

## О РОСТЕ ЧИСЛА ПРОСТЫХ УЗЛОВ

**И. С. Алексеев, А. М. Вершик, А. В. Малютин**

Санкт-Петербургское отделение  
математического института им. В. А. Стеклова РАН,  
наб. р. Фонтанки, д. 27, 191023, Санкт-Петербург, Россия  
ilyaalekseev@yahoo.com, avershik@pdmi.ras.ru, malyutin@pdmi.ras.ru

### АННОТАЦИЯ

Мы конструируем вложения локально свободных полугрупп в множество узлов. Эти вложения и результаты А. Вершика, С. Нечаева и Р. Бикбова о логарифмическом объеме локально свободных полугрупп дают новую рекордную нижнюю оценку на скорость роста числа узлов при росте числа перекрестков.

**Ключевые слова:** узел, зацепление, коса, тэнгл, уникарсальная кривая, альтернированный узел, простой узел, гипотезы Тейта, шахматный граф, локально свободная группа, полусвободная группа, граф-группа, прямоугольная группа Артина, (свободная) частично коммутативная группа, группа кос, скорость роста.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 21-11-00152).

ПРЕПРИНТЫ  
Санкт-Петербургского отделения  
Математического института им. В. А. Стеклова  
Российской академии наук

PREPRINTS  
of the St. Petersburg Department  
of Steklov Institute of Mathematics

---

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В. М. Бабич, Н. А. Вавилов, А. М. Вершик, М. А. Всемиров,  
А. И. Генералов, И. А. Ибрагимов, Л. Ю. Колотилина,  
Ю. В. Матиясевич, Н. Ю. Нецветаев,  
С. И. Репин, Г. А. Серегин

# 1 Введение

Задача о числе узлов с данным числом перекрестков относится к классическим вопросам теории узлов и комбинаторики. Вопрос об асимптотике этого числа исследовался, в частности, в работах [ES87, Wel92, STh98, Th98, St04, Ch18]. Хорошо известна вытекающая из результатов работы [ES87] оценка

$$2.13\dots \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{AP_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{P_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{K_n},$$

где  $AP_n$ ,  $P_n$  и  $K_n$  — количества альтернированных простых, простых и всех узлов с  $n$  перекрестками соответственно.<sup>1</sup> В настоящей работе мы получаем следующую оценку.

**Теорема 1.**  $4 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{AP_n}.$

Эта оценка использует результат А. Вершика, С. Нечаева и Р. Бикбова [VNB00] о том, что логарифмический объем локально свободных полугрупп стремится к 4 с ростом ранга. Напомним, что локально свободной полугруппой ранга  $r$  называется полугруппа с образующими  $\{a_1, \dots, a_r\}$  и соотношениями

$$a_i a_j = a_j a_i \quad \text{при } |i - j| \geq 2.$$

Элементы локально свободных полугрупп называются *грудями*, общее количество букв в слове, представляющем груду, называется *размером* груды, а дизъюнктивное объединение всех локально свободных полугрупп мы называем *множеством груд*. Теорема 1 прямо следует из указанного результата [VNB00] о логарифмическом объеме в силу следующего предложения.

**Предложение 1.** *Существует вложение множества груд в множество простых альтернированных узлов, при котором груды размера  $s$  из локально свободной полугруппы ранга  $r$  переходят в узел с числом перекрестков  $s + 10r + 100$ .*

Конструкции вложения из предложения 1 и посвящен остаток работы. Благодаря доказанным в [Kau87, Mur87, Th87], [MT93], [Gr17] гипотезам Тейта, задача сводится к построению вложения множества груд в один специальный класс сферических кривых.

## 2 Доказательство предложения 1

Мы не приводим стандартных определений теории узлов (простые и альтернированные узлы, флайпы и т. п.), — их нетрудно найти в обширной литературе по теории узлов и в вышеуказанных работах, в частности. Дадим лишь некоторые определения, относительно которых в литературе встречаются разночтения.

<sup>1</sup>Оценка  $2.68 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{AP_n}$ , приведенная в [Wel92] как интерпретация результатов из [ES87], возникла, по-видимому, в результате опечатки.

