PDMI Preprint 03/2022

Охота за нулями рядов Дирихле средствами линейной алгебры. III

Ю. В. Матиясевич

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

yumat@pdmi.ras.ru

Аннотация. В первой части (doi:10.13140/RG.2.2.29328.43528) и во второй части (doi:10.13140/RG.2.2.20434.22720) автор продемонстрировал на численных примерах, как можно вычислить приближённые значения нулей дзета-функции Римана, знакопеременной дзета-функции и фунции Давенпорта–Хайльбронна средствами линейной алгебры. В настоящей работе продемонстрированы, опять только на численных примерах, неочевидные пути вычисления значений отдельных слагаемых, n^{-s}, ряда Дирихле для дзета-функции, когда s является её тривиальным или нетривиальным нулём.

10 рисунков, 16 таблиц.

Ключевые слова: нули дзета-функции Римана.

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:
ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г.
Выдано Федеральной службой по надзору
в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные:

191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны: (812) 312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

https://www.pdmi.ras.ru/preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором В. Н. Симонова

1 Дзета-функция Римана и его гипотеза

Дзета-функция Римана может быть определена при $\mathrm{Re}(s) > 0$ рядом Дирихле

$$\zeta(s) = 1^{-s} + 2^{-s} + \dots + n^{-s} + \dots \tag{1.1}$$

и аналитически продолжена на всю комплексную плоскость за исключением точки $s = 1$, которая является простым полюсом этой функции.

Для вещественных значений s эту функцию рассматривал ещё Леонард Эйлер. В частности, он указал, что $\zeta(s)$ обращается в ноль при $s = -2, -4, \dots,$ и отрицательные чётные числа известны как *тривиальные нули* дзета-функции.

Бернард Риман доказал [11], что других вещественных нулей у этой функции нет, а все невещественные, называемые *нетривиальными*, лежат в *критической полосе* $0 \le \mathrm{Re}(s) \le 1$. В той же работе он высказал свою знаменитую гипотезу о том, что, более того, все нетривиальные нули лежат на *критической прямой* $\mathrm{Re}(s) = 1/2$. Поскольку функция $\zeta(s)$ вещественна при вещественном аргументе s, то для каждого её нуля ρ комплексно-сопряженное число $\overline{\rho}$ также является нулём этой функции. По этой причине достаточно работать только с нулями

$$\rho_1,\ \rho_2,\ \dots,\ \rho_k,\ \dots \tag{1.2}$$

лежащими в верхней полуплоскости. Нули в нижней полуплоскости будут нумероваться отрицательными числами,

$$\rho_{-k} = \overline{\rho_k}, \quad k = 1,\ 2,\ \dots\ . \tag{1.3}$$

Мы будем предполагать, что нетривиальные нули занумерованы так, что

$$0 < \gamma_1 \le \gamma_2 \le \dots \le \gamma_k \le \dots, \tag{1.4}$$

где здесь и ниже

$$\gamma_k = \mathrm{Im}(\rho_k), \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots\ . \tag{1.5}$$

В [10] сообщается об установлении с помощью компьютерного счёта того факта, что нули

$$\rho_1,\ \rho_2,\ \dots,\ \rho_{12363153437138} \tag{1.6}$$

являются простыми и удовлетворяют гипотезе Римана. Что касается мнимых частей нетривиальных нулей дзета-функции, уже Риман вычислил их приближенные значения для нескольких начальных нулей; его вычисления были продолжены многими исследователями. Таблица 1 даёт значения нескольких начальных нетривиальных нулей, а Рис. 1 показывает их положение на комплексной S-плоскости.

k	ρ_k
1	$0.5 + 14.134725141734693790 45\ldots \mathrm{i}$
2	$0.5 + 21.02203963877155499262\ldots \mathrm{i}$
3	$0.5 + 25.01085758014568876321\ldots \mathrm{i}$
4	$0.5 + 30.42487612585951321031\ldots \mathrm{i}$
5	$0.5 + 32.93506158773918969066\ldots \mathrm{i}$
6	$0.5 + 37.58617815882567125721\ldots \mathrm{i}$
7	$0.5 + 40.91871901214749518739\ldots \mathrm{i}$
8	$0.5 + 43.32707328091499951949\ldots \mathrm{i}$
9	$0.5 + 48.00515088116715972794\ldots \mathrm{i}$
10	$0.5 + 49.77383247767230218191\ldots \mathrm{i}$

Таблица 1: Начальные нетривиальные нули дзета-функции Римана.

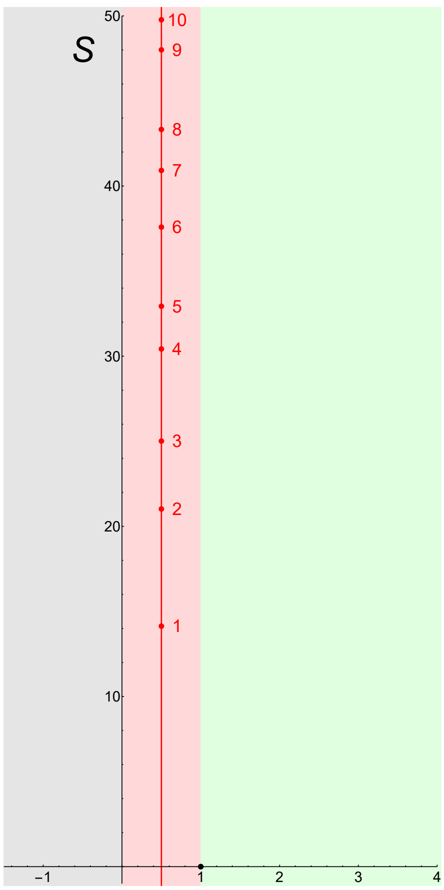

Рис. 1: Полуплоскость сходимости ряда Дирихле (1.1) ($\mathrm{Re}(s) > 1$, зелён.), полюс ($s = 1$, чёрная точка), критическая полоса ($0 \le \mathrm{Re}(s) \le 1$, розов.), критическая прямая ($\mathrm{Re}(s) = 1/2$, красн.) и нетривиальные нули дзета-функции из Таблицы 1 (пронумерованные красные точки на критической прямой) на S-плоскости.

k	$P_2(\rho_k)$	$P_3(\rho_k)$
1	$-0.6585\ldots+0.2574\ldots$i	$-0.5680\ldots-0.1030\ldots$i
2	$-0.2974\ldots-0.6414\ldots$i	$-0.2598\ldots+0.5155\ldots$i
3	$0.0405\ldots+0.7059\ldots$i	$-0.4034\ldots-0.4129\ldots$i
4	$-0.4383\ldots-0.5548\ldots$i	$-0.2450\ldots-0.5227\ldots$i
5	$-0.4731\ldots+0.5254\ldots$i	$0.0314\ldots+0.5764\ldots$i
6	$0.4283\ldots-0.5625\ldots$i	$-0.5193\ldots+0.2521\ldots$i
7	$-0.7043\ldots+0.0623\ldots$i	$0.3256\ldots-0.4767\ldots$i
8	$0.1313\ldots+0.6947\ldots$i	$-0.5132\ldots+0.2644\ldots$i
9	$-0.2007\ldots-0.6780\ldots$i	$-0.4532\ldots-0.3576\ldots$i
10	$-0.7059\ldots-0.0402\ldots$i	$-0.1682\ldots+0.5522\ldots$i

k	$P_4(\rho_k)$	$P_5(\rho_k)$
1	$0.3674\ldots-0.3391\ldots$i	$-0.3248\ldots+0.3073\ldots$i
2	$-0.3230\ldots+0.3816\ldots$i	$-0.3350\ldots-0.2961\ldots$i
3	$-0.4967\ldots+0.0573\ldots$i	$-0.3722\ldots-0.2478\ldots$i
4	$-0.1157\ldots+0.4864\ldots$i	$0.1202\ldots+0.4307\ldots$i
5	$-0.0522\ldots-0.4972\ldots$i	$-0.4118\ldots-0.1742\ldots$i
6	$-0.1329\ldots-0.4819\ldots$i	$-0.3108\ldots+0.3215\ldots$i
7	$0.4922\ldots-0.0879\ldots$i	$-0.4441\ldots-0.0523\ldots$i
8	$-0.4654\ldots+0.1825\ldots$i	$0.3647\ldots-0.2588\ldots$i
9	$-0.4193\ldots+0.2722\ldots$i	$-0.1288\ldots-0.4282\ldots$i
10	$0.4967\ldots+0.0568\ldots$i	$-0.0012\ldots+0.4472\ldots$i

Таблица 2: Образы начальных нетривиальных нулей дзета-функции Римана из Таблицы 1 при отображениях P_2–P_5.

2 Основные понятия и обозначения

В этом разделе будут определены основные объекты нашего изучения. Их рассмотрение является далеко идущим развитием описанных в [6, 9] методов вычисления нулей дзета-функции средствами линейной алгебры.

Основная идея, предложенная в [6], абсолютно тривиальна: согласно (1.1) с совершенно формальной точки зрения $\zeta(s)$ является линейной функцией от бесконечного количества величин

$$s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n, \ldots\ , \tag{2.1}$$

где

$$s_n = P_n(s), \qquad P_n(s) = n^{-s}; \tag{2.2}$$

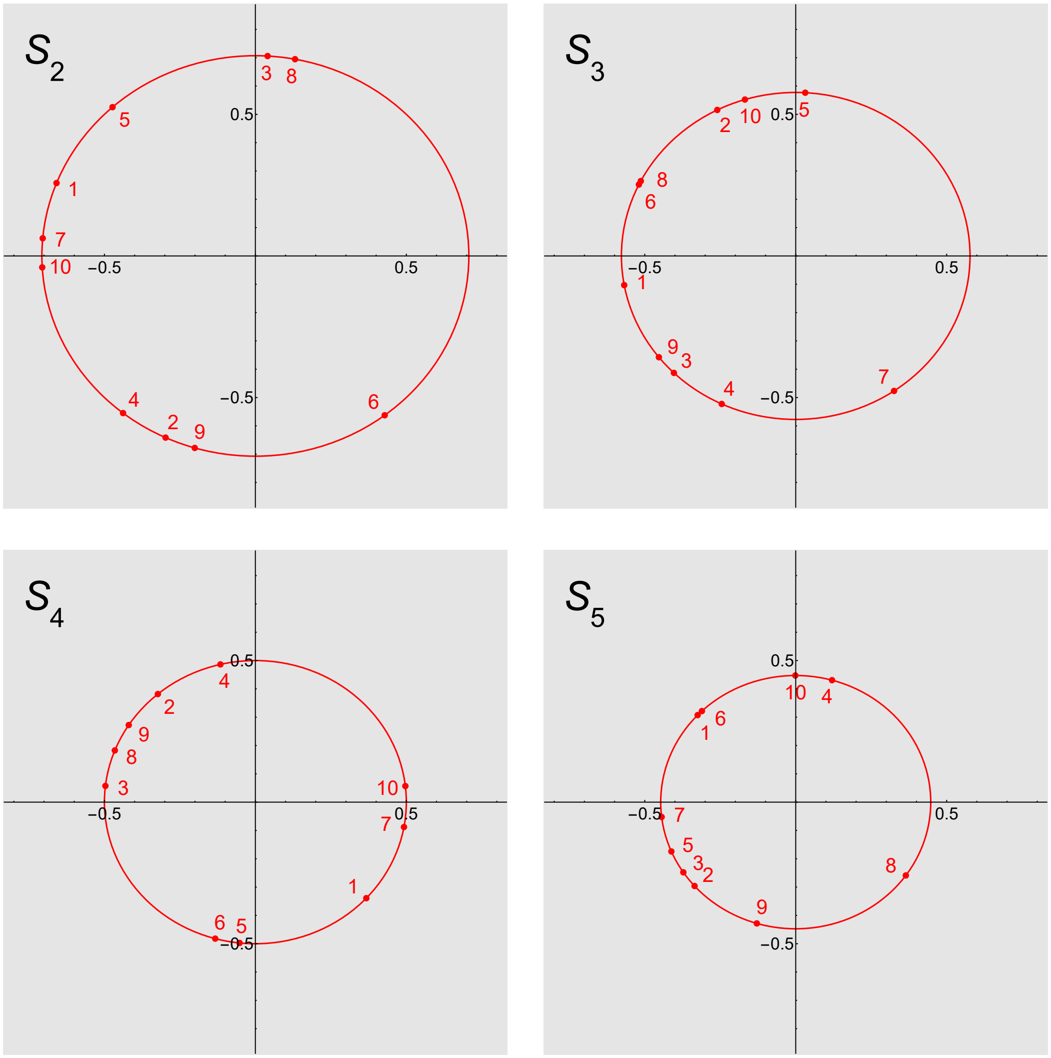

Рис. 2: Критические окружности ($|s| = n^{-1/2}$, красн.) и P_n-образы нетривиальных нулей дзета-функции из Таблицы 1 (пронумерованные красные точки на критических окружностях) на S_n-плоскостях, $n = 2,\ 3,\ 4,\ 5$.

