{\times}(\boldsymbol{\theta}).$$

Легко видеть, что

$$\widehat{N}_{Q, \times}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \widehat{N}_{Q, -}(\boldsymbol{\theta}) & 0 \\ 0 & \widehat{N}_{Q, +}(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix},$$

где операторы $\widehat{N}_{Q, \pm}(\boldsymbol{\theta})$ определены в (22.9).

Первое собственное значение $\lambda(t, \boldsymbol{\theta})$ оператора $\mathcal{P}(\mathbf{k})$ является двукратным при всех $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}$, поскольку блоки $P_+(\mathbf{k})$ и $P_-(\mathbf{k})$ унитарно эквивалентны. Справедливо степенное разложение

$$\lambda(t, \boldsymbol{\theta}) = \gamma t^2 + \mu(\boldsymbol{\theta})t^3 + \dots,$$

где коэффициент γ не зависит от $\boldsymbol{\theta}$ и определен в (22.8), а коэффициент $\mu(\boldsymbol{\theta})$ определен в (22.10). Вообще говоря, $\mu(\boldsymbol{\theta})$ отлично от нуля (см. пример 22.2).

Пусть $\widehat{N}_{Q,\times}(\mathbf{D}) = \Delta$ О третьего порядка с символом $-\gamma|\xi|^2(b_{\times}(\xi)(\overline{Q_{\times}\Lambda_{\times}})^* + (\overline{Q_{\times}\Lambda_{\times}})b_{\times}(\xi))$, $\xi \in \mathbb{R}^2$. Тогда

$$\widehat{N}_{Q,\times}(\mathbf{D}) = \gamma\Delta(b_{\times}(\mathbf{D})(\overline{Q_{\times}\Lambda_{\times}})^* + (\overline{Q_{\times}\Lambda_{\times}})b_{\times}(\mathbf{D})).$$

Рассмотрим теперь оператор

$$\mathcal{P}_{\varepsilon} = f_{\times}^{\varepsilon}b_{\times}(\mathbf{D})g_{\times}^{\varepsilon}b_{\times}(\mathbf{D})f_{\times}^{\varepsilon} = \begin{pmatrix} P_{-, \varepsilon} & 0 \\ 0 & P_{+, \varepsilon} \end{pmatrix}, \quad (22.18)$$

где блоки определены в (22.11).

К оператору (22.18) применимы теоремы 18.1, 18.6, 18.14 и следствия 18.3, 18.10, 18.17. Поскольку сейчас реализуется случай, когда $g^0 = g$, то в силу предложения 17.36 применимы также результаты “без слаживателя”: теоремы 18.24, 18.27.

Рассмотрим задачу Коши вида (19.36):

$$\begin{cases} i \frac{\partial \mathbf{u}_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = \mathcal{P}_{\varepsilon} \mathbf{u}_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \tau), \\ f_{\times}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_{\varepsilon}(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}) + \varepsilon \Lambda_{Q,\times}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) b_{\times}(\mathbf{D})(\Pi_{\varepsilon} \phi)(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (22.19)$$

Пусть $\phi = \text{col}\{\phi_-, \phi_+\}$. Ясно, что $\mathbf{u}_{\varepsilon} = \text{col}\{u_{-, \varepsilon}, u_{+, \varepsilon}\}$, где $u_{\pm, \varepsilon}$ — решения задач (22.12).

Пусть \mathbf{u}_0 — решение усредненной задачи

$$\begin{cases} i \frac{\partial \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = -\gamma \Delta \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \tau), \\ f_{\times, 0} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (22.20)$$

Ясно, что $\mathbf{u}_0 = \text{col}\{u_{0,-}, u_{0,+}\}$, где $u_{0,\pm}$ — решения задач (22.13). Положим

$$\mathbf{v}_{\varepsilon} = f_{\times, 0} \mathbf{u}_0 + \varepsilon \Lambda_{Q,\times}^{\varepsilon} b_{\times}(\mathbf{D}) \Pi_{\varepsilon} (f_{\times, 0} \mathbf{u}_0). \quad (22.21)$$

Тогда $\mathbf{v}_{\varepsilon} = \text{col}\{v_{-, \varepsilon}, v_{+, \varepsilon}\}$, где $v_{\pm, \varepsilon}$ определены в (22.14). Пусть \mathbf{w}_0 — решение задачи

$$\begin{cases} i \frac{\partial \mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = -\gamma \Delta \mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \tau) + f_{\times, 0} \widehat{N}_{Q,\times}(\mathbf{D}) f_{\times, 0} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \tau), \\ \mathbf{w}_0(\mathbf{x}, 0) = 0. \end{cases} \quad (22.22)$$

Тогда $\mathbf{w}_0 = \text{col}\{w_{0,-}, w_{0,+}\}$, где $w_{0,\pm}$ — решения задач (22.15).

Применяя теорему 19.10, получаем следующий результат.

