

## РАССЛОЕНИЯ СО СВОЙСТВОМ БИРМАН–ХИЛЬДЕНА

А. В. Малютин

Санкт-Петербургское отделение  
математического института им. В. А. Стеклова РАН,  
наб. р. Фонтанки, д. 27, 191023, Санкт-Петербург, Россия

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Математико-механический факультет,  
Университетский пр., д. 28, 198504,  
Старый Петергоф, Санкт-Петербург, Россия

malyutin@pdmi.ras.ru

### АННОТАЦИЯ

Изучается расположение подгрупп послойных (переводящих каждый слой в некоторый слой) автогомеоморфизмов в группах всех автогомеоморфизмов расслоенных пространств. Расслоенное пространство называется пространством Бирман–Хильдена (ВН-пространством), если в каждой паре послойных изотопных автогомеоморфизмов этого пространства автогомеоморфизмы еще и послойно изотопны. Доказывается ряд утверждений о ВН-пространствах. В частности, доказывается, что все локально тривиально расслоенные над окружностью связные компактные трехмерные многообразия являются ВН-пространствами. Этот результат применим в теории узлов для обобщения теоремы Артина об изотопных косах в полнотории.

**Ключевые слова:** расслоение, расслоенное пространство, локально тривиальное расслоение, послойный автогомеоморфизм, группа классов отображений, изотопия, гомотопия, гомотопическая эквивалентность, трехмерное многообразие.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 19-11-00151).

ПРЕПРИНТЫ  
Санкт-Петербургского отделения  
Математического института им. В. А. Стеклова  
Российской академии наук

PREPRINTS  
of the St. Petersburg Department  
of Steklov Institute of Mathematics

---

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В. М. Бабич, Н. А. Вавилов, А. М. Вершик, М. А. Всемиров,  
А. И. Генералов, И. А. Ибрагимов, Л. Ю. Колотилина,  
Ю. В. Матиясевич, Н. Ю. Нецветаев,  
С. И. Репин, Г. А. Серегин

# 1 Введение

Лейтмотивом настоящей работы является изучение расположения подгрупп послойных (т.е. переводящих каждый слой в некоторый слой) автогомеоморфизмов в группах автогомеоморфизмов расслоенных пространств (и пар пространств). Этот вопрос связан с теорией групп классов отображений, с вопросом о поднятии автоморфизмов и т.п. Для расслоенного пространства  $E$  обозначим через  $Fib(E)$  подгруппу послойных автогомеоморфизмов в (снабженной компактно-открытой топологией) группе  $Homeo(E)$  всех автогомеоморфизмов пространства  $E$ , а содержащие тождественное отображение  $id_E$  компоненты групп  $Fib(E)$  и  $Homeo(E)$  обозначим через  $Fib_1(E)$  и  $Homeo_1(E)$  соответственно. При анализе расположения подгруппы  $Fib(E)$  в группе  $Homeo(E)$  представляют интерес, в частности, алгебраическая и гомотопическая характеристики включений в рядах подгрупп

$$\begin{array}{ccccc} & & Fib(E) & & \\ & \hookrightarrow & & \hookrightarrow & \\ Fib_1(E) \subset Homeo_1(E) \cap Fib(E) & & & & Homeo_1(E) \cdot Fib(E) \subset Homeo(E), \\ & \hookrightarrow & Homeo_1(E) & \hookrightarrow & \end{array}$$

в том числе — информация о группе классов отображений

$$MCG(E) := Homeo(E)/Homeo_1(E),$$

«группе классов послойных отображений»

$$FMCG(E) := Fib(E)/Fib_1(E),$$

и их подгруппах — факторгруппах

$$(Homeo_1(E) \cdot Fib(E))/Homeo_1(E)$$

и

$$(Homeo_1(E) \cap Fib(E))/Fib_1(E). \quad (1)$$

В ряде известных конструкций (см. ссылки далее) заметную роль играет вопрос о тривиальности группы (1). Настоящая работа концентрируется на этом вопросе. Условие о тривиальности группы (1) эквивалентно условию о связности группы  $Homeo_1(E) \cap Fib(E)$  (являющейся по определению группой изотопных тождественному послойных автогомеоморфизмов пространства  $E$ ) или, другими словами, условию о том, что в каждой паре изотопных послойных автогомеоморфизмов расслоенного пространства  $E$  элементы еще и послойно изотопны. Если группа (1) тривиальна, группу  $FMCG(E)$  естественно интерпретировать как подгруппу в  $MCG(E)$ .

*Определение.* Мы называем группу (1) *группой Бирман–Хильдена* расслоенного пространства  $E$ . Если эта группа тривиальна, мы говорим (отталкиваясь от предложенной в [AM20, MW21] терминологии), что  $E$  *обладает свойством Бирман–Хильдена* или что  $E$  *есть расслоенное про-*

пространство Бирман–Хильдена или *ВН-пространство* (*ВН-расслоение*). Если  $E$  при этом возникло как тотальное пространство некоторого расслоения  $p: E \rightarrow B$ , мы говорим, что  $p$  обладает свойством Бирман–Хильдена и является *расслоением Бирман–Хильдена* или *ВН-расслоением*.

*Пример.* Кольцо  $A = S^1 \times [0, 1]$  является *ВН-расслоением* и как расслоение над  $S^1$ , и как расслоение над  $[0, 1]$ . Произведение  $A \times [0, 1]$  не является *ВН-расслоением* ни как расслоение над  $A$ , ни как расслоение над  $[0, 1]$ .

*Пример.* Накрытие окружности является *ВН-расслоением* если и только если оно не содержит двух неоднolistных компонент.

*Пример.* Локально тривиальное расслоение над окружностью, каждая компонента связности которого есть лента Мёбиуса, является *ВН-расслоением* если и только если связно.

*Пример.* Локально тривиальное расслоение  $\mathbb{R}^n \rightarrow S^1$  со слоем  $\mathbb{R}^{n-1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) является *ВН-расслоением* если и только если  $n = 1$ .

Другие примеры *ВН-расслоений* даны в теоремах ниже. В работах [ВН71, ВН72а, ВН72б, ВН73, ВН17, Zi73а, МН75, F01, Win15, АМ20, МW21] вопрос о принадлежности расслоения к описанному классу изучается в случае разветвленных накрытий поверхностей. В [Vog77, Ohs87] этот вопрос рассматривался для случая расслоений Зейферта. В настоящей работе вопрос изучается для случая локально тривиальных расслоений над окружностью.<sup>1</sup> Центральными результатами работы являются следующие теоремы.

**Теорема 1.** *При  $n \in \{1, 2, 3\}$  все связные компактные локально тривиально расслоенные над окружностью  $n$ -мерные многообразия (включая неориентируемые и с непустым краем) являются *ВН-расслоениями*.*

**Теорема 2.** *Все локально тривиально расслоенные над окружностью с хаковым слоем замкнутые 4-мерные многообразия (включая неориентируемые) являются *ВН-расслоениями*.*

Теорему 1 дополняет следующий результат.

