

ОБ ОПЕРАТОРНЫХ ОЦЕНКАХ ПРИ УСРЕДНЕНИИ НЕЛОКАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ СВЁРТОЧНОГО ТИПА

Е. А. Жижина¹, А. Л. Пятницкий¹, В. А. Слоущ², Т. А. Суслина²

¹Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН,
пер. Большой Калетный, д. 19, строение 1,
Москва, 127051, Россия

²Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., д. 7/9,
Санкт-Петербург, 199034, Россия

e-mail: elena.jijina@gmail.com
e-mail: apiatnitski@gmail.com
e-mail: v.slouzh@spbu.ru
e-mail: t.suslina@spbu.ru

АННОТАЦИЯ

В $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассматривается самосопряженный ограниченный оператор \mathbb{A}_ε , $\varepsilon > 0$, вида

$$(\mathbb{A}_\varepsilon u)(x) = \varepsilon^{-d-2} \int_{\mathbb{R}^d} a((x-y)/\varepsilon) \mu(x/\varepsilon, y/\varepsilon) (u(x) - u(y)) dy.$$

Предполагается, что $a(x)$ — неотрицательная функция класса $L_1(\mathbb{R}^d)$, такая что $a(-x) = a(x)$, а $\mu(x, y)$ — функция, \mathbb{Z}^d -периодическая по каждой переменной, причем $\mu(x, y) = \mu(y, x)$ и $0 < \mu_- \leq \mu(x, y) \leq \mu_+ < \infty$. Кроме того, предполагается, что конечны моменты $M_k = \int_{\mathbb{R}^d} |x|^k a(x) dx$, $k = 1, 2, 3$. Изучается поведение резольвенты $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ при малом ε . Показано, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ оператор $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ сходится по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$ к резольвенте $(\mathbb{A}^0 + I)^{-1}$ эффективного оператора \mathbb{A}^0 . Эффективный оператор представляет собой эллиптический дифференциальный оператор второго порядка: $\mathbb{A}^0 = -\operatorname{div} g^0 \nabla$. Получена оценка точного порядка $O(\varepsilon)$ для нормы разности резольвент.

Ключевые слова: нелокальные операторы свёрточного типа, периодическое усреднение, операторные оценки погрешности, эффективный оператор.

Исследование Е. А. Жижиной и А. Л. Пятницкого выполнено в рамках тематической программы “Спектральная теория и математическая физика” в математическом центре “Санкт-Петербургский международный математический институт им. Леонарда Эйлера” при поддержке Гранта Министерства науки и высшего образования РФ (Е. А. Жижина поддержана в рамках соглашения 075-15-2019-1620 от 8 ноября 2019 г., А. Л. Пятницкий — в рамках соглашения 075-15-2019-1619 от 8 ноября 2019 г.).

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В. М. Бабич, Н. А. Вавилов, А. М. Вершик, М. А. Всемирнов,
А. И. Генералов, И. А. Ибрагимов, Л. Ю. Колотилина,
Ю. В. Матиясевич, Н. Ю. Нецевтаев, С. И. Репин, Г. А. Серегин.

ВВЕДЕНИЕ

0.1. Мотивация: модель контактов. При изучении эволюции в моделях математической биологии и популяционной динамики важную роль играют уравнения параболического типа $\partial_t u = -Au$ с *нелокальным* оператором A . Нелокальный оператор возникает из-за того, что взаимодействие в этих моделях также имеет нелокальный характер. При этом оператор A является интегральным оператором типа свертки, т.е. ядро этого оператора содержит множитель вида $a(x-y)$, который задает убывание интенсивности взаимодействия в зависимости от расстояния, тем самым определяя “локализующие” свойства нелокального оператора.

Опишем одну из таких моделей, называемую *моделью контактов* в \mathbb{R}^d , см., например, [35, 36, 37]. В основе этой модели лежит марковский процесс с непрерывным временем, который принадлежит классу процессов рождения–гибели и задан на пространстве Γ бесконечных (но локально конечных) конфигураций $\gamma \in \Gamma$, лежащих в пространстве \mathbb{R}^d : $\gamma \subset \mathbb{R}^d$. Процесс определяется интенсивностями рождения и гибели. Каждая точка x из конфигурации γ независимо от других точек может породить потомка y с интенсивностью $a(x-y)$, при этом полагаем $\int_{\mathbb{R}^d} a(z) dz = 1$. Кроме этого, каждая точка в конфигурации имеет случайное время жизни, т.е. может погибнуть с интенсивностью $m(x) > 0$. В общем случае интенсивности рождения и гибели могут зависеть от положения в пространстве. Генератор такой динамики имеет вид:

$$LF(\gamma) = \sum_{x \in \gamma} \int_{\mathbb{R}^d} a(x-y) (F(\gamma \cup y) - F(\gamma)) dy + \sum_{x \in \gamma} m(x) (F(\gamma \setminus x) - F(\gamma)).$$

Случай, когда интенсивность гибели постоянна: $m(x) \equiv \kappa$, был подробно изучен в работе [35]. Здесь особенно интересен так называемый критический режим, когда $m(x) \equiv 1$, и когда существует целое семейство стационарных распределений.

Замечательным свойством модели контактов является то, что уравнение на эволюцию первой корреляционной функции, которая описывает локальную плотность конфигурации, является замкнутым. Отметим, что для всех последующих корреляционных функций, начиная со второй, соответствующие эволюции имеют сложную иерархическую структуру, в которой задействованы корреляционные функции меньшего порядка. Эволюционное уравнение для первой корреляционной функции имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -Au, \quad u = u(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad t \geq 0, \quad u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad (0.1)$$

где

$$Au(x) = m(x)u(x) - \int_{\mathbb{R}^d} a(x-y)u(y) dy.$$

В случае, когда $m(x) \equiv 1$, оператор A принимает вид

$$Au(x) = u(x) - \int_{\mathbb{R}^d} a(x-y)u(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} a(x-y)(u(x) - u(y)) dy. \quad (0.2)$$

Оператор A с чисто сверточным ядром $a(x-y)$, зависящим только от разности $x-y$, возникает в модели контактов в пространственно-однородной среде. Для изучения моделей, описывающих системы в неоднородных средах, естественно рассмотреть аналог оператора (0.2) с ядром вида $a(x-y)\mu(x, y)$, зависящим как от вектора разности $x-y$, так и от начального и конечного положений $x, y \in \mathbb{R}^d$; функция $\mu(x, y)$ задаёт здесь локальные характеристики среды. В частности, эволюционное уравнение вида (0.1) на первую корреляционную функцию для модели контактов в периодической среде будет задаваться оператором

$$\mathbb{A}u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} a(x-y)\mu(x, y)(u(x) - u(y)) dy \quad (0.3)$$

с периодической функцией $\mu(x, y)$.

При исследовании поведения решений нелокальных эволюционных уравнений на больших временах становится актуальной задача усреднения. Поясним это на примере параболического уравнения вида $\partial_t u = -Au$, где оператор A может быть как эллиптическим оператором второго порядка, так и оператором свёрточного типа. Естественным приёмом будет умножение временной переменной на малый параметр, назовем его ε^2 , что позволит исследовать преобразованное уравнение на конечном интервале времени. При этом для сохранения структуры уравнения требуется умножение пространственной переменной на ε , это так называемая диффузионная замена переменных. В результате в неоднородной среде мы естественным образом приходим к задаче усреднения. В то время, как задачи усреднения дифференциальных операторов активно изучались в течение длительного времени, см., например, монографию [28] и литературу в ней, аналогичные проблемы для нелокальных операторов свёрточного типа не были изучены. Впервые задача усреднения для таких операторов в периодической среде рассматривалась в работе [47]. Было показано, что при естественных моментных условиях и условии коэрцитивности усредненный оператор является эллиптическим дифференциальным оператором второго порядка с постоянными коэффициентами и невырожденной матрицей диффузии. Для построения эффективного оператора использовалась техника корректоров, однако обоснование процедуры усреднения потребовало разработки новых методов, адаптированных для изучения нелокальных операторов. Этот результат позволил также доказать в [47] функциональную центральную предельную теорему для скачкообразных марковских процессов в периодических средах. Аналогичные задачи для операторов со случайными статистически однородными коэффициентами исследовались в [49]. Результат об усреднении для несимметричных операторов свёрточного типа в периодической среде был получен в [48], где было показано, что для соответствующего параболического уравнения усреднение справедливо в движущихся координатах.

0.2. Оценки скорости сходимости в теории усреднения. Интерес к оценкам скорости сходимости в математической теории усреднения дифференциальных операторов возник одновременно с появлением самой этой теории. В существенной степени это было связано с важными приложениями теории усреднения к изучению композитных материалов, фотонных кристаллов, пористых сред, решётчатых конструкций и пр. К тому же задачи об оценках скорости сходимости оказались очень интересными и с математической точки зрения.

Первые результаты для периодических сред были получены в работах [33, 34] и [70]. В [33, 34] рассматривались краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами, и для решений этих задач были получены оценки скорости сходимости в L_2 норме. Затем в [70] аналогичные оценки были получены для эллиптических операторов, заданных в периодически перфорированных областях с однородным условием Неймана на границе включений, а также для спектральных задач, включая задачу с условием Стеклова на границе перфорации.

В дальнейшем в работах различных авторов было получено много интересных результатов о скорости сходимости, как для эллиптических, так и для эволюционных уравнений и систем уравнений в периодических и локально периодических средах, в частности, для системы теории упругости, и в некоторых частных случаях для системы уравнений Максвелла. Мы укажем здесь лишь несколько основных монографий: [1, 2, 28].

В задачах усреднения операторов со случайными статистически однородными коэффициентами оценка сходимости была впервые получена в работе [71]. Дальнейший прогресс в этой области был достигнут в недавних работах [18, 19].

Однако, все перечисленные результаты давали оценку скорости сходимости только в сильной топологии (а не в операторной), при этом константы в таких оценках зависели от регулярности правых частей уравнений.

В работах Бирмана и Суслиной [3, 4, 5] был предложен и развит теоретико-операторный подход к задачам усреднения периодических дифференциальных операторов в \mathbb{R}^d (вариант

спектрального метода). С помощью этого подхода были найдены так называемые *операторные оценки погрешности* для широкого класса задач гомогенизации. Поясним характер результатов на примере усреднения эллиптического оператора $A_\varepsilon = -\operatorname{div} g(x/\varepsilon)\nabla$, $\varepsilon > 0$, в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Здесь матрица коэффициентов $g(x)$ предполагается ограниченной, положительно определенной и \mathbb{Z}^d -периодической. Рассмотрим уравнение

$$(A_\varepsilon u_\varepsilon)(x) + u_\varepsilon(x) = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

“Классический” результат состоит в том, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ решение u_ε сильно сходится в $L_2(\mathbb{R}^d)$ к решению u_0 усредненного уравнения

$$(A^0 u_0)(x) + u_0(x) = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

и выполняется оценка

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(F)\varepsilon.$$

Здесь $A^0 = -\operatorname{div} g_{\text{hom}}\nabla$ — так называемый эффективный оператор с постоянной матрицей коэффициентов. В [3] была установлена оценка другого типа:

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon \|F\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Этот результат допускает формулировку в операторных терминах: при $\varepsilon \rightarrow 0$ резольвента $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ сходится по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$ к резольвенте $(A^0 + I)^{-1}$ и выполнена оценка

$$\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon. \quad (0.4)$$

Неравенства такого типа получили название операторных оценок погрешности в теории усреднения. В [4] получена более точная аппроксимация резольвенты $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$ при учете корректора с оценкой погрешности порядка $O(\varepsilon^2)$, а в [5] найдена аппроксимация резольвенты $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d)$ в пространство Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$ (также при учете корректора) с оценкой погрешности порядка $O(\varepsilon)$. Аналогичные результаты для параболической полугруппы $e^{-A_\varepsilon t}$, $t > 0$, были получены в [56, 58, 15, 59]. В упомянутых работах операторные оценки были установлены для широкого класса матричных эллиптических операторов второго порядка.

Теоретико-операторный подход основан на масштабном преобразовании, теории Флоке–Блоха и аналитической теории возмущений. Поясним метод на примере вывода оценки (0.4). За счет масштабного преобразования оценка (0.4) равносильна неравенству

$$\|(A + \varepsilon^2 I)^{-1} - (A^0 + \varepsilon^2 I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon^{-1}, \quad (0.5)$$

где $A = -\operatorname{div} g(x)\nabla = D^*g(x)D$, $D = -i\nabla$. Далее, с помощью унитарного преобразования Гельфанда оператор A раскладывается в прямой интеграл по операторам $A(\xi)$, действующим в $L_2(\Omega)$ и зависящим от параметра $\xi \in \tilde{\Omega}$ (квазимпульса). Здесь $\Omega = [0, 1]^d$ — ячейка решетки \mathbb{Z}^d , а $\tilde{\Omega} = [-\pi, \pi]^d$ — ячейка двойственной решетки. Оператор $A(\xi)$ задается выражением $A = (D + \xi)^*g(x)(D + \xi)$ при периодических граничных условиях. Оценка (0.5) эквивалентна аналогичной оценке для операторов, зависящих от квазимпульса:

$$\|(A(\xi) + \varepsilon^2 I)^{-1} - (A^0(\xi) + \varepsilon^2 I)^{-1}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C\varepsilon^{-1}, \quad \xi \in \tilde{\Omega}.$$

Основная часть исследования состоит в изучении операторного семейства $A(\xi)$, которое представляет собой аналитическое семейство с компактной резольвентой. Поэтому можно применить методы аналитической теории возмущений. Выясняется, что резольвенту $(A(\xi) + \varepsilon^2 I)^{-1}$ можно приблизить в терминах спектральных характеристик оператора на краю спектра. В частности, эффективная матрица выражается через матрицу Гессе для первого собственного значения $\lambda_1(\xi)$ оператора $A(\xi)$ в точке $\xi = 0$. Поэтому эффект усреднения представляет собой *спектральный пороговый эффект* на краю спектра эллиптического оператора.

В дальнейшем с помощью теоретико-операторного подхода были получены операторные оценки при усреднении нестационарных уравнений типа Шрёдингера и гиперболического типа

в \mathbb{R}^d (см. [6, 39, 62, 23, 24, 25]), при усреднении стационарной и нестационарной системы Maxwellла в \mathbb{R}^3 (см. [55, 57, 26]), а также многие другие результаты.

Другой подход к получению операторных оценок погрешности в задачах гомогенизации (так называемый “метод сдвига”) был предложен в работах Жикова и Пастуховой (см. [27, 29, 30], а также обзор [31] и цитированную там литературу). Этот метод основан на анализе первого приближения к решению и введении в задачу дополнительного параметра (сдвига на вектор из Ω).

В [27, 29] изучались не только задачи об усреднении эллиптического оператора A_ε в \mathbb{R}^d , но и краевые задачи в ограниченной области при условиях Дирихле или Неймана. Были установлены операторные оценки погрешности порядка $O(\varepsilon^{1/2})$ по $L_2 \rightarrow L_2$ и $L_2 \rightarrow H^1$ нормам; оценки ухудшаются из-за влияния границы области. Близкие результаты были получены Гризо [20, 21] с помощью анфолдинг-метода для скалярного эллиптического оператора в ограниченной области при условиях Дирихле или Неймана. В [21] впервые была доказана точная по порядку оценка погрешности (порядка $O(\varepsilon)$) при аппроксимации резольвенты по операторной норме в L_2 . Аналогичные результаты для эллиптических систем были независимо получены в работах [32] и [46, 60, 61]. Операторные оценки при усреднении начально-краевых задач для параболических уравнений изучались в работах [40, 17]. Для стационарной системы Maxwellла в ограниченной области при краевых условиях идеальной проводимости такие оценки найдены в [65, 66].