в данный в данный момент мы полностью игнорируем вопрос о том, в каком смысле сумма

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_n + \ldots \tag{2.3}$$

сходится к $\zeta(s)$ при $\mathrm{Re}(s) \leq 1$.

В соответствии с этой точкой зрения мы будем работать не с самими нулями дзета-функции, а с их P_n-образами. Отображения $P_1, P_2, \ldots$ определены в (2.2); мы считаем, что P_n отображает комплексную S-плоскость в другой экземпляр комплексной плоскости, обозначаемый S_n. Там лежат образы тривиальных нулей

$$P_n(-2k) = n^{-2k}, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots \tag{2.4}$$

и образы нетривиальных нулей

$$P_n(\rho_k) = n^{-\rho_k}, \quad k = \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots\ . \tag{2.5}$$

При отображении P_n критическая прямая $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ с S-плоскости переходит в *критическую окружность* $|s| = n^{-1/2}$ на S_n-плоскости.

Таблица 2 даёт несколько значений P_n-образов нулей из Таблицы 1, а Рис. 2 показывает их положение на соответствующих критических окружностях на S_n-плоскостях.

Отображение P_n имеет период, равный $2\pi\mathrm{i}/\ln(n)$, и потому оно не является взаимно-однозначными. Следовательно, переходя от ρ_k к его образу $P_n(\rho_k)$ мы частично теряем информацию о мнимой части этого нуля. Тем не менее, сохраняющейся информации хватает для проверки гипотезы Римана – для того, чтобы нуль ρ_k удовлетворял этой гипотезе, достаточно установить, что хотя бы для одного n, превосходящего 1, P_n-образ этого нуля лежит на соответствующей критической окружности, то есть $|P_n(\rho_k)| = n^{-1/2}$.

Зафиксируем некоторое натуральное число N и попробуем найти N чисел

$$\varrho_{N,1},\ \ldots,\ \varrho_{N,n},\ \ldots,\ \varrho_{N,N}, \tag{2.6}$$

которые были бы примерно равны P_n-образам

$$P_1(\rho),\ \ldots,\ P_n(\rho),\ \ldots,\ P_N(\rho) \tag{2.7}$$

некоторого нуля дзета-функции, тривиального или нетривиальнго. Для достижения этой цели вместо бесконечного ряда (1.1) мы можем использовать какой-либо конечный ряд Дирихле

$$D_N(s) = d_{N,1}1^{-s} + \ \ldots\ + d_{N,n}n^{-s} + \ldots + d_{N,N}N^{-s}, \tag{2.8}$$

дающий хорошие приближения к $\zeta(s)$ для s, близких к ρ. Для такого ряда

$$d_{N,1}P_1(\rho) + \ \ldots\ + d_{N,n}P_n(\rho) + \ldots + d_{N,N}P_N(\rho) \approx 0. \tag{2.9}$$

Вместо этого *приблизительного* обнуления (2.9) линейной формы на *точных* значений P_n-образов (2.7) мы потребуем *точного* обнуления той же линейной формы, но на искомых *приближениях* (2.6) к значениям этих образов:

$$d_{N,1}\varrho_{N,1} + \ \ldots\ + d_{N,n}\varrho_{N,n} + \ldots + d_{N,N}\varrho_{N,N} = 0. \tag{2.10}$$

Очевидно, что одного уравнения (2.10) недостаточно для определения значений всех N неизвестных (2.6). Одно дополнительное уравнение указать легко:

$$\varrho_{N,1} = 1. \tag{2.11}$$

Выбор других дополнительных уравнений не очевиден.

Мы будем использовать тот тривиальный факт, что ρ является нулём не только $\zeta(s)$, но и любой функции вида $F(s)\zeta(s)$, где $F(s)$ – целая функция. Конечно, равенство $F(\rho)\zeta(\rho) = 0$ само по себе не несёт никакой дополнительной информации о ρ по сравнению с исходным равенством $\zeta(\rho) = 0$. В нашем случае, однако, у аналога равенства (2.10) для $F(s)\zeta(s)$ будут другие коэффициенты, и это даст требуемые дополнительные ограничения на значения неизвестных.

В качестве такого множителя $F(s)$ мы будем использовать экспоненты $1^{-s}, \ldots, m^{-s}, \ldots, (N-1)^{-s}$. Мы хотим определить конечные ряды

$$D_{N,m}(s) = d_{N,m,1}1^{-s} + \ \ldots + d_{N,m,n}n^{-s} + \ldots + d_{N,m,N}N^{-s}, \tag{2.12}$$

дающие хорошие приближения к $m^{-s}\zeta(s)$ для s, близких к ρ. Мы, однако, не знаем этого нуля, и его роль выполнит комплексный параметр a, отличный от 1. А именно, мы будем работать с параметризованными рядами вида

$$D_{N,m}(a,s) = \sum_{n=1}^{N} d_{N,m,n}(a)n^{-s}. \tag{2.13}$$

Для того, чтобы такой ряд давал хорошие приближения к $m^{-s}\zeta(s)$ для s вблизи a мы используем разложение этого произведения в ряд Тейлора:

$$m^{-s}\zeta(s) = \sum_{l=0}^{\infty} \zeta_{m,l}(a)(s-a)^l, \tag{2.14}$$

где

$$\zeta_{m,l}(a) = \frac{1}{l!} \left. \frac{\mathrm{d}^l m^{-s}\zeta(s)}{\mathrm{d}s^l} \right|_{s=a}. \tag{2.15}$$

Мы возьмём начальный отрезок ряда (2.14) длины N,

$$T_{N,m}(a,s) = \sum_{l=0}^{N-1} \zeta_{m,l}(a)(s-a)^l, \tag{2.16}$$

и потребуем, чтобы тот же самый многочлен был начальным отрезком ряда Тейлора и для $D_{N,m}(a,s)$:

$$D_{N,m}(a,s) = T_{N,m}(a,s) + O((s-a)^N); \tag{2.17}$$

иными словами, у $D_{N,m}(a,s)$ и $m^{-s}\zeta(s)$ должны совпадать начальные производные в точке $s=a$:

$$\left.\frac{\mathrm{d}^l D_{N,m}(a,s)}{\mathrm{d}s^l}\right|_{s=a} = \left.\frac{\mathrm{d}^l m^{-s}\zeta(s)}{\mathrm{d}s^l}\right|_{s=a}, \quad l=0,\dots,N-1. \tag{2.18}$$

Легко видеть, что (2.18) – это линейная система из N уравнений с N неизвестными

$$d_{N,m,1}(a),\ \dots,\ d_{N,m,n}(a),\ \dots,\ d_{N,m,N}(a). \tag{2.19}$$

Найдя их значения для $m=1,\ \dots,\ N-1$, мы будем решать систему с N неизвестными

$$\varrho_{N,1}(a),\ \dots,\ \varrho_{N,n}(a),\ \dots,\ \varrho_{N,N}(a), \tag{2.20}$$

состоящую из уравнений

$$\sum_{n=1}^{N} d_{N,m,n}(a)\varrho_{N,n}(a)=0, \qquad m=1,\ \dots,\ N-1 \tag{2.21}$$

(это параметризованные аналоги уравнений (2.10)) и уравнения

$$\varrho_{N,1}(a)=1 \tag{2.22}$$

(это параметризованный аналог уравнения (2.11)). Мы будем *надеяться*, что решение этой системы даст нам приближенные значения P_n-образов некоторого нуля ρ, лежащего недалеко от a.

Так определённые функции $\varrho_{N,n}(a)$ и будут основным объектом нашего изучения; *a priori* они могут быть неопределены для некоторых значений a — когда одна из систем (2.18) или система (2.21)–(2.22) не имеет решения.

2.1 Явные формулы для вычисления $\varrho_{N,n}(a)$

Запишем систему (2.18) в матричном виде.

Объединим неизвестные (2.19) в вектор-столбец

$$V_{N,m}(a)=\begin{bmatrix} d_{N,m,1}(a)\\ \vdots \\ d_{N,m,N}(a)\end{bmatrix} = \left.\Big[d_{N,m,n}(a)\Big]\right|_{n=1}^{N}. \tag{2.23}$$

Согласно (2.12)

$$\left.\frac{\mathrm{d}^l D_{N,m}(a,s)}{\mathrm{d}s^l}\right|_{s=a} = \sum_{n=1}^{N}(-\ln(n))^l n^{-a} d_{N,m,n}(a), \tag{2.24}$$

и из коэффициентов правой части мы построим матрицу

$$L_N(a) = \left[(-\ln(n))^l n^{-a}\right]\Big|_{n=1}^{N}\Big|_{l=0}^{N-1}. \tag{2.25}$$

В этих обозначениях система (2.18) записывается как

$$L_N(a)V_{N,m}(a) = Z_{N,m}(a), \tag{2.26}$$

где

$$Z_{N,m}(a) = \left[\left.\frac{\mathrm{d}^l m^{-s}\zeta(s)}{\mathrm{d}s^l}\right|_{s=a}\right]\Big|_{l=0}^{N-1}. \tag{2.27}$$

Элементы вектора $Z_{N,1}(a)$ – это значения дзета-функции Римана и её производных в точке $s = a$, для их вычисления было предложено много эффективных алгоритмов, и такие алгоритмы реализованы во многих системах компьютерной алгебры. Вектора $Z_{N,m}(a)$ для $m > 1$ легко могут быть вычислены через вектор $Z_{N,1}(a)$ следующим образом.

Рассмотрим вектора

$$\tilde{Z}_{N,m}(a) = \left[\zeta_{m,l}(a)\right]\Big|_{l=0}^{N-1}, \tag{2.28}$$

где числа $\zeta_{m,l}(a)$ определены в (2.15). Эти вектора связаны с векторами $Z_{N,m}(a)$ очевидным соотношением

$$Z_{N,m}(a) = F_N\tilde{Z}_{N,m}(a), \tag{2.29}$$

где F_N – диагональная матрица,

$$F_N = \left[f_{i,j}\right]\Big|_{i=0}^{N-1}\Big|_{j=0}^{N-1}, \tag{2.30}$$

$$f_{i,j} = \begin{cases} i!, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{2.31}$$

Экспонента m^{-s} имеет следующее разложение:

$$m^{-s} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{m^{-a}(-\log(m))^l}{l!}(s-a)^l \tag{2.32}$$

(если $m = 1$ и $l = 0$, то мы считаем, что выражение $(-\log(m))^l$ равно 1). Образуем из элементов этого разложения нижнетреугольную тёплицеву $N \times N$ матрицу

$$X_{N,m}(a) = \left[\chi_{m,i,j}(a)\right]\Big|_{i=0}^{N-1}\Big|_{j=0}^{N-1}, \tag{2.33}$$

где

$$\chi_{m,i,j}(a) = \begin{cases} \frac{m^{-a}(-\log(m))^{i-j}}{(i-j)!}, & \text{если } i \geq j, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{2.34}$$

В этих обозначениях

$$\tilde{Z}_{N,m}(a) = X_{N,m}(a)\tilde{Z}_{N,1}(a) \tag{2.35}$$

и, соответственно,

$$Z_{N,m}(a) = F_N X_{N,m}(a) F_N^{-1} Z_{N,1}(a). \tag{2.36}$$

Подставляя это выражение для $Z_{N,m}(a)$ в (2.26), мы получаем запись системы (2.18) в виде

$$L_N(a)V_{N,m}(a) = F_N X_{N,m}(a) F_N^{-1} Z_{N,1}(a), \tag{2.37}$$

а её решения – в виде

$$V_{N,m}(a) = L_N^{-1}(a) F_N X_{N,m}(a) F_N^{-1} Z_{N,1}(a). \tag{2.38}$$

Таким образом, числа $d_{N,m,l}(a)$ являются некоторыми линейными комбинациями значений дзета-функции Римана и её производных в точке $s = a$.