Под *кривыми* в настоящей работе понимаются гладкие замкнутые кривые общего положения на плоскости или сфере. *Мультикривая* – объединение конечного числа кривых, также находящееся в общем положении. Мы рассматриваем кривые и мультикривые с точностью до автогомеоморфизмов (не обязательно сохраняющих ориентацию) сферы и плоскости. Кривую будем называть *составной*, если при удалении некоторой пары регулярных точек она распадается на две компоненты, ни одна из которых не является дугой, либо если она распадается при удалении одной из двойных точек (случай “восьмерки”). Кривую, не являющуюся составной, будем называть *примарной*. Кривая называется *бесфлайповой*, если отвечающая ей альтернированная диаграмма не допускает нетривиальных (т. е. переводящих кривую в другой класс) флайпов.

В силу гипотез Тейта [Kau87, Mur87, Th87], [MT93], [Gr17] переход от кривой к соответствующей ей альтернированной диаграмме и узлу дает вложение множества примарных бесфлайповых кривых с  $n > 0$  двойными точками в множество простых альтернированных узлов с  $n$  перекрестками. Это сводит доказательство предложения 1 к следующему утверждению.

**Предложение 2.** *Существует вложение множества груд в множество бесфлайповых примарных замкнутых кривых на сфере, при котором груда размера  $s$  из локально свободной полугруппы ранга  $r$  переходит в кривую с  $s + 10r + 100$  двойными точками.*

Для доказательства предложения 2 мы в явном виде дадим пример отображения, сопоставляющего каждой груде некоторый класс кривых на сфере, а затем покажем, что получающиеся в нашем примере кривые являются бесфлайповыми и примарными, а отображение инъективно. Кривую по заданной груде будем строить в несколько этапов. В этом построении нам потребуется следующая конструкция.

## 2.1 Сопоставление груде набора дуг в прямоугольнике

Будем ставить в соответствие элементам локально свободной полугруппы  $\mathcal{LF}_k^+$  ранга  $k$  наборы из  $k + 1$  простых гладких дуг в прямоугольниках. Образующей  $a_i$  поставим в соответствие набор дуг в прямоугольнике  $[0, k + 2] \times [0, 1]$ : в набор входят отрезки  $\gamma_j$  с концами в точках  $(j, 0)$  и  $(j, 1)$  для каждого  $j \in \{1, \dots, k + 1\} \setminus \{i, i + 1\}$  и две гладкие дуги с концами в точках  $(i, 0)$ ,  $(i + 1, 1)$ ,  $(i + 1, 0)$  и  $(i + 1, 1)$ , пересекающиеся лишь в одной точке и трансверсально, перпендикулярные к краю прямоугольника и содержащиеся в квадрате  $[i, i + 1] \times [0, 1]$ . Слово в образующих  $a_1, \dots, a_k$  поставим в соответствие набор из  $k + 1$  дуги, получающийся при последовательном склеивании (по длинным сторонам) прямоугольников с наборами дуг, отвечающими образующим. Элементу полугруппы поставим в соответствие набор из  $k + 1$  дуги в прямоугольнике, отвечающий слову в образующих  $a_1, \dots, a_k$ , представляющих заданный элемент в той или иной нормальной форме. Ясно, что при таком сопоставлении наборы дуг, отвечающие разным словам, представляющим один и тот же элемент, переводятся друг в друга

неподвижной на крае изотопией прямоугольника, и поскольку наборы дуг интересуют нас лишь с точностью до эквивалентности, отвечающей таким объемлющим изотопиям, выбор нормальной формы не играет роли.

## 2.2 Сопоставление грусам мультикривых

В случае локально свободной полугруппы  $\mathcal{LF}_k^+$  нечетного ранга  $k = 2\ell + 1$  поставим в соответствие ее элементам еще и классы мультикривых, считая, что элементу  $E \in \mathcal{LF}_k^+$  отвечает мультикривая, получающаяся из соответствующего элементу  $E$  набора дуг в прямоугольнике при доклейке к этому прямоугольнику – по двум сторонам, содержащим концы дуг – еще двух прямоугольников, на каждом из которых имеется набор  $\ell + 1$  попарно непесекающихся простых дуг, каждая из которых при приклейке соединяет пару “соседних” концов дуг в прямоугольнике. Этот переход от наборов дуг к мультикривым – то же самое, что и хорошо известное “плетеночное” замыкание для геометрических кос и их диаграмм, и мы ссылаемся на него как на *плетеночное замыкание*.