В последние годы операторные оценки погрешности в различных задачах гомогенизации для дифференциальных операторов привлекают внимание все большего числа исследователей; получено много содержательных результатов. Такие оценки изучались для системы Стокса [22], для эллиптических операторов высокого порядка в \mathbb{R}^d [16, 38, 42, 43, 54, 41, 68, 69] и в ограниченной области [63, 64, 67], для операторов с локально периодическими коэффициентами [7, 44, 45, 50, 51, 52], в задачах с высоким контрастом [12, 14, 13], в задачах с быстро осцилирующей границей или с частой сменой типа граничных условий [9, 10, 8], и во многих других задачах. Здесь мы не претендуем на полноту обзора. Подчеркнем, однако, что *такие оценки ранее не изучались для нелокальных операторов*.

0.3. Постановка задачи. Основной результат. В настоящей работе мы изучаем оператор свёрточного типа вида

$$\mathbb{A}_\varepsilon u(x) = \frac{1}{\varepsilon^{d+2}} \int_{\mathbb{R}^d} a\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \mu\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) (u(x) - u(y)) dy, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d). \quad (0.6)$$

Здесь ε — малый положительный параметр. Предполагается, что $a(x)$ — четная неотрицательная функция класса $L_1(\mathbb{R}^d)$, $\|a\|_{L_1} > 0$; $\mu(x, y)$ — ограниченная и положительно определенная функция, \mathbb{Z}^d -периодическая по каждой переменной, причем $\mu(x, y) = \mu(y, x)$. Кроме того, предполагаются конечными моменты $M_k = \int_{\mathbb{R}^d} |x|^k a(x) dx$, $k = 1, 2, 3$. При этих условиях оператор \mathbb{A}_ε ограничен, самосопряжен и неотрицателен.

Усреднению таких операторов была посвящена работа [47], о которой уже шла речь выше. Было показано, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ резольвента $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ сильно сходится к резольвенте $(\mathbb{A}^0 + I)^{-1}$ эффективного оператора. Эффективный оператор представляет собой эллиптический дифференциальный оператор второго порядка с постоянными коэффициентами $\mathbb{A}^0 = -\operatorname{div} g^0 \nabla$. Тем самым, в данной задаче наблюдается интересный эффект: при усреднении ограниченного нелокального оператора \mathbb{A}_ε возникает неограниченный локальный оператор \mathbb{A}^0 .

Для операторов с несимметричным ядром аналогичные задачи изучались в [48], где для соответствующих параболических уравнений результат об усреднении справедлив в движущихся координатах. Задача в периодически перфорированной области исследовалась вариационными методами в [11]. Хотя, насколько авторам известно, оценки скорости сходимости в упомянутых задачах отсутствуют в математической литературе, для достаточно

регулярных правых частей их можно было бы получить с помощью асимптотических разложений, построенных в [47].

Наша цель — установить сходимость резольвенты $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ к резольвенте $(\mathbb{A}^0 + I)^{-1}$ эффективного оператора по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$ и получить точную по порядку оценку погрешности.

Опишем основной результат работы. Как обычно в теории усреднения, для описания эффективной матрицы g^0 нужно рассмотреть вспомогательные задачи на ячейке. Как и выше, $\Omega := [0, 1]^d$ — ячейка решетки \mathbb{Z}^d . Пусть вектор-функция $v(x) = (v_1(x), \dots, v_d(x))^t$, $x \in \mathbb{R}^d$, является \mathbb{Z}^d -периодическим решением задачи

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^d} a(x-y)\mu(x,y)(v(x)-v(y))dy = \int_{\mathbb{R}^d} a(x-y)\mu(x,y)(x-y)dy, \\ \int_{\Omega} v(y)dy = 0. \end{cases} \quad (0.7)$$

Отметим, что задача (0.7) имеет единственное \mathbb{Z}^d -периодическое решение. Определим эффективную матрицу $g^0 = \frac{1}{2}\{g_{ij}\}_{i,j=1,\dots,d}$ равенством

$$g_{ij} = \int_{\Omega} dx \int_{\mathbb{R}^d} dy \left((x_i - y_i)(x_j - y_j) - v_j(x)(x_i - y_i) - v_i(x)(x_j - y_j) \right) a(x-y)\mu(x,y), \quad i, j = 1, \dots, d.$$

Матрица g^0 оказывается положительно определенной. Эффективный оператор $\mathbb{A}^0 = -\operatorname{div} g^0 \nabla$ определен на пространстве Соболева $H^2(\mathbb{R}^d)$. Наш основной результат составляет следующее утверждение (см. теорему 3.1): *справедлива оценка*

$$\|(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(a, \mu)\varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (0.8)$$

Оценка (0.8) точна по порядку, а постоянная $C(a, \mu)$ контролируется явно.

0.4. Метод. Для исследования задачи об аппроксимации резольвенты оператора (0.6) мы модифицируем теоретико-операторный подход, развитый в работах Бирмана и Суслиной, о котором шла речь в пункте 0.2.

Первые два шага — масштабное преобразование и разложение оператора (0.3) в прямой интеграл по операторам $\mathbb{A}(\xi)$ с помощью унитарного преобразования Гельфанд — остаются прежними. Однако, к семейству операторов $\mathbb{A}(\xi)$, действующих в пространстве $L_2(\Omega)$ и зависящих от параметра $\xi \in \tilde{\Omega}$, методы аналитической теории возмущений уже неприменимы. В отличие от случая дифференциальных операторов это операторное семейство не является аналитическим. Взамен мы используем конечную гладкость семейства $\mathbb{A}(\xi)$, которая обеспечена предположением о конечности первых трех моментов коэффициента $a(x)$.

Войдем в подробности. Согласно теоретико-операторному подходу для получения аппроксимации резольвенты $(\mathbb{A}(\xi) + \varepsilon^2 I)^{-1}$ при малых $\varepsilon > 0$ достаточно найти асимптотику оператор-функции $\mathbb{A}(\xi)F(\xi)$, $\xi \rightarrow 0$; здесь $F(\xi)$ — спектральный проектор оператора $\mathbb{A}(\xi)$, отвечающий некоторой окрестности нуля. Традиционно асимптотика оператора $\mathbb{A}(\xi)F(\xi)$ при $\xi \rightarrow 0$ вычислялась через асимптотику первого собственного значения $\lambda_1(\xi)$ оператора $A(\xi)$. В настоящей статье предлагаются два альтернативных способа вычисления асимптотики оператора $\mathbb{A}(\xi)F(\xi)$ при $\xi \rightarrow 0$, не связанных с нахождением асимптотики первого собственного значения $\lambda_1(\xi)$. Особенно перспективно выглядит метод вычисления коэффициентов асимптотики оператора $\mathbb{A}(\xi)F(\xi)$, $\xi \rightarrow 0$, через подходящие контурные интегралы (см. “третий способ”, пункт 4.2).

Как и в случае дифференциальных операторов выясняется, что главную роль в данной задаче играют спектральные характеристики оператора \mathbb{A} вблизи нижнего края спектра (так называемые пороговые характеристики). Тем самым, эффект усреднения для нелокального оператора \mathbb{A}_ε также является пороговым эффектом на краю спектра.

0.5. План статьи. Статья состоит из введения, трех параграфов и приложения. В §1 вводится оператор \mathbb{A} , обсуждается разложение этого оператора в прямой интеграл по семейству операторов $\mathbb{A}(\xi)$ и устанавливаются оценки снизу для квадратичной формы оператора $\mathbb{A}(\xi)$. В §2 исследованы пороговые характеристики операторного семейства $\mathbb{A}(\xi)$ вблизи нижнего края спектра; получена аппроксимация резольвенты $(\mathbb{A}(\xi) + \varepsilon^2 I)^{-1}$ при малом ε . В §3 из результатов §2 с помощью масштабного преобразования и преобразования Гельфанда выводится основной результат работы — найдена аппроксимация резольвенты $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$. В Приложение (§4) вынесен вспомогательный материал.

0.6. Обозначения. Норма в нормированном пространстве X обозначается через $\|\cdot\|_X$ (либо без индекса, если это не ведет к недоразумениям); если пространства X, Y нормированы, то стандартная норма линейного ограниченного оператора $T : X \rightarrow Y$ обозначается через $\|T\|_{X \rightarrow Y}$ либо $\|T\|$ (без индекса). Линейная оболочка системы векторов $F \subset X$ обозначается через $\mathcal{L}\{F\}$. Открытый шар в нормированном пространстве с центром в точке x_0 и радиусом $r > 0$ обозначается через $B_r(x_0)$. Пространство ограниченных линейных операторов в нормированном пространстве X обозначается через $\mathcal{B}(X)$.

Для самосопряженного оператора \mathbb{A} в гильбертовом пространстве \mathfrak{H} через $\sigma(\mathbb{A})$ и $\sigma_e(\mathbb{A})$ обозначаются спектр и существенный спектр оператора \mathbb{A} .

Если \mathcal{O} — измеримое (по Лебегу) множество в \mathbb{R}^d , то через $L_p(\mathcal{O})$, $1 \leq p \leq \infty$, обозначаются стандартные L_p -классы. Стандартное скалярное произведение в пространстве $L_2(\mathcal{O})$ обозначается через $(\cdot, \cdot)_{L_2(\mathcal{O})}$ либо без индекса.

Стандартное скалярное произведение в \mathbb{R}^d и \mathbb{C}^d обозначается через $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Далее, используем обозначения $x = (x_1, \dots, x_d)^t \in \mathbb{R}^d$, $iD_j = \partial_j = \partial/\partial x_j$, $j = 1, \dots, d$. Через $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ обозначим класс Шварца в \mathbb{R}^d . Характеристическая функция множества $E \subset \mathbb{R}^d$ обозначается через $\mathbf{1}_E$.

§ 1. НЕЛОКАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР ШРЁДИНГЕРА: РАЗЛОЖЕНИЕ В ПРЯМОЙ ИНТЕГРАЛ И ОЦЕНКИ

1.1. Оператор $\mathbb{A}(a, \mu)$. Для произвольных функций $a \in L_1(\mathbb{R}^d)$, $\mu \in L_\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, определим *нелокальный оператор Шрёдингера* $\mathbb{A} = \mathbb{A}(a, \mu)$, действующий в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 1$, и заданный соотношением

$$\mathbb{A}(a, \mu)u(x) := \int_{\mathbb{R}^d} a(x-y)\mu(x, y)(u(x) - u(y)) dy, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Оператор \mathbb{A} можно записать в виде $\mathbb{A} = p(x; a, \mu) - \mathbb{B}(a, \mu)$, где

$$p(x; a, \mu) := \int_{\mathbb{R}^d} a(x-y)\mu(x, y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

$$\mathbb{B}(a, \mu)u(x) := \int_{\mathbb{R}^d} a(x-y)\mu(x, y)u(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Согласно лемме Шура (лемма 4.1) оператор $\mathbb{B}(a, \mu) : L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$ ограничен, и справедлива оценка $\|\mathbb{B}(a, \mu)\| \leq \|\mu\|_{L_\infty}\|a\|_{L_1}$. Кроме того, потенциал $p(x; a, \mu)$ ограничен, $\|p(\cdot; a, \mu)\|_{L_\infty} \leq \|\mu\|_{L_\infty}\|a\|_{L_1}$. Следовательно, оператор $\mathbb{A}(a, \mu) : L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$ ограничен. Наряду с общим оператором $\mathbb{A}(a, \mu)$ полезно рассмотреть оператор $\mathbb{A}_0(a) := \mathbb{A}(a, \mu_0)$, где $\mu_0 \equiv 1$. Введем обозначения $p_0(x; a) := p(x; a, \mu_0)$, $\mathbb{B}_0(a) := \mathbb{B}(a, \mu_0)$. Разумеется, оператор $\mathbb{B}_0(a)$ — это оператор свертки с функцией a ; потенциал $p_0(x; a)$ — постоянный.

Далее предполагаются выполнеными более жесткие ограничения на функции a и μ :

$$a \in L_1(\mathbb{R}^d), \quad \text{mes}\{x \in \mathbb{R}^d : a(x) \neq 0\} > 0, \quad a(x) \geq 0, \quad a(-x) = a(x), \quad x \in \mathbb{R}^d; \quad (1.1)$$

$$0 < \mu_- \leq \mu(x, y) \leq \mu_+ < +\infty, \quad \mu(x, y) = \mu(y, x), \quad x, y \in \mathbb{R}^d; \quad (1.2)$$

$$\mu(x + m, y + n) = \mu(x, y), \quad x, y \in \mathbb{R}^d, \quad m, n \in \mathbb{Z}^d; \quad (1.3)$$

$$M_k(a) := \int_{\mathbb{R}^d} |x|^k a(x) dx < +\infty, \quad k = 1, 2, 3. \quad (1.4)$$

Очевидно, при условиях (1.1), (1.2) потенциал $p(x) = p(x; a, \mu)$ вещественен, а оператор $\mathbb{B}(a, \mu)$ самосопряжен; следовательно, оператор $\mathbb{A}(a, \mu)$ самосопряжен. Нетрудно видеть, что потенциал $p(x; a, \mu)$ удовлетворяет оценкам

$$\mu_- \|a\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} \leq p(x) \leq \mu_+ \|a\|_{L_1(\mathbb{R}^d)}, \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (1.5)$$

1.2. Оценки квадратичной формы оператора $\mathbb{A}(a, \mu)$. При условиях (1.1), (1.2) квадратичная форма оператора $\mathbb{A}(a, \mu)$ допускает следующее представление (см., например, [36])

$$(\mathbb{A}(a, \mu)u, u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} dx dy a(x - y) \mu(x, y) |u(x) - u(y)|^2, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d). \quad (1.6)$$

Действительно, из равенств $a(x - y) = a(y - x)$ и $\mu(x, y) = \mu(y, x)$ вытекает, что

$$\begin{aligned} (\mathbb{A}(a, \mu)u, u) &= \int_{\mathbb{R}^d} dx \overline{u(x)} \int_{\mathbb{R}^d} dy a(x - y) \mu(x, y) (u(x) - u(y)) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} dx dy a(x - y) \mu(x, y) |u(x) - u(y)|^2 + \int_{\mathbb{R}^d} dy \overline{u(y)} \int_{\mathbb{R}^d} dx a(x - y) \mu(x, y) (u(x) - u(y)) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} dx dy a(x - y) \mu(x, y) |u(x) - u(y)|^2 - (\mathbb{A}(a, \mu)u, u), \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d). \end{aligned}$$

Отсюда следует равенство (1.6).