Для матричной записи системы (2.21)–(2.22) мы объединим неизвестные (2.20) в вектор-столбец

$$R_{N,m}(a) = \left[\varrho_{N,n}(a)\right]\Big|_{n=1}^{N} \tag{2.39}$$

и рассмотрим матрицу

$$M_N(a) = \left[d_{N,m,n}(a)\right]\Big|_{m=0}^{N-1}\Big|_{n=1}^{N}, \tag{2.40}$$

формально доопределив

$$d_{N,0,n}(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{2.41}$$

Во введённых выше обозначениях система (2.21)–(2.22) записывается как

$$M_N(a)R_N(a) = V_{N,0}(a), \tag{2.42}$$

где вектор $V_{N,0}(a)$ определен согласно (2.23) и (2.41). Пусть $M_{N,n}(a)$ – это матрица, получающаяся из $M_N(a)$ вычёркиванием верхней строки и n-го столбца, тогда

$$\varrho_{N,n}(a) = \frac{\det\big(M_{N,n}(a)\big)}{\det\big(M_N(a)\big)}. \tag{2.43}$$

Таким образом, числа $\varrho_{N,n}(a)$ являются отношениями некоторых многочленов от значений дзета-функции Римана и её производных в точке $s = a$.

В следующих разделах мы рассмотирим на численных примерах различные способы использования $\varrho_{N,n}(a)$ для нахождения приближённых значений P_n-образов нулей дзета-функции.

3 Базисная техника

В этом разделе мы рассмотрим на численных примерах, насколько оправдываются наши ожидания (мотивировавшие в Разделе 2 введение фунций $\varrho_{N,n}(a)$) на получение приближения к P_n-образам нуля дзета-фунции путем простого вычисления $\varrho_{N,n}(a)$ для разных a.

3.1 Наименьший тривиальный нуль

Рассмотрим случай $a = 0$, $N = 10$. Таблица 3 даёт значения коэффициентов многочлена (2.16) для $m = 1$. Нетрудно понять, почему с ростом n они приближаются к -1. Действительно, основной вклад в эти коэффициенты вносит полюс дзета-функции в точке $s = 1$; вычет в этой точке равен 1, так что главным членом там является

$$\frac{1}{s-1} = -1 - s - \ldots - s^n - \ldots\ . \tag{3.1}$$

Соответственно, начальный отрезок этого ряда длины N равен

$$T^{\text{pole}}_{N,1}(0,s) = -1 - s - \ldots - s^{N-1} = -\frac{s^N - 1}{s-1}. \tag{3.2}$$

Аналогично, в общем случае коэффиценты многочлена $T_{N,m}(a,s)$ примерно равны $-1/m$, поскольку вычет функции $m^{-s}\zeta(s)$ в точке $s = 1$ равен $1/m$.

l	$\zeta_{m,l}(a)$
0	-0.5
1	$-0.91893853320467274178\ldots$
2	$-1.00317822795429242560\ldots$
3	$-1.00078519447704240796\ldots$
4	$-0.99987929950057116495\ldots$
5	$-1.00000194089632045603\ldots$
6	$-1.00000130114601395962\ldots$
7	$-0.99999983138417361077\ldots$
8	$-1.00000000576467597994\ldots$
9	$-1.00000000091101648923\ldots$

Таблица 3: Коэффициенты многочлена (2.16) для $N = 10$, $m = 1$ и $a = 0$.

n	$d_{N,m,n}(a)$
1	$-30677.60982\ldots$
2	$2116002.90788\ldots$
3	$-33310973.05240\ldots$
4	$223028193.57497\ldots$
5	$-794422644.95782\ldots$
6	$1660492135.10859\ldots$
7	$-2109379945.72178\ldots$
8	$1605393772.95122\ldots$
9	$-674147314.28794\ldots$
10	$120261450.58709\ldots$

Таблица 4: Коэффициенты ряда Дирихле (2.13) для $N = 10$, $m = 1$ и $a = 0$.

Таблица 4 представляет коэффициенты (2.19) для $m = 1$; мы видим, что они далеки от единичных коэффициентов ряда Дирихле (1.1) для дзета-функции. Для других значений m коэффициент $d_{10,m,n}(0)$ примерно в m раз меньше коэффициента $d_{10,1,n}(0)$, что тоже не согласуется со значениями коэффициентов ряда Дирихле для произведения $m^{-s}\zeta(s)$.

Ближайшим к a нулём дзета-функции в нашем примере является тривиальный нуль в точке $s = -2$. Он, однако, лежит вне круга сходимости рядов (2.14), имеющего радиус 1 и центр в точке $s = 0$. По этой причине значения многочленов (2.16) для $s = -2$ отнюдь не являются маленькими. Например,

$$T_{10,1}(0, -2) = 341.3333331615943513.... \tag{3.3}$$

m	$T_{N,m}(a,s)$	$T_{N,1}(a,s)/m$
1	341.333333161594...	341.333333161594...
2	170.666667895423...	170.666666580797...
3	113.777633916355...	113.777777720531...
4	85.333154445480...	85.333333290398...
5	68.267453908438...	68.266666632318...
6	56.892437080023...	56.888888860265...
7	48.770343826520...	48.761904737370...
8	42.681977235618...	42.666666645199...
9	37.949546841216...	37.925925906843...

Таблица 5: Значения многочленов (2.16) для $N = 10$, $a = 0$ и $s = -2$.

m	$D_{N,m}(a,s)$
1	33143.610986860930...
2	16571.805493620530...
3	11047.870329071040...
4	8285.902748796610...
5	6628.722196781075...
6	5523.935137048905...
7	4734.801563418446...
8	4142.951488343937...
9	3682.623720383917...

Таблица 6: Значения конечных рядов Тейлора (2.13) для $N = 10$, $a = 0$ и $s = -2$.

Основной вклад сюда вносит опять-таки полюс дзета функции:

$$T^{\mathrm{pole}}_{10,1}(0,s) - \frac{1}{s-1}\bigg|_{s=-2} = -\frac{2^{10}-1}{-2-1} - \frac{1}{-2-1} \tag{3.4}$$

$$= 341.33333333333333\ldots . \tag{3.5}$$

Значения $T_{10,m}(0,-2)$ для других m, приведенные в Таблице 5, примерно равны $T_{10,1}(0,-2)/m$.

Маленькими не являются и значения конечных рядов Дирихле (2.13) при $s = -2$ – см. Таблицу 6. Таким образом, аналоги (2.9) не имеют места. Тем не менее мы выполним переход от (2.9) к (2.10) и решим систему (2.21)–(2.22).

Получающиеся значения $\varrho_{N,n}(a)$ приведены в Таблице 7. Довольно удивительно, что они дают (особенно для малых n) достаточно хорошие прибли-

n	$\varrho_{N,n}(a)$
1	1.0000000000 . . .
2	3.9980447753 . . .
3	8.9883108374 . . .
4	15.9612664671 . . .
5	24.9039105746 . . .
6	35.8000824643 . . .
7	48.6308323277 . . .
8	63.3748086446 . . .
9	80.0086632351 . . .
10	98.5074400308 . . .

Таблица 7: Решение линейной системы (2.21)–(2.22) для $N = 10$ и $a = 0$.

n	$\varrho_{N,n}(a)$	n	$\varrho_{N,n}(a)$
1	1.0000000000 . . .	11	120.9992980528 . . .
2	3.9999994195 . . .	12	143.9990046229 . . .
3	8.9999965173 . . .	13	168.9986277534 . . .
4	15.9999883916 . . .	14	195.9981529877 . . .
5	24.9999709802 . . .	15	224.9975647229 . . .
6	35.9999390618 . . .	16	255.9968462111 . . .
7	48.9998862561 . . .	17	288.9959795626 . . .
8	63.9998050248 . . .	18	323.9949457478 . . .
9	80.9996866730 . . .	19	360.9937246003 . . .
10	99.9995213505 . . .	20	399.9922948194 . . .

Таблица 8: Решение линейной системы (2.21)–(2.22) для $N = 20$ и $a = 0$.

жения к P_n-образам тривиального нуля $s = -2$ (то есть квадратам чётных чисел) несмотря на то, что этот нуль лежит вне круга сходимости ряда Тейлора для дзета-функции в точке $s = a$ и вне полуплоскости сходимости ряда Дирихле для этой функции.

Таблица 8 демонстрирует, что при том же значении a, но $N = 20$ получаются гораздо более хорошие приближения.

В Таблице 9 приведены данные также для $N = 20$, но при $a = 2$. Это интересно по двум причинам. С одной стороны, это значение a лежит в полуплоскости сходимости ряда Дирихле (1.1) для дзета-функции, так что требуемые в (2.18) её производные могут быть вычислены посредством почленного дифференцированием этого ряда. С другой стороны, полюс дзета-функции

n	$\varrho_{N,n}(a)$	n	$\varrho_{N,n}(a)$
1	$1.0000000000\ldots$	11	$120.8003026775\ldots$
2	$3.9998340388\ldots$	12	$143.7170975094\ldots$
3	$8.9990045046\ldots$	13	$168.6103921896\ldots$
4	$15.9966828144\ldots$	14	$195.4761862068\ldots$
5	$24.9917105987\ldots$	15	$224.3101846074\ldots$
6	$35.9826013555\ldots$	16	$255.1078035460\ldots$
7	$48.9675425203\ldots$	17	$287.8641761213\ldots$
8	$63.9443980289\ldots$	18	$322.5741584759\ldots$
9	$80.9107112782\ldots$	19	$359.2323361376\ldots$
10	$99.8637085222\ldots$	20	$397.8330305783\ldots$

Таблица 9: Решение линейной системы (2.21)–(2.22) для $N = 20$ и $a = 2$.

«экранирует» ближайший нуль $s = -2$, то есть лежит между ним и точкой $s = a$. Несмотря на это «препятствие», значения $\varrho_{20,n}(2)$ неплохо приближают P_n-образы первого тривиального нуля.

3.2 Первый нетривиальный нуль

Рассмотрим случай $a = 0.4+14\mathrm{i}$. В Таблице 10 приведены коэффициенты рядов Дирихле (2.13) для этого значения a, $N = 5$ и $m = 1,\ 2,\ 3,\ 4$. При $m = 1$ начальные коэффициенты близки к 1 как в ряде Дирихле для дзета-функции, но при $m = 2,\ 3,\ 4$ коэффициенты $d_{N,m,a}$ совсем не похожи на соответствующие коэффициенты рядов Дирихле для $m^{-s}\zeta(s)$. Тем не менее, для всех m имеет место желательное для нас свойство (2.9) – см. Таблицу 11. Соответственно, функции $\varrho_{N,n}(a)$ дают значения P_n-образов первого нуля дзета-функции с 7 правильными десятичными цифрами – см. Таблицу 12. Для получения такой точности были использованы приближения конечными рядами Дирихле всего из 5 членов.