**Теорема 3.** *Если  $n \in \{1, 2\}$ , а  $M$  есть замкнутое расслоенное  $n$ -мерное многообразие из теоремы 1, то включение  $Fib_1(M) \subset \text{Hoteo}_1(M)$  является гомотопической эквивалентностью.*

Как показывают приведенные выше примеры, требования о компактности и связности в теоремах 1 и 2 существенны. По-видимому, требование о компактности можно ослабить до требования о компактности слоя, но мы не развиваем это направление в настоящей работе. Теорема 2 обобщается на обширный класс 4-мерных многообразий с краем, мы не приводим описания, поскольку оно объемно и в настоящий момент неполно. В рамках используемых методов доказательства первым препятствием к экстраполяции теорем 1 и 2 на случай нехакова слоя и на высшие размерности

<sup>1</sup>Родственные вопросы (включая аспекты расположения подгруппы  $Fib(E)$  в группе  $\text{Hoteo}(E)$ ) для случая расслоений над окружностью рассматривались в [Zi73b].

являются многообразия, допускающие гомотопные но не изотопные автогомеоморфизмы (см., в частности, [FW86]).

Теорема 1 имеет ряд актуальных следствий. В частности, она применима в доказательстве того, что в локально тривиально расслоенном над окружностью связном компактном трехмерном многообразии изотопные трансверсальные зацепления трансверсально изотопны. Это обобщает известный результат о том, что замкнутые косы в полнотории изотопны если и только если они представляют один и тот же класс сопряженности группы кос (см. [Art25], [Mor78, Th. 1], [BZ85, Prop. 10.16], [KT08, Th. 2.1]). Доказательство упомянутого обобщения предполагается дать в отдельной работе.

Мы выводим теоремы 1 и 2 из утверждений более общего характера, к формулировке которых переходим. В следующей теореме для топологического пространства  $X$  через  $Map_1(X, X)$  обозначается пространство (с компактно-открытой топологией) непрерывных отображений  $X \rightarrow X$ , гомотопных тождественному.

**Теорема 4.** *Пусть  $X$  — линейно связное топологическое пространство. Предположим, что у  $X$  не имеется гомотопных но не изотопных автогомеоморфизмов (т.е.  $Map_1(X, X) \cap Homeo(X) = Homeo_1(X)$ ), и что либо пространство группы  $Homeo_1(X)$  односвязно, либо включение  $Homeo_1(X) \subset Map_1(X, X)$  индуцирует изоморфизм фундаментальных групп. Тогда всякое локально тривиальное расслоение над окружностью со слоем  $X$  является ВН-расслоением.*

*Замечание.* Условие «либо пространство группы  $Homeo_1(X)$  односвязно, либо включение  $Homeo_1(X) \subset Map_1(X, X)$  индуцирует изоморфизм фундаментальных групп» в теореме 4 (как и условия подобного типа в нижеследующих теоремах) ослабляется до громоздкого условия, формулируемого в терминах инъективности индуцированных включением  $Homeo_1(X) \subset Map_1(X, X)$  отображений классов сопряженности фундаментальных групп и их HNN-расширений. В частности, теорема 4 дополняется случаем, когда группа  $\pi_1(Homeo_1(X))$  имеет ровно два класса сопряженности.

Теорема 4 допускает уточнения и обобщения на случаи пар пространств и т.п. Приведем пример такого уточняющего обобщения на случай, когда в пространстве  $X$  имеется подпространство  $Z$ , которому во всяком локально тривиальном расслоении со слоем  $X$  отвечает подрасслоение, инвариантное при изотопиях расслоения (например,  $X$  — многообразие с непустым краем и  $Z = \partial X$ ). Если  $Z$  — подпространство в  $X$ , будем обозначать через  $Map(X, X; Z)$  пространство (с компактно-открытой топологией) непрерывных отображений  $X \rightarrow X$ , переводящих  $Z$  в  $Z$ , а через  $Map_1(X, X; Z)$  — компоненту связности тождественного отображения. Подпространство  $Z$  в  $X$  назовем *h-инвариантным*, если (i)  $f(Z) = Z$  для любого  $f \in Homeo(X)$  и (ii) для всякого локально тривиального расслоения  $p: E \rightarrow S^1$  над окружностью со слоем  $X$  и для каждого  $h \in Homeo_1(E)$  выполняется условие  $h(\tilde{Z}) = \tilde{Z}$ , где  $\tilde{Z}$  — отвечающее подпространству  $Z$  подрасслоение в  $E$ .

**Теорема 5.** Пусть  $X$  — линейно связное пространство,  $Z$  —  $h$ -инвариантное подпространство в  $X$ . Предположим, что

$$\text{Map}_1(X, X; Z) \cap \text{Homeo}(X) = \text{Homeo}_1(X)$$

(т. е. у  $X$  не имеется неизотопных автогомеоморфизмов, гомотопных в классе отображений, переводящих  $Z$  в  $Z$ ) и что либо пространство группы  $\text{Homeo}_1(X)$  односвязно, либо включение  $\text{Homeo}_1(X) \subset \text{Map}_1(X, X; Z)$  индуцирует изоморфизм фундаментальных групп. Тогда всякое локально тривиальное расслоение над окружностью со слоем  $X$  является ВН-расслоением.

Теорема 4 является частным случаем теоремы 5 ( $Z = \emptyset$ ). Для формулировки еще одной вариации теоремы 4 дадим ряд дополнительных обозначений и определений. Если  $Z$  — подпространство в  $X$ , обозначим через  $\text{Map}(X, X; \text{fx } Z)$  пространство (с компактно-открытой топологией) непрерывных отображений  $X \rightarrow X$ , тождественных на  $Z$ , через  $\text{Homeo}(X; \text{fx } Z)$  — подгруппу  $\text{Homeo}(X) \cap \text{Map}(X, X; Z)$ , а через  $\text{Map}_1(X, X; \text{fx } Z)$  и  $\text{Homeo}_1(X; \text{fx } Z)$  — компоненты связности тождественного отображения в  $\text{Map}(X, X; \text{fx } Z)$  и  $\text{Homeo}(X; \text{fx } Z)$  соответственно.

*Определение.* Будем говорить, что ВН-расслоение  $p: E \rightarrow B$  является ВН-расслоением ранга 1, если включение  $\text{Fib}_1(E) \subset \text{Homeo}_1(E)$  индуцирует эпиморфизм на уровне фундаментальных групп.

*Замечание.* Термин «ранг» мотивирован вопросом о гомотопической характеристизации вложений  $\text{Fib}(E) \subset \text{Homeo}(E)$  и  $\text{Fib}_1(E) \subset \text{Homeo}_1(E)$ .