Из (1.6) вытекает неотрицательность оператора $\mathbb{A}(a, \mu)$ и оценки

$$\mu_-(\mathbb{A}_0(a)u, u) \leq (\mathbb{A}(a, \mu)u, u) \leq \mu_+(\mathbb{A}_0(a)u, u), \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d). \quad (1.7)$$

Поскольку $\mathbb{B}_0(a)$ — оператор свертки, преобразование Фурье переводит $\mathbb{B}_0(a)$ в оператор умножения на функцию $\widehat{a}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^d$, где

$$\widehat{a}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle \xi, z \rangle} a(z) dz, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Тогда оператор $\mathbb{A}_0(a)$ унитарно эквивалентен оператору умножения на функцию $\widehat{a}(0) - \widehat{a}(\xi)$. Следовательно, $\lambda_0 = 0$ является точкой спектра оператора $\mathbb{A}_0(a)$ (см. также [36]). Поскольку оператор $\mathbb{A}_0(a)$ неотрицателен, то λ_0 — это край спектра. В силу оценок (1.7) точка $\lambda_0 = 0$ является также нижним краем спектра оператора $\mathbb{A}(a, \mu)$.

1.3. Разложение оператора $\mathbb{A}(a, \mu)$ в прямой интеграл. Нетрудно видеть, что при условиях (1.1)–(1.3) оператор умножения на потенциал $p(x; a, \mu)$ и оператор $\mathbb{B}(a, \mu)$ (а значит, и оператор $\mathbb{A}(a, \mu)$) коммутируют с операторами S_n целочисленного сдвига, определенными по правилу

$$S_n u(x) = u(x + n), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad n \in \mathbb{Z}^d.$$

Таким образом, операторы $\mathbb{A}(a, \mu)$ и $\mathbb{B}(a, \mu)$ — периодические операторы с решеткой периодов \mathbb{Z}^d . Обозначим через $\Omega := [0, 1)^d$ ячейку решетки \mathbb{Z}^d и через $\widetilde{\Omega} := [-\pi, \pi)^d$ — ячейку двойственной решетки $(2\pi\mathbb{Z})^d$.

Определим преобразование Гельфанда \mathcal{G} (см., например, [53] или [3, глава 2]). Первоначально \mathcal{G} задается на классе Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ равенством

$$\mathcal{G}u(\xi, x) := (2\pi)^{-d/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} u(x+n) e^{-i\langle \xi, x+n \rangle}, \quad \xi \in \tilde{\Omega}, \quad x \in \Omega, \quad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Затем \mathcal{G} распространяется по непрерывности до унитарного отображения из $L_2(\mathbb{R}^d)$ на $\int_{\tilde{\Omega}} \bigoplus L_2(\Omega) d\xi = L_2(\tilde{\Omega} \times \Omega)$.

Условимся, что для всякой функции $v \in \int_{\tilde{\Omega}} \bigoplus L_2(\Omega) d\xi$ при каждом $\xi \in \tilde{\Omega}$ функция $v(\xi, \cdot)$ периодически продолжена с ячейки Ω на все \mathbb{R}^d . Как и все периодические операторы, операторы $\mathbb{A}(a, \mu)$ и $\mathbb{B}(a, \mu)$ частично диагонализуются с помощью преобразования Гельфандса. Именно,

$$\mathcal{G}\mathbb{A}(a, \mu)\mathcal{G}^*u(\xi, x) = \mathbb{A}(\xi, a, \mu)u(\xi, x), \quad \mathcal{G}\mathbb{B}(a, \mu)\mathcal{G}^*u(\xi, x) = \mathbb{B}(\xi, a, \mu)u(\xi, x), \quad \xi \in \tilde{\Omega}, \quad x \in \Omega. \quad (1.8)$$

Здесь операторы $\mathbb{A}(\xi, a, \mu)$ и $\mathbb{B}(\xi, a, \mu)$ — самосопряженные ограниченные операторы в $L_2(\Omega)$, заданные соотношениями:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(\xi, a, \mu) &= p(x; a, \mu) - \mathbb{B}(\xi, a, \mu), \quad \mathbb{B}(\xi, a, \mu)u(x) = \int_{\Omega} \tilde{a}(\xi, x-y) \mu(x, y) u(y) dy, \quad u \in L_2(\Omega); \\ \tilde{a}(\xi, z) &:= \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} a(z+n) e^{-i\langle \xi, z+n \rangle}, \quad \xi \in \tilde{\Omega}, \quad z \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Отметим равенство

$$p(x; a, \mu) = \int_{\Omega} \tilde{a}(0, x-y) \mu(x, y) dy. \quad (1.9)$$

Из \mathbb{Z}^d -периодичности функции $\tilde{a}(\xi, \cdot)$ и оценки $\int_{\Omega} |\tilde{a}(\xi, z)| dz \leq \|a\|_{L_1}$ следует включение $\tilde{a}(\xi, \cdot) \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ и оценка

$$\|\tilde{a}(\xi, \cdot)\|_{L_1([-1,1]^d)} \leq 2^d \|a\|_{L_1(\mathbb{R}^d)}, \quad \xi \in \tilde{\Omega}.$$

Теперь, согласно следствию 4.2, оператор $\mathbb{B}(\xi, a, \mu)$ компактен, и справедлива оценка

$$\|\mathbb{B}(\xi, a, \mu)\| \leq \mu_+ \int_{[-1,1]^d} |\tilde{a}(\xi, z)| dz \leq 2^d \mu_+ \|a\|_{L_1(\mathbb{R}^d)}, \quad \xi \in \tilde{\Omega}.$$

Оператор $\mathbb{A}(\xi, a, \mu)$, $\xi \in \tilde{\Omega}$, обладает существенным спектром $\sigma_e(\mathbb{A}(\xi, a, \mu)) = \text{ess-Ran } p(\cdot; a, \mu)$. В силу компактности оператора $\mathbb{B}(\xi, a, \mu)$ и нижней оценки (1.5) при всяком $\xi \in \tilde{\Omega}$ спектр оператора $\mathbb{A}(\xi, a, \mu)$ левее точки $\mu_- \|a\|_{L_1}$ дискретен. Основная задача настоящего параграфа — дать оценки нижнего края спектра оператора $\mathbb{A}(\xi, a, \mu)$ при всех ξ .

Следующее утверждение дает удобное представление для квадратичной формы оператора $\mathbb{A}(\xi, a, \mu)$.

Лемма 1.1. *При условиях (1.1)–(1.3) справедливо равенство*

$$(\mathbb{A}(\xi, a, \mu)u, u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} dx \int_{\mathbb{R}^d} dy a(x-y) \mu(x, y) |e^{i\langle \xi, x \rangle} u(x) - e^{i\langle \xi, y \rangle} u(y)|^2, \quad u \in L_2(\Omega), \quad \xi \in \tilde{\Omega}. \quad (1.10)$$

Здесь подразумевается, что функция $u \in L_2(\Omega)$ периодически продолжена на все \mathbb{R}^d .

Доказательство. Из равенства (1.9) следует представление

$$\mathbb{A}(\xi, a, \mu)u(x) = \int_{\Omega} (\tilde{a}(0, x-y)u(x) - \tilde{a}(\xi, x-y)u(y)) \mu(x, y) dy, \quad x \in \Omega, \quad u \in L_2(\Omega). \quad (1.11)$$

Предполагая, что каждая функция $u \in L_2(\Omega)$ продолжена \mathbb{Z}^d -периодически на все \mathbb{R}^d , перепишем (1.11) следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbb{A}(\xi, a, \mu)u(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \int_{\Omega} (a(x - y + n)u(x) - a(x - y + n)e^{-i\langle \xi, x - y + n \rangle} u(y)) \mu(x, y) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} a(x - y) \mu(x, y) (u(x) - e^{-i\langle \xi, x - y \rangle} u(y)) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} a(x - y) \mu(x, y) e^{-i\langle \xi, x \rangle} (e^{i\langle \xi, x \rangle} u(x) - e^{i\langle \xi, y \rangle} u(y)) dy, \quad x \in \Omega, \quad u \in L_2(\Omega).\end{aligned}\quad (1.12)$$

Из (1.12) получаем выражение для квадратичной формы оператора $\mathbb{A}(\xi, a, \mu)$:

$$\begin{aligned}(\mathbb{A}(\xi, a, \mu)u, u) &= \int_{\Omega} dx \int_{\mathbb{R}^d} dy a(x - y) \mu(x, y) e^{-i\langle \xi, x \rangle} \overline{u(x)} (e^{i\langle \xi, x \rangle} u(x) - e^{i\langle \xi, y \rangle} u(y)) = \\ &= \int_{\Omega} dx \int_{\mathbb{R}^d} dy a(x - y) \mu(x, y) |e^{i\langle \xi, x \rangle} u(x) - e^{i\langle \xi, y \rangle} u(y)|^2 + J[u], \quad u \in L_2(\Omega),\end{aligned}\quad (1.13)$$

где функционал $J[u]$ определен равенством

$$J[u] := \int_{\Omega} dx \int_{\mathbb{R}^d} dy a(x - y) \mu(x, y) e^{-i\langle \xi, y \rangle} \overline{u(y)} (e^{i\langle \xi, x \rangle} u(x) - e^{i\langle \xi, y \rangle} u(y)), \quad u \in L_2(\Omega). \quad (1.14)$$

Меняя в (1.14) ролиами переменные x и y и пользуясь условиями (1.1), (1.2), получаем

$$\begin{aligned}J[u] &= - \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\Omega} dy a(x - y) \mu(x, y) e^{-i\langle \xi, x \rangle} \overline{u(x)} (e^{i\langle \xi, x \rangle} u(x) - e^{i\langle \xi, y \rangle} u(y)) = \\ &= - \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \int_{\Omega} dx \int_{\Omega} dy a(x - y + n) \mu(x, y) e^{-i\langle \xi, x + n \rangle} \overline{u(x)} (e^{i\langle \xi, x + n \rangle} u(x) - e^{i\langle \xi, y \rangle} u(y)) = \\ &= - \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \int_{\Omega} dx \int_{\Omega} dy a(x - y + n) \mu(x, y) e^{-i\langle \xi, x \rangle} \overline{u(x)} (e^{i\langle \xi, x \rangle} u(x) - e^{i\langle \xi, y - n \rangle} u(y)) = \\ &= - \int_{\Omega} dx \overline{u(x)} \int_{\Omega} dy \mu(x, y) (\tilde{a}(0, x - y) u(x) - \tilde{a}(\xi, x - y) u(y)) = \\ &= -(\mathbb{A}(\xi, a, \mu)u, u), \quad u \in L_2(\Omega).\end{aligned}\quad (1.15)$$

Из (1.13) и (1.15) вытекает равенство (1.10). \square

1.4. Оценки квадратичной формы оператора $\mathbb{A}(\xi, a, \mu)$. Как и выше, полезно отдельно рассмотреть случай $\mu = \mu_0 \equiv 1$. Введем обозначения $\mathbb{A}_0(\xi, a) := \mathbb{A}(\xi, a, \mu_0)$, $\mathbb{B}_0(\xi, a) := \mathbb{B}(\xi, a, \mu_0)$. Из соотношений (1.2) и (1.10) вытекают двусторонние оценки

$$\mu_-(\mathbb{A}_0(\xi, a)u, u) \leq (\mathbb{A}(\xi, a, \mu)u, u) \leq \mu_+(\mathbb{A}_0(\xi, a)u, u), \quad u \in L_2(\Omega), \quad \xi \in \tilde{\Omega}. \quad (1.16)$$

Операторы $\mathbb{A}_0(\xi, a)$, $\xi \in \tilde{\Omega}$, диагонализуются унитарным дискретным преобразованием Фурье $F : L_2(\Omega) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z}^d)$, заданным соотношениями:

$$\begin{aligned}Fu(n) &= \int_{\Omega} u(x) e^{-2\pi i \langle n, x \rangle} dx, \quad n \in \mathbb{Z}^d, \quad u \in L_2(\Omega); \\ F^*v(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} v_n e^{2\pi i \langle n, x \rangle}, \quad x \in \Omega, \quad v = \{v_n\}_{n \in \mathbb{Z}^d} \in \ell_2(\mathbb{Z}^d).\end{aligned}$$

Имеем:

$$\mathbb{A}_0(\xi, a) = F^* [\hat{a}(0) - \hat{a}(2\pi n + \xi)] F, \quad \hat{a}(k) := \int_{\mathbb{R}^d} a(x) e^{-ik \cdot x} dx, \quad k \in \mathbb{R}^d. \quad (1.17)$$

Здесь через $[f(n)]$, $f(n) = \hat{a}(0) - \hat{a}(2\pi n + \xi)$, обозначается оператор умножения на функцию $f(n)$ в пространстве $l_2(\mathbb{Z}^d)$. Таким образом, символом оператора $\mathbb{A}_0(\xi, a)$ является последовательность $\{\hat{A}_n(\xi)\}_{n \in \mathbb{Z}^d}$, где

$$\hat{A}_n(\xi) = \hat{A}(\xi + 2\pi n) = \hat{a}(0) - \hat{a}(2\pi n + \xi) = \int_{\mathbb{R}^d} (1 - \cos(\langle z, \xi + 2\pi n \rangle)) a(z) dz, \quad n \in \mathbb{Z}^d, \quad \xi \in \tilde{\Omega}.$$

Мы учли, что интеграл $\int_{\mathbb{R}^d} \sin(\langle z, \xi + 2\pi n \rangle) a(z) dz$ обращается в нуль, поскольку функция $a(z)$ четная.

Лемма 1.2. *При условиях (1.1)–(1.3) число $\lambda_0 = 0$ является простым собственным значением оператора $\mathbb{A}(0, a, \mu)$. При этом $\text{Ker } \mathbb{A}(0, a, \mu) = \mathcal{L}\{\mathbf{1}_\Omega\}$.*

Доказательство. Поскольку функция a положительна на множестве положительной меры, символ $\hat{A}(2\pi n) = \int_{\mathbb{R}^d} 2 \sin^2(\langle z, \pi n \rangle) a(z) dz$ не обращается в нуль при $n \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$; в то же время $\hat{A}(0) = 0$. Таким образом, справедливо равенство $\text{Ker } \mathbb{A}_0(0, a) = \mathcal{L}\{\mathbf{1}_\Omega\}$. Следовательно, в силу (1.16) имеет место $\text{Ker } \mathbb{A}(0, a, \mu) = \mathcal{L}\{\mathbf{1}_\Omega\}$. \square

Исследуем подробнее символ оператора $\mathbb{A}_0(\xi, a)$, $\xi \in \tilde{\Omega}$, и получим некоторые оценки для квадратичной формы оператора $\mathbb{A}(\xi, a, \mu)$. Величина

$$\hat{A}(y) = \int_{\mathbb{R}^d} (1 - \cos(\langle z, y \rangle)) a(z) dz = 2 \int_{\mathbb{R}^d} \sin^2\left(\frac{\langle z, y \rangle}{2}\right) a(z) dz, \quad y \in \mathbb{R}^d, \quad (1.18)$$

при условии (1.1) непрерывно зависит от $y \in \mathbb{R}^d$ и (согласно лемме Римана–Лебега) стремится к $\|a\|_{L_1} > 0$ при $|y| \rightarrow \infty$. Кроме того, нетрудно видеть, что при $y \neq 0$ величина $\hat{A}(y) \neq 0$. Следовательно, справедлива оценка

$$\min_{|y| \geq r} \hat{A}(y) =: \mathcal{A}_r(a) > 0, \quad r > 0. \quad (1.19)$$

При условии (1.4) величина

$$\int_{\mathbb{R}^d} a(z) \langle z, y \rangle^2 dz =: M_a(y) \quad (1.20)$$

непрерывно зависит от $y \in \mathbb{R}^d$ и при ненулевых y не обращается в нуль. Следовательно, справедливо неравенство

$$\min_{|\theta|=1} M_a(\theta) =: \mathcal{M}(a) > 0. \quad (1.21)$$

Ниже (см. пункт 4.3) при условиях (1.1)–(1.4) и дополнительном условии $a \in L_2(\mathbb{R}^d)$ мы оценим величины $\mathcal{A}_r(a)$, $r > 0$, и $\mathcal{M}(a)$ явно в терминах $\|a\|_{L_1}$, $\|a\|_{L_2}$, $M_k(a)$, $k = 1, 2, 3$.