Теперь мы переходим непосредственно к дающему вложение для доказываемого предложения 2 алгоритму построения сферической замкнутой кривой по гусе.

## 2.3 Построение кривой для гусы

Пусть нам задана гуса  $H$  размера  $s$  из локально свободной полугруппы  $\mathcal{LF}_r^+$  ранга  $r$ .

### 2.3.1 Этап I. Построение мультикривой

От локально свободной полугруппы  $\mathcal{LF}_r^+$  ранга  $r$  перейдем к локально свободной полугруппе  $\mathcal{LF}_R^+$  чуть большего нечетного ранга

$$R = r + (r \bmod 2) + 9$$

и будем рассматривать  $\mathcal{LF}_r^+$  как подгруппу, вложенную в  $\mathcal{LF}_R^+$  со сдвигом индексов образующих  $a_i \mapsto a_{i+2}$ . Пусть  $H_R$  – элемент в  $\mathcal{LF}_R^+$ , отвечающий заданной гусе  $H$  при таком вложении. Положим

$$\begin{aligned} L_{R,od} &= a_1 a_3 \dots a_{R-2} a_R, \\ L_{R,ev} &= a_2 a_4 \dots a_{R-3} a_{R-1}, \\ W_R &= L_{R,ev} L_{R,od}, \\ M_R &= L_{R,od} L_{R,ev}, \\ \bar{H}_R &= W_R H_R M_R M_R. \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть  $\hat{H}_R$  – мультикривая на плоскости, отвечающая элементу  $\bar{H}_R$  в смысле раздела 2.2.

### 2.3.2 Этап II. Переход от мультикривой к кривой

Из конструкции ясно, что полученную мультикривую  $\hat{H}_R$  можно считать расположенной на плоскости так, что все ее максимумы и минимумы приходятся на “дужки”, приклеиваемые в построениях раздела 2.2, так что максимумов, как и минимумов, у  $\hat{H}_R$  в точности  $(R+1)/2$ . Следовательно, количество замкнутых компонент мультикривой  $\hat{H}_R$  не превышает  $(R+1)/2$ . Пусть  $X$  – набор из  $(R+1)/2$  перекрестков мультикривой  $\hat{H}_R$ , отвечающих предпоследнему множителю  $L_{R,od}$  при записи груди  $\bar{H}_R$  в виде  $W_R H_R M_R L_{R,od} L_{R,ev}$  (см. (1)). Будем считать, что правой части записи (1) отвечает “верхняя” часть мультикривой, подходящая к ее максимумам, а левой части записи отвечает “нижняя” часть мультикривой. Из того, что форма верхнего края мультикривой отвечает правой части  $L_{R,od} L_{R,ev}$  в (1), ясно, что в каждом максимуме мультикривой сходятся две дуги, ведущие к разным перекресткам набора  $X$ . Отсюда вытекает, что в случае, если мультикривая  $\hat{H}_R$  не является кривой, в каком-то из перекрестков множества  $X$  пересекаются различные компоненты. Заменяв такой перекресток двумя – способом, отвечающим замене одной из образующих в  $L_{R,od}$  на ее квадрат – мы перейдем от  $\hat{H}_R$  к мультикривой  $\hat{H}'_R$  с меньшим числом компонент. Для определенности можно считать, что среди нескольких перекрестков, в которых пересекаются различные компоненты, мы выбираем для трансформации тот, которому отвечает образующая с большим индексом. Из индукционного соображения вытекает, что, проводя при необходимости аналогичную процедуру еще с какими-то из перекрестков набора  $X$  и каждый раз уменьшая количество компонент, не более чем за  $R/2$  таких трансформаций мы перейдем от  $\hat{H}_R$  к кривой.<sup>2</sup> Обозначим получающуюся кривую через  $\bar{H}_R^{(2)}$ . Заметим, что по построению кривая  $\bar{H}_R^{(2)}$  отвечает плетеночному замыканию некоторого элемента вида

$$\bar{H}_R^{(2)} = W_R H_R M_R L_{R,od}^{(2)} L_{R,ev} \quad (2)$$

$$\text{с } L_{R,od}^{(2)} = a_1^{p_1} a_3^{p_3} \dots a_{R-2}^{p_{R-2}} a_R^{p_R},$$

где  $p_j \in \{1, 2\}$  для всех  $j$ . Заметим, кроме того, что, поскольку подгруда  $L_{R,od}^{(2)}$  в груди  $\bar{H}_R^{(2)}$  предшествует подгруда  $L_{R,ev}$ , содержащая все образующие с четными индексами, а  $L_{R,od}^{(2)}$  и  $L_{R,od}$  включают лишь и, следовательно, отличаются лишь образующими с нечетными индексами, груда  $\bar{H}_R$  однозначно восстанавливается по груди  $\bar{H}_R^{(2)}$ .