**Теорема 6.** Пусть  $p: E \rightarrow S^1$  — локально тривиальное расслоение над окружностью со слоем  $X$ , где  $X$  — связное компактное многообразие с непустым краем  $\partial X$ . Предположим, что выполнены следующие условия:

- у  $X$  не имеется автогомеоморфизмов, связанных тождественной на крае гомотопией, но не связанных тождественной на крае изотопией, т. е.

$$\text{Map}_1(X, X; \text{fx } \partial X) \cap \text{Homeo}(X; \text{fx } \partial X) = \text{Homeo}_1(X; \text{fx } \partial X),$$

- либо пространство группы  $\text{Homeo}_1(X; \text{fx } \partial X)$  односвязно, либо включение  $\text{Homeo}_1(X; \text{fx } \partial X) \subset \text{Map}_1(X, X; \text{fx } \partial X)$  индуцирует изоморфизм фундаментальных групп,
- сужение расслоения  $p$  на каждую из компонент связности края  $\partial E$  является ВН-расслоением ранга 1.

Тогда  $p$  является ВН-расслоением.

## Структура работы

В §2 доказываются несколько вспомогательных лемм.  
В §3 доказывается теорема 5.  
В §4 доказывается предложение о продолжении послойной изотопии, используемое в доказательстве теоремы 6.  
В §5 доказывается теорема 6.  
В §6 теоремы 1 и 3 доказываются в случае  $n = 1$ .  
В §7 теорема 1 доказывается в случае  $n = 2$ .  
В §8 теорема 3 доказывается в случае  $n = 2$ .  
В §9 теорема 1 доказывается в случае  $n = 3$ .  
В §10 доказывается теорема 2.  
В §11 приведены альтернативные доказательства частных случаев теоремы 1.

## Благодарности

Автор признателен Юрию Белоусову, Ивану Дынникову, Семену Подкорытову и Евгению Фоминых за полезные обсуждения.

## 2 Внутрислойные гомотопии и гомотопные сечения

*Определение.* Гомотопию (в частности, — изотопию)  $\tau: X \times [0, 1] \rightarrow E$  между двумя отображениями в пространство  $E$  некоторого расслоения  $p: E \rightarrow B$  будем называть *внутрислойной* или *внутрислойной*, если для каждого  $x \in X$  проекция  $p(\tau(\{x\} \times [0, 1]))$  является точкой. Если для каждого  $x \in X$  проекция  $p(\tau(\{x\} \times [0, 1]))$  является стягиваемой в  $B$  петлей, будем говорить, что гомотопия  $\tau$  является *специальной*. (Проекции в базу двух отображений, связанных специальной гомотопией, совпадают.)

Следующая простая лемма дана для удобства ссылок.

**Лемма 1.** *Два непрерывных отображения топологического пространства в пространство локально тривиального расслоения над окружностью внутрислойно гомотопны если и только если связаны специальной гомотопией.*

*Доказательство.* Внутрислойная гомотопия по определению является специальной. Для проверки обратной импликации заметим, что локально тривиальное расслоение над окружностью представимо в виде тора некоторого автогомеоморфизма  $f$  слоя  $F$  заданного расслоения:

$$E = \frac{F \times [0, 1]}{(x, 1) \sim (f(x), 0)}.$$

Это дает одномерное локально тривиальное слоение  $\xi$  на пространстве расслоения, каждый слой которого накрывает базу. Проектируя каждый

путь специальной гомотопии на слой  $F'$ , содержащий концевые точки пути, вдоль слоев слоения  $\xi$ , мы переводим специальную гомотопию во внутрислойную.  $\square$

*Замечание.* У леммы 1 имеется путь доказательства (причем для не обязательно локально тривиальных расслоений) через «аксиому о накрывающей гомотопии» (см. [Ste51, 11.7. Second covering homotopy theorem]), однако такой путь менее удобен при работе с подрасслоениями (см. шаг 1.3 в доказательстве теоремы 5).

**Лемма 2.** *Два сечения локально тривиального расслоения над окружностью изотопны в классе сечений если и только если они гомотопны.*

*Доказательство.* Изотопные сечения гомотопны. Докажем обратное. Если два сечения гомотопны, то проекция в базу связывающей их гомотопии дает гомотопию тождественного отображения базы, т. е. петлю в  $Map_1(S^1, S^1)$ . Гомотопия тождественного отображения пространства ставит в соответствие каждой точке пространства петлю в пространстве. Для петель в окружности как для отображений из окружности в окружность определен индекс. Индекс принимает целые значения и зависит от точки непрерывно. Следовательно, у всех петель заданной гомотопии индекс один и тот же. Отсюда видно, что заданные гомотопные сечения связаны и специальной гомотопией, — она получается композицией заданной гомотопии с (обратной к индексу) степенью гомотопии, «поворачивающей» кривую сечения вдоль самой себя. По лемме 1, связанные специальной гомотопией сечения внутрислойно гомотопны. Внутрислойная гомотопия сечений является изотопией в классе сечений. Лемма доказана.  $\square$

*Замечание.* У леммы 2, как и у леммы 1, имеется путь доказательства (причем для не обязательно локально тривиальных расслоений) через «аксиому о накрывающей гомотопии» (см. [Ste51, 11.7. Second covering homotopy theorem]). Этот альтернативный путь обобщается на случай, когда в качестве базы расслоения выступает пространство  $B$ , обладающее следующим свойством:

- Включение  $Homeo_1(B) \subset Map_1(B, B)$  индуцирует эпиморфизм фундаментальных групп.

Ср. со свойствами слоя в теоремах 4–6 и с предложением 5.

*Замечание.* Лемму 2 имеет смысл рассматривать как определенного рода обобщение вырожденного до однониточных кос известного (упомянутого во введении) результата о том, что замкнутые косы в полнотории изотопны если и только если они представляют один и тот же класс сопряженности группы кос.

**Лемма 3.** *Пусть  $X$  — топологическое пространство,  $Z$  — подпространство в  $X$ , а  $f: X \rightarrow X$  — автогомеоморфизм с  $f(Z) = Z$ . Пусть  $\mathcal{X}_f$  —*



локально тривиальное расслоение над окружностью со слоем  $X$ , отвечающее автогомеоморфизму  $f$ :

$$\mathcal{X}_f = \frac{X \times [0, 1]}{(x, 1) \sim (f(x), 0)},$$

а  $\mathcal{Z}_f$  — подрасслоение в  $\mathcal{X}_f$ , отвечающее подпространству  $Z$ . Предположим, что  $Z$  и  $X$  линейно связны, а вложение  $Z \subset X$  индуцирует эпиморфизм (мономорфизм) фундаментальных групп. Тогда и вложение  $\mathcal{Z}_f \subset \mathcal{X}_f$  индуцирует эпиморфизм (мономорфизм) фундаментальных групп.

**Доказательство. Эпиморфизмы.** Всякая петля в  $\mathcal{X}_f$  с базовой точкой в  $\mathcal{Z}_f$  в силу линейной связности слоев и локальной тривиальности расслоения гомотопией переводится в петлю, являющуюся произведением петли в содержащем базовую точку слое  $X_0$  и петли в  $\mathcal{Z}_f$ , а если вложение  $Z_0 \subset X_0$  индуцирует эпиморфизм фундаментальных групп, то петля в  $X_0$  гомотопией в  $X_0$  переводится в петлю в  $Z_0$ . Это рассуждение демонстрирует сюръективность отображения  $\pi_1(\mathcal{Z}_f) \rightarrow \pi_1(\mathcal{X}_f)$  при условии сюръективности отображения  $\pi_1(Z) \rightarrow \pi_1(X)$ .