Лемма 1.3. *При условиях (1.1)–(1.4) справедливы оценки*

$$\hat{A}(\xi + 2\pi n) \geq C(a)|\xi|^2, \quad \xi \in \tilde{\Omega}, \quad n \in \mathbb{Z}^d; \quad (1.22)$$

$$\hat{A}(\xi + 2\pi n) \geq \mathcal{A}_\pi(a), \quad \xi \in \tilde{\Omega}, \quad n \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}. \quad (1.23)$$

Здесь

$$C(a) := \min\left\{\frac{1}{4}\mathcal{M}(a), \mathcal{A}_{r(a)}(a)\pi^{-2}d^{-1}, \mathcal{A}_\pi(a)\pi^{-2}d^{-1}\right\} > 0, \quad (1.24)$$

величина $\mathcal{A}_r(a)$, $r > 0$, определена в (1.19), постоянная $\mathcal{M}(a)$ определена в (1.21), $r(a) := \frac{3}{2}\mathcal{M}(a)M_3^{-1}(a)$.

Доказательство. При условиях (1.1), (1.4) величина $\hat{A}(y)$, $y \in \mathbb{R}^d$, трижды непрерывно дифференцируема; при этом справедливы равенства

$$\hat{A}(0) = 0, \quad \nabla \hat{A}(0) = 0, \quad \langle (H\hat{A})(0)y, y \rangle := \sum_{i,j=1}^d \partial_i \partial_j \hat{A}(0) y_i y_j = \int_{\mathbb{R}^d} \langle z, y \rangle^2 a(z) dz, \quad y \in \mathbb{R}^d; \quad (1.25)$$

$$\partial_i \partial_j \partial_k \hat{A}(y) = - \int_{\mathbb{R}^d} z_i z_j z_k \sin(\langle z, y \rangle) a(z) dz, \quad y \in \mathbb{R}^d. \quad (1.26)$$

Из условия (1.4) и соотношений (1.21) и (1.25) следуют оценки

$$\mathcal{M}(a)|y|^2 \leq \langle (H\hat{A})(0)y, y \rangle \leq M_2(a)|y|^2, \quad y \in \mathbb{R}^d. \quad (1.27)$$

Из (1.4) и (1.26) вытекает неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d y_i y_j y_k \partial_i \partial_j \partial_k \hat{A}(y_0) \right| \leq M_3(a)|y|^3, \quad y, y_0 \in \mathbb{R}^d. \quad (1.28)$$

В силу леммы Адамара (лемма 4.3) и соотношений (1.25) и (1.28) справедливо

$$\hat{A}(y) = \frac{1}{2} \langle (H\hat{A})(0)y, y \rangle + R(y), \quad |R(y)| \leq \frac{1}{6} M_3(a)|y|^3, \quad y \in \mathbb{R}^d. \quad (1.29)$$

Очевидно (см. (1.29)), что при условии $|y| \leq r(a) := \frac{3}{2}\mathcal{M}(a)M_3^{-1}(a)$ справедливо неравенство $|R(y)| \leq \frac{1}{4}\mathcal{M}(a)|y|^2$. Следовательно, с учетом (1.27) и (1.29) получаем

$$\hat{A}(y) \geq \frac{1}{4}\mathcal{M}(a)|y|^2, \quad |y| \leq r(a). \quad (1.30)$$

Отметим следующие свойства:

$$\begin{aligned} \xi \in \tilde{\Omega} &\implies |\xi| \leq \pi\sqrt{d}; \\ \xi \in \tilde{\Omega}, \quad n \in \mathbb{Z}^d &\implies |\xi + 2\pi n| \geq |\xi|; \\ \xi \in \tilde{\Omega}, \quad n \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\} &\implies |\xi + 2\pi n| \geq \pi. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Из (1.19), (1.30) и (1.31) вытекают соотношения

$$\begin{aligned} \hat{A}(\xi + 2\pi n) &\geq \frac{1}{4}\mathcal{M}(a)|\xi|^2, \quad n = 0, \quad \xi \in \tilde{\Omega}, \quad |\xi| \leq r(a); \\ \hat{A}(\xi + 2\pi n) &\geq \mathcal{A}_{r(a)}(a) \geq \mathcal{A}_{r(a)}(a)\pi^{-2}d^{-1}|\xi|^2, \quad n = 0, \quad \xi \in \tilde{\Omega}, \quad |\xi| \geq r(a); \\ \hat{A}(\xi + 2\pi n) &\geq \mathcal{A}_\pi(a) \geq \mathcal{A}_\pi(a)\pi^{-2}d^{-1}|\xi|^2, \quad n \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}, \quad \xi \in \tilde{\Omega}. \end{aligned}$$

Таким образом, справедливы неравенства (1.22) и (1.23). \square

Из соотношений (1.16), (1.17) и лемм 1.2 и 1.3 вытекает следующее утверждение.

Предложение 1.4. *При условиях (1.1)–(1.4) справедливы оценки*

$$(\mathbb{A}(\xi, a, \mu)u, u) \geq \mu_- C(a)|\xi|^2 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad u \in L_2(\Omega), \quad \xi \in \tilde{\Omega}; \quad (1.32)$$

$$(\mathbb{A}(\xi, a, \mu)u, u) \geq \mu_- \mathcal{A}_\pi(a) \|u\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad u \in L_2(\Omega) \ominus \mathcal{L}\{\mathbf{1}_\Omega\}, \quad \xi \in \tilde{\Omega}. \quad (1.33)$$

Ниже нам потребуется следующее утверждение.

Предложение 1.5. *При условиях (1.1)–(1.4) верна оценка*

$$\|\mathbb{A}(\xi, a, \mu) - \mathbb{A}(\eta, a, \mu)\| \leq \mu_+ 2^d M_1(a)|\xi - \eta|, \quad \xi, \eta \in \tilde{\Omega}. \quad (1.34)$$

Доказательство. Оператор $\mathbb{A}(\xi, a, \mu) - \mathbb{A}(\eta, a, \mu)$ — интегральный оператор в $L_2(\Omega)$ с ядром $(\tilde{a}(\eta, x - y) - \tilde{a}(\xi, x - y))\mu(x, y)$, $x, y \in \Omega$. Следовательно, в силу леммы Шура (лемма 4.1) справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \|\mathbb{A}(\xi, a, \mu) - \mathbb{A}(\eta, a, \mu)\| &\leq \mu_+ \int_{[-1,1]^d} |\tilde{a}(\eta, z) - \tilde{a}(\xi, z)| dz = \mu_+ 2^d \int_{\Omega} |\tilde{a}(\eta, z) - \tilde{a}(\xi, z)| dz \leq \\ &\leq \mu_+ 2^d \int_{\mathbb{R}^d} a(z) |e^{-i\langle \eta, z \rangle} - e^{-i\langle \xi, z \rangle}| dz = \mu_+ 2^d \int_{\mathbb{R}^d} a(z) |e^{i\langle \xi - \eta, z \rangle} - 1| dz \leq \\ &\leq \mu_+ 2^d |\xi - \eta| \int_{\mathbb{R}^d} a(z) |z| dz = \mu_+ 2^d M_1(a) |\xi - \eta|, \quad \xi, \eta \in \tilde{\Omega}. \end{aligned}$$

□

§ 2. ПОРОГОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕЛОКАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА ВБЛИЗИ НИЖНЕГО КРАЯ СПЕКТРА

2.1. Край спектра оператора $\mathbb{A}(\xi, a, \mu)$. Согласно лемме 1.2 при условиях (1.1)–(1.3) нижний край спектра оператора $\mathbb{A}(0, a, \mu)$ есть изолированное простое собственное значение $\lambda_0 = 0$. Для краткости обозначим через $d_0 := d_0(a, \mu)$ расстояние от точки λ_0 до остального спектра оператора $\mathbb{A}(0, a, \mu)$. Из оценки (1.33) вытекает, что при условиях (1.1)–(1.4) справедливо неравенство

$$d_0(a, \mu) \geq \mu_- \mathcal{A}_\pi(a). \quad (2.1)$$

Из оценки (1.34) и теории возмущений следует, что при условиях (1.1)–(1.4) для всех точек $\xi \in \tilde{\Omega}$, удовлетворяющих неравенству $|\xi| \leq 3^{-1} 2^{-d} M_1(a)^{-1} \mu_+^{-1} \mu_- \mathcal{A}_\pi(a)$, справедливо следующее:

$$\text{rank } E_{\mathbb{A}(\xi, a, \mu)}[0, d_0/3] = 1, \quad \sigma(\mathbb{A}(\xi, a, \mu)) \cap (d_0/3; 2d_0/3) = \emptyset.$$

Обозначим через $\delta_0(a, \mu)$ положительную величину $\min\{1, 3^{-1} 2^{-d} M_1(a)^{-1} \mu_+^{-1} \mu_- \mathcal{A}_\pi(a)\}$. Мы пришли к следующему утверждению.

Предложение 2.1. *При условиях (1.1)–(1.4) и при $|\xi| \leq \delta_0(a, \mu)$ спектр оператора $\mathbb{A}(\xi) = \mathbb{A}(\xi, a, \mu)$ на отрезке $[0, d_0/3]$ состоит из однократного собственного значения; на интервале $(d_0/3, 2d_0/3)$ нет точек спектра оператора $\mathbb{A}(\xi, a, \mu)$.*

При условиях (1.1)–(1.4) оператор-функция $\mathbb{A}(\cdot, a, \mu)$ трижды непрерывно дифференцируема по операторной норме в $\mathcal{B}(L_2(\Omega))$. При этом справедливы равенства

$$\begin{aligned} \partial^\alpha \mathbb{A}(\xi, a, \mu) u(x) &= \int_{\Omega} \tilde{a}_\alpha(\xi, x - y) \mu(x, y) u(y) dy, \quad x \in \Omega, \quad u \in L_2(\Omega); \\ \tilde{a}_\alpha(\xi, z) &= (-1)(-i)^{|\alpha|} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} (z + n)^\alpha a(z + n) e^{-i\langle \xi, z + n \rangle}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^d, \quad |\alpha| \leq 3. \end{aligned} \quad (2.2)$$

В силу леммы Адамара (лемма 4.3), оператор-функция $\mathbb{A}(\cdot, a, \mu)$ допускает разложение

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(\xi, a, \mu) &= \mathbb{A}(0, a, \mu) + \sum_{i=1}^d \partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu) \xi_i + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \partial_i \partial_j \mathbb{A}(0, a, \mu) \xi_i \xi_j + \mathbb{K}(\xi, a, \mu), \quad |\xi| \leq \delta_0(a, \mu), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$\mathbb{K}(\xi, a, \mu) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \xi_i \xi_j \xi_k \int_0^1 ds_1 s_1^2 \int_0^1 ds_2 s_2 \int_0^1 ds_3 \partial_i \partial_j \partial_k \mathbb{A}(s_1 s_2 s_3 \xi).$$

Используя лемму Шура (лемма 4.1), нетрудно показать, что справедливы оценки

$$\left\| \sum_{i=1}^d \partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu) \xi_i \right\| \leq |\xi| \mu_+ M_1(a), \quad |\xi| \leq \delta_0(a, \mu); \quad (2.4)$$

$$\left\| \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \partial_i \partial_j \mathbb{A}(0, a, \mu) \xi_i \xi_j \right\| \leq |\xi|^2 \frac{1}{2} \mu_+ M_2(a), \quad |\xi| \leq \delta_0(a, \mu); \quad (2.5)$$

$$\|\mathbb{K}(\xi, a, \mu)\| \leq |\xi|^3 \frac{1}{6} \mu_+ M_3(a), \quad |\xi| \leq \delta_0(a, \mu). \quad (2.6)$$

Обозначим через $F(\xi)$ спектральный проектор оператора $\mathbb{A}(\xi, a, \mu)$, отвечающий отрезку $[0, d_0/3]$. Через \mathfrak{N} обозначим ядро $\text{Ker } \mathbb{A}(0, a, \mu) = \mathcal{L}\{\mathbf{1}_\Omega\}$; через P обозначим ортопроектор на \mathfrak{N} ; положим $P^\perp := I - P$. Пусть Γ — контур на комплексной плоскости, проходящий через середину интервала $(d_0/3, 2d_0/3)$ и эквидистантно охватывающий отрезок $[0, d_0/3]$. В силу формулы Рисса

$$F(\xi) = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\mathbb{A}(\xi, a, \mu) - \zeta I)^{-1} d\zeta, \quad |\xi| \leq \delta_0(a, \mu), \quad (2.7)$$

оператор-функции $F(\xi)$, $\mathbb{A}(\xi, a, \mu)F(\xi)$, $|\xi| \leq \delta_0(a, \mu)$, трижды непрерывно дифференцируемы. Следовательно, имеют место разложения

$$F(\xi) = P + \sum_{i=1}^d F_i \xi_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d F_{ij} \xi_i \xi_j + O(|\xi|^3), \quad |\xi| \rightarrow 0; \quad (2.8)$$

$$\mathbb{A}(\xi, a, \mu)F(\xi) = G_0 + \sum_{i=1}^d G_i \xi_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d G_{ij} \xi_i \xi_j + O(|\xi|^3), \quad |\xi| \rightarrow 0. \quad (2.9)$$

Основная задача настоящего параграфа — найти коэффициенты разложений (2.8), (2.9) и оценить остатки.

2.2. Вычисление коэффициентов разложений для $F(\xi)$ и $\mathbb{A}(\xi)F(\xi)$. Из (2.3), (2.6), (2.8) следуют равенства

$$G_0 = \mathbb{A}(0, a, \mu)P = 0; \quad (2.10)$$

$$G_i = \partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu)P + \mathbb{A}(0, a, \mu)F_i, \quad i = 1, \dots, d; \quad (2.11)$$

$$G_{ij} = \partial_i \partial_j \mathbb{A}(0, a, \mu)P + \partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu)F_j + \partial_j \mathbb{A}(0, a, \mu)F_i + \mathbb{A}(0, a, \mu)F_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, d. \quad (2.12)$$

Далее, из самосопряженности оператора $\mathbb{A}(\xi, a, \mu)F(\xi)$ следует самосопряженность операторов G_i , $i = 1, \dots, d$. Следовательно, в силу оценки $(\mathbb{A}(\xi, a, \mu)F(\xi)u, u) \geq 0$, $u \in L_2(\Omega)$, $|\xi| \leq \delta_0(a, \mu)$, равенства $\mathbb{A}(0, a, \mu)F(0) = 0$ и (2.11) справедливы соотношения

$$G_i = \partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu)P + \mathbb{A}(0, a, \mu)F_i = 0, \quad i = 1, \dots, d. \quad (2.13)$$

Из (2.9), (2.10) и (2.13) вытекает представление

$$\mathbb{A}(\xi, a, \mu)F(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d G_{ij} \xi_i \xi_j + O(|\xi|^3), \quad |\xi| \rightarrow 0. \quad (2.14)$$

Из равенства $F^2(\xi) = F(\xi)$ следует, что

$$F_i P + P F_i = F_i, \quad i = 1, \dots, d. \quad (2.15)$$

В силу (2.15) справедливы равенства $P^\perp F_i P^\perp = 0$ и $PF_i P = 2PF_i P$, а потому $PF_i P = 0$. Следовательно,

$$F_i = P^\perp F_i P + PF_i P^\perp, \quad i = 1, \dots, d. \quad (2.16)$$

Из (2.13) и (2.16) вытекает, что

$$\partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu) P = -\mathbb{A}(0, a, \mu) F_i = -P^\perp \mathbb{A}(0, a, \mu) P^\perp F_i = -P^\perp \mathbb{A}(0, a, \mu) P^\perp F_i P, \quad i = 1, \dots, d.$$

Следовательно, справедливы соотношения

$$\partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu) P = P^\perp \partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu) P, \quad (2.17)$$

$$P^\perp F_i P = -P^\perp \mathbb{A}(0, a, \mu)^{-1} P^\perp \partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu) P, \quad i = 1, \dots, d. \quad (2.18)$$

Здесь под $\mathbb{A}(0, a, \mu)^{-1}$ подразумевается оператор, обратный к $\mathbb{A}(0, a, \mu)|_{\mathfrak{N}^\perp}$, корректно определенный как ограниченный оператор из \mathfrak{N}^\perp в \mathfrak{N}^\perp .