### 2.3.3 Этап III. Переход к кривой с $s+10r+100$ двойными точками

По построению, размер груди  $\bar{H}_R$  на  $3R$  превышает размер груди  $H$  и таким образом составляет  $s+3R$ , а размер  $s(\bar{H}_R^{(2)})$  груди  $\bar{H}_R^{(2)}$  (и, соответственно,

<sup>2</sup>Отметим, что для трансформации мультикривой в кривую можно аналогичным способом вместо перекрестков, отвечающих предпоследнему множителю в (1), использовать перекрестки, отвечающие, скажем, последнему множителю. Однако в этом случае результат может дать кривую, допускающую флайпы (см. раздел 2.4.2).

количество перекрестков в  $\widehat{H}_R^{(2)}$ ) не превышает  $s + 3R + R/2$ . Положим

$$\begin{aligned}\delta &= s + 10r + 100 - s(\bar{H}_R^{(2)}), \\ L_{R,od}^{(3)} &= L_{R,od}^{(2)} a_R^\delta = a_1^{p_1} a_3^{p_3} \dots a_{R-2}^{p_{R-2}} a_R^{p_R + \delta}, \\ \bar{H}_R^{(3)} &= L_{R,ev} L_{R,od} H_R L_{R,od} L_{R,ev} L_{R,od}^{(3)} L_{R,ev}.\end{aligned}\tag{3}$$

Отвечающую груде  $\bar{H}_R^{(3)}$  мультикривую обозначим через  $\widehat{H}_R^{(3)}$ .

Поскольку груда  $H_R$  приходит из полугруппы  $\mathcal{LF}_r^+$  ранга  $r$  со сдвигом 2, она не задействует образующих  $a_R, a_{R-1}, a_{R-2}, a_{R-3}, a_{R-4}, a_{R-5}, a_{R-6}$ . Отсюда по определению элементов  $\bar{H}_R, \bar{H}_R^{(2)}$  и  $\bar{H}_R^{(3)}$  и в силу конструкции используемого нами отображения из груд в мультикривые видно, что перекресток в кривой  $\widehat{H}_R$ , лежащий в множестве  $X$  и отвечающий образующей  $a_R$ , является “вершиной” узкой петли, так что  $p_R = 1$ , а при трансформации  $\widehat{H}_R^{(2)} \rightarrow \widehat{H}_R^{(3)}$  на этой петле возникают дополнительные “перекрутки”, но  $\widehat{H}_R^{(3)}$  продолжает оставаться кривой, как и  $\widehat{H}_R^{(2)}$ . Количество двойных точек кривой  $\widehat{H}_R^{(3)}$  составляет  $s + 10r + 100$ . Заметим, кроме того, что в силу соображений, высказанных в завершение построений предыдущего этапа, груда  $\bar{H}_R$  однозначно восстанавливается по груде  $\bar{H}_R^{(3)}$ .

### 2.3.4 Этап IV. Переход к сферической кривой

Обозначим через  $\bar{H}_R^{(4)}$  отвечающий плоской кривой  $\bar{H}_R^{(3)}$  класс сферических кривых.

## 2.4 Проверка свойств построенной кривой $\widehat{H}_R^{(4)}$

Полученная по груде  $H$  кривая  $\widehat{H}_R^{(4)}$  по построению является кривой (а не многокомпонентной мультикривой) и имеет ровно  $s + 10r + 100$  двойных точек. Покажем, что она является примарной и бесфлайповой.

### 2.4.1 Примарность

Из конструкции плетеночного замыкания (разделы 2.1 и 2.2) видно, что необходимым условием составности отвечающей груде  $\mathcal{LF}_{2\ell+1}^+$  мультикривой является наличие в наборе  $a_1, \dots, a_{2\ell+1}$  образующей, задействованной в записи груды в стандартных образующих не более одного раза. Из (3) видно, что каждая из образующих входит в записи груды  $\bar{H}_R^{(3)}$  по меньшей мере трижды.