**Мономорфизмы.** Если петля  $\lambda$  в  $\mathcal{Z}_f$  стягиваема в  $\mathcal{X}_f$ , то найдется отображение диска  $\Lambda: D^2 \rightarrow \mathcal{X}_f$  с  $\Lambda(\partial D^2) = \lambda$ . Рассмотрим индуцированное<sup>2</sup> расслоением  $p: \mathcal{X}_f \rightarrow S^1$  и композицией  $p \circ \Lambda: D^2 \rightarrow S^1$  расслоение  $\Xi_X$  над  $D^2$  со слоем  $X$ , его подрасслоение  $\Xi_Z$ , отвечающее подрасслоению  $\mathcal{Z}_f$ , и прообраз в  $\Xi_X$  пары  $(\Lambda(D^2), \lambda)$ . В силу стягиваемости диска  $D^2$  расслоение  $\Xi_X$  тривиально (см., например, [Ste51, Corollary 11.6]). Следовательно, если вложение  $Z \subset X$  индуцирует мономорфизм фундаментальных групп, то прообраз в  $\Xi_X$  петли  $\lambda$  стягивается в  $\Xi_Z$ . Отправляя стягивающую гомотопию снова в  $\mathcal{X}_f$  через естественное отображение  $\Xi_X \rightarrow \mathcal{X}_f$  (отправляющее  $\Xi_Z$  в  $\mathcal{Z}_f$ ), мы видим, что  $\lambda$  стягивается в  $\mathcal{Z}_f$ . Это рассуждение демонстрирует инъективность отображения  $\pi_1(\mathcal{Z}_f) \rightarrow \pi_1(\mathcal{X}_f)$  при условии инъективности отображения  $\pi_1(Z) \rightarrow \pi_1(X)$ .  $\square$

**Лемма 4.** Если в условиях леммы 3 вложение  $Z \subset X$  индуцирует изоморфизм фундаментальных групп, то два сечения подрасслоения  $\mathcal{Z}_f$  изотопны в классе сечений этого подрасслоения если и только если они изотопны в классе сечений расслоения  $\mathcal{X}_f$ .

**Доказательство.** В силу леммы 3 вложение  $\mathcal{Z}_f \subset \mathcal{X}_f$  индуцирует изоморфизм фундаментальных групп. Если два сечения подрасслоения  $\mathcal{Z}_f$  изотопны в классе сечений расслоения  $\mathcal{X}_f$ , то они представляют один и тот же класс сопряженности в группе  $\pi_1(\mathcal{X}_f)$ , а значит, и в группе  $\pi_1(\mathcal{Z}_f)$ . Отсюда в силу леммы 2 следует, что эти сечения изотопны в классе сечений расслоения  $\mathcal{Z}_f$ .  $\square$

<sup>2</sup>Определения и свойства индуцированных расслоений см., например, в [Hus94, стр. 17], [Hat02, стр. 406].

### 3 Доказательство теоремы 5

Пусть  $p: E \rightarrow S^1$  — локально тривиальное расслоение со слоем  $X$ , а  $h: E \rightarrow E$  — послойный автогомеоморфизм, изотопный тождественному отображению  $\text{id}_E$ . Требуется показать, что  $h$  послойно изотопен тождественному.

**Шаг 1.1.** *Сведение ситуации к случаю автогомеоморфизма, индуцирующего тождественное отображение на базе.*

Послойный автогомеоморфизм пространства расслоения индуцирует автогомеоморфизм базы. Обозначим через  $h_B$  автогомеоморфизм базы  $S^1$ , индуцированный заданным автогомеоморфизмом  $h$ , и покажем, что  $h_B$  сохраняет ориентацию. Для этого выберем произвольное сечение  $q: S^1 \rightarrow E$  заданного расслоения  $p$  (сечение существует в силу предположения о линейной связности слоя, — см., например, [Hus94, Theorem 7.1]). Применив к  $q$  изотопию, переводящую  $\text{id}_E$  в  $h$ , и спроектировав получившуюся изотопию кривой в базу, мы получаем гомотопию между тождественным отображением базы ( $\text{id}_B$ ) и  $h_B$ . Как следует из классических конструкций, гомотопные автогомеоморфизмы окружности изотопны. Подняв изотопию между  $h_B$  и  $\text{id}_B$  до послойной изотопии пространства  $E$  (существование такого поднятия для локально тривиального расслоения следует, например, из [Ste51, 11.3 First covering homotopy theorem]), мы получаем послойную изотопию, связывающую  $h$  с автоморфизмом  $h'$ , дающим тождественное отображение базы. Поскольку  $h$  и  $h'$  связаны послойной изотопией, для завершения доказательства теоремы достаточно доказать, что  $h'$  и  $\text{id}_E$  послойно изотопны.

**Шаг 1.2.** *Сведение к случаю автогомеоморфизма, связанного с тождественным отображением  $\text{id}_E$  специальной<sup>3</sup> изотопией.*

Заметим, что при всякой изотопии  $E \times [0, 1] \rightarrow E$ , связывающей тождественное отображение  $\text{id}_E$  с автогомеоморфизмом, индуцирующим тождественное отображение в базе, проекция в базу пути каждой точки является петлей, причем гомотопический тип этой петли в базе не зависит от выбора точки. Поднимем до послойной изотопии  $E \times [0, 1] \rightarrow E$  полный оборот окружности (см. [Ste51, 11.3 First covering homotopy theorem]). Дополнив  $h'$  определенным количеством таких поворотов, мы получаем автогомеоморфизм  $h'': E \rightarrow E$ , послойно изотопный с  $h'$  и связанный с  $\text{id}_E$  специальной изотопией.

**Шаг 1.3.** *Сведение к случаю автогомеоморфизма, связанного с  $\text{id}_E$  внутрислойной гомотопией.*

Поскольку  $h''$  и  $\text{id}_E$  связаны специальной изотопией, в силу леммы 1 они связаны и внутрислойной гомотопией. При этом из конструкции доказательства леммы 1 в силу предполагаемой инвариантности множества  $Z$  следует, что гомотопия может быть построена таким образом, что в каждый момент в каждом слое  $X'$  гомотопия переводит подмножество  $Z' \subset X'$ , соответствующее подмножеству  $Z \subset X$ , в  $Z'$  (возьмем слое  $\xi$  в констру-

<sup>3</sup>Определение специальной изотопии дано в разделе 2.

ции доказательства леммы 1 таким, чтобы каждый из его слоев содержался либо в подрасслоении, либо в дополнении к нему).