С увеличением длины используемых конечных рядов Дирихле точность возрастает: если $a = 0.4 + 14\mathrm{i}$, то

$$\max_{n\le 10}\left|\frac{\varrho_{10,n}(a)}{P_n(\rho_1)} - 1\right| = 3.9496... \times 10^{-16}, \tag{3.6}$$

$$\max_{n\le 20}\left|\frac{\varrho_{20,n}(a)}{P_n(\rho_1)} - 1\right| = 1.1294... \times 10^{-32}. \tag{3.7}$$

n	$d_{N,1,n}(a)$
1	$1.000\ldots - 0.001\ldots\mathrm{i}$
2	$1.024\ldots - 0.018\ldots\mathrm{i}$
3	$0.933\ldots + 0.178\ldots\mathrm{i}$
4	$0.470\ldots + 0.124\ldots\mathrm{i}$
5	$0.111\ldots - 0.007\ldots\mathrm{i}$

n	$d_{N,2,n}(a)$
1	$-0.010\ldots + 0.008\ldots\mathrm{i}$
2	$0.756\ldots + 0.132\ldots\mathrm{i}$
3	$0.442\ldots - 1.245\ldots\mathrm{i}$
4	$3.011\ldots - 1.265\ldots\mathrm{i}$
5	$0.688\ldots - 1.526\ldots\mathrm{i}$

n	$d_{N,3,n}(a)$
1	$-0.014\ldots + 0.101\ldots\mathrm{i}$
2	$-0.659\ldots + 1.798\ldots\mathrm{i}$
3	$-1.835\ldots - 8.129\ldots\mathrm{i}$
4	$6.084\ldots - 13.039\ldots\mathrm{i}$
5	$1.784\ldots - 8.470\ldots\mathrm{i}$

n	$d_{N,4,n}(a)$
1	$-0.300\ldots - 0.115\ldots\mathrm{i}$
2	$-4.778\ldots - 3.245\ldots\mathrm{i}$
3	$24.735\ldots - 1.558\ldots\mathrm{i}$
4	$29.239\ldots + 26.787\ldots\mathrm{i}$
5	$16.550\ldots + 12.756\ldots\mathrm{i}$

Таблица 10: Коэффициенты рядов Дирихле (2.13) для $N = 5$, $a = 0.4 + 14\mathrm{i}$ и $m = 1,\ 2,\ 3,\ 4$.

m	$D_{N,m}(a,s)$
1	$-2.81536066017\ldots\cdot 10^{-9} - 1.38530983893\ldots\cdot 10^{-9}\mathrm{i}$
2	$2.99004828775\ldots\cdot 10^{-8} + 3.33913546447\ldots\cdot 10^{-8}\mathrm{i}$
3	$3.62797499282\ldots\cdot 10^{-7} + 2.69603018650\ldots\cdot 10^{-8}\mathrm{i}$
4	$-3.37565798799\ldots\cdot 10^{-7} + 1.20037371025\ldots\cdot 10^{-6}\mathrm{i}$

Таблица 11: Значения конечных рядов (2.13) для $N = 5$, $a = 0.4+14\mathrm{i}$ и $s = \rho_1$.

n	$\varrho_{N,n}(a)$	$\left\lvert \frac{\varrho_{N,n}(a)}{P_n(\rho_1)} - 1 \right\rvert$
2	$-0.658570722632\ldots + 0.257458025275\ldots\mathrm{i}$	$4.8927\ldots\cdot 10^{-8}$
3	$-0.568086335195\ldots - 0.103010905955\ldots\mathrm{i}$	$4.6606\ldots\cdot 10^{-8}$
4	$0.367430765659\ldots - 0.339108615925\ldots\mathrm{i}$	$5.8663\ldots\cdot 10^{-8}$
5	$-0.324829272639\ldots + 0.307385716024\ldots\mathrm{i}$	$9.3121\ldots\cdot 10^{-8}$

Таблица 12: Решение линейной системы (2.21)–(2.22) и его относительная точность для $N = 5$ и $a = 0.4 + 14\mathrm{i}$.

Аналогично для a вблизи другого нетривиального нуля мы имеем: если

$a = 0.4 + 21\mathrm{i}$, то

$$\max_{n \le 10} \left| \frac{\varrho_{10,n}(a)}{P_n(\rho_2)} - 1 \right| = 2.9537... \times 10^{-16}, \quad (3.8)$$

$$\max_{n \le 20} \left| \frac{\varrho_{20,n}(a)}{P_n(\rho_2)} - 1 \right| = 2.9841... \times 10^{-32}. \quad (3.9)$$

4 Переходный процесс

В этом разделе мы рассмотрим на примерах, какие имеются зависимости между величиной $\varrho_{N,n}(a)$ для разных значений n и a, и что это даёт для вычисления нетривиальных нулей дзета-функции.

Мы будем использовать α для обозначения вещественной части a, а τ – для обозначения мнимой:

$$a = \alpha + \mathrm{i}\tau. \quad (4.1)$$

Обычно значение α будет фиксироваться, а τ будет изменяться в некоторых пределах. Для описания возникающих феноменов мы будем использовать «физический» язык, называя τ временем. Когда τ меняется в некотором интервале $[\tau_{\min}, \tau_{\max}]$, $\varrho_{N,n}(\alpha + \mathrm{i}\tau)$ описывает некоторую траекторию на плоскости S_n, соединяющую точки $\varrho_{N,n}(\alpha + \mathrm{i}\tau_{\min})$ и $\varrho_{N,n}(\alpha + \mathrm{i}\tau_{\max})$.

4.1 Почти ступенчатые функции

Зафиксируем значение $\alpha = 0.4$. В предыдущем разделе мы видели, что в момент времени $\tau = 14$ значения $\varrho_{N,n}(\alpha + \mathrm{i}\tau)$ хорошо приближают P_n-образы первого нетривиального нуля ρ_1, а в момент $\tau = 21$ – второго нетривиального ρ_2 (для $N = 10$ или $N = 20$). Однако эти функции непрерывно зависят от τ и не могут «прыгнуть» от образов одного нуля к образам другого. Это означает, что в какие-то промежуточные моменты значения $\varrho_{N,n}(\alpha + \mathrm{i}\tau)$ не будут соответствовать никакому нулю дзета-функции – см. Рисунки 3–4.

Рисунки 5–6 показывают графики $\mathrm{Re}(\varrho_{N,2}(\alpha + \mathrm{i}\tau))$ и $\mathrm{Im}(\varrho_{N,2}(\alpha + \mathrm{i}\tau))$ для τ вплоть до γ_9. Они выглядят примерно как графики ступенчатых функций, причём «ступеньки» соответствуют нулям дзета-функции: если τ достаточно близко к γ_k для некоторого k, то $\varrho_{N,n}(\alpha + \mathrm{i}\tau) \approx P_n(\rho_k)$; в противном случае $\varrho_{N,n}(\alpha + \mathrm{i}\tau)$ имеет какое-то «постороннее» значение.

Для описания этого и сопутствующих явлений мы будем использовать следующую терминологию: в первом случае значение τ будет называться *стационарным*, во втором – *переходным*. Это сугубо неформальные термины, отнесение конкретного τ к первому или второму типу зависит от N и α.

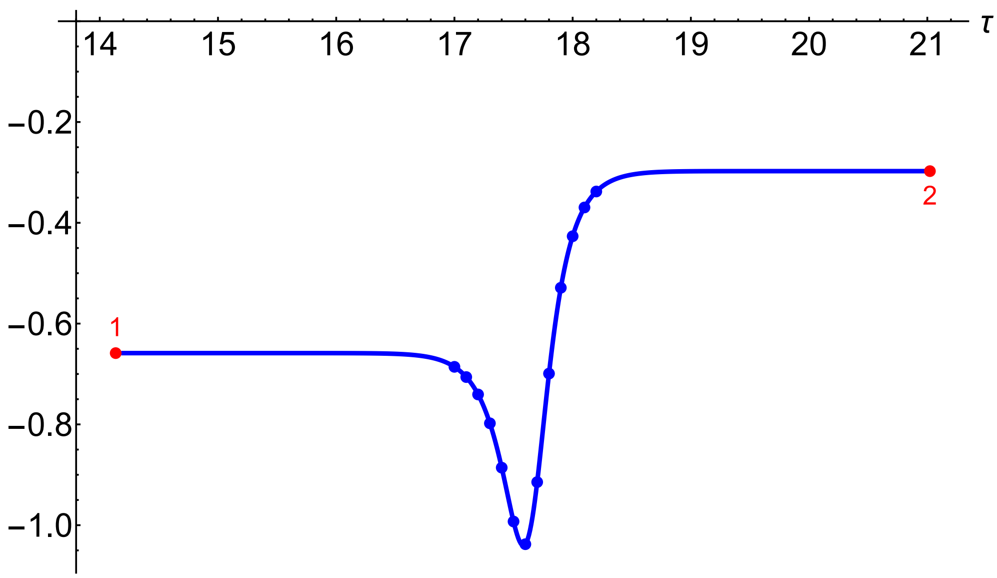

Рис. 3: График $\mathrm{Re}(\varrho_{N,n}(\alpha + \mathrm{i}\tau))$ для $N = 10$, $n = 2$, $\alpha = 0.4$ и τ от γ_1 до γ_2. Синие точки соответствуют значениям τ от 17 до 18.2 с шагом 0.1. Красная точка с номером k имеет координаты $\langle \gamma_k, \mathrm{Re}(P_n(\rho_k)) \rangle$, $k = 1, 2$.

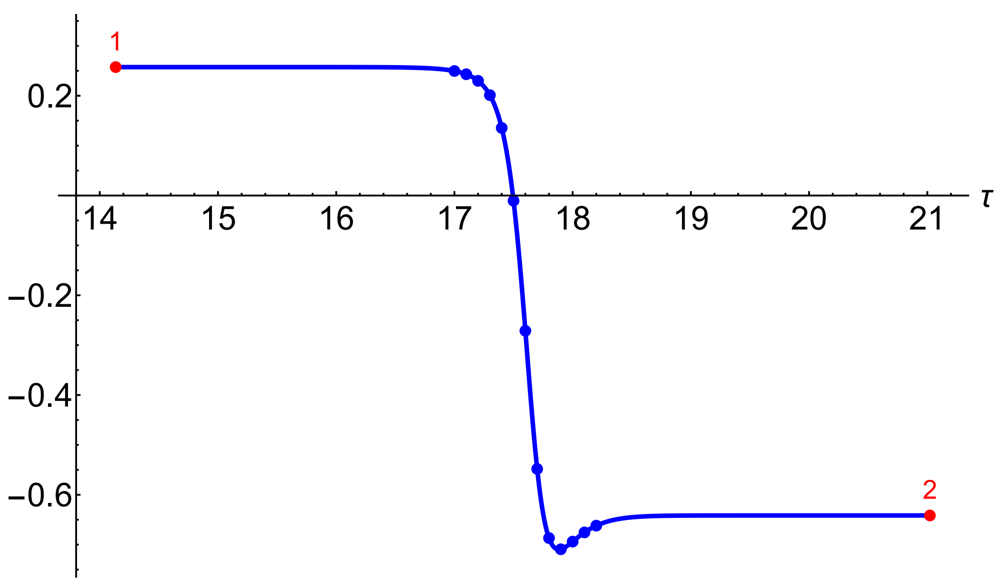

Рис. 4: График $\mathrm{Im}(\varrho_{N,n}(\alpha + \mathrm{i}\tau))$ для $N = 10$, $n = 2$, $\alpha = 0.4$ и τ от γ_1 до γ_2. Синие точки соответствуют значениям τ от 17 до 18.2 с шагом 0.1. Красная точка с номером k имеет координаты $\langle \gamma_k, \mathrm{Im}(P_n(\rho_k)) \rangle$, $k = 1, 2$.

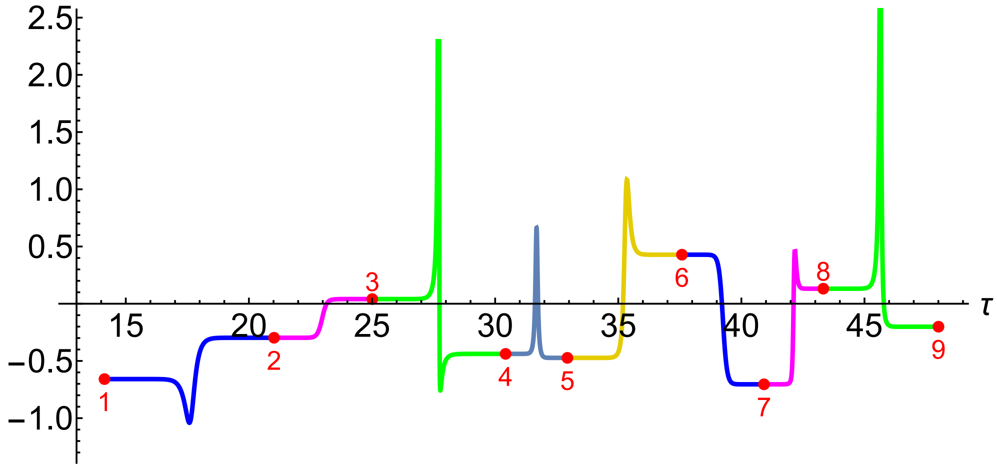

Рис. 5: График $\mathrm{Re}(\varrho_{N,n}(\alpha + \mathrm{i}\tau))$ для $N = 10$, $n = 2$, $\alpha = 0.4$ и τ от γ_1 до γ_9. Красная точка с номером k имеет координаты $\langle \gamma_k, \mathrm{Re}(P_n(\rho_k)) \rangle$, $k = 1, \ldots, 9$.