Далее, из равенства (2.14), представления $F(\xi) = P + O(|\xi|)$ и свойства $\mathbb{A}(\xi)F(\xi) = (\mathbb{A}(\xi)F(\xi))F(\xi) = F(\xi)(\mathbb{A}(\xi)F(\xi))$ вытекает соотношение $G_{ij} = PG_{ij}P$, $i, j = 1, \dots, d$. Следовательно, с учетом (2.16) равенство (2.12) принимает вид

$$G_{ij} = P\partial_i \partial_j \mathbb{A}(0, a, \mu) P + P\partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu) P^\perp F_j P + P\partial_j \mathbb{A}(0, a, \mu) P^\perp F_i P, \quad i, j = 1, \dots, d. \quad (2.19)$$

Подставляя (2.18) в (2.19), получаем

$$\begin{aligned} G_{ij} &= P\partial_i \partial_j \mathbb{A}(0, a, \mu) P - P\partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu) P^\perp \mathbb{A}(0, a, \mu)^{-1} P^\perp \partial_j \mathbb{A}(0, a, \mu) P - \\ &\quad - P\partial_j \mathbb{A}(0, a, \mu) P^\perp \mathbb{A}(0, a, \mu)^{-1} P^\perp \partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu) P, \quad i, j = 1, \dots, d. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Поскольку $P = (\cdot, \mathbf{1}_\Omega)\mathbf{1}_\Omega$ — оператор первого ранга, то операторы G_{ij} представимы в виде $G_{ij} = g_{ij}P$, где числа $g_{ij} \in \mathbb{C}$, $i, j = 1, \dots, d$, могут быть вычислены в терминах исходной задачи по формуле (2.20).

Войдем в подробности. Из равенства $P = (\cdot, \mathbf{1}_\Omega)\mathbf{1}_\Omega$ следуют соотношения

$$\partial_j \mathbb{A}(0, a, \mu) P = i(\cdot, \mathbf{1}_\Omega) w_j, \quad \text{где } iw_j = \partial_j \mathbb{A}(0, a, \mu) \mathbf{1}_\Omega, \quad j = 1, \dots, d. \quad (2.21)$$

В силу (2.2) справедливы равенства

$$\begin{aligned} w_j(x) &= \overline{w_j(x)} = \int_{\Omega} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} (x_j - y_j + n_j) a(x - y + n) \mu(x, y) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (x_j - y_j) a(x - y) \mu(x, y) dy, \quad x \in \Omega, \quad j = 1, \dots, d. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Из (2.17) и (2.21) следует, что

$$P^\perp \mathbb{A}(0, a, \mu)^{-1} P^\perp \partial_j \mathbb{A}(0, a, \mu) P = i(\cdot, \mathbf{1}_\Omega) v_j, \quad v_j = P^\perp \mathbb{A}(0, a, \mu)^{-1} P^\perp w_j, \quad j = 1, \dots, d. \quad (2.23)$$

Отметим, что функции $v_j = \overline{v_j} \in L_2(\Omega)$, $j = 1, \dots, d$, являются решениями следующих задач на ячейке Ω :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \tilde{a}(0, x - y) \mu(x, y) (v_j(x) - v_j(y)) dy = w_j(x), & x \in \Omega, \\ \int_{\Omega} v_j(x) dx = 0, & j = 1, \dots, d. \end{cases}$$

Считая, что функции $v_j \in L_2(\Omega)$, $j = 1, \dots, d$, периодически продолжены на все \mathbb{R}^d , можно переписать вспомогательные задачи на ячейке в следующем виде

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^d} a(x-y) \mu(x,y) (v_j(x) - v_j(y)) dy = \int_{\mathbb{R}^d} a(x-y) \mu(x,y) (x_j - y_j) dy, & x \in \Omega, \\ \int_{\Omega} v_j(x) dx = 0, & j = 1, \dots, d. \end{cases} \quad (2.24)$$

Задачи (2.24) однозначно разрешимы.

Далее, из (2.21) и (2.23) следуют равенства

$$P \partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu) P^\perp \mathbb{A}(0, a, \mu)^{-1} P^\perp \partial_j \mathbb{A}(0, a, \mu) P = (v_j, w_i) P, \quad i, j = 1, \dots, d, \quad (2.25)$$

где функции $w_j \in L_2(\Omega)$, $j = 1, \dots, d$, определены равенством (2.22) и функции $v_j \in L_2(\Omega)$, $j = 1, \dots, d$, удовлетворяют вспомогательным задачам (2.24) на ячейке Ω . Аналогично, справедливы равенства

$$P \partial_i \partial_j \mathbb{A}(0, a, \mu) P = (w_{ij}, \mathbf{1}_\Omega) P, \quad i, j = 1, \dots, d. \quad (2.26)$$

Здесь $w_{ij} = \overline{w_{ij}} = \partial_i \partial_j \mathbb{A}(0, a, \mu) \mathbf{1}_\Omega \in L_2(\Omega)$, т.е.

$$\begin{aligned} w_{ij}(x) &= \int_{\Omega} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} (x_i - y_i + n_i)(x_j - y_j + n_j) a(x-y+n) \mu(x,y) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (x_i - y_i)(x_j - y_j) a(x-y) \mu(x,y) dy, \quad x \in \Omega, \quad i, j = 1, \dots, d. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Таким образом, из (2.20), (2.22) и (2.25)–(2.27) вытекают соотношения

$$\begin{aligned} g_{ij} &= (w_{ij}, \mathbf{1}_\Omega) - (v_j, w_i) - (v_i, w_j) = \\ &= \int_{\Omega} dx \int_{\mathbb{R}^d} dy ((x_i - y_i)(x_j - y_j) - v_j(x)(x_i - y_i) - v_i(x)(x_j - y_j)) a(x-y) \mu(x,y), \\ &\quad i, j = 1, \dots, d. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Здесь функции $v_j(x)$, $x \in \Omega$, $j = 1, \dots, d$, удовлетворяют вспомогательным задачам (2.24).

Отметим, что есть и другие способы вычисления коэффициентов разложений для $F(\xi)$ и $\mathbb{A}(\xi)F(\xi)$ помимо изложенного выше. В пункте 4.2 мы опишем еще два способа.

2.3. Приближение для операторов $F(\xi)$ и $\mathbb{A}(\xi)F(\xi)$. Следующая теорема дает оценки погрешности приближений оператор-функций $F(\xi)$ и $\mathbb{A}(\xi, a, \mu)F(\xi)$ при $|\xi| \leq \delta_0(a, \mu)$.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия (1.1)–(1.4). Тогда справедливы оценки*

$$\|F(\xi) - P\| \leq C_1(a, \mu)|\xi|, \quad |\xi| \leq \delta_0(a, \mu); \quad (2.29)$$

$$\left\| \mathbb{A}(\xi, a, \mu)F(\xi) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d g_{ij}\xi_i\xi_j P \right\| \leq C_2(a, \mu)|\xi|^3, \quad |\xi| \leq \delta_0(a, \mu). \quad (2.30)$$

Постоянные $C_1(a, \mu)$ и $C_2(a, \mu)$ заданы выражениями (2.34), (2.42) и (с учетом (2.1)) контролируются в терминах параметров d , μ_- , μ_+ , $M_1(a)$, $M_2(a)$, $M_3(a)$, $\mathcal{A}_\pi(a)$.

Доказательство. В силу формулы Рисса (2.7) разность $F(\xi) - P$ допускает представление

$$F(\xi) - P = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} ((\mathbb{A}(\xi, a, \mu) - \zeta I)^{-1} - (\mathbb{A}(0, a, \mu) - \zeta I)^{-1}) d\zeta, \quad |\xi| \leq \delta_0(a, \mu). \quad (2.31)$$

Разность резольвент удовлетворяет резольвентному тождеству

$$\begin{aligned} (\mathbb{A}(\xi, a, \mu) - \zeta I)^{-1} - (\mathbb{A}(0, a, \mu) - \zeta I)^{-1} = \\ = (\mathbb{A}(\xi, a, \mu) - \zeta I)^{-1} (\mathbb{A}(0, a, \mu) - \mathbb{A}(\xi, a, \mu)) (\mathbb{A}(0, a, \mu) - \zeta I)^{-1}, \\ |\xi| \leq \delta_0(a, \mu), \quad \zeta \in \Gamma. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Остается лишь отметить, что длина контура Γ есть $\frac{\pi+2}{3}d_0$, и обе резольвенты допускают на контуре Γ оценки

$$\|(\mathbb{A}(\xi, a, \mu) - \zeta I)^{-1}\| \leq 6d_0^{-1}, \quad \|(\mathbb{A}(0, a, \mu) - \zeta I)^{-1}\| \leq 6d_0^{-1}. \quad (2.33)$$

Теперь (2.29) следует из (1.34) и (2.31)–(2.33); при этом

$$C_1(a, \mu) := 6(\pi + 2)\pi^{-1}2^d d_0^{-1} \mu_+ M_1(a). \quad (2.34)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} R(\xi, \zeta) &:= (\mathbb{A}(\xi, a, \mu) - \zeta I)^{-1}, \quad |\xi| \leq \delta_0(a, \mu), \quad \zeta \in \Gamma; \\ R_0(\zeta) &:= R(0, \zeta), \quad \zeta \in \Gamma; \\ \Delta\mathbb{A}(\xi) &:= \mathbb{A}(\xi, a, \mu) - \mathbb{A}(0, a, \mu), \quad |\xi| \leq \delta_0(a, \mu). \end{aligned}$$

Итерируя (2.32), получаем

$$\begin{aligned} R(\xi, \zeta) = R_0(\zeta) - R_0(\zeta)\Delta\mathbb{A}(\xi)R_0(\zeta) + \\ + R_0(\zeta)\Delta\mathbb{A}(\xi)R_0(\zeta)\Delta\mathbb{A}(\xi)R_0(\zeta) - \\ - R(\xi, \zeta)\Delta\mathbb{A}(\xi)R_0(\zeta)\Delta\mathbb{A}(\xi)R_0(\zeta), \quad |\xi| \leq \delta_0(a, \mu), \quad \zeta \in \Gamma. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Из (2.3) и (2.35) вытекает равенство

$$\begin{aligned} R(\xi, \zeta) = R_0(\zeta) - R_0(\zeta) \sum_{i=1}^d \partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu) \xi_i R_0(\zeta) - R_0(\zeta) \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \partial_i \partial_j \mathbb{A}(0, a, \mu) \xi_i \xi_j R_0(\zeta) + \\ + R_0(\zeta) \sum_{i=1}^d \partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu) \xi_i R_0(\zeta) \sum_{j=1}^d \partial_j \mathbb{A}(0, a, \mu) \xi_j R_0(\zeta) - R_0(\zeta) \mathbb{K}(\xi, a, \mu) R_0(\zeta) + \\ + R_0(\zeta) \sum_{i=1}^d \partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu) \xi_i R_0(\zeta) \Delta_2 \mathbb{A}(\xi) R_0(\zeta) + R_0(\zeta) \Delta_2 \mathbb{A}(\xi) R_0(\zeta) \Delta\mathbb{A}(\xi) R_0(\zeta) - \\ - R(\xi, \zeta) \Delta\mathbb{A}(\xi) R_0(\zeta) \Delta\mathbb{A}(\xi) R_0(\zeta) \Delta\mathbb{A}(\xi) R_0(\zeta), \quad |\xi| \leq \delta_0(a, \mu), \quad \zeta \in \Gamma. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Здесь

$$\Delta_2 \mathbb{A}(\xi) := \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \partial_i \partial_j \mathbb{A}(0, a, \mu) \xi_i \xi_j + \mathbb{K}(\xi, a, \mu).$$

Учитывая (2.36) и соотношение

$$\mathbb{A}(\xi, a, \mu) F(\xi) = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\mathbb{A}(\xi, a, \mu) - \zeta I)^{-1} \zeta d\zeta, \quad |\xi| \leq \delta_0(a, \mu), \quad (2.37)$$

получим следующие представления для коэффициентов разложения (2.9):

$$G_0 = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} R_0(\zeta) \zeta d\zeta; \quad (2.38)$$

$$G_i = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} R_0(\zeta) \partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu) R_0(\zeta) \zeta d\zeta, \quad i = 1, \dots, d; \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned}
G_{ij} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} R_0(\zeta) \partial_i \partial_j \mathbb{A}(0, a, \mu) R_0(\zeta) \zeta d\zeta - \\
&\quad - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} R_0(\zeta) \left(\partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu) R_0(\zeta) \partial_j \mathbb{A}(0, a, \mu) + \partial_j \mathbb{A}(0, a, \mu) R_0(\zeta) \partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu) \right) R_0(\zeta) \zeta d\zeta, \\
&\quad i, j = 1, \dots, d. \quad (2.40)
\end{aligned}$$

Согласно (2.10) и (2.13) справедливы равенства $G_0 = 0$, $G_i = 0$, $i = 1, \dots, d$; разложение (2.9) принимает вид (2.14), где $G_{ij} = g_{ij}P$, а величины $g_{ij} \in \mathbb{C}$ определяются равенствами (2.28). В силу (2.36) и (2.37) для погрешности в разложении (2.14) справедливо представление

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}(\xi, a, \mu)F(\xi) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d G_{ij} \xi_i \xi_j &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} R_0(\zeta) \mathbb{K}(\xi, a, \mu) R_0(\zeta) \zeta d\zeta - \\
&\quad - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} R_0(\zeta) \sum_{i=1}^d \partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu) \xi_i R_0(\zeta) \Delta_2 \mathbb{A}(\xi) R_0(\zeta) \zeta d\zeta - \\
&\quad - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} R_0(\zeta) \Delta_2 \mathbb{A}(\xi) R_0(\zeta) \Delta \mathbb{A}(\xi) R_0(\zeta) \zeta d\zeta + \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} R(\xi, \zeta) \Delta \mathbb{A}(\xi) R_0(\zeta) \Delta \mathbb{A}(\xi) R_0(\zeta) \Delta \mathbb{A}(\xi) R_0(\zeta) \zeta d\zeta, \quad |\xi| \leq \delta_0(a, \mu). \quad (2.41)
\end{aligned}$$