**Шаг 2.** Построение индуцированного расслоения со слоем  $\text{Map}_1(X, X; Z)$ .

Локально тривиально расслаиваясь над окружностью, пространство  $E$  представимо в виде тора некоторого автогомеоморфизма  $f: X \rightarrow X$  слоя  $X$ :

$$E = \frac{X \times [0, 1]}{(x, 1) \sim (f(x), 0)}.$$

Автогомеоморфизму  $f$  отвечает автоморфизм  $A_f$  моноида  $\text{Map}_1(X, X; Z)$ , отправляющий отображение  $m \in \text{Map}_1(X, X; Z)$  в отображение  $f \circ m \circ f^{-1}$ . Рассмотрим определяемое автоморфизмом  $A_f$  локально тривиальное расслоение над окружностью со слоем  $\text{Map}_1(X, X; Z)$ :

$$\mathcal{E} := \frac{\text{Map}_1(X, X; Z) \times [0, 1]}{(m, 1) \sim (f \circ m \circ f^{-1}, 0)}.$$

Поскольку  $A_f$  переводит подпространство  $\text{Homeo}_1(X) \subset \text{Map}_1(X, X; Z)$  в него же, подпространству  $\text{Homeo}_1(X)$  отвечает подрасслоение в  $\mathcal{E}$ , которое мы обозначим через  $\mathcal{H}_1$ . Рассмотрим также подрасслоение  $\mathcal{H}'$  со слоем  $\text{Map}_1(X, X; Z) \cap \text{Homeo}(X)$ . В силу сделанного в условии теоремы предположения о том, что  $\text{Map}_1(X, X; Z) \cap \text{Homeo}(X) = \text{Homeo}_1(X)$ , имеем  $\mathcal{H}' = \mathcal{H}_1$ .

Из конструкции следует, что имеется естественная биекция между сечениями расслоения  $\mathcal{E}$  и непрерывными отображениями  $E \rightarrow E$ , переводящими каждый слой  $X'$  в тот же слой отображением, связанным с тождественным отображением  $\text{id}_{X'}$  гомотопией (в слое), в каждый момент переводящей подпространство  $Z' \subset X'$ , отвечающее инвариантному подпространству  $Z \subset X$ , в  $Z'$ . В частности, поскольку  $h''$  и  $\text{id}_E$  связаны гомотопией такого вида, автогомеоморфизму  $h''$  отвечает некоторое сечение расслоения  $\mathcal{E}$  (обозначим это сечение через  $\gamma_{h''}$ ), а гомотопии указанного вида отвечает изотопия — в классе сечений — между сечением  $\gamma_{h''}$  и «тривиальным» сечением  $\gamma_0$  (под тривиальным сечением мы понимаем сечение, состоящее из точек слоев в  $\mathcal{E}$ , отвечающих тождественным отображениям соответствующих слоев в  $E$ ).

Поскольку точки в  $\gamma_{h''}$  суть автогомеоморфизмы соответствующих слоев из  $E$ , сечение  $\gamma_{h''}$  лежит в подрасслоении  $\mathcal{H}$ , которое в силу предположений совпадает с  $\mathcal{H}_1$ . Для того, чтобы убедиться, что  $h''$  и  $\text{id}_E$  связаны послойной изотопией, достаточно убедиться, что  $\gamma_{h''}$  и  $\gamma_0$  изотопны в классе сечений подрасслоения  $\mathcal{H}_1$ .

В случае, если пространство группы  $\text{Homeo}_1(X)$  односвязно,  $\gamma_{h''}$  и  $\gamma_0$  изотопны, поскольку в таком случае любые два сечения подрасслоения  $\mathcal{H}_1$  изотопны. (Любые два сечения локально тривиального расслоения изотопны, если база — окружность, а слой — односвязен; см., например, [Hus94, Theorem 7.1]: в качестве базы рассмотрим пространство  $S^1 \times [0, 1]$ , а в качестве частично определенного сечения — объединение сечений над  $S^1 \times \{0\}$  и над  $S^1 \times \{1\}$ .)

В случае, если включение  $\text{Homeo}_1(X) \subset \text{Map}_1(X, X; Z)$  индуцирует изоморфизм фундаментальных групп, изотопность сечений  $\gamma_{h''}$  и  $\gamma_0$  в классе сечений подрасслоения  $\mathcal{H}_1$  следует из их изотопности в классе сечений расслоения  $\mathcal{E}$  в силу леммы 4.

Итак, мы показали, что произвольный послойный и изотопный тождественному автогомеоморфизм  $h$  всякого локально тривиального расслоения  $E$  над окружностью со слоем  $X$  послойно изотопен автогомеоморфизму  $h''$ , который послойно изотопен тождественному отображению. Это доказывает, что всякое локально тривиальное расслоение над окружностью со слоем  $X$  является ВН-расслоением. Теорема доказана.

### 3.1 Дополнение

Для удобства ссылок сформулируем в виде отдельного предложения утверждение, частный случай которого возникает на шаге 2 приведенного выше доказательства теоремы 5.

**Предложение 1.** Пусть  $X$  — топологическое пространство,  $p: E \rightarrow S^1$  — локально тривиальное расслоение со слоем  $X$ ,  $h: E \rightarrow E$  — внутрислойный автогомеоморфизм. Пусть  $G(X)$  — нормальная подгруппа в  $\text{Homeo}(X)$  (например,  $\text{Homeo}_1(X)$  или  $\text{Homeo}_1(X, \text{fx } Z)$ , где  $Z$  — какое-нибудь  $h$ -инвариантное подпространство в  $X$ ). Тогда, если  $G(X)$  линейно связна и односвязна, а в каждом слое  $X'$  расслоения  $p$  сужение  $h|_{X'}$  гомеоморфизма  $h$  на  $X'$  лежит<sup>4</sup> в  $G(X')$ , то  $h$  и  $\text{id}_E$  связаны внутрислойной изотопией, у которой сужение на каждый слой  $X'$  лежит в  $G(X')$ .

*Доказательство.* Утверждение доказывается конструкцией из шага 2 приведенного выше доказательства теоремы 5: по расслоению  $p: E \rightarrow S^1$  строится отвечающее ему расслоение  $\mathcal{H} \rightarrow S^1$  со слоем  $\text{Homeo}(X)$ . В этом расслоении имеется подрасслоение  $\mathcal{G}$  со слоем  $G(X)$ . Автогомеоморфизмам  $h$  и  $\text{id}_E$  отвечают сечения подрасслоения  $\mathcal{G}$ , в силу линейной связности и односвязности слоя  $G(X)$  эти сечения изотопны в  $\mathcal{G}$ , изотопии между сечениями в  $\mathcal{G}$  отвечает искомая внутрислойная изотопия между  $\text{id}_E$  и  $h$ .  $\square$

## 4 О продолжении послойной изотопии

Для доказательства теоремы 6 нам нужен вариант обобщения на расслоенные пространства теоремы о продолжении изотопии (с края многообразия на все многообразие). Доказываемое в настоящем параграфе предложение 2 представляет собой такое обобщение. В литературе имеется несколько версий теоремы о продолжении изотопии для многообразий и их подмногообразий и подмножеств, эти версии имеют различные варианты обобщений

<sup>4</sup>Поскольку подгруппа  $G(X)$  предполагается нормальной в  $\text{Homeo}(X)$ , подгруппа  $G(X')$  и, соответственно, принадлежность элемента  $g \in \text{Homeo}(X')$  подгруппе  $G(X')$  корректно определены безотносительно к выбору гомеоморфизма между  $X'$  и  $X$ .