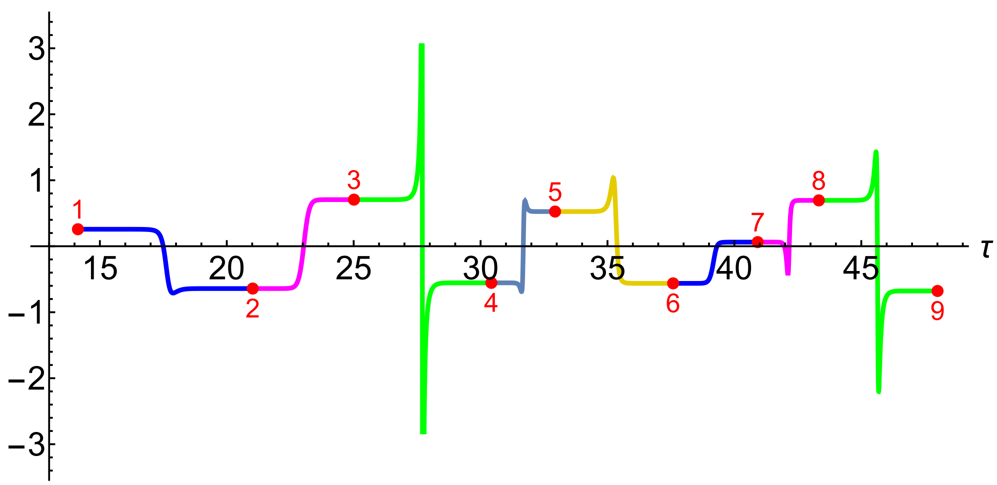

Рис. 6: График $\mathrm{Im}(\varrho_{N,n}(\alpha + \mathrm{i}\tau))$ для $N = 10$, $n = 2$, $\alpha = 0.4$ и τ от γ_1 до γ_9. Красная точка с номером k имеет координаты $\langle \gamma_k, \mathrm{Im}(P_n(\rho_k)) \rangle$, $k = 1, \ldots, 9$.

4.2 Дуги

Если судить по Рис. 5–6, переход от одного образа $P_n(\rho_k)$ к следующему образу $P_n(\rho_{k+1})$ происходит каким-то нерегулярным образом. На самом деле

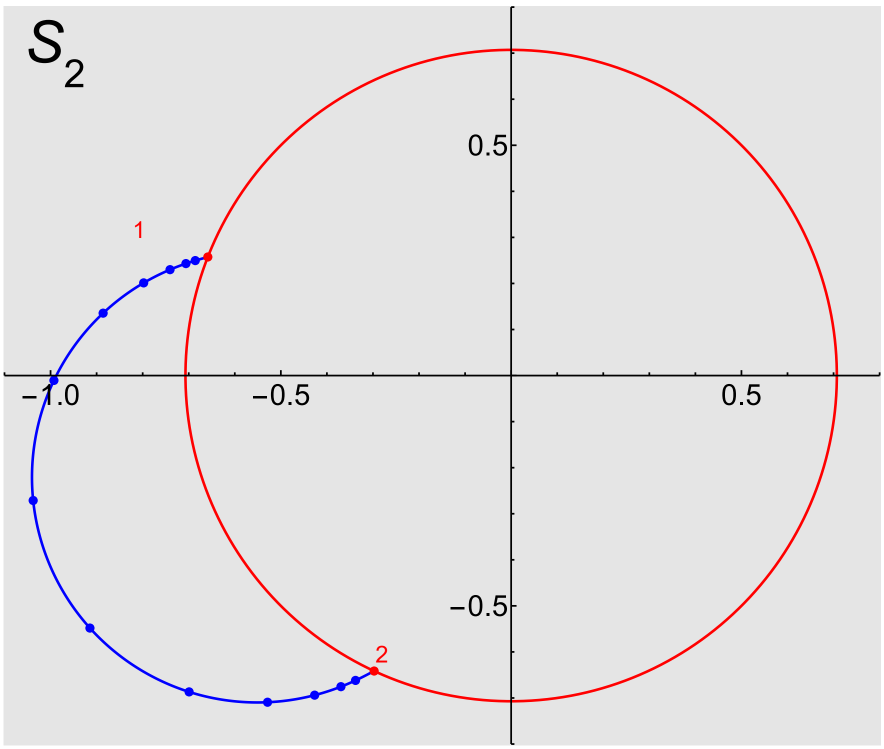

Рис. 7: Критическая окружность ($|s| = n^{-1/2}$, красн.) и значения $\varrho_{N,n}(\alpha+\mathrm{i}\tau)$ для $n = 2$, $N = 10$, $\alpha = 0.4$ и τ от γ_1 до γ_2 (син.); синие точки соответствуют синим точкам на Рис. 3–4, красные точки соответствуют красным точкам с теми же номерами на Рис. 3–6.

здесь имеется очень нетривиальная структура, но чтобы её увидеть, надо рассматривать не графики $\mathrm{Re}(\varrho_{N,n}(\alpha+\mathrm{i}\tau))$ и $\mathrm{Im}(\varrho_{N,n}(\alpha+\mathrm{i}\tau))$ по отдельности, а те кривые, которые фунции $\varrho_{N,n}(\alpha+\mathrm{i}\tau)$ «рисуют» на плоскостях S_n.

Рисунок 7 показывает траекторию, по которой $\varrho_{10,2}(0.4+\mathrm{i}\tau)$ перемещается от $P_2(\rho_1)$ к $P_2(\rho_2)$, когда τ меняется от γ_1 до γ_2. Эта траектория близка к дуге некоторой окружности. В частности, 13 синих точек лежат внутри узкого кольца: для $m = 0, \ \ldots, \ 12$

$$0.4889 < |\varrho_{10}\big(\alpha + \mathrm{i}(17 + m/10)\big) + 0.550789 + 0.220836\mathrm{i}| < 0.4898. \tag{4.2}$$

Когда τ меняется дальше от γ_2 до γ_3, то $\varrho_{10,2}(0.4+\mathrm{i}\tau)$ перемещается от $P_2(\rho_2)$ к $P_2(\rho_3)$ по траектории, которая вновь близка к дуге некоторой окружности, но эта окружность имеет совсем другие центр и радиус – см. Рис. 8.

Рис. 9 показывает траекторию $\varrho_{10,2}(0.4+\mathrm{i}\tau)$ для $\gamma_1 \le \tau \le \gamma_9$; мы видим, что на каждом интервале вида $\gamma_k \le \tau \le \gamma_{k+1}$ траектория близка к дугам окружностей с разными радиусами и центрами.

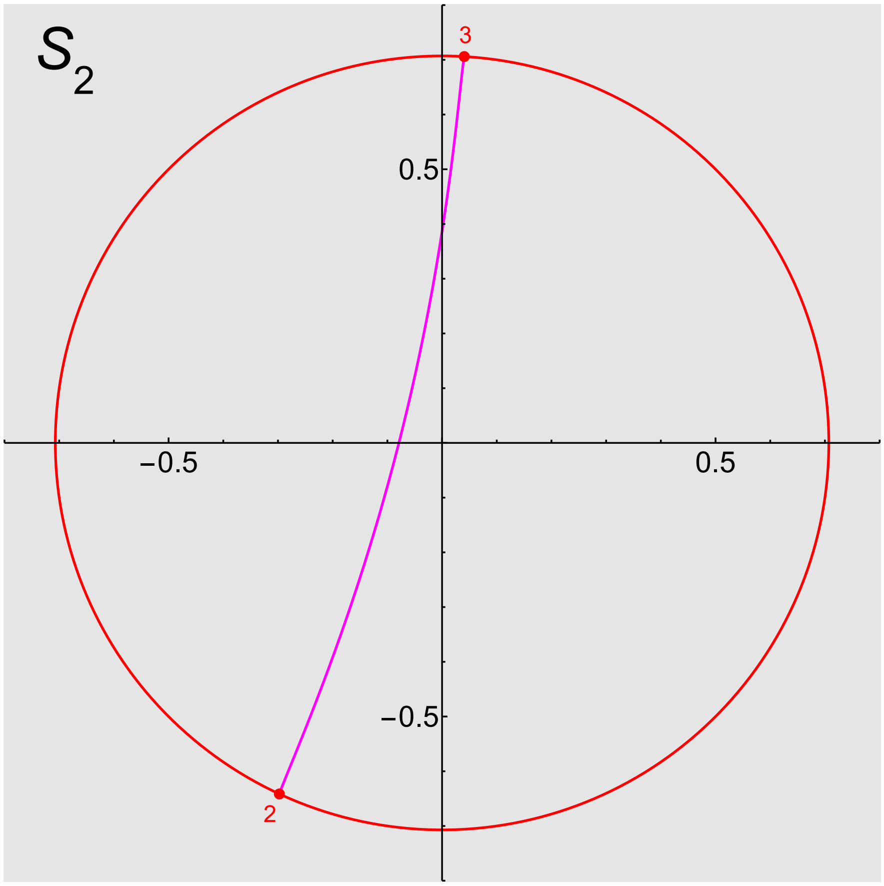

Рис. 8: Критическая окружность ($|s| = n^{-1/2}$, красн.) и значения $\varrho_{N,n}(\alpha + \mathrm{i}\tau)$ для $n = 2$, $N = 10$, $\alpha = 0.4$ и τ от γ_2 до γ_3 (маджента); красные точки соответствуют красным точкам с теми же номерами на Рис. 3–6.

Приведённые выше примеры траекторий были ограничены рассмотрением P_n-образов для случая $n = 2$, но и для бóльших n траектории имеют аналогичный характер (см. Рис. 10).

Отступление. Круговые структуры возникают при изучении дзета-функции самым разным образом. В работах автора они впервые встретились при рассмотрении собственных чисел тёплицевых матриц [1, 2, 3], но там не было взаимно-однозначного соответствия с нулями дзета-функции. Такое соответствие возникло в [4, 5, 7] при рассмотрении одного способа вычисления значений дзета-функции – подобно явлению, рассмотренному выше, при переходе значения некоторого параметра через величину мнимой части нетривиального нуля радиусы и центры окружностей резко менялись. Ещё один вид круговых структур, связанных с дзета-функцией, рассматривается в [8].

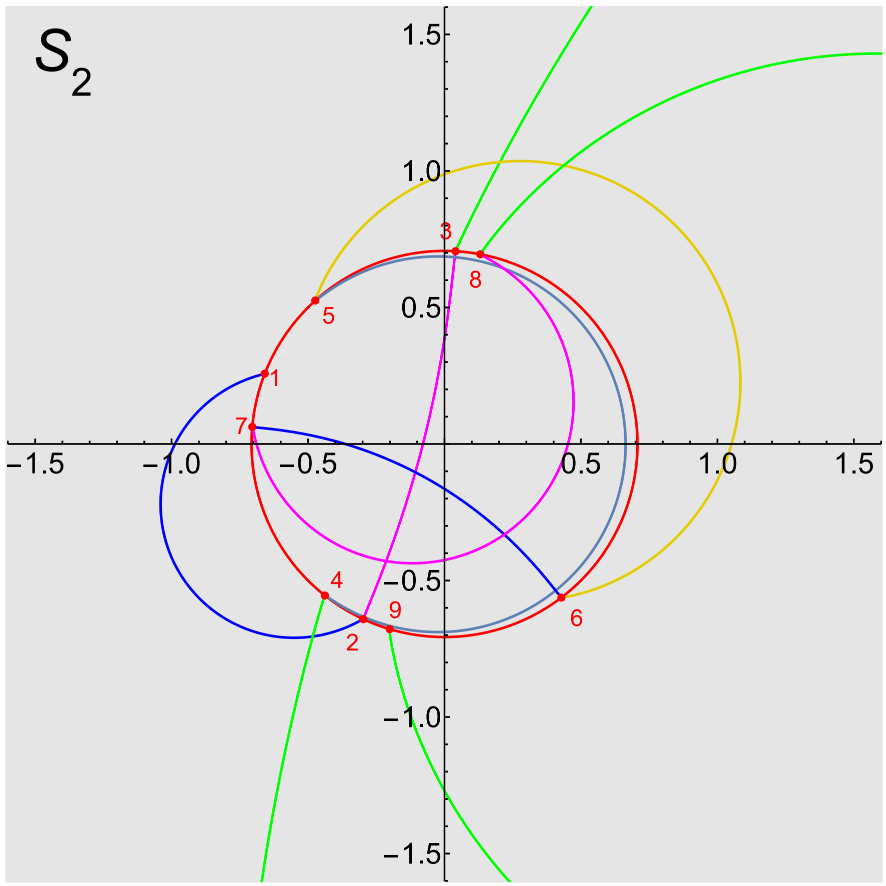

Рис. 9: Критическая окружность ($|s| = n^{-1/2}$, красн.) и значения $\varrho_{N,n}(\alpha + \mathrm{i}\tau)$ для $n = 2$, $N = 10$, $\alpha = 0.4$ и τ от γ_1 до γ_9 (цвета соответствуют цветам на Рис. 3–4), красные точки соответствуют красным точкам с теми же номерами на Рис. 3–6.