### 2.4.2 Бесфлайповость

В бесфлайповости кривых  $\widehat{H}_R^{(3)}$  и  $\widehat{H}_R^{(4)}$  можно убедиться перебором перекрестков в ее структуре либо, например, – и в рассматриваемом случае это, по-видимому, более эффективный способ – обратившись к так называемым

шахматным графам (являющихся, в действительности, мультиграфами – плоскими картами), сопутствующим кривой. Как вытекает непосредственно из определений флайпа и шахматных графов, у кривой, допускающей флайп, в одном из двух сопутствующих кривой шахматных графов флайпу отвечает пара смежных (т. е. связанных ребром) вершин, обладающая следующим свойством (которое мы будем называть *разделяющим* или *разбивающим*): все остальные вершины графа разбиваются на два подмножества так, что любой путь из вершины первого подмножества в вершину второго проходит через вершины обсуждаемой пары. Назовем такие отвечающие флайпу пары вершин *флайп-вершинами*. (Во втором шахматном графе флайпу также отвечает специальная конфигурация, но в рассматриваемом сейчас случае для доказательства мы используем только флайп-вершины.)

Шахматные графы мультикривых, отвечающих плетеночным замыканиям невырожденных (с достаточным количеством вхождений каждой из образующих) груд из  $\mathcal{LF}_{2\ell+1}^+$ , имеют четко выраженную специфическую структуру – один из них имеет в своей основе набор из  $\ell + 1$  простых попарно непересекающихся дуг, отвечающих образующим с нечетными индексами, второй – букет из  $\ell$  окружностей, отвечающих образующим с четными индексами. В нашем случае, когда гряда “начинается” специфической подгрудой  $W_R$ , а завершается на  $M_R L_{R,od}^{(3)} L_{R,ev}$ , один из двух шахматных графов – будем называть его *прямоугольным* – представляется в форме прямоугольника: часть его ребер можно организовать в  $(R + 1)/2$  вертикальных отрезка (включая две стороны прямоугольника), все его вершины лежат на этих отрезках (назовем их *главными*) и занимают, в частности, концы, а остальные ребра соединяют вершины на соседних отрезках.

Будучи смежными, вершины из флайп-пары в прямоугольном шахматном графе должны располагаться на одном или на двух соседних главных отрезках.

Если две смежные вершины прямоугольного шахматного графа располагаются на одном и том же главном отрезке, то обладать разбивающим свойством они могут лишь в случае, если являются концами главного отрезка. Такой вариант в нашем случае невозможен, поскольку стартовый и финальный элементы  $W_R$  и  $M_R L_{R,od}^{(3)} L_{R,ev}$  уже дают вклад в виде трех вершин на каждом главном отрезке.

Если две смежные вершины (прямоугольного шахматного графа) располагаются на соседних главных отрезках и обладают разделяющим свойством, то либо эти вершины являются концами главных отрезков, лежащими на разных сторонах прямоугольника (что также исключается наличием стартового и финального элементов  $W_R$  и  $M_R L_{R,od}^{(3)} L_{R,ev}$ , благодаря которым для каждой пары соседних главных отрезков в прямоугольном шахматном графе имеются две смежные вершины, лежащие в относительных внутренностях этих отрезков), либо одна из этих вершин лежит в относительной внутренности главного отрезка, являющегося стороной нашего прямоугольника, а вторая вершина является концом соседнего главного отрезка. В последнем случае нетривиальный флайп был бы возможен, если бы

две соседних концевых вершины рассматриваемых главных отрезков были соединены несколькими ребрами, но форма кривой, определяемая элементами  $W_R$  и  $M_R L_{R,od}^{(3)} L_{R,ev}$ , исключает и этот вариант.