на расслоенные пространства, имеется также несколько различных естественных подходов к доказательству подобных утверждений. Отметим для ясности, что в приведенном варианте утверждения (предложение 2) как уровень обобщения, так и метод доказательства выбраны в значительной степени произвольно. С одной стороны, нам достаточно было бы более частных утверждений с более короткими вариантами доказательств. Например, в случае, когда база является окружностью, имеется вариант доказательства, использующий тор отображения, а если ограничиться случаем, когда база является многообразием, доказательство предложения 2 можно сократить с учетом классического результата [ЕК71, Corollary 1.3] о том, что изотопия компактного многообразия раскладывается в произведение изотопий, носитель каждой из которых содержится в одном из элементов заданного открытого покрытия. С другой стороны, приведенное утверждение обобщается и на более широкие классы подмногообразий, на не обязательно компактную базу (к примеру, на случай нормальной локально компактной линделефовой<sup>5</sup> базы; см.  $C_\sigma$ -пространства в [Ste51], теорему [Ste51, 11.3 First covering homotopy theorem] и метод ее доказательства) и т. п., но мы не приводим этих обобщений в настоящей работе, ориентируясь на то, что для доказательства теоремы 6 такая степень общности не требуется.

**Предложение 2** (о продолжении послойной изотопии). *Пусть  $F$  — компактное многообразие с непустым краем  $\partial F$ ,  $B$  — нормальное компактное пространство,  $p: E \rightarrow B$  — локально тривиальное расслоение со слоем  $F$ ,  $E_\partial \subset E$  — подрасслоение, отвечающее краю  $\partial F$ . Тогда всякая послойная изотопия тождественного отображения подрасслоения  $E_\partial$  продолжается до послойной изотопии тождественного отображения пространства  $E$ .*

*Доказательство.* В настоящем доказательстве для упрощения проверки свойств конструируемых отображений нам удобно интерпретировать изотопии всякого подпадающего под рассмотрение пространства  $W$  как сохраняющие вторую координату автогомеоморфизмы произведения  $W \times [0, 1]$  (как в [Ер66, Ch69]).

Кроме того, поскольку здесь нас интересуют исключительно изотопии тождественных отображений пространств, далее в доказательстве под изотопиями понимаются именно такие изотопии: сохраняющие вторую координату автогомеоморфизмы  $W \times [0, 1] \rightarrow W \times [0, 1]$ , тождественные на  $W \times \{0\}$ .

Под *произведением* изотопий  $\tau: W \times [0, 1] \rightarrow W \times [0, 1]$  и  $\rho: W \times [0, 1] \rightarrow W \times [0, 1]$  понимается при этом композиция этих изотопий как автогомеоморфизмов пространства  $W \times [0, 1]$ , т. е. произведение в смысле группы  $\text{Homeo}(W \times [0, 1])$ . Во избежание путаницы, в дальнейшем мы будем обозначать такое произведение через  $\tau \star \rho$ :

$$\tau \star \rho = \tau \circ \rho.$$

*Обратная изотопия* понимается в соответствующем смысле — как обратный элемент в группе  $\text{Homeo}(W \times [0, 1])$ .

<sup>5</sup>Пространство называется *линделефовым* или *финально компактным*, если из любого его открытого покрытия можно выделить не более чем счетное подпокрытие.

Множество всех изотопий тождественного отображения пространства  $W$  (образующее с указанной операцией произведения группу) обозначим через  $\Lambda_1(W)$ .

Под *внутрислойной* изотопией пространства расслоения имеется в виду изотопия, индуцирующая тождественную изотопию в базе расслоения. Под *продолжимыми* изотопиями имеются в виду послойные изотопии из  $\Lambda_1(E_\partial)$ , продолжимые до послойных изотопий из  $\Lambda_1(E)$ .

Заметим, что произведение продолжимых изотопий является продолжимой изотопией, поскольку произведение продолжений является продолжением произведения. Таким образом, для доказательства предложения достаточно показать, что произвольная послойная изотопия  $\tau$  из  $\Lambda_1(E_\partial)$  разлагается в произведение продолжимых.

Послойная изотопия пространства расслоения индуцирует изотопию базы. Обозначим через  $\bar{\tau}$  изотопию базы  $B$ , индуцированную послойной изотопией  $\tau$ . В силу классических конструкций теории расслоений (см., например, [Ste51, 11.3 First covering homotopy theorem]), изотопия тождественного отображения базы локально тривиального расслоения с нормальной компактной базой поднимается до послойной изотопии тождественного отображения всего пространства расслоения, так что в  $\Lambda_1(E)$  найдется послойная изотопия  $\tilde{\tau}$ , индуцирующая изотопию  $\bar{\tau}$ . Исходная изотопия  $\tau$  разлагается в произведение сужения изотопии  $\tilde{\tau}$  на  $E_\partial$  (эта изотопия-сужение по построению продолжима) и некоторой внутрислойной изотопии  $\hat{\tau} \in \Lambda_1(E_\partial)$ . Тем самым доказательство свелось к случаю внутрислойной изотопии  $\hat{\tau}$ .

В оставшейся части доказательства мы сначала покажем, что внутрислойные изотопии продолжимы в случае прямых произведений, а затем выведем из этого общий случай внутрислойной изотопии  $\hat{\tau}$ , воспользовавшись нормальностью базы и разлагая  $\hat{\tau}$  в произведение внутрислойных изотопий с «достаточно малыми» носителями, продолжимость которых прямо вытекает из продолжимости в случае прямых произведений.