4.3 Закон приблизительного подобия

Сейчас мы рассмотрим на численных примерах, как связаны траектории на разных S_n-плоскостях для τ в пределах одного интервала вида

$$\gamma_k < \tau < \gamma_{k+1}. \tag{4.3}$$

Рисунок 10 показывет такие траектории для $N = 15$, $\alpha = 0.4$, $n = 2, 3, 4, 5$ и τ из сегмента (4.3) с $k = 1$. Все четыре траектории близки к дугам окружностей, но эти окружности имеют разные центры и разные радиусы. Однако угловые размеры всех этих траекторий примерно одинаковы.

Более того, движение по всем четырём траекториям происходят примерно

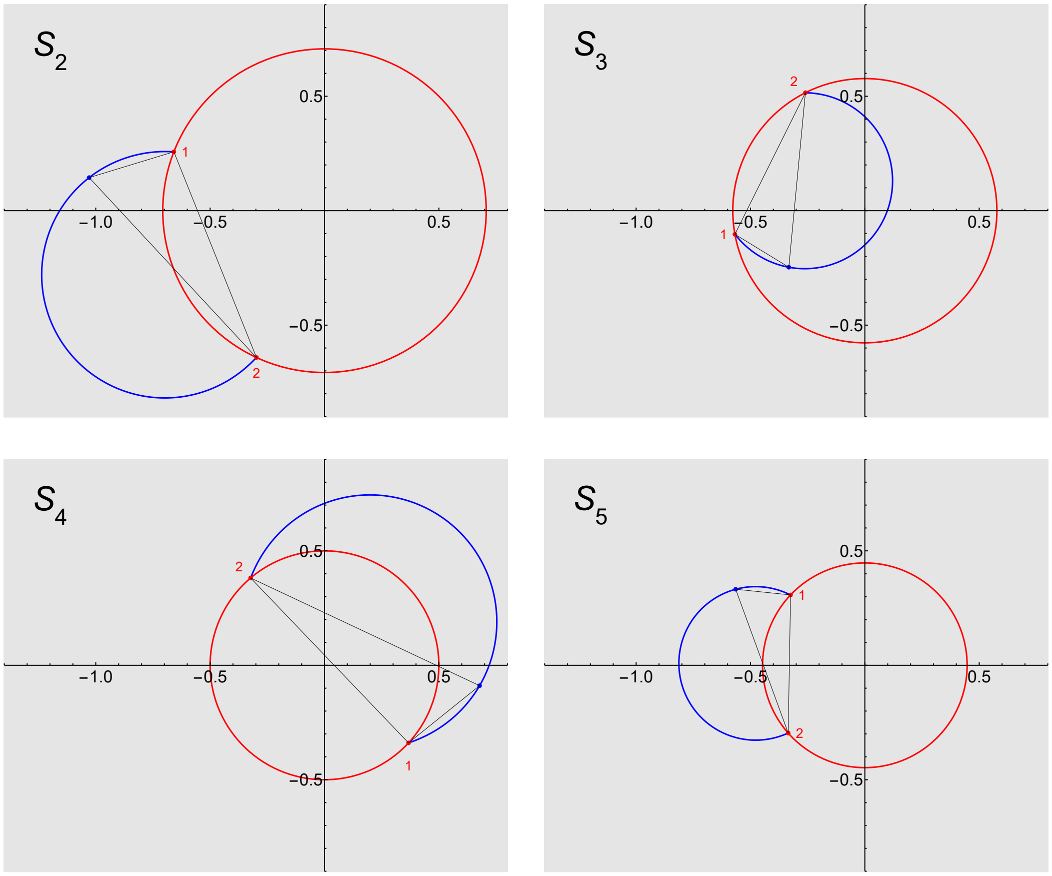

Рис. 10: Критические окружности ($|s| = n^{-1/2}$, красн.) и значения $\varrho_N(\alpha + \mathrm{i}\tau)$ для $N = 15$, $\alpha = 0.4$, τ от γ_1 до γ_2 (син.) и $n = 2,\ 3,\ 4,\ 5$; синие точки соответствуют значениям $\varrho_{N,n}(\alpha + \mathrm{i}\tau)$ при $\tau = 17.5$, а красные точки те же, что и на Рис. 2.

с равной угловой скоростью. Это проявляется в том, что для любого фиксированного τ из рассматриваемого интервала треугольники с вершинами в точках $\varrho_{N,n}(\alpha + \mathrm{i}\tau)$, $P_n(\rho_k)$ и $P_n(\rho_{k+1})$ для разных n примерно подобны друг другу.

Аналитически, этот *закон приблизительного подобия* можно выразить, например, следующим образом. Сравнивая положение сторон таких треугольников, соединяющих P_n-образы k-го и $(k+1)$-го нулей для $n = n_1$ и $n = n_2$, мы можем определить *коэффициент подобия*

$$r(n_1, n_2, k) = \frac{P_{n_2}(\rho_k) - P_{n_2}(\rho_{k+1})}{P_{n_1}(\rho_k) - P_{n_1}(\rho_{k+1})}. \tag{4.4}$$

Одинаковые элементы рассматриваемых треугольников на плоскостях S_{n_1} и

τ	$\left\| \frac{2\varrho_{N,n_2}(\alpha+\mathrm{i}\tau)-P_{n_2}(\rho_k)-P_{n_2}(\rho_{k+1})}{2\varrho_{N,n_1}(\alpha+\mathrm{i}\tau)-P_{n_1}(\rho_k)-P_{n_1}(\rho_{k+1})} \Big/ r(n_1,n_2,k)-1 \right\|$			
	$N=15$	$N=20$	$N=30$	$N=50$
16.5	$2.3\ldots\cdot10^{-8}$	$3.1\ldots\cdot10^{-11}$	$6.7\ldots\cdot10^{-17}$	$4.0\ldots\cdot10^{-28}$
16.6	$4.9\ldots\cdot10^{-8}$	$8.8\ldots\cdot10^{-11}$	$3.2\ldots\cdot10^{-16}$	$5.6\ldots\cdot10^{-27}$
16.6	$1.0\ldots\cdot10^{-7}$	$2.4\ldots\cdot10^{-10}$	$1.4\ldots\cdot10^{-15}$	$7.3\ldots\cdot10^{-26}$
16.8	$2.1\ldots\cdot10^{-7}$	$6.3\ldots\cdot10^{-10}$	$6.5\ldots\cdot10^{-15}$	$8.9\ldots\cdot10^{-25}$
16.8	$4.2\ldots\cdot10^{-7}$	$1.6\ldots\cdot10^{-9}$	$2.8\ldots\cdot10^{-14}$	$1.0\ldots\cdot10^{-23}$
17.0	$8.3\ldots\cdot10^{-7}$	$4.1\ldots\cdot10^{-9}$	$1.1\ldots\cdot10^{-13}$	$1.0\ldots\cdot10^{-22}$
17.1	$1.6\ldots\cdot10^{-6}$	$1.0\ldots\cdot10^{-8}$	$4.5\ldots\cdot10^{-13}$	$1.1\ldots\cdot10^{-21}$
17.1	$3.0\ldots\cdot10^{-6}$	$2.4\ldots\cdot10^{-8}$	$1.7\ldots\cdot10^{-12}$	$1.0\ldots\cdot10^{-20}$
17.3	$5.7\ldots\cdot10^{-6}$	$5.7\ldots\cdot10^{-8}$	$6.6\ldots\cdot10^{-12}$	$1.0\ldots\cdot10^{-19}$
17.4	$1.0\ldots\cdot10^{-5}$	$1.2\ldots\cdot10^{-7}$	$2.5\ldots\cdot10^{-11}$	$9.0\ldots\cdot10^{-19}$
17.5	$1.6\ldots\cdot10^{-5}$	$2.4\ldots\cdot10^{-7}$	$1.0\ldots\cdot10^{-10}$	$7.8\ldots\cdot10^{-18}$
17.6	$2.3\ldots\cdot10^{-5}$	$3.8\ldots\cdot10^{-7}$	$1.4\ldots\cdot10^{-9}$	$4.0\ldots\cdot10^{-17}$
17.7	$2.6\ldots\cdot10^{-5}$	$4.2\ldots\cdot10^{-7}$	$2.2\ldots\cdot10^{-10}$	$2.2\ldots\cdot10^{-17}$
17.8	$2.3\ldots\cdot10^{-5}$	$3.6\ldots\cdot10^{-7}$	$1.1\ldots\cdot10^{-10}$	$9.5\ldots\cdot10^{-18}$
17.9	$1.9\ldots\cdot10^{-5}$	$2.7\ldots\cdot10^{-7}$	$6.5\ldots\cdot10^{-11}$	$3.9\ldots\cdot10^{-18}$
18.0	$1.4\ldots\cdot10^{-5}$	$1.9\ldots\cdot10^{-7}$	$3.7\ldots\cdot10^{-11}$	$1.5\ldots\cdot10^{-18}$
18.1	$1.0\ldots\cdot10^{-5}$	$1.3\ldots\cdot10^{-7}$	$2.0\ldots\cdot10^{-11}$	$5.9\ldots\cdot10^{-19}$
18.2	$8.0\ldots\cdot10^{-6}$	$8.6\ldots\cdot10^{-8}$	$1.1\ldots\cdot10^{-11}$	$2.1\ldots\cdot10^{-19}$
18.3	$5.7\ldots\cdot10^{-6}$	$5.6\ldots\cdot10^{-8}$	$5.8\ldots\cdot10^{-12}$	$7.3\ldots\cdot10^{-20}$
18.3	$4.0\ldots\cdot10^{-6}$	$3.5\ldots\cdot10^{-8}$	$2.9\ldots\cdot10^{-12}$	$2.3\ldots\cdot10^{-20}$
18.5	$2.8\ldots\cdot10^{-6}$	$2.1\ldots\cdot10^{-8}$	$1.4\ldots\cdot10^{-12}$	$7.3\ldots\cdot10^{-21}$

Таблица 13: Выполнение закона приблизительного подобия (4.5) для $n_1=2$, $n_2=3$, $\alpha=0.4$, $k=1$ и разных значений N и τ.

S_{n_2} должны находиться примерно в этом отношении. Например, сравнивая медианы, соединяющие $\varrho_{N,n}(\alpha+\mathrm{i}\tau)$ с $\big(P_n(\rho_k)+P_n(\rho_{k+1})\big)/2$, мы получаем соотношение

$$\frac{2\varrho_{N,n_2}(\alpha+\mathrm{i}\tau)-P_{n_2}(\rho_k)-P_{n_2}(\rho_{k+1})}{2\varrho_{N,n_1}(\alpha+\mathrm{i}\tau)-P_{n_1}(\rho_k)-P_{n_1}(\rho_{k+1})}\approx r(n_1,n_2,k). \tag{4.5}$$

Если τ стационарно, то $\varrho_{N,n}(\alpha+\mathrm{i}\tau)$ близко к $P_n(\rho_k)$ или же к $P_n(\rho_{k+1})$, и уже по этой причине приблизительное равенство (4.5) имеет место. Закон подобия говорит, что оно выполняется и для переходных значений τ. Таблица 13 показывает примеры того, с какой точностью это происходит.