Учитывая неравенство $|\zeta| \leq d_0/2$, $\zeta \in \Gamma$, из соотношений (2.41) и оценок (2.4)–(2.6), (2.33), получаем (2.30). При этом величина $C_2(a, \mu)$ дается следующим выражением

$$\begin{aligned}
C_2(a, \mu) &:= \frac{\pi + 2}{2\pi} \left(\mu_+ M_3(a) + \frac{\mu_+^2}{d_0} (3M_2(a) + M_3(a)) (12M_1(a) + 3M_2(a) + M_3(a)) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\mu_+^3}{d_0^2} (6M_1(a) + 3M_2(a) + M_3(a))^3 \right). \quad (2.42)
\end{aligned}$$

□

2.4. Аппроксимация резольвенты оператора $\mathbb{A}(\xi)$. Получим аппроксимацию резольвенты оператора $\mathbb{A}(\xi, a, \mu)$ вблизи нижнего края спектра. Из (1.32) следует неравенство

$$(\mathbb{A}(\xi, a, \mu)F(\xi)u, u) \geq \mu_- C(a)|\xi|^2(F(\xi)u, u), \quad u \in L_2(\Omega), \quad |\xi| \leq \delta_0(a, \mu). \quad (2.43)$$

Подставляя в (2.43) разложения $F(\xi) = P + O(|\xi|)$ и (2.14), имеем

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d g_{ij} \xi_i \xi_j \|Pu\|^2 \geq \mu_- C(a) |\xi|^2 \|Pu\|^2 + O(|\xi|^3), \quad |\xi| \rightarrow 0.$$

Поделим последнее соотношение на $|\xi|^2$, положим $u = \mathbf{1}_\Omega$ и устремим $|\xi| \rightarrow 0$. В итоге получим

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d g_{ij} \theta_i \theta_j \geq \mu_- C(a), \quad \theta \in \mathbb{S}^{d-1},$$

или окончательно

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d g_{ij} \xi_i \xi_j \geq \mu_- C(a) |\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (2.44)$$

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия (1.1)–(1.4). Тогда справедлива оценка*

$$\left\| (\mathbb{A}(\xi, a, \mu) + \varepsilon^2 I)^{-1} - \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d g_{ij} \xi_i \xi_j + \varepsilon^2 \right)^{-1} P \right\| \leq S(a, \mu) \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon > 0, \quad |\xi| \leq \delta_0(a, \mu). \quad (2.45)$$

Здесь величина $S(a, \mu)$ определяется равенством

$$S(a, \mu) := \frac{2C_1(a, \mu)}{(\mu_- C(a))^{1/2}} + \frac{C_2(a, \mu)}{(\mu_- C(a))^{3/2}} + (2d_0/3)^{-1/2}$$

и (с учетом (1.24), (2.1), (2.34), (2.42)) контролируется в терминах параметров $d, \mu_-, \mu_+, M_1(a), M_2(a), M_3(a), \mathcal{M}(a), \mathcal{A}_\pi(a), \mathcal{A}_{r(a)}(a)$.

Доказательство. Прежде всего отметим очевидное неравенство

$$\|(\mathbb{A}(\xi, a, \mu) + \varepsilon^2 I)^{-1}(I - F(\xi))\| \leq (2d_0/3)^{-1}, \quad |\xi| \leq \delta_0(a, \mu). \quad (2.46)$$

Далее, из (1.32) и (2.44) вытекают оценки

$$\|(\mathbb{A}(\xi, a, \mu)F(\xi) + \varepsilon^2 I)^{-1}F(\xi)\| \leq (\mu_- C(a)|\xi|^2 + \varepsilon^2)^{-1}, \quad \varepsilon > 0, \quad |\xi| \leq \delta_0(a, \mu); \quad (2.47)$$

$$\left\| \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d g_{ij} \xi_i \xi_j + \varepsilon^2 \right)^{-1} P \right\| \leq (\mu_- C(a)|\xi|^2 + \varepsilon^2)^{-1}, \quad \varepsilon > 0, \quad |\xi| \leq \delta_0(a, \mu). \quad (2.48)$$

Наконец, справедливо очевидное тождество

$$\begin{aligned} & (\mathbb{A}(\xi, a, \mu) + \varepsilon^2 I)^{-1}F(\xi) - \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d g_{ij} \xi_i \xi_j + \varepsilon^2 \right)^{-1} P = \\ & = F(\xi)(\mathbb{A}(\xi, a, \mu) + \varepsilon^2 I)^{-1}(F(\xi) - P) + (F(\xi) - P) \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d g_{ij} \xi_i \xi_j + \varepsilon^2 \right)^{-1} P + \\ & + F(\xi)(\mathbb{A}(\xi, a, \mu) + \varepsilon^2 I)^{-1} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d g_{ij} \xi_i \xi_j P - \mathbb{A}(\xi, a, \mu)F(\xi) \right) \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d g_{ij} \xi_i \xi_j + \varepsilon^2 \right)^{-1} P, \\ & \quad \varepsilon > 0, \quad |\xi| \leq \delta_0(a, \mu). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Теперь (2.45) следует из (2.29), (2.30) и (2.46)–(2.49). \square

§ 3. УСРЕДНЕНИЕ НЕЛОКАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА

Предполагая выполненные условия (1.1)–(1.4), рассмотрим семейство нелокальных операторов Шрёдингера в $L_2(\mathbb{R}^d)$, заданных по правилу

$$\mathbb{A}_\varepsilon u(x) := \varepsilon^{-d-2} \int_{\mathbb{R}^d} a((x-y)/\varepsilon) \mu(x/\varepsilon, y/\varepsilon) (u(x) - u(y)) dy, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d), \quad \varepsilon > 0.$$

Введем *эффективный оператор* — самосопряженный эллиптический дифференциальный оператор второго порядка с постоянными коэффициентами в $L_2(\mathbb{R}^d)$:

$$\mathbb{A}^0 := \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d g_{ij} D_i D_j = -\operatorname{div} g^0 \nabla.$$

При этом *эффективная матрица* g^0 — $(d \times d)$ -матрица с элементами $\frac{1}{2}g_{ij}$, где коэффициенты $g_{ij}, i, j = 1, \dots, d$, определены в (2.28). При этом выполнена оценка (2.44), тем самым матрица g^0 положительно определена. Наш основной результат составляет следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия (1.1)–(1.4). Тогда справедлива оценка*

$$\|(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + I)^{-1}\| \leq \mathcal{C}(a, \mu) \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (3.1)$$

Здесь константа $\mathcal{C}(a, \mu)$ задана равенством

$$\mathcal{C}(a, \mu) := \frac{2}{\sqrt{\mu_- C(a)} \delta_0(a, \mu)} + S(a, \mu),$$

где постоянная $C(a)$ определена в (1.24), $\delta_0(a, \mu)$ — в п. 2.1, $S(a, \mu)$ — в теореме 2.3. Постоянная $C(a, \mu)$ контролируется через следующие величины: μ_- , μ_+ , d , $M_1(a)$, $M_2(a)$, $M_3(a)$, $\mathcal{M}(a)$, $\mathcal{A}_\pi(a)$, $\mathcal{A}_{r(a)}(a)$.

Доказательство. Введем масштабное преобразование (семейство унитарных операторов):

$$T_\varepsilon u(x) := \varepsilon^{d/2} u(\varepsilon x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d), \quad \varepsilon > 0.$$

Нетрудно проверить равенство $T_\varepsilon \mathbb{A}_\varepsilon T_\varepsilon^* = \varepsilon^{-2} \mathbb{A}(a, \mu)$. Следовательно, в силу разложения (1.8) справедливы соотношения

$$\begin{aligned} (\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} &= T_\varepsilon^* \varepsilon^2 (\mathbb{A} + \varepsilon^2 I)^{-1} T_\varepsilon = T_\varepsilon^* \mathcal{G}^* [\varepsilon^2 (\mathbb{A}(\xi, a, \mu) + \varepsilon^2 I)^{-1}] \mathcal{G} T_\varepsilon = \\ &= T_\varepsilon^* \mathcal{G}^* [\varepsilon^2 \mathbf{1}_{|\xi| \leq \delta_0(a, \mu)} (\mathbb{A}(\xi, a, \mu) + \varepsilon^2 I)^{-1}] \mathcal{G} T_\varepsilon + \\ &\quad + T_\varepsilon^* \mathcal{G}^* [\varepsilon^2 \mathbf{1}_{|\xi| > \delta_0(a, \mu)} (\mathbb{A}(\xi, a, \mu) + \varepsilon^2 I)^{-1}] \mathcal{G} T_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из оценки (1.32) и равенств (3.2) следует неравенство

$$\left\| (\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - T_\varepsilon^* \mathcal{G}^* [\varepsilon^2 \mathbf{1}_{|\xi| \leq \delta_0(a, \mu)} (\mathbb{A}(\xi, a, \mu) + \varepsilon^2 I)^{-1}] \mathcal{G} T_\varepsilon \right\| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\mu_- C(a)} \delta_0(a, \mu)}, \quad \varepsilon > 0. \quad (3.3)$$

Из оценок (2.45) и (3.3) вытекает, что

$$\begin{aligned} \left\| (\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - T_\varepsilon^* \mathcal{G}^* [\varepsilon^2 \mathbf{1}_{|\xi| \leq \delta_0(a, \mu)} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d g_{ij} \xi_i \xi_j + \varepsilon^2 \right)^{-1} P] \mathcal{G} T_\varepsilon \right\| &\leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\mu_- C(a)} \delta_0(a, \mu)} + S(a, \mu) \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Учтем равенство (см., например, [53] или [3]) $\mathcal{G}^* [H(\xi) P] \mathcal{G} = \Phi^* [\mathbf{1}_{\tilde{\Omega}}(\xi) H(\xi)] \Phi$, где $H \in L_\infty(\tilde{\Omega})$, Φ — преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Теперь из (2.44) и (3.4) вытекает оценка (3.1). \square

§ 4. ПРИЛОЖЕНИЕ

4.1. Леммы Шура и Адамара. Здесь приводятся некоторые известные утверждения и их простейшие следствия. Начнем с простейшего варианта леммы Шура.

Лемма 4.1. (Лемма Шура) Пусть $(\mathcal{X}, d\rho)$, $(\mathcal{Y}, d\tau)$ — сепарабельные измеримые пространства с σ -конечными мерами; $\mathbb{B} : L_2(\mathcal{Y}, d\tau) \rightarrow L_2(\mathcal{X}, d\rho)$ — линейный интегральный оператор с ядром $b(x, y)$, $x \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$. Предположим, что выполнены условия

$$\begin{aligned} \alpha &:= \rho\text{-}\sup_{x \in \mathcal{X}} \int_{\mathcal{Y}} |b(x, y)| d\tau(y) < +\infty, \\ \beta &:= \tau\text{-}\sup_{y \in \mathcal{Y}} \int_{\mathcal{X}} |b(x, y)| d\rho(x) < +\infty. \end{aligned}$$

Тогда оператор \mathbb{B} ограничен и справедлива оценка $\|\mathbb{B}\| \leq (\alpha\beta)^{1/2}$.

Обозначим, как и выше, $\Omega := [0, 1]^d$, а также $\Delta := [-1, 1]^d$. Из леммы Шура почти мгновенно вытекает следующий результат.

Следствие 4.2. Для любых функций $\varphi \in L_1(\Delta)$, $\psi \in L_\infty(\Omega \times \Omega)$ оператор, заданный равенством

$$\mathbb{B}u(x) := \int_{\Omega} \varphi(x - y) \psi(x, y) u(y) dy, \quad x \in \Omega, \quad u \in L_2(\Omega),$$

является компактным оператором из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, и удовлетворяет оценке

$$\|\mathbb{B}\| \leq \|\varphi\|_{L_1(\Delta)} \|\psi\|_{L_\infty(\Omega \times \Omega)}. \quad (4.1)$$

Доказательство. Согласно лемме 4.1 оператор \mathbb{B} ограничен и удовлетворяет оценке (4.1). Для проверки компактности оператора \mathbb{B} выберем последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Delta)$, удовлетворяющую условию $\|\varphi_n - \varphi\|_{L_1(\Delta)} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Пусть \mathbb{B}_n — операторы с ядрами $\varphi_n(x - y)\psi(x, y)$, $x, y \in \Omega$. Согласно (4.1) справедливы соотношения

$$\|\mathbb{B}_n - \mathbb{B}\| \leq \|\varphi_n - \varphi\|_{L_1(\Delta)} \|\psi\|_{L_\infty(\Omega \times \Omega)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

При этом, в силу ограниченности ядер $\varphi_n(x - y)\psi(x, y)$, $x, y \in \Omega$, и ограниченности области Ω , операторы \mathbb{B}_n являются операторами Гильберта–Шмидта. Следовательно, оператор \mathbb{B} компактен. \square

Далее, мы приведем удобный для нас вариант леммы Адамара.

Лемма 4.3. (Лемма Адамара) *Пусть функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, трижды непрерывно дифференцируема. Тогда справедливо представление*

$$\begin{aligned} f(y) = & f(0) + \sum_{i=1}^d y_i \partial_i f(0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d y_i y_j \partial_i \partial_j f(0) + \\ & + \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d y_i y_j y_k \int_0^1 ds_1 s_1^2 \int_0^1 ds_2 s_2 \int_0^1 ds_3 \partial_i \partial_j \partial_k f(s_1 s_2 s_3 y), \quad y \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

4.2. Другие способы вычисления коэффициентов разложения (2.9). Назовем способ вычисления коэффициентов разложения (2.9), изложенный в пункте 2.2, **первым способом**. Здесь мы обсудим еще два способа.

Второй способ является стандартным для теоретико-операторного подхода. Для достаточно малых $\xi \in \mathbb{R}^d$ положим

$$\varphi(\xi) := F(\xi) \mathbf{1}_\Omega, \quad e(\xi) := \varphi(\xi) / \|\varphi(\xi)\|, \quad \lambda(\xi) := (\mathbb{A}(\xi, a, \mu) e(\xi), e(\xi)).$$

Разумеется, $\lambda(\xi)$ — нижнее собственное значение оператора $\mathbb{A}(\xi, a, \mu)$, $e(\xi)$ — нормированный собственный вектор оператора $\mathbb{A}(\xi, a, \mu)$, отвечающий собственному значению $\lambda(\xi)$. Собственное значение $\lambda(\xi)$ — простое; в силу формулы Рисса (2.7) функции $\varphi(\xi)$, $e(\xi)$, $\lambda(\xi)$ — гладкие класса C^3 в некоторой окрестности нуля. Следовательно, имеют место разложения

$$\lambda(\xi) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^d \lambda_i \xi_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \lambda_{ij} \xi_i \xi_j + O(|\xi|^3), \quad \xi \rightarrow 0; \quad (4.2)$$

$$e(\xi) = e_0 + \sum_{i=1}^d e_i \xi_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d e_{ij} \xi_i \xi_j + O(|\xi|^3), \quad \xi \rightarrow 0. \quad (4.3)$$

Поскольку $\lambda(0) = 0$ и в малой окрестности нуля $\lambda(\xi) \geq 0$, справедливы равенства $\lambda_0 = 0$, $\lambda_i = 0$, $i = 1, \dots, d$. Аналогично, $e_0 = e(0) = \mathbf{1}_\Omega$. Теперь, подставляя (4.2) и (4.3) в равенство

$$\mathbb{A}(\xi, a, \mu) F(\xi) = \lambda(\xi) (\cdot, e(\xi)) e(\xi),$$

получаем представления для коэффициентов разложения (2.9):

$$G_0 = 0, \quad G_i = 0, \quad i = 1, \dots, d, \quad G_{ij} = \lambda_{ij} (\cdot, \mathbf{1}_\Omega) \mathbf{1}_\Omega = \lambda_{ij} P, \quad i, j = 1, \dots, d. \quad (4.4)$$

Для вычисления коэффициентов разложения (2.9) остается найти λ_{ij} .