Итак, докажем сперва, что внутрислойные изотопии  $\hat{\tau} \in \Lambda_1(B' \times \partial F)$  продолжимы с  $B' \times \partial F$  на  $B' \times F$  в случае прямого произведения. (Вообще говоря, это выполняется для произвольной базы  $B'$ , но нам понадобится лишь случай  $B' \subset B$ .) Из классического результата [Br62] о воротниковой окрестности края метризуемого многообразия следует, что у края  $\partial F$  найдутся открытая окрестность  $U(\partial F)$  в  $F$  и переводящий  $\partial F \times \{0\}$  в  $\partial F$  гомеоморфизм  $h: \partial F \times [0, 2) \rightarrow U(\partial F)$ . отождествим посредством  $h$  окрестность  $U(\partial F)$  с произведением  $\partial F \times [0, 2)$ , введя тем самым на  $U(\partial F)$  координаты, а окрестность  $B' \times U(\partial F)$  — с произведением  $B' \times \partial F \times [0, 2)$ . Для внутрислойной изотопии  $\hat{\tau}$  из  $\Lambda_1(B' \times \partial F)$  определим отображение

$$\hat{\tau}: B' \times \partial F \times [0, 2) \times [0, 1] \rightarrow B' \times \partial F \times [0, 2) \times [0, 1]$$

формулой

$$\hat{\tau}(b, x, r, t) = \begin{cases} (b, x, r, t) & \text{при } t \leq r, \\ (b, \tilde{\tau}_{t-r}^b(x), r, t) & \text{при } t \geq r, \end{cases} \quad (2)$$

где  $b, x, r, t$  — координаты в  $B', \partial F, [0, 2), [0, 1]$  соответственно, а через  $\dot{\tau}^b$  обозначено сужение изотопии  $\dot{\tau}$  на слой  $\{b\} \times \partial F$ . Из формулы ясно, что  $\dot{\tau}$  непрерывно, биективно и имеет непрерывное обратное, откуда заключаем, что  $\dot{\tau}$  есть внутрислоевая изотопия из  $\Lambda_1(B' \times \partial F \times [0, 2))$ , продолжающая изотопию  $\dot{\tau}$ . Изотопия  $\dot{\tau}$  тождественна на  $B' \times \partial F \times [1, 2)$ , так что, дополнив ее тождественной изотопией на  $B' \times (F \setminus U(\partial F))$ , мы получаем внутрислоевую изотопию  $\dot{\tau}^+$  из  $\Lambda_1(B' \times F)$ , продолжающую изотопию  $\dot{\tau}$ . Отметим (это используется в дальнейшем), что, как видно из определяющей формулы, проекция в базу  $B'$  носителя  $\text{supp}(\dot{\tau}^+)$  полученного продолжения совпадает с проекцией носителя  $\text{supp}(\dot{\tau})$  исходной изотопии.

Вернемся теперь к внутрислоевой изотопии  $\dot{\tau}$  на  $E_\partial$ . Наша цель, — разложить  $\dot{\tau}$  в произведение изотопий, у которых носители в определенном смысле «малы» и продолжимость которых легко устанавливается. В силу компактности базы  $B$  найдется такое конечное открытое покрытие  $\{U_1, \dots, U_k\}$  для  $B$ , что над каждым  $U_i$  расслоение  $p$  тривиально, а в силу нормальности найдутся такие открытые подпокрытия  $\{U'_1, \dots, U'_k\}$  и  $\{U''_1, \dots, U''_k\}$  для  $B$ , что  $U_i$  содержит  $\text{clos}(U'_i)$ , а  $U'_i$  содержит  $\text{clos}(U''_i)$  для всех  $i$  (см. так называемую «сжимающую лемму» как одно из эквивалентных определяющих свойств нормального пространства в [Sch97, стр. 446]). Вдобавок, в силу леммы Урысона для нормальных пространств (также см. [Sch97, стр. 446]), найдется такой набор функций  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ ,  $\varphi_i: B \rightarrow [0, 1]$ , что  $\varphi_i(U''_i) = \{1\}$  и  $\varphi_i(B \setminus U'_i) = \{0\}$ .

Мы представим изотопию  $\dot{\tau}$  в виде произведения изотопий, проекции носителей которых содержатся в носителях функций набора  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ . Для этого введем понятие *частичной изотопии*, определяемой по изотопии и функции на пространстве. Для изотопии  $\rho \in \Lambda_1(E_\partial)$  и непрерывной функции  $\tilde{\varphi}: E_\partial \rightarrow [0, 1]$  определим отображение  $\rho^{\tilde{\varphi}}: E_\partial \times [0, 1] \rightarrow E_\partial \times [0, 1]$ , полагая

$$\rho^{\tilde{\varphi}}(e, t) = \left( \text{pr}_{E_\partial} \left( \rho(e, \tilde{\varphi}(e) \cdot t) \right), t \right),$$

где через  $\text{pr}_{E_\partial}$  обозначена проекция  $E_\partial \times [0, 1] \rightarrow E_\partial$ . В эквивалентном виде,

$$\rho_t^{\tilde{\varphi}}(e) = \rho_{\tilde{\varphi}(e) \cdot t}(e).$$

Отображение  $\rho^{\tilde{\varphi}}$  непрерывно, поскольку его первая проекция есть сложная функция от непрерывных функций (включая произведение  $(e, t) \mapsto \tilde{\varphi}(p(e)) \cdot t$ ). Таким образом,  $\rho^{\tilde{\varphi}}$  можно рассматривать как гомотопию. Если изотопия  $\rho$  внутрислойна, а  $\tilde{\varphi}$  постоянна на каждом слое, то отображение  $\rho^{\tilde{\varphi}}$ , как нетрудно видеть, еще и биективно, а обратное отображение  $E_\partial \times [0, 1] \rightarrow E_\partial \times [0, 1]$  описывается формулой

$$(\rho^{\tilde{\varphi}})^{-1}(e, t) = \left( \text{pr}_{E_\partial} \left( \rho^{-1}(e, \tilde{\varphi}(e) \cdot t) \right), t \right).$$

Это показывает, что в оговоренном случае  $(\rho^{\tilde{\varphi}})^{-1}$  непрерывно, откуда мы заключаем, что для внутрислойной изотопии  $\rho$  и постоянной на каждом слое функции  $\tilde{\varphi}$  гомотопия  $\rho^{\tilde{\varphi}}$  является внутрислойной изотопией.

Заметим, что, как прямо следует из формулы данного определения, для внутрислойной изотопии  $\rho$  и постоянной на каждом слое функции  $\tilde{\varphi}$  выполняются условия

$$\text{supp}(\rho^{\tilde{\varphi}}) \subset \text{supp}(\rho) \cap \text{supp}(\tilde{\varphi}), \quad (3)$$

$$\text{supp}\left((\rho \star \rho^{\tilde{\varphi}})^{-1}\right) \subset \text{supp}(\rho) \setminus \tilde{\varphi}^{-1}(1). \quad (4)$$

Вернемся к изотопии  $\dot{\tau}$  и набору функций  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ . Определим функции  $\tilde{\varphi}_i: E_{\partial} \rightarrow [0, 1]$  правилом  $\tilde{\varphi}_i(e) = \varphi_i(p(e))$ . Поскольку изотопия  $\dot{\tau}$  внутрислойна, а функции  $\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_k$  в силу определения постоянны на слоях, корректно определены изотопии

$$\begin{aligned} \rho_{(0)} &:= \dot{\tau}, \\ \rho_{(1)} &:= \dot{\tau} \star (\dot{\tau}^{\tilde{\varphi}_1})^{-1}, \\ \rho_{(i)} &:= \rho_{(i-1)} \star (\rho_{(i-1)}^{\tilde{\varphi}_i})^{-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Эти изотопии дают разложение

$$\begin{aligned} \dot{\tau} &= \left(\dot{\tau} \star (\dot{\tau}^{\tilde{\varphi}_1})^{-1}\right) \star \dot{\tau}^{\tilde{\varphi}_1} = \\ &= \rho_{(1)} \star \rho_{(0)}^{\tilde{\varphi}_1} = \\ &= \rho_{(2)} \star \rho_{(1)}^{\tilde{\varphi}_2} \star \rho_{(0)}^{\tilde{\varphi}_1} = \\ &= \dots = \\ &= \rho_{(k)} \star \rho_{(k-1)}^{\tilde{\varphi}_k} \star \dots \star \rho_{(1)}^{\tilde{\varphi}_2} \star \rho_{(0)}^{\tilde{\varphi}_1}. \end{aligned}$$