Предложение 22.5. Пусть \mathbf{u}_{ε} — решение задачи (22.19) и \mathbf{u}_0 — решение усредненной задачи (22.20). Пусть \mathbf{v}_{ε} определено в (22.21), а \mathbf{w}_0 — решение задачи (22.22).

Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$, где $0 \leq s \leq 3$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|f_{\times}^{\varepsilon} \mathbf{u}_{\varepsilon}(\cdot, \tau) - f_{\times, 0} \mathbf{u}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} \leq C(s)(1 + |\tau|)^{s/3} \varepsilon^{s/3} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}.$$

Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$, где $3 \leq s \leq 6$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|f_{\times}^{\varepsilon} \mathbf{u}_{\varepsilon}(\cdot, \tau) - \mathbf{v}_{\varepsilon}(\cdot, \tau) - \varepsilon f_{\times, 0} \mathbf{w}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} \leq C(s)(1 + |\tau|)^{s/3} \varepsilon^{s/3} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}.$$

Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$, где $1 \leq s \leq 4$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|f_{\times}^{\varepsilon} \mathbf{u}_{\varepsilon}(\cdot, \tau) - \mathbf{v}_{\varepsilon}(\cdot, \tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} &\leq C(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/3} \varepsilon^{(s-1)/3} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}, \\ \|g_{\times}^{\varepsilon} b_{\times}(\mathbf{D}) f_{\times}^{\varepsilon} \mathbf{u}_{\varepsilon}(\cdot, \tau) - g_{\times}^0 b_{\times}(\mathbf{D})(\Pi_{\varepsilon} f_{\times, 0} \mathbf{u}_0)(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq C(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/3} \varepsilon^{(s-1)/3} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь задачу Коши вида (19.43):

$$\begin{cases} i \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = \mathcal{P}_{\varepsilon} \tilde{\mathbf{u}}_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \tau), \\ f_{\times}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{u}}_{\varepsilon}(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}) + \varepsilon \Lambda_{Q,\times}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) b_{\times}(\mathbf{D}) \phi(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (22.23)$$

Пусть $\phi = \text{col}\{\phi_-, \phi_+\}$. Тогда $\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon = \text{col}\{\tilde{u}_{-, \varepsilon}, \tilde{u}_{+, \varepsilon}\}$, где $\tilde{u}_{\pm, \varepsilon}$ — решения задач (22.16). Пусть \mathbf{u}_0 — решение прежней усредненной задачи (22.20). Положим

$$\tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon = f_{\times, 0} \mathbf{u}_0 + \varepsilon \Lambda_{Q, \times}^\varepsilon b_\times(\mathbf{D})(f_{\times, 0} \mathbf{u}_0). \quad (22.24)$$

Тогда $\tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon = \text{col}\{\tilde{v}_{-, \varepsilon}, \tilde{v}_{+, \varepsilon}\}$, где $\tilde{v}_{\pm, \varepsilon}$ определены в (22.17).

Применяя теорему 19.12, получаем следующий результат.

Предложение 22.6. *Пусть $\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon$ — решение задачи (22.23) и \mathbf{u}_0 — решение усредненной задачи (22.20). Пусть $\tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon$ определено в (22.24), а \mathbf{w}_0 — решение задачи (22.22).*

Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$, где $1 \leq s \leq 3$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|f_\times^\varepsilon \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - f_{\times, 0} \mathbf{u}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} \leq C(s)(1 + |\tau|)^{s/3} \varepsilon^{s/3} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}.$$

Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$, где $3 \leq s \leq 6$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|f_\times^\varepsilon \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \varepsilon f_{\times, 0} \mathbf{w}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} \leq C(s)(1 + |\tau|)^{s/3} \varepsilon^{s/3} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}.$$

Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$, где $2 \leq s \leq 4$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|f_\times^\varepsilon \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon(\cdot, \tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \leq C(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/3} \varepsilon^{(s-1)/3} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^2)},$$

$$\|g_\times^\varepsilon b_\times(\mathbf{D}) f_\times^\varepsilon \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, \tau) - g_\times^0 b_\times(\mathbf{D}) f_{\times, 0} \mathbf{u}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}$$