Перейдем теперь к второму, дополняющему прямоугольный, шахматному графу, сопутствующему кривой  $\bar{H}_R^{(3)}$ . Назовем этот шахматный граф *букетным*. Как нетрудно видеть из конструкции, в основе этого графа лежит букет из  $(R-1)/2$  окружностей – назовем эти окружности *главными*; каждая из них, как и главные отрезки в случае прямоугольного графа, отвечает одной из образующих. Вершина букета отвечает внешней компоненте связности дополнения кривой, все вершины букетного шахматного графа лежат на главных окружностях. Отсюда следует, что пара смежных вершин в букетном шахматном графе может обладать разбивающим свойством лишь если одна из этих вершин является вершиной букета. Поскольку из-за условия об элементах  $W_R$  и  $M_R L_{R,od}^{(3)} L_{R,ev}$  для каждой пары соседних главных окружностей в букетном шахматном графе имеется по меньшей мере два ребра с непересекающимися множествами концевых вершин, связывающие эти окружности, вторая вершина пары смежных вершин с разбивающим свойством может лежать только на одной из крайних окружностей. Флайп в таком случае был бы возможен либо при  $R=3$  и единственной главной окружности (но  $R>7$ ), либо в случае, когда вершина букета и вторая вершина флайп-пары отделяют от крайней главной окружности, на которой они лежат, дугу с вершинами, не связанными ребрами с вершинами соседней главной окружности, однако форма кривой, определяемая элементами  $W_R$  и  $M_R L_{R,od}^{(3)} L_{R,ev}$ , исключает этот вариант.

Итак, проведенный перебор вариантов показывает, что у шахматных графов кривых  $\hat{H}_R^{(3)}$  и  $\hat{H}_R^{(4)}$  отсутствуют подходящие пары флайп-вершин, так что эти кривые являются бесфлайповыми.

## 2.5 Проверка инъективности отображения $H \mapsto \hat{H}_R^{(4)}$

Для проверки инъективности построенного отображения достаточно убедиться в том, что по получаемому “на выходе” вышеописанной процедуры классу кривых  $\hat{H}_R^{(4)}$  однозначно восстанавливаются гряда  $H$  и ранг  $r$  исходной полугруппы. Мы проведем доказательство через шахматные графы, ориентируясь на цепочку “кривая  $\hat{H}_R^{(4)}$  – ее шахматные графы – гряда  $\bar{H}_R^{(3)}$  – гряда  $H$ ”. Шахматные графы по кривой строятся автоматически, переход от гряды  $\bar{H}_R^{(3)}$  к гряде  $H$  также не представляет сложности. Основной момент здесь – переход от шахматных графов к соответствующей гряде. Шахматные графы кривой  $\hat{H}_R^{(4)}$  в силу организации нашей конструкции представляют собой не что иное, как специфические “графические” формы записи гряды  $\bar{H}_R^{(3)}$  – буквам представляющего гряду слова в стандартных образующих биективно соответствуют ребра шахматного графа – и, обладая информацией о том, какие из ребер графа относятся к главным отрезкам или главным окружностям, какая из возможных ориентаций отвечает верху и

низу груды и т. п., т. е. зная участок шахматного графа, отвечающий “началу” груды, и соответствие между ориентациями, мы могли бы легко “считывать” представляющие груды слова напрямую с шахматного графа. Однако исходно мы не снабжены информацией о том, с какого фрагмента шахматного графа и в каком направлении начинать “считывание”, поскольку при переходе к сферической кривой  $\widehat{H}_R^{(4)}$  происходит “забывание” информации об ориентациях, о том, какая из компонент дополнения кривой  $\widehat{H}_R^{(4)}$  отвечает внешней компоненте дополнения плоской кривой  $\widehat{H}_R^{(3)}$ , и т. п. Таким образом, в рамках выбранного подхода основная сложность при проверке инъективности состоит в задаче распознавания структур в заданных шахматных графах. В ходе дальнейшего изложения мы сперва приведем детали того, как получить информацию об этих структурах в шахматных графах (сосредоточившись при этом на случае букетных, а не на прямоугольных, графов), а затем приведем ряд уточняющих деталей о восстановлении груды и ранга по букетному графу, снабженному необходимой информацией.

### 2.5.1 Информация о букетном шахматном графе

Покажем, что информация о комбинаторной структуре кривой  $\widehat{H}_R^{(4)}$  позволяет установить,

- (P1) какой из двух сопутствующих кривой шахматных графов является букетным,
- (P2) какая из вершин букетного графа является корневой,
- (P3) какие из циклов букетного графа являются главными окружностями,
- (P4) какая из главных окружностей букетного графа отвечает образующей с бóльшим индексом,
- (P5) какая из ориентаций главных окружностей букетного графа отвечает естественному порядку записи “слева направо” в исходной груды.