Подставляя разложения (2.3), (4.2) и (4.3) в равенство

$$\mathbb{A}(\xi, a, \mu) e(\xi) = \lambda(\xi) e(\xi),$$

и сравнивая коэффициенты при слагаемых первого и второго порядков, получаем соотношения

$$\mathbb{A}(0, a, \mu) e_i + \partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu) \mathbf{1}_\Omega = 0, \quad i = 1, \dots, d; \quad (4.5)$$

$$\mathbb{A}(0, a, \mu) e_{ij} + \partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu) e_j + \partial_j \mathbb{A}(0, a, \mu) e_i + \partial_i \partial_j \mathbb{A}(0, a, \mu) \mathbf{1}_\Omega = \lambda_{ij} \mathbf{1}_\Omega, \quad i, j = 1, \dots, d. \quad (4.6)$$

Из (4.5) следуют равенства

$$\partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu) \mathbf{1}_\Omega = P^\perp \partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu) \mathbf{1}_\Omega, \quad i = 1, \dots, d; \quad (4.7)$$

$$P^\perp e_i = -P^\perp \mathbb{A}(0, a, \mu)^{-1} P^\perp \partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu) \mathbf{1}_\Omega. \quad (4.8)$$

Из (4.6) вытекает соотношение

$$\begin{aligned} \lambda_{ij} = (\lambda_{ij} \mathbf{1}_\Omega, \mathbf{1}_\Omega) &= (\mathbb{A}(0, a, \mu) e_{ij}, \mathbf{1}_\Omega) + (\partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu) e_j, \mathbf{1}_\Omega) + (\partial_j \mathbb{A}(0, a, \mu) e_i, \mathbf{1}_\Omega) + \\ &\quad + (\partial_i \partial_j \mathbb{A}(0, a, \mu) \mathbf{1}_\Omega, \mathbf{1}_\Omega), \quad i, j = 1, \dots, d. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Учитывая равенства $(\mathbb{A}(0, a, \mu) e_{ij}, \mathbf{1}_\Omega) = (e_{ij}, \mathbb{A}(0, a, \mu) \mathbf{1}_\Omega) = 0$ и (4.7), получаем

$$\begin{aligned} (\partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu) e_j, \mathbf{1}_\Omega) &= (e_j, \partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu) \mathbf{1}_\Omega) = (P^\perp e_j, \partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu) \mathbf{1}_\Omega) = \\ &= (\partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu) P^\perp e_j, \mathbf{1}_\Omega), \quad i, j = 1, \dots, d. \end{aligned}$$

Вместе с (4.8) и (4.9) это влечет

$$\begin{aligned} \lambda_{ij} &= ((\partial_i \partial_j \mathbb{A}(0, a, \mu) - \partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu) P^\perp \mathbb{A}(0, a, \mu)^{-1} P^\perp \partial_j \mathbb{A}(0, a, \mu)) \mathbf{1}_\Omega, \mathbf{1}_\Omega) - \\ &\quad - (\partial_j \mathbb{A}(0, a, \mu) P^\perp \mathbb{A}(0, a, \mu)^{-1} P^\perp \partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu)) \mathbf{1}_\Omega, \mathbf{1}_\Omega), \quad i, j = 1, \dots, d. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Равенство (4.10) вместе с (4.4) приводят к (2.20).

Третий способ. Первый способ окажется неудобным при вычислении следующего члена асимптотики оператора $\mathbb{A}(\xi, a, \mu) F(\xi)$, а это понадобится для получения более точной аппроксимации резольвенты $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ (чemu авторы планируют посвятить отдельную работу). Второй способ нельзя обобщить на случай матричной задачи (если нижнее собственное значение оператора $\mathbb{A}(0, a, \mu)$ кратное). Опишем третий способ вычисления коэффициентов разложения (2.9), лишенный указанных недостатков. Коэффициенты разложения (2.9) даются контурными интегралами (2.38)–(2.40). Воспользуемся разложением резольвенты оператора $\mathbb{A}(0, a, \mu)$:

$$R_0(\zeta) = R_0(\zeta)P + R_0(\zeta)P^\perp = -\frac{1}{\zeta}P + R_0(\zeta)P^\perp, \quad \zeta \in \Gamma. \quad (4.11)$$

Подставим разложение (4.11) в контурные интегралы (2.38), (2.39) и воспользуемся тем, что оператор-функция $R_0^\perp(\zeta) := R_0(\zeta)P^\perp$ голоморфна внутри контура Γ . Мы получим равенства $G_0 = 0$,

$$\begin{aligned} G_i &= \frac{-1}{2\pi i} \oint_\Gamma \left(-\frac{1}{\zeta}P + R_0^\perp(\zeta) \right) \partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu) \left(-\frac{1}{\zeta}P + R_0^\perp(\zeta) \right) \zeta d\zeta = \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \oint_\Gamma \left(-\frac{1}{\zeta}P \right) \partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu) \left(-\frac{1}{\zeta}P \right) \zeta d\zeta = -P \partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu) P, \quad i = 1, \dots, d. \end{aligned}$$

Как и выше (см. п. 2.2), справедливы равенства (2.13), т.е.

$$P \partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu) P = 0, \quad i = 1, \dots, d. \quad (4.12)$$

Далее, подставим разложение (4.11) в контурный интеграл (2.40), учтем голоморфность оператор-функции $R_0^\perp(\zeta)$ внутри контура Γ , равенства (4.12), а также соотношение

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{1}{\zeta} R_0^\perp(\zeta) d\zeta = P^\perp \mathbb{A}(0, a, \mu)^{-1} P^\perp.$$

Легко видеть, что это приводит к искомым представлениям (2.20).

4.3. Оценки величин $\mathcal{A}_r(a)$ и $\mathcal{M}(a)$. В этом пункте мы покажем, что величины $\mathcal{A}_r(a)$, $r > 0$, и $\mathcal{M}(a)$, определенные согласно (1.18)–(1.21), допускают контроль в терминах $\|a\|_{L_1}$, $\|a\|_{L_2}$, $M_k(a)$, $k = 1, 2, 3$, при условиях (1.1)–(1.4) и дополнительном условии $a \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Оценки сверху тривиальны:

$$\mathcal{A}_r(a) \leq 2\|a\|_{L_1}, \quad r > 0; \quad (4.13)$$

$$\mathcal{M}(a) \leq M_2(a). \quad (4.14)$$

Установим оценки снизу.

Лемма 4.4. *Пусть выполнены условия (1.1) и (1.4). Тогда справедлива оценка*

$$\int_{|z| \leq \rho} a(z) dz \geq \frac{7}{8} \|a\|_{L_1}, \quad \rho \geq \rho_0(a) := 2M_3^{1/3}(a)\|a\|_{L_1}^{-1/3}. \quad (4.15)$$

Доказательство. Справедливы неравенства

$$\int_{|z| > \rho} a(z) dz \leq \rho^{-3} \int_{|z| > \rho} |z|^3 a(z) dz \leq \rho^{-3} M_3(a), \quad \rho > 0,$$

откуда вытекает (4.15). \square

Введем обозначение $\Pi_r^\theta(a) := \{z \in \mathbb{R}^d : |z| \leq \rho_0(a), |\langle z, \theta \rangle| \leq r\}$, $r > 0$, $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$. Нетрудно видеть, что справедливо неравенство

$$\text{mes } \Pi_r^\theta(a) \leq 2r \varkappa_{d-1} \rho_0^{d-1}(a), \quad (4.16)$$

где \varkappa_{d-1} — объем единичного шара в \mathbb{R}^{d-1} .

Лемма 4.5. *Пусть выполнены условия (1.1), (1.4) и справедливо включение $a \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Тогда имеет место оценка*

$$\begin{aligned} \int_{B_{\rho_0(a)}(0) \setminus \Pi_r^\theta(a)} a(z) dz &\geq \frac{1}{2} \|a\|_{L_1}, \quad |\theta| = 1, \quad r \in (0, r_0(a)], \\ r_0(a) &:= \left(\frac{3}{8} \|a\|_{L_1}\right)^2 \left(2\varkappa_{d-1} \rho_0^{d-1}(a) \|a\|_{L_2}^2\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Здесь величина $\rho_0(a)$ определена в (4.15).

Доказательство. В силу неравенства Коши и оценки (4.16) справедливы соотношения

$$\int_{\Pi_r^\theta(a)} a(z) dz \leq \|a\|_{L_2} \left(\text{mes } \Pi_r^\theta(a)\right)^{1/2} \leq \left(2r \varkappa_{d-1} \rho_0^{d-1}(a)\right)^{1/2} \|a\|_{L_2}, \quad r > 0, \quad |\theta| = 1. \quad (4.18)$$

Теперь (4.17) вытекает из (4.15) и (4.18). \square

Следующее утверждение дает оценку снизу постоянной $\mathcal{M}(a)$.

Лемма 4.6. *В условиях леммы 4.5 справедлива оценка*

$$\mathcal{M}(a) \geq \frac{1}{2} \|a\|_{L_1} r_0(a)^2, \quad (4.19)$$

где величина $r_0(a)$ определена в (4.17).

Доказательство. В силу (4.17) при каждом $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$ справедливы соотношения

$$M_a(\theta) = \int_{\mathbb{R}^d} a(z) \langle z, \theta \rangle^2 dz \geq \int_{B_{\rho_0(a)}(0) \setminus \Pi_{r_0(a)}^\theta(a)} a(z) \langle z, \theta \rangle^2 dz \geq \frac{1}{2} \|a\|_{L_1} r_0^2(a),$$

которые вместе с (1.21) и дают (4.19). \square

Лемма 4.7. Пусть величина $\hat{A}(y)$ определена в (1.18). В условиях леммы 4.5 справедлива оценка

$$\hat{A}(y) \geq \frac{1}{8} \|a\|_{L_1} r_0^2(a) |y|^2, \quad |y| \leq (2\rho_0(a))^{-1}.$$

Здесь $\rho_0(a)$ определено в (4.15), а $r_0(a) = \sigma$ (4.17).

Доказательство. Для произвольного $y \in \mathbb{R}^d$, удовлетворяющего условию

$$0 < |y| \leq (2\rho_0(a))^{-1},$$

обозначим через θ вектор $y/|y|$. Из элементарной оценки $1 - \cos t \geq \frac{1}{4}t^2$, $|t| \leq 1/2$, с учетом леммы 4.5 вытекают соотношения

$$\begin{aligned} \hat{A}(y) &= \int_{\mathbb{R}^d} (1 - \cos \langle z, y \rangle) a(z) dz \geq \int_{B_{\rho_0(a)}} (1 - \cos \langle z, y \rangle) a(z) dz \geq \frac{1}{4} \int_{B_{\rho_0(a)}} \langle z, y \rangle^2 a(z) dz \geq \\ &\geq \frac{1}{4} |y|^2 \int_{B_{\rho_0(a)} \setminus \Pi_{r_0(a)}^\theta(a)} \langle z, \theta \rangle^2 a(z) dz \geq \frac{1}{8} |y|^2 \|a\|_{L_1} r_0^2(a). \end{aligned}$$

□

Введем обозначение

$$Q_\tau^y(a) := \{z \in B_{\rho_0(a)}(0) : 1 - \cos \langle z, y \rangle \leq \tau\}, \quad |y| \geq (2\rho_0(a))^{-1}, \quad \tau \in (0, 1/2].$$

Нетрудно видеть, что справедливо равенство

$$\begin{aligned} Q_\tau^y(a) &= \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} Q_{\tau,n}^y(a), \\ Q_{\tau,n}^y(a) &:= \{z \in B_{\rho_0(a)}(0) : 2\pi n - \arccos(1 - \tau) \leq \langle z, y \rangle \leq 2\pi n + \arccos(1 - \tau)\}, \\ &\quad |y| \geq (2\rho_0(a))^{-1}, \quad \tau \in (0, 1/2]. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Лемма 4.8. Пусть выполнены условия (1.1) и (1.4). Тогда справедливы оценки

$$\#\{n \in \mathbb{Z} : Q_{\tau,n}^y(a) \neq \emptyset\} \leq \pi^{-1} |y| \rho_0(a) + 2, \quad |y| \geq (2\rho_0(a))^{-1}, \quad \tau \in (0, 1/2]; \quad (4.21)$$

$$\text{mes } Q_{\tau,n}^y(a) \leq 2|y|^{-1} \arccos(1 - \tau) \varkappa_{d-1} \rho_0^{d-1}(a), \quad |y| \geq (2\rho_0(a))^{-1}, \quad \tau \in (0, 1/2]. \quad (4.22)$$

Доказательство. Всякий вектор $z \in Q_{\tau,n}^y(a)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} (2n-1)\pi \leq \langle z, y \rangle \leq (2n+1)\pi, \\ -|y|\rho_0(a) \leq \langle z, y \rangle \leq |y|\rho_0(a). \end{cases}$$

Следовательно, если множество $Q_{\tau,n}^y(a)$ непусто, то справедливы неравенства

$$\begin{cases} -|y|\rho_0(a) \leq (2n+1)\pi, \\ (2n-1)\pi \leq |y|\rho_0(a). \end{cases}$$

Таким образом, имеет место оценка $|n| \leq (2\pi)^{-1} |y| \rho_0(a) + 1/2$, из которой вытекает (4.21).

Далее, чтобы оценить меру множества $Q_{\tau,n}^y(a)$, выберем первую из осей сонаправленной вектору y . Получим, что любой вектор $z \in Q_{\tau,n}^y(a)$ удовлетворяет неравенствам

$$2\pi n - \arccos(1 - \tau) \leq z_1 |y| \leq 2\pi n + \arccos(1 - \tau), \quad z_2^2 + \dots + z_d^2 \leq \rho_0^2(a),$$

из которых и следует (4.22). □

Из (4.20)–(4.22) вытекает следующий результат.

Лемма 4.9. Пусть выполнены условия (1.1) и (1.4). Тогда справедлива оценка

$$\operatorname{mes} Q_\tau^y(a) \leq \arccos(1 - \tau)N(a),$$

$$N(a) := \left(\frac{2}{\pi} + 8 \right) \varkappa_{d-1} \rho_0^d(a), \quad |y| \geq (2\rho_0(a))^{-1}, \quad \tau \in (0, 1/2]. \quad (4.23)$$

Здесь величина $\rho_0(a)$ определена в (4.15).