$$\leq C(s)(1 + |\tau|)^{(s-1)/3} \varepsilon^{(s-1)/3} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [BaPa] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.
- [BeLP] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.
- [BSu1] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), вып. 5, 1–108.
- [BSu2] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Пороговые аппроксимации резольвенты факторизованного самосопряженного семейства с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), вып. 5, 69–90.
- [BSu3] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), вып. 6, 1–104.
- [BSu4] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$* , Алгебра и анализ **18** (2006), вып. 6, 1–130.
- [BSu5] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности при усреднении нестационарных периодических уравнений*, Алгебра и анализ **20** (2008), вып. 6, 30–107.
- [CoVa] Conca C., Orive R., Vanninathan M., *Bloch approximation in homogenization and applications*, SIAM J. Math. Anal. **33** (2002), no. 5, 1166–1198.
- [V] Василевская Е. С., *Усреднение параболической задачи Коши с периодическими коэффициентами при учете корректора*, Алгебра и анализ **21** (2009), вып. 1, 3–60.
- [VSu1] Василевская Е. С., Суслина Т. А., *Пороговые аппроксимации факторизованного самосопряженного операторного семейства с учетом первого и второго корректоров*, Алгебра и анализ **23** (2011), вып. 2, 102–146.
- [VSu2] Василевская Е. С., Суслина Т. А., *Усреднение параболических и эллиптических периодических операторов в $L_2(\mathbb{R}^d)$ при учете первого и второго корректоров*, Алгебра и анализ **24** (2012), вып. 2, 1–103.
- [D1] Dorodnyi M. A., *Operator error estimates for homogenization of the nonstationary Schrödinger type equations: sharpness of the results*, Appl. Anal. (2021), <http://dx.doi.org/10.1080/00036811.2021.1901886>.
- [D2] Дородный М. А., *Усреднение периодических уравнений типа Шредингера при включении членов младшего порядка*, Алгебра и анализ **31** (2019), вып. 5.
- [DSu1] Dorodnyi M. A., Suslina T. A., *Spectral approach to homogenization of hyperbolic equations with periodic coefficients*, J. Diff. Equ. **264** (2018), no. 12, 7463–7522.
- [DSu2] Дородный М. А., Суслина Т. А., *Усреднение гиперболических уравнений с периодическими коэффициентами в \mathbb{R}^d : точность резульятов*, Алгебра и анализ **32** (2020), вып. 4, 3–136.
- [Zh1] Жиков В. В., *Спектральный подход к асимптотическим задачам диффузии*, Дифференциальные уравнения **25** (1989), вып. 1, 44–50.
- [Zh2] Жиков В. В., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Докл. РАН **403** (2005), вып. 3, 305–308.
- [ZhKO] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1993.

- [ZhPas1] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys. **12** (2005), no. 4, 515–524.
- [ZhPas2] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients*, Russ. J. Math. Phys. **13** (2006), no. 2, 224–237.
- [ZhPas3] Жиков В. В., Пастухова С. Е., *Операторные оценки в теории усреднения*, Успехи матем. наук **71** (2016), вып. 3, 27–122.
- [Ka] Като Т., *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.
- [LaU] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1973.
- [MaSh] Мазья В. Г., Шапошникова Т. О., *Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций*, Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1986.
- [M1] Мешкова Ю. М., *Усреднение задачи Коши для параболических систем с периодическими коэффициентами*, Алгебра и анализ **25** (2013), вып. 6, 125–177.
- [M2] Мешкова Ю. М., *Усреднение периодических параболических систем по $L_2(\mathbb{R}^d)$ -норме при учете корректора*, Алгебра и анализ **31** (2019), вып. 4, 137–197.
- [M3] Мешкова Ю. М., *Об усреднении периодических гиперболических систем*, Матем. заметки **105** (2019), вып. 6, 937–942.
- [M4] Meshkova Yu. M., *On homogenization of periodic hyperbolic systems. Variations on the theme of the Trotter–Kato theorem*, preprint (2019), arXiv:1904.02781.
- [M5] Meshkova Yu. M., *On operator error estimates for homogenization of hyperbolic systems with periodic coefficients*, J. Spectr. Theory **11** (2021), no. 2, 587–660.
- [Se] Севостьянова Е. В., *Асимптотическое разложение решения эллиптического уравнения второго порядка с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами*, Мат. сб. **115** (1981), № 2, 204–222.
- [Su1] Суслина Т. А., *Об усреднении периодических параболических систем*, Функц. анализ и его прил. **38** (2004), вып. 4, 86–90.
- [Su2] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem*, Amer. Math. Soc. Transl. (2), vol. 220, 2007, 201–233.
- [Su3] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem in the Sobolev space $H^1(\mathbb{R}^d)$* , Math. Model. Nat. Phenom. **5** (2010), no. 4, 390–447.
- [Su4] Суслина Т. А., *Усреднение в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$ для периодических эллиптических дифференциальных операторов второго порядка при включении членов первого порядка*, Алгебра и анализ **22** (2010), вып. 1, 108–221.
- [Su5] Суслина Т. А., *Усреднение эллиптических систем с периодическими коэффициентами: операторные оценки погрешности в $L_2(\mathbb{R}^d)$ с учетом корректора*, Алгебра и анализ **26** (2014), вып. 4, 195–263.
- [Su6] Suslina T. A., *Spectral approach to homogenization of nonstationary Schrödinger-type equations*, J. Math. Anal. Appl. **446** (2017), no. 2, 1466–1523.
- [Sht] Штеренберг Р. Г., *О структуре нижнего края спектра периодического магнитного оператора Шредингера с малым магнитным потенциалом*, Алгебра и анализ **17** (2005), вып. 5, 232–243.