Введем для этого серию новых терминов. Ребро (мульти)графа назовем *одиноким*, если оно не является петлей и имеет единичную кратность, т. е. если в мультиграфе не имеется других ребер, соединяющих ту же пару вершин. Реберный цикл в расположенном на плоскости или сфере мультиграфе назовем *специальным*, если он является трехреберным, все его ребра одиноки и никакие два из них не входят в границу одной и той же компоненты дополнения мультиграфа.

**Утверждение 1.** *В прямоугольном шахматном графе не имеется специальных циклов.*

*Доказательство.* Ясно, что концевые вершины произвольного ребра в прямоугольном графе принадлежат либо одному и тому же, либо соседним

главным отрезкам. Ребра, относящиеся к одному и тому же главному отрезку, не образуют циклов, поэтому если в прямоугольном графе имеется трехреберный цикл, то одно из его ребер вместе со своими концевыми вершинами принадлежит одному из главных отрезков, а третья вершина принадлежит соседнему главному отрезку. Если ребра такого трехреберного цикла являются одиночными, то они образуют границу одной из компонент дополнения графа. Следовательно, ни один трехреберный цикл в прямоугольном графе не является специальным.  $\square$

**Утверждение 2.** *В букетном графе каждый специальный цикл образует одну из главных окружностей.*

*Доказательство.* Другие случаи исключаются по аналогии с аргументом из доказательства утверждения 1 – с заменой главных отрезков главными окружностями.  $\square$

**Утверждение 3.** *В букетном графе имеется не менее двух специальных циклов.*

*Доказательство.* Как нетрудно убедиться из правил построения кривой  $\widehat{H}_R^{(2)}$ , каждая из двух главных окружностей ее букетного шахматного графа, отвечающих образующим  $a_{R-3}$  и  $a_{R-5}$ , представляет собой специальный цикл.<sup>3</sup> В качестве поясняющего комментария добавим, что трем ребрам цикла отвечают в точности три вхождения соответствующей образующей в слово, представляющее груду  $\bar{H}_R^{(3)}$  (см. (3)). То же относится и к грудам  $\bar{H}_R^{(2)}$  и  $\bar{H}_R$ . Эти вхождения образующих возникают из трех вхождений элемента  $L_{R,ev}$  (см. (3)). Груда  $H$  не дает вхождений образующих  $a_{R-3}$  и  $a_{R-5}$ , поскольку  $r \leq R-9$ , а сдвиг в индексах при переходе от  $H$  к  $H_R$  взят равным 2.  $\square$

Получим теперь начальное утверждение настоящего раздела.

- (P1) Имеется возможность различить букетный и прямоугольный графы по факту наличия специальных циклов (утверждения 1 и 3).
- (P2) Корневая вершина букетного графа является единственной вершиной в этом графе, через которую проходит более одного специального цикла (утверждения 2 и 3).
- (P3) Найдя главные окружности, отвечающие специальным циклам (утверждения 2 и 3), мы можем последовательно обнаружить и все остальные главные окружности, двигаясь от соседа к соседу.<sup>4</sup>

<sup>3</sup>Главная окружность, отвечающая образующей  $a_{R-1}$ , не дает специального цикла, поскольку она – крайняя и не все ее ребра одиноки.

<sup>4</sup>Вообще говоря, для обнаружения всех главных окружностей достаточно и информации о корневой вершине.

- (P4) Две крайние главные окружности букетного графа различаются по количеству ребер, соединяющих их вершины с корневой, поскольку в слове, представляющем груду  $\bar{H}_R^{(3)}$ , число вхождений образующей  $a_R$  превышает  $\delta > 50$  (см. (3)), а количество вхождений образующей  $a_1$  не превышает 4.
- (P5) Ориентация главных окружностей различается благодаря той же “добавке”  $a_R^\delta$ , сделанной на третьем этапе построения кривой: к одной из двух отличных от корневой вершин на крайней главной окружности, отвечающей образующей  $a_{R-1}$ , ведет от корневой вершины более 50 ребер (отвечающих “добавке”  $a_R^\delta$ ), а общая валентность второй вершины составляет лишь 6.