4.4 Вычисление нулей на основе закона подобия

Закон подобия даёт возможность вычислять образы нетривиальных нулей дзета-функции, используя для этого значения $\varrho_{N,n}(\alpha+\mathrm{i}\tau)$ для переходного τ.

4.4.1 Первый способ

Считая, что $n^2 \le N$, положим в (4.5) $n_1 = n$, $n_2 = n^2$. Имеют место очевидные равенства,

$$P_{n_2}(\rho_1) = P_{n^2}(\rho_1) = P_n^2(\rho_1), \tag{4.6}$$

$$P_{n_2}(\rho_2) = P_{n^2}(\rho_2) = P_n^2(\rho_2), \tag{4.7}$$

так что правая часть в (4.5) упрощается:

$$r(n_1, n_2, k) = \frac{P_{n_2}(\rho_k) - P_{n_2}(\rho_{k+1})}{P_{n_1}(\rho_k) - P_{n_1}(\rho_{k+1})} \tag{4.8}$$

$$= \frac{P_{n^2}(\rho_k) - P_{n^2}(\rho_{k+1})}{P_n(\rho_k) - P_n(\rho_{k+1})} \tag{4.9}$$

$$= \frac{P_n^2(\rho_k) - P_n^2(\rho_{k+1})}{P_n(\rho_k) - P_n(\rho_{k+1})} \tag{4.10}$$

$$= P_n(\rho_k) + P_n(\rho_{k+1}). \tag{4.11}$$

Используя (4.6)–(4.7) для преобразования левой части в (4.5), получаем, что

$$\frac{2\varrho_{N,n^2}(\alpha+\mathrm{i}\tau) - P_n^2(\rho_k) - P_n^2(\rho_{k+1})}{2\varrho_{N,n}(\alpha+\mathrm{i}\tau) - P_n(\rho_k) - P_n(\rho_{k+1})} \approx P_n(\rho_k) + P_n(\rho_{k+1}). \tag{4.12}$$

Решая это уравнение относительно $P_n(\rho_{k+1})$, мы получаем, что

$$P_n(\rho_{k+1}) \approx \frac{\varrho_{N,n^2}(\alpha+\mathrm{i}\tau) - \varrho_{N,n}(\alpha+\mathrm{i}\tau)P_n(\rho_k)}{\varrho_{N,n}(\alpha+\mathrm{i}\tau) - P_n(\rho_k)}. \tag{4.13}$$

Если τ близко к γ_{k+1}, то

$$\varrho_{N,n}(\alpha+\mathrm{i}\tau) \approx P_n(\rho_{k+1}), \tag{4.14}$$

$$\varrho_{N,n^2}(\alpha+\mathrm{i}\tau) \approx P_n^2(\rho_{k+1}), \tag{4.15}$$

и (4.13) следует уже отсюда. Если же τ близко к τ близко к γ_k, то

$$\varrho_{N,n}(\alpha+\mathrm{i}\tau) \approx P_n(\rho_k), \tag{4.16}$$

$$\varrho_{N,n^2}(\alpha+\mathrm{i}\tau) \approx P_n^2(\rho_k), \tag{4.17}$$

τ	$\left\| \frac{\varrho_{N,n^2}(\alpha+\mathrm{i}\tau)-\varrho_{N,n}(\alpha+\mathrm{i}\tau)P_n(\rho_k)}{\varrho_{N,n}(\alpha+\mathrm{i}\tau)-P_n(\rho_k)} \Big/ P_n(\rho_{k+1})-1 \right\|$			
	$N=15$	$N=20$	$N=30$	$N=50$
14.0	$4.0\ldots\cdot10^{-3}$	$4.8\ldots\cdot10^{-4}$	$4.2\ldots\cdot10^{-6}$	$4.1\ldots\cdot10^{-10}$
15.0	$1.9\ldots\cdot10^{-3}$	$1.3\ldots\cdot10^{-4}$	$6.8\ldots\cdot10^{-7}$	$2.1\ldots\cdot10^{-11}$
16.0	$5.8\ldots\cdot10^{-4}$	$2.7\ldots\cdot10^{-5}$	$6.4\ldots\cdot10^{-8}$	$4.3\ldots\cdot10^{-13}$
16.5	$2.7\ldots\cdot10^{-4}$	$9.9\ldots\cdot10^{-6}$	$1.4\ldots\cdot10^{-8}$	$3.9\ldots\cdot10^{-14}$
16.6	$2.2\ldots\cdot10^{-4}$	$7.9\ldots\cdot10^{-6}$	$1.0\ldots\cdot10^{-8}$	$2.2\ldots\cdot10^{-14}$
16.7	$1.9\ldots\cdot10^{-4}$	$6.3\ldots\cdot10^{-6}$	$7.6\ldots\cdot10^{-9}$	$1.3\ldots\cdot10^{-14}$
16.8	$1.6\ldots\cdot10^{-4}$	$5.0\ldots\cdot10^{-6}$	$5.3\ldots\cdot10^{-9}$	$7.4\ldots\cdot10^{-15}$
16.9	$1.3\ldots\cdot10^{-4}$	$3.9\ldots\cdot10^{-6}$	$3.7\ldots\cdot10^{-9}$	$4.1\ldots\cdot10^{-15}$
17.0	$1.1\ldots\cdot10^{-4}$	$3.0\ldots\cdot10^{-6}$	$2.5\ldots\cdot10^{-9}$	$2.2\ldots\cdot10^{-15}$
17.1	$9.0\ldots\cdot10^{-5}$	$2.3\ldots\cdot10^{-6}$	$1.7\ldots\cdot10^{-9}$	$1.1\ldots\cdot10^{-15}$
17.2	$7.3\ldots\cdot10^{-5}$	$1.7\ldots\cdot10^{-6}$	$1.1\ldots\cdot10^{-9}$	$6.1\ldots\cdot10^{-16}$
17.3	$5.9\ldots\cdot10^{-5}$	$1.3\ldots\cdot10^{-6}$	$7.7\ldots\cdot10^{-10}$	$3.0\ldots\cdot10^{-16}$
17.4	$4.7\ldots\cdot10^{-5}$	$1.0\ldots\cdot10^{-6}$	$5.0\ldots\cdot10^{-10}$	$1.5\ldots\cdot10^{-16}$
17.5	$3.7\ldots\cdot10^{-5}$	$7.3\ldots\cdot10^{-7}$	$3.2\ldots\cdot10^{-10}$	$7.1\ldots\cdot10^{-17}$
17.6	$2.9\ldots\cdot10^{-5}$	$5.3\ldots\cdot10^{-7}$	$2.0\ldots\cdot10^{-10}$	$3.3\ldots\cdot10^{-17}$
17.7	$2.2\ldots\cdot10^{-5}$	$3.8\ldots\cdot10^{-7}$	$1.2\ldots\cdot10^{-10}$	$1.4\ldots\cdot10^{-17}$
17.8	$1.7\ldots\cdot10^{-5}$	$2.7\ldots\cdot10^{-7}$	$7.3\ldots\cdot10^{-11}$	$6.3\ldots\cdot10^{-18}$
17.9	$1.3\ldots\cdot10^{-5}$	$1.9\ldots\cdot10^{-7}$	$4.3\ldots\cdot10^{-11}$	$2.6\ldots\cdot10^{-18}$
18.0	$9.9\ldots\cdot10^{-6}$	$1.3\ldots\cdot10^{-7}$	$2.4\ldots\cdot10^{-11}$	$1.0\ldots\cdot10^{-18}$
18.1	$7.3\ldots\cdot10^{-6}$	$8.7\ldots\cdot10^{-8}$	$1.3\ldots\cdot10^{-11}$	$3.9\ldots\cdot10^{-19}$
18.2	$5.3\ldots\cdot10^{-6}$	$5.7\ldots\cdot10^{-8}$	$7.4\ldots\cdot10^{-12}$	$1.4\ldots\cdot10^{-19}$
18.3	$3.8\ldots\cdot10^{-6}$	$3.7\ldots\cdot10^{-8}$	$3.8\ldots\cdot10^{-12}$	$4.9\ldots\cdot10^{-20}$
18.4	$2.7\ldots\cdot10^{-6}$	$2.3\ldots\cdot10^{-8}$	$1.9\ldots\cdot10^{-12}$	$1.5\ldots\cdot10^{-20}$
18.5	$1.8\ldots\cdot10^{-6}$	$1.4\ldots\cdot10^{-8}$	$9.6\ldots\cdot10^{-13}$	$4.8\ldots\cdot10^{-21}$
19.0	$2.1\ldots\cdot10^{-7}$	$8.2\ldots\cdot10^{-10}$	$1.3\ldots\cdot10^{-14}$	$4.1\ldots\cdot10^{-24}$
20.0	$1.0\ldots\cdot10^{-10}$	$3.5\ldots\cdot10^{-14}$	$4.1\ldots\cdot10^{-21}$	$6.3\ldots\cdot10^{-35}$
21.0	$2.4\ldots\cdot10^{-24}$	$2.5\ldots\cdot10^{-32}$	$2.7\ldots\cdot10^{-48}$	$3.5\ldots\cdot10^{-80}$

Таблица 14: Точность приближения (4.13) для $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $\alpha = 0.4$, $k = 1$ и разных значений N и τ.

так что числитель и знаменатель в (4.13) – это разности близких величин, и потому их отношение не слишком хорошо приближает $P_n(\rho_{k+1})$. Однако если τ имеет переходное значение и мы знаем $P_n(\rho_k)$, то мы можем вычислить и $P_n(\rho_{k+1})$ согласно (4.13). Таблица 14 демонстрирует точность таких вычислений.

4.4.2 Второй способ

Недостатком приближения (4.13) является необходимость знать значение $P_n(\rho_k)$. Этого можно избежать, если воспользоватся законом подобия дважды.

Для получения дополнительного уравнения положим в (4.5) $n_1 = n$, $n_2 = n^3$ (мы считаем теперь, что $n^3 \leq N$). В дополнение к (4.6)–(4.7) имеются аналогичные равенства

$$P_{n_2}(\rho_1) = P_{n^3}(\rho_1) = P_n^3(\rho_1), \tag{4.18}$$

$$P_{n_2}(\rho_2) = P_{n^3}(\rho_2) = P_n^3(\rho_2), \tag{4.19}$$

и правая часть в (4.5) упрощается теперь так:

$$r(n_1, n_2, k) = \frac{P_{n_2}(\rho_k) - P_{n_2}(\rho_{k+1})}{P_{n_1}(\rho_k) - P_{n_1}(\rho_{k+1})} \tag{4.20}$$

$$= \frac{P_{n^3}(\rho_k) - P_{n^3}(\rho_{k+1})}{P_n(\rho_k) - P_n(\rho_{k+1})} \tag{4.21}$$

$$= \frac{P_n^3(\rho_k) - P_n^3(\rho_{k+1})}{P_n(\rho_k) - P_n(\rho_{k+1})} \tag{4.22}$$

$$= P_n^2(\rho_k) + P_n(\rho_k)P_n(\rho_{k+1}) + P_n^2(\rho_{k+1}). \tag{4.23}$$

Используя (4.18)–(4.19) для преобразования левой части в (4.5), получаем, что

$$\frac{2\varrho_{N,n^3}(\alpha + \mathrm{i}\tau) - P_n^3(\rho_k) - P_n^3(\rho_{k+1})}{2\varrho_{N,n}(\alpha + \mathrm{i}\tau) - P_n(\rho_k) - P_n(\rho_{k+1})} \approx$$

$$\approx P_n^2(\rho_k) + P_n(\rho_k)P_n(\rho_{k+1}) + P_n^2(\rho_{k+1}). \tag{4.24}$$

Из (4.12) и (4.24) следует, что

$$P_n(\rho_k) + P_n(\rho_{k+1}) \approx \frac{A_{\mathrm{II},N,n}(\alpha + \mathrm{i}\tau)}{A_{\mathrm{I},N,n}(\alpha + \mathrm{i}\tau)}, \tag{4.25}$$

$$P_n(\rho_k)P_n(\rho_{k+1}) \approx \frac{A_{\mathrm{III},N,n}(\alpha + \mathrm{i}\tau)}{A_{\mathrm{I},N,n}(\alpha + \mathrm{i}\tau)}, \tag{4.26}$$