Из неравенства Коши и (4.23) вытекает соотношение

$$\int_{Q_\tau^y(a)} a(z) dz \leq \|a\|_{L_2} \left(\arccos(1 - \tau)N(a) \right)^{1/2}, \quad |y| \geq (2\rho_0(a))^{-1}, \quad \tau \in (0, 1/2]. \quad (4.24)$$

Найдем полуоткрытый интервал $(0, \tau_0(a)] \subset (0, 1/2]$ такой, что при $\tau \in (0, \tau_0(a)]$ правая часть неравенства (4.24) не превосходит $\frac{3}{8}\|a\|_{L_1}$. Нетрудно видеть, что можно выбрать

$$\tau_0(a) := \begin{cases} 1/2, & \text{если } \left(\frac{3}{8}\|a\|_{L_1}\|a\|_{L_2}^{-1} \right)^2 > \pi N(a); \\ \min \left\{ 1/2, 1 - \cos \left(N(a)^{-1} \left(\frac{3}{8}\|a\|_{L_1}\|a\|_{L_2}^{-1} \right)^2 \right) \right\}, & \text{если } \left(\frac{3}{8}\|a\|_{L_1}\|a\|_{L_2}^{-1} \right)^2 \leq \pi N(a). \end{cases} \quad (4.25)$$

Таким образом, из (4.15), (4.24) и (4.25) получаем следующее утверждение.

Лемма 4.10. В условиях леммы 4.5 справедлива оценка

$$\int_{B_{\rho_0(a)}(0) \setminus Q_\tau^y(a)} a(z) dz \geq \frac{1}{2}\|a\|_{L_1}, \quad |y| \geq (2\rho_0(a))^{-1}, \quad 0 < \tau \leq \tau_0(a). \quad (4.26)$$

Здесь величина $\rho_0(a)$ определена в (4.15), величина $N(a) = \sigma$ (4.23).

Из оценки (4.26) вытекает следующее утверждение.

Лемма 4.11. В условиях леммы 4.5 справедлива оценка

$$\hat{A}(y) \geq \frac{1}{2}\|a\|_{L_1}\tau_0(a), \quad |y| \geq (2\rho_0(a))^{-1}.$$

Здесь величина $\rho_0(a)$ определена в (4.15), величина $\tau_0(a) = \sigma$ (4.25).

В итоге из лемм 4.6, 4.7 и 4.11 с учетом (4.13), (4.14) получаем следующее утверждение.

Предложение 4.12. Пусть выполнены условия (1.1) и (1.4) и справедливо включение $a \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Тогда имеют место оценки

$$\frac{1}{2}\|a\|_{L_1}r_0(a)^2 \leq \mathcal{M}(a) \leq M_2(a);$$

$$\min \left\{ \frac{1}{8}\|a\|_{L_1}r_0(a)^2r^2, \frac{1}{2}\|a\|_{L_1}\tau_0(a) \right\} \leq \mathcal{A}_r(a) \leq 2\|a\|_{L_1}, \quad r > 0.$$

Здесь величина $r_0(a)$ определена в (4.17), величина $\tau_0(a) = \sigma$ (4.25).

Замечание 4.13. Как видно из предложения 4.12, при выполнении условий (1.1), (1.4) и $a \in L_2(\mathbb{R}^d)$ величина $\mathcal{M}(a)$ контролируется снизу через d , $\|a\|_{L_1}$, $\|a\|_{L_2}$ и $M_3(a)$, а величина $\mathcal{A}_r(a)$ — через те же параметры и r . При сделанных предположениях постоянная $C(a, \mu)$ из теоремы 3.1 контролируется через следующий набор параметров:

$$\mu_-, \mu_+, d, \|a\|_{L_1}, \|a\|_{L_2}, M_1(a), M_2(a), M_3(a).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Усреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.
- [2] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.
- [3] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), вып. 5, 1–108.
- [4] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учётом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), вып. 6, 1–104.
- [5] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учётом корректора. Приближение решений в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$* , Алгебра и анализ **18** (2006), вып. 6, 1–130.
- [6] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности при усреднении нестационарных периодических уравнений*, Алгебра и анализ **20** (2008), вып. 6, 30–107.
- [7] Борисов Д. И., *Асимптотики решений эллиптических систем с быстро осциллирующими коэффициентами*, Алгебра и анализ **20** (2008), вып. 2, 19–42.
- [8] Borisov D. I., Cardone G., Durante T., *Homogenization and norm resolvent convergence for elliptic operators in a strip perforated along a curve*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, Section: A Math. **146** (2016), no. 6, 1115–1158.
- [9] Borisov D. I., Cardone G., Faella L., Perugia C., *Uniform resolvent convergence for strip with fast oscillating boundary*, J. Diff. Equ. **255** (2013), no. 12, 4378–4402.
- [10] Борисов Д. И., Шарапов Т. Ф., *О резольвенте многомерных операторов с частой сменой краевых условий в случае третьего усредненного условия*, Проблемы мат. анализа **83** (2015), 3–40.
- [11] Braides A., Piatnitski A., *Homogenization of quadratic convolution energies in periodically perforated domains*, Adv. Calc. Var. (2019), <https://doi.org/10.1515/acv-2019-0083>.
- [12] Cherednichenko K. D., Cooper S., *Resolvent estimates for high-contrast elliptic problems with periodic coefficients*, Arch. Ration. Mech. Anal. **219** (2016), 1061–1086.
- [13] Cherednichenko K., Ershova Y., Kiselev A., *Effective behavior of critical-contrast PDEs: microresonances, frequency conversion, and time dispersive properties*, Comm. Math. Phys. **375** (2020), 1833–1884.
- [14] Cherednichenko K. D., Kiselev A. V., *Norm-resolvent convergence of one-dimensional high-contrast periodic problems to a Kronig-Penney dipole-type model*, Comm. Math. Phys. **349** (2017), 441–480.
- [15] Василевская Е. С., *Усреднение параболической задачи Коши с периодическими коэффициентами при учёте корректора*, Алгебра и анализ **21** (2009), вып. 1, 3–60.
- [16] Вениаминов Н. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов высокого порядка*, Алгебра и анализ **22** (2010), вып. 5, 69–103.
- [17] Geng J., Shen Z., *Convergence rates in parabolic homogenization with time-dependent coefficients*, J. Funct. Anal. **272** (2017), 2092–2113.
- [18] Gloria A., Otto F., *An optimal variance estimate in stochastic homogenization of discrete elliptic equations*, Ann. Probab. **39** (2011), no. 3, 779–856.
- [19] Gloria A., Otto F., *Quantitative results on the corrector equation in stochastic homogenization*, J. European Math. Soc. **19** (2017), no. 11, 3489–3548.
- [20] Griso G., *Error estimate and unfolding for periodic homogenization*, Asymptot. Anal. **40** (2004), no. 3/4, 269–286.
- [21] Griso G., *Interior error estimate for periodic homogenization*, Anal. Appl. **4** (2006), no. 1, 61–79.
- [22] Gu S., *Convergence rates in homogenization of Stokes system*, J. Diff. Equ. **260** (2016), no. 7, 5796–5815.
- [23] Dorodnyi M. A., *Operator error estimates for homogenization of the nonstationary Schrödinger-type equations: sharpness of the results*, Appl. Anal. (2021), <http://dx.doi.org/10.1080/00036811.2021.1901886>.
- [24] Dorodnyi M. A., Suslina T. A., *Spectral approach to homogenization of hyperbolic equations with periodic coefficients*, J. Diff. Equ. **264** (2018), no. 12, 7463–7522.
- [25] Дородный М. А., Суслина Т. А., *Усреднение гиперболических уравнений с периодическими коэффициентами в \mathbb{R}^d : точность резульматов*, Алгебра и анализ **32** (2020), вып. 4, 3–136.
- [26] Dorodnyi M. A., Suslina T. A., *Homogenization of a non-stationary periodic Maxwell system in the case of constant permeability*, J. Diff. Equ. **307** (2022), 348–388.
- [27] Жиков В. В., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Докл. РАН **403** (2005), вып. 3, 305–308.
- [28] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1993.
- [29] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys. **12** (2005), no. 4, 515–524.
- [30] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients*, Russ. J. Math. Phys. **13** (2006), no. 2, 224–237.
- [31] Жиков В. В., Пастухова С. Е., *Операторные оценки в теории усреднения*, Успехи матем. наук **71** (2016), вып. 3, 27–122.

- [32] Kenig C. E., Lin F., Shen Z., *Convergence rates in L^2 for elliptic homogenization problems*, Arch. Ration. Mech. Anal. **203** (2012), no. 3, 1009–1036.
- [33] Kesavan S., *Homogenization of elliptic eigenvalue problems: Part I*, Appl. Math. Optim. **5** (1979), no. 2, 153–167.
- [34] Kesavan S., *Homogenization of elliptic eigenvalue problems: Part II*, Appl. Math. Optim. **5** (1979), no. 3, 197–216.
- [35] Kondratiev Yu., Kutoviy O., Pirogov S., *Correlation functions and invariant measures in continuous contact model*, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics **11** (2008), no. 2, 231–258.
- [36] Kondratiev Yu., Molchanov S., Pirogov S., Zhizhina E., *On ground state of some non local Schrödinger operators*, Appl. Anal. **96** (2017), no. 8, 1390–1400.
- [37] Kondratiev Yu., Pirogov S., Zhizhina E., *A quasispecies continuous contact model in a critical regime*, J. Stat. Phys. **163** (2016), no. 2, 357–373.
- [38] Кукушкин А. А., Суслина Т. А., Усреднение эллиптических операторов высокого порядка с периодическими коэффициентами, Алгебра и анализ **28** (2016), вып. 1, 89–149.
- [39] Meshkova Yu. M., *On operator error estimates for homogenization of hyperbolic systems with periodic coefficients*, J. Spectr. Theory **11** (2021), no. 2, 587–660.
- [40] Meshkova Yu. M., Suslina T. A., *Homogenization of initial boundary-value problems for parabolic systems with periodic coefficients*, Appl. Anal. **95** (2016), no. 8, 1736–1775.
- [41] Милослава А. А., Суслина Т. А., Усреднение параболических уравнений высокого порядка с периодическими коэффициентами, Современная математика. Фундаментальные направления **67** (2021), вып. 1, 130–191.
- [42] Pastukhova S. E., *Estimates in homogenization of higher-order elliptic operators*, Appl. Anal. **95** (2016), no. 2, 1–18.
- [43] Пастухова С. Е., *L^2 -аппроксимация резольвенты в усреднении эллиптических операторов четвертого порядка*, Матем. сборник **212** (2021), вып. 1, 111–134.
- [44] Пастухова С. Е., Тихомиров Р. Н., *Операторные оценки повторного и локально-периодического усреднения*, Докл. РАН **415** (2007), вып. 3, 304–309.
- [45] Пастухова С. Е., Тихомиров Р. Н., *Операторные оценки локально-периодического и повторного усреднения: параболические уравнения*, Докл. РАН **428** (2009), вып. 2, 166–170.
- [46] Пахнин М. А., Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности при усреднении эллиптической задачи Дирихле в ограниченной области*, Алгебра и анализ **24** (2012), вып. 6, 139–177.
- [47] Piatnitski A., Zhizhina E., *Periodic homogenization of nonlocal operators with a convolution-type kernel*, SIAM J. Math. Anal. **49** (2017), no. 1, 64–81.
- [48] Piatnitski A., Zhizhina E., *Homogenization of biased convolution type operators*, Asymptotic Anal. **115** (2019), no. 3-4, 241–262.
- [49] Piatnitski A., Zhizhina E., *Stochastic homogenization of convolution type operators*, J. Math. Pures Appl. **134** (2020), 36–71.
- [50] Сеник Н. Н., *Об усреднении несамосопряженных локально периодических эллиптических операторов*, Функц. анализ и его прил. **51** (2017), вып. 2, 92–96.
- [51] Сеник Н. Н., *Об усреднении локально периодических эллиптических и параболических операторов*, Функц. анализ и его прил. **54** (2020), вып. 1, 87–92.
- [52] Senik N. N., *Homogenization for locally periodic elliptic operators*, J. Math. Anal. Appl. **505** (2022), no. 2, DOI:10.1016/j.jmaa.2021.125581.
- [53] Скриганов М. М., *Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов*, Тр. МИАН СССР **171** (1985), 3–122.
- [54] Слоупщ В. А., Суслина Т. А., Усреднение эллиптического оператора четвертого порядка с периодическими коэффициентами при учете корректоров, Функц. анализ и его прил. **54** (2020), вып. 3, 94–99.
- [55] Суслина Т. А., Усреднение стационарной периодической системы Максвелла, Алгебра и анализ **16** (2004), вып. 5, 162–244.
- [56] Суслина Т. А., *Об усреднении периодических параболических систем*, Функц. анализ и его прил. **38** (2004), вып. 4, 86–90.
- [57] Суслина Т. А., Усреднение стационарной периодической системы Максвелла с учетом корректора, Алгебра и анализ **19** (2007), вып. 3, 183–235.
- [58] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem*, Amer. Math. Soc. Transl. (2), vol. 220, 2007, 201–233.
- [59] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem in the Sobolev space $H^1(\mathbb{R}^d)$* , Math. Model. Nat. Phenom. **5** (2010), no. 4, 390–447.
- [60] Suslina T. A., *Homogenization of the Dirichlet problem for elliptic systems: L_2 -operator error estimates*, Mathematika **59** (2013), no. 2, 463–476.
- [61] Suslina T. A., *Homogenization of the Neumann problem for elliptic systems with periodic coefficients*, SIAM J. Math. Anal. **45** (2013), no. 6, 3453–3493.
- [62] Suslina T. A., *Spectral approach to homogenization of nonstationary Schrödinger-type equations*, J. Math. Anal. Appl. **446** (2017), no. 2, 1466–1523.

- [63] Суслина Т. А., Усреднение задачи Дирихле для эллиптических уравнений высокого порядка с периодическими коэффициентами, Алгебра и анализ **29** (2017), вып. 2, 139–192.
- [64] Suslina T. A., Homogenization of the Neumann problem for higher order elliptic equations with periodic coefficients, Complex Variables and Elliptic Equations **63** (2018), no. 7-8, 1185–1215.
- [65] Суслина Т. А., Усреднение стационарной периодической системы Максвелла в ограниченной области в случае постоянной магнитной проницаемости, Алгебра и анализ **30** (2018), вып. 3, 169–209.
- [66] Suslina T. A., Homogenization of the stationary Maxwell system with periodic coefficients in a bounded domain, Arch. Ration. Mech. Anal. **234** (2019), no. 2, 453–507.
- [67] Suslina T. A., Homogenization of higher-order parabolic systems in a bounded domain, Appl. Anal. **98** (2019), no. 1-2, 3–31.
- [68] Suslina T. A., Homogenization of the higher-order Schrödinger-type equations with periodic coefficients, in Partial Differential Equations, Spectral Theory, and Mathematical Physics. The Ari Laptev Anniversary Volume, edited by Pavel Exner, Rupert L. Frank, Fritz Gesztesy, Helde Holden, and Timo Weidl. European Mathematical Society, EMS Publishing House GmbH, 2021.
- [69] Suslina T. A., Homogenization of the higher-order hyperbolic equations with periodic coefficients, Lobachevskii J. Math. (2022), to appear.
- [70] Vanninathan M., Homogenization of eigenvalue problems in perforated domains, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **90** (1981), no. 3, 239–271.
- [71] Юринский В. В., Об усреднении эллиптической краевой задачи со случайными коэффициентами, Сиб. матем. журн. **21** (1980), вып. 3, 209–223.