## 2.5.2 Восстановление груды и ранга по букетному графу

Обладая указанной информацией о букетном графе, мы напрямую получаем по его структуре слово в образующих  $a_1, \dots, a_R$ , представляющее груду  $\bar{H}_R^{(3)}$  (количество главных окружностей в букетном графе составляет  $(R - 1)/2$ , указывая на величину  $R$ ): образующим с четными индексами отвечают ребра букетного графа, лежащие на главных окружностях, образующим с нечетными индексами, отличными от 1 и  $R$ , отвечают ребра между главными окружностями, образующим  $a_1$  и  $a_R$  отвечают ребра, не лежащие на главных окружностях и инцидентные корневой вершине и вершинам, лежащим на крайних главных окружностях.

Как отмечалось при описании этапов построения кривых  $\hat{H}_R^{(4)}$  и  $\hat{H}_R^{(3)}$ , слова, представляющие груду  $H$ , однозначно восстанавливаются по словам, представляющим груду  $\bar{H}_R^{(3)}$ .

Поскольку размер груды  $H$  составляет в точности  $s$ , а размер груды  $\bar{H}_R^{(3)}$  (число двойных точек кривой) равен  $s + 10r + 100$ , отсюда мы получаем и величину  $r$ .

Это завершает доказательство предложений 2 и 1.

## Список литературы

- [Bur18] Burton, B. *The next 350 million knots*. <https://regina-normal.github.io/data.html>.
- [BZ06] Burde, G. and H. Zieschang. *Knots*, 2nd ed. de Gruyter Stud. Math. 5. Berlin: de Gruyter, 2003.
- [BZH13] Burde, G., H. Zieschang, and M. Heusener. *Knots*, 3rd fully revised and extended edition. de Gruyter Stud. Math. 5. Berlin: de Gruyter, 2013.
- [Ch18] Chapman, H. “On the structure and scarcity of alternating knots.” (2018): preprint arXiv:1804.09780.

- [ES87] Ernst, C. and D. W. Sumners. “The growth of the number of prime knots.” *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 102, no. 2 (1987): 303–315.
- [Gr17] Greene, J. “Alternating links and definite surfaces.” *Duke Math. J.* 166, no. 11 (2017): 2133–2151.
- [HTW98] Hoste, J., M. Thistlethwaite, and J. Weeks. “The first 1,701,936 knots.” *Math. Intelligencer* 20, no. 4 (1998): 33–48.
- [Kau87] Kauffman, L. “State models and the Jones polynomial.” *Topology* 26, no. 3 (1987): 395–407.
- [MT93] Menasco, W. and M. Thistlethwaite, “The classification of alternating links.” *Annals of Mathematics* 138, no. 1 (1993): 113–171.
- [Mur87] Murasugi, K. “Jones polynomials and classical conjectures in knot theory.” *Topology* 26, no. 2 (1987): 187–194.
- [St04] Stoimenow, A. “On the number of links and link polynomials.” *Q. J. Math.* 55, no. 1 (2004): 87–98.
- [STh98] Sundberg, C. and M. B. Thistlethwaite. “The rate of growth of the number of prime alternating links and tangles.” *Pacific J. Math.* 182, no. 2 (1998): 329–358.
- [Th87] Thistlethwaite, M. B. “A spanning tree expansion of the Jones polynomial.” *Topology* 26, no. 3 (1987): 297–309.
- [Th98] Thistlethwaite, M. B. “On the structure and scarcity of alternating links and tangles.” *J. Knot Theory Ramifications* 7, no. 7 (1998): 981–1004.
- [V00] Vershik, A. M. “Dynamic theory of growth in groups: Entropy, boundaries, examples.” *Uspekhi Mat. Nauk* 55, no. 4(334) (2000): 59–128; *Russian Math. Surveys* 55, no. 4 (2000): 667–733.
- [VNB00] Vershik, A. M., S. Nechaev, and R. Bikbov. “Statistical properties of locally free groups with applications to braid groups and growth of random heaps.” *Comm. Math. Phys.* 212, no. 2 (2000): 469–501.
- [Wel92] Welsh, D. J. A. “On the number of knots and links.” In *Sets, Graphs and Numbers (Proceedings of 1991 Budapest conference)*, 713–718. Colloq. Math. Soc. János Bolyai 60. Amsterdam: North-Holland, 1992.