где

$$A_{\mathrm{I},N,n}(a) = \varrho_{N,n}(a)^2 - \varrho_{N,n^2}(a), \tag{4.27}$$

$$A_{\mathrm{II},N,n}(a) = \varrho_{N,n}(a)\varrho_{N,n^2}(a) - \varrho_{N,n^3}(a), \tag{4.28}$$

$$A_{\mathrm{III},N,n}(a) = \varrho_{N,n^2}^2(a) - \varrho_{N,n}(a)\varrho_{N,n^3}(a). \tag{4.29}$$

τ	$\|x_1/P_n(\rho_k)-1\|$			
	$N=15$	$N=20$	$N=30$	$N=50$
17.0	$8.0\ldots\cdot 10^{-7}$	$3.9\ldots\cdot 10^{-9}$	$1.0\ldots\cdot 10^{-13}$	$1.0\ldots\cdot 10^{-22}$
17.1	$1.5\ldots\cdot 10^{-6}$	$9.7\ldots\cdot 10^{-9}$	$4.3\ldots\cdot 10^{-13}$	$1.0\ldots\cdot 10^{-21}$
17.2	$2.9\ldots\cdot 10^{-6}$	$2.3\ldots\cdot 10^{-8}$	$1.6\ldots\cdot 10^{-12}$	$1.0\ldots\cdot 10^{-20}$
17.3	$5.6\ldots\cdot 10^{-6}$	$5.6\ldots\cdot 10^{-8}$	$6.3\ldots\cdot 10^{-12}$	$9.7\ldots\cdot 10^{-20}$
17.4	$1.0\ldots\cdot 10^{-5}$	$1.3\ldots\cdot 10^{-7}$	$2.3\ldots\cdot 10^{-11}$	$8.6\ldots\cdot 10^{-19}$
17.5	$1.9\ldots\cdot 10^{-5}$	$3.0\ldots\cdot 10^{-7}$	$8.3\ldots\cdot 10^{-11}$	$7.4\ldots\cdot 10^{-18}$
17.6	$3.5\ldots\cdot 10^{-5}$	$6.8\ldots\cdot 10^{-7}$	$2.9\ldots\cdot 10^{-10}$	$6.1\ldots\cdot 10^{-17}$
17.7	$6.3\ldots\cdot 10^{-5}$	$1.5\ldots\cdot 10^{-6}$	$1.0\ldots\cdot 10^{-9}$	$4.9\ldots\cdot 10^{-16}$
17.8	$1.1\ldots\cdot 10^{-4}$	$3.4\ldots\cdot 10^{-6}$	$3.3\ldots\cdot 10^{-9}$	$3.8\ldots\cdot 10^{-15}$
17.9	$2.0\ldots\cdot 10^{-4}$	$7.4\ldots\cdot 10^{-6}$	$1.1\ldots\cdot 10^{-8}$	$2.9\ldots\cdot 10^{-14}$
18.0	$3.5\ldots\cdot 10^{-4}$	$1.6\ldots\cdot 10^{-5}$	$3.6\ldots\cdot 10^{-8}$	$2.1\ldots\cdot 10^{-13}$
18.1	$6.1\ldots\cdot 10^{-4}$	$3.4\ldots\cdot 10^{-5}$	$1.1\ldots\cdot 10^{-7}$	$1.5\ldots\cdot 10^{-12}$
18.2	$1.0\ldots\cdot 10^{-3}$	$7.3\ldots\cdot 10^{-5}$	$3.7\ldots\cdot 10^{-7}$	$1.1\ldots\cdot 10^{-11}$

Таблица 15: Точность приближения $P_n(\rho_k)$ одним из корней уравнения (4.30) для $n=2$, $\alpha=0.4$, $k=1$ и разных значений N и τ.

Таким образом, $P_n(\rho_k)$ и $P_n(\rho_{k+1})$ примерно равны корням квадратного уравнения

$$A_{\mathrm{I},N,n}(\alpha+\mathrm{i}\tau)x^2 - A_{\mathrm{II},N,n}(\alpha+\mathrm{i}\tau)x + A_{\mathrm{III},N,n}(\alpha+\mathrm{i}\tau) = 0, \tag{4.30}$$

то есть числам

$$\frac{A_{\mathrm{II},N,n}(\alpha+\mathrm{i}\tau) \pm \sqrt{A^2_{\mathrm{II},N,n}(\alpha+\mathrm{i}\tau) - 4A_{\mathrm{I},N,n}(\alpha+\mathrm{i}\tau)A_{\mathrm{III},N,n}(\alpha+\mathrm{i}\tau)}}{2A_{\mathrm{I},N,n}(\alpha+\mathrm{i}\tau)}. \tag{4.31}$$

Мы, однако, не можем аналитически указать, какое из двух значений квадратного корня в (4.31) надо брать для получения приближённого значения $P_n(\rho_k)$, а какое – для $P_n(\rho_{k+1})$.

Таблицы 15–16 демонстрирует точность приближений, получающихся при надлежащем выборе значения квадратного корня в (4.31). В этих таблицах значения τ являются переходными; в случае стационарного τ

$$\varrho_{N,n^m}(\alpha+\mathrm{i}\tau) \;\; \approx \;\; P_n^m(\rho), \tag{4.32}$$

для некоторого ρ, так что (4.27)–(4.29) – это разности близких величин и потому решения уравнения (4.30) могут давать не очень хорошие приближения к $P_n(\rho_k)$ и $P(\rho_{k+1})$.

τ	$\lvert x_2/P_n(\rho_{k+1})-1\rvert$			
	$N=15$	$N=20$	$N=30$	$N=50$
17.0	$9.4\ldots\cdot 10^{-5}$	$2.6\ldots\cdot 10^{-6}$	$2.2\ldots\cdot 10^{-9}$	$1.9\ldots\cdot 10^{-15}$
17.1	$7.7\ldots\cdot 10^{-5}$	$2.0\ldots\cdot 10^{-6}$	$1.5\ldots\cdot 10^{-9}$	$1.0\ldots\cdot 10^{-15}$
17.2	$6.2\ldots\cdot 10^{-5}$	$1.5\ldots\cdot 10^{-6}$	$1.0\ldots\cdot 10^{-9}$	$5.2\ldots\cdot 10^{-16}$
17.3	$5.0\ldots\cdot 10^{-5}$	$1.1\ldots\cdot 10^{-6}$	$6.6\ldots\cdot 10^{-10}$	$2.6\ldots\cdot 10^{-16}$
17.4	$4.0\ldots\cdot 10^{-5}$	$8.6\ldots\cdot 10^{-7}$	$4.3\ldots\cdot 10^{-10}$	$1.2\ldots\cdot 10^{-16}$
17.5	$3.2\ldots\cdot 10^{-5}$	$6.3\ldots\cdot 10^{-7}$	$2.7\ldots\cdot 10^{-10}$	$6.1\ldots\cdot 10^{-17}$
17.6	$2.5\ldots\cdot 10^{-5}$	$4.6\ldots\cdot 10^{-7}$	$1.7\ldots\cdot 10^{-10}$	$2.8\ldots\cdot 10^{-17}$
17.7	$1.9\ldots\cdot 10^{-5}$	$3.3\ldots\cdot 10^{-7}$	$1.0\ldots\cdot 10^{-10}$	$1.2\ldots\cdot 10^{-17}$
17.8	$1.5\ldots\cdot 10^{-5}$	$2.3\ldots\cdot 10^{-7}$	$6.3\ldots\cdot 10^{-11}$	$5.4\ldots\cdot 10^{-18}$
17.9	$1.1\ldots\cdot 10^{-5}$	$1.6\ldots\cdot 10^{-7}$	$3.7\ldots\cdot 10^{-11}$	$2.2\ldots\cdot 10^{-18}$
18.0	$8.5\ldots\cdot 10^{-6}$	$1.1\ldots\cdot 10^{-7}$	$2.1\ldots\cdot 10^{-11}$	$8.9\ldots\cdot 10^{-19}$
18.1	$6.3\ldots\cdot 10^{-6}$	$7.5\ldots\cdot 10^{-8}$	$1.1\ldots\cdot 10^{-11}$	$3.3\ldots\cdot 10^{-19}$
18.2	$4.6\ldots\cdot 10^{-6}$	$4.9\ldots\cdot 10^{-8}$	$6.3\ldots\cdot 10^{-12}$	$1.2\ldots\cdot 10^{-19}$

Таблица 16: Точность приближения $P_n(\rho_{k+1})$ одним из корней уравнения (4.30) для $n=2$, $\alpha=0.4$, $k=1$ и разных значений N и τ.

Отметим, что гипотеза Римана может быть сформулирована в терминах произведений $P_n(\rho_k)P_n(\rho_{k+1})$ следующим образом: *для каждого k существует n такое, что $n>1$ и*

$$|P_n(\rho_k)P_n(\rho_{k+1})| = n^{-1} \tag{4.33}$$

(мы используем здесь известный факт, что первый нуль ρ_1 лежит на критической прямой, дальше применяется индукция). Очевидно, что из гипотезы Римана следует, что равенство (4.33) выполнено для всех k и n.

Список литературы

[1] Yu. Matiyasevich. *Hidden Life of Riemann's Zeta Function 1. Arrow, Bow, and Targets*. `http://arxiv.org/abs/0707.1983`, 2007.

[2] Yu. Matiyasevich. Riemann's zeta function: Some computations and conjectures. In A.-M. Ernvall-Hytonen, M. Jutila, J. Karhumäki, and A. Lepsito, editors, *Proceedings of Conference on Algorithmic Number Theory*, TUCS General Publication Series, volume 46, 87–112, 2007. ISSN 1239-1905, ISBN

978-952-12-2014-2, https://logic.pdmi.ras.ru/~yumat/publications/publications.php?istate=state_show_paper&imykey=83&ilang=eng.

[3] Yu. Matiyasevich. Riemann's Zeta Function: More Computations and Conjectures. In Anatanas Laurinčikas and Jörn Steuding, editors, *Voronoï's Impact on Modern Science. Proceedings of the 4th International Conference on Analytical Number Theory and Spacial Tesselations*, pages 2–11. Drahomanov National Pedagogical University, Kiev, Ukraine, 2008, ISBN 978-966-02-4890-8, 978-966-02-4891-5.

[4] Yu. V. Matiyasevich. Crop circles drawn by Riemann's zeta function, *POMI Preprints*, 2, 2019. http://www.pdmi.ras.ru/preprint/2019/19-02.html, doi:10.13140/RG.2.2.11612.03200.

[5] Yu. V. Matiyasevich. More crop circles drawn by Riemann's zeta function, *POMI Preprints*, 5, 2020. http://www.pdmi.ras.ru/preprint/2020/20-05.html, doi:10.13140/RG.2.2.22280.03847/1.

[6] Yu. V. Matiyasevich. Hunting zeros of Dirichlet series by linear algebra. I. *POMI Preprints* 1, 2020, 18 pages; http://www.pdmi.ras.ru/preprint/2020/20-01.html, doi:10.13140/RG.2.2.29328.43528.

[7] Yu. Matiyasevich. Continuous crop circles drawn by Riemann's zeta function. *Journal of Number Theory*, volume 229, pages 199—217, 2021; doi:10.1016/j.jnt.2021.04.025.

[8] Yu. V. Matiyasevich. Discrete crop circles drawn by Riemann's zeta function, and its further remote properties. *POMI Preprints* 5, 2021, 36 pages; http://www.pdmi.ras.ru/preprint/2021/21-05.html, doi:10.13140/RG.2.2.20234.18880.

[9] Yu. V. Matiyasevich. Hunting zeros of Dirichlet series by linear algebra. II. *POMI Preprints* 1, 2022, 18 pages; http://www.pdmi.ras.ru/preprint/2022/22-01.html, doi:10.13140/RG.2.2.20434.22720.

[10] D. Platt and T. Trudgian. The Riemann hypothesis is true up to $3 \cdot 10^{12}$. *Bulletin of the London Mathematical Society*, volume 53, number 3, pages 792-797, 2021; doi:10.1112/blms.12460,

[11] B. Riemann. Über die Anzhal der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse. *Monatsberichter der Berliner Akademie*, 1859; English translation: http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/Zeta/EZeta.pdf.