Из определения (5) в силу (4) получаем, что

$$\text{supp}(\rho_{(i)}) \subset \text{supp}(\rho_{(i-1)}) \setminus \tilde{\varphi}_i^{-1}(1) = \text{supp}(\rho_{(i-1)}) \setminus p^{-1}(U_i'').$$

Отсюда, так как  $\{U_1'', \dots, U_k''\}$  есть покрытие базы, вытекает, что

$$\text{supp}(\rho_{(k)}) = \emptyset,$$

так что  $\rho_{(k)}$  есть тождественная (тривиальная) изотопия, т. е.

$$\dot{\tau} = \rho_{(k-1)}^{\tilde{\varphi}_k} \star \dots \star \rho_{(1)}^{\tilde{\varphi}_2} \star \rho_{(0)}^{\tilde{\varphi}_1}.$$

Из (3) получаем, что для каждого  $i \in \{1, \dots, k\}$  выполняется условие

$$\text{supp}(\rho_{(i-1)}^{\tilde{\varphi}_i}) \subset \text{supp}(\tilde{\varphi}_i) \subset p^{-1}(U_i').$$

Таким образом, изотопия  $\dot{\tau}$  разлагается в произведение внутрислоевых изотопий  $\chi_{(i)} = \rho_{(i-1)}^{\tilde{\varphi}_i}$ , у каждой из которых замыкание носителя лежит в множестве вида  $p^{-1}(U_i)$ , на котором расслоение имеет структуру прямого произведения. Остается показать, что изотопии  $\chi_{(i)}$  продолжимы. Пусть



$\check{\chi}_{(i)}$  — сужение изотопии  $\chi_{(i)}$  на  $E_{\partial} \cap p^{-1}(U_i)$ . Поскольку на  $p^{-1}(U_i)$  расслоение имеет структуру прямого произведения, с помощью вышеприведенной конструкции (2) мы можем продолжить изотопию  $\check{\chi}_{(i)}$  на  $p^{-1}(U_i)$ , причем так, что проекция в  $U_i$  носителя  $\text{supp}(\hat{\chi}_{(i)})$  продолжения  $\hat{\chi}_{(i)}$  совпадает с проекцией в  $U_i$  носителя  $\text{supp}(\check{\chi}_{(i)})$  самой изотопии  $\check{\chi}_{(i)}$ :

$$p(\text{supp}(\hat{\chi}_{(i)})) = p(\text{supp}(\check{\chi}_{(i)})) \subset U'_i.$$

Тогда  $\text{supp}(\hat{\chi}_{(i)}) \subset p^{-1}(U'_i)$ , так что

$$\text{clos}(\text{supp}(\hat{\chi}_{(i)})) \subset \text{clos}(p^{-1}(U'_i)) = p^{-1}(\text{clos}(U'_i)) \subset p^{-1}(U_i).$$

Пусть  $\tilde{\chi}_{(i)}$  — отображение, совпадающее с  $\hat{\chi}_{(i)}$  на  $p^{-1}(U_i) \times [0, 1]$  и тождественное на  $(E \setminus p^{-1}(U_i)) \times [0, 1]$ . Тогда  $\tilde{\chi}_{(i)}$  — изотопия, поскольку непрерывны ее сужения на элементы двухэлементного открытого покрытия

$$\{ p^{-1}(U_i) \times [0, 1], (E \setminus \text{clos}(\text{supp}(\tilde{\chi}_{(i)}))) \times [0, 1] \}.$$

Итак,  $\tilde{\chi}_{(i)}$  — внутрислойная изотопия из  $\Lambda_1(E)$ , продолжающая изотопию  $\chi_{(i)} = \rho_{(i-1)}^{\varphi_i}$ . Это завершает доказательство.  $\square$

## 5 Доказательство теоремы 6

Мы докажем теорему 6 как частный случай следующего предложения.

**Предложение 3.** Пусть  $X$  — линейно связное пространство,  $Z$  — непустое  $h$ -инвариантное подпространство в  $X$ ,  $p: E \rightarrow S^1$  — локально тривиальное расслоение со слоем  $X$ , а  $\bar{Z}$  — отвечающее подпространству  $Z$  подрасслоение в  $E$ . Предположим, что выполнены следующие условия:

- $\text{Map}_1(X, X; \text{fx } Z) \cap \text{Hомео}(X; \text{fx } Z) = \text{Hомео}_1(X; \text{fx } Z)$  (т. е. у  $X$  не имеется автогомеоморфизмов, связанных тождественной на  $Z$  гомотопией, но не связанных тождественной на  $Z$  изотопией),
- либо пространство группы  $\text{Hомео}_1(X; \text{fx } Z)$  односвязно, либо включение  $\text{Hомео}_1(X; \text{fx } Z) \subset \text{Map}_1(X, X; \text{fx } Z)$  индуцирует изоморфизм фундаментальных групп.

Предположим также, что

- (C1) пара  $(E, \bar{Z})$  является парой Борсука,
- (C2) естественная проекция  $\text{Fib}_1(E) \rightarrow \text{Fib}_1(\bar{Z})$  сюръективна и индуцирует эпиморфизм фундаментальных групп,
- (C3) количество компонент связности пространства  $\bar{Z}$  конечно, каждая из этих компонент компактна и, как подрасслоение в  $\bar{Z}$ , является  $VH$ -расслоением ранга 1.

Тогда  $p$  является ВН-расслоением.

*Доказательство предложения 3.* Требуется показать, что произвольный послойный и изотопный тождественному автогомеоморфизм  $h: E \rightarrow E$  послойно изотопен тождественному.

**Шаг 1.1.** Сведение ситуации к случаю гомеоморфизма  $h': E \rightarrow E$ , у которого сужение на  $\bar{Z}$  тождественно и который связан с  $\text{id}_E$  изотопией, при сужении на  $\bar{Z}$  дающей стягиваемую в  $\text{Hомео}_1(\bar{Z})$  петлю.

Пусть  $\tilde{\lambda}$  — путь в  $\text{Hомео}_1(E)$  из  $\text{id}_E$  в  $h$ , а  $\lambda$  — отвечающий ему путь в  $\text{Hомео}_1(\bar{Z})$  из  $\text{id}_{\bar{Z}}$  в  $h|_{\bar{Z}}$ . В силу условия о ВН-расслоениях ранга 1 из (С3), для каждой компоненты связности  $\bar{Z}^c$  пространства  $\bar{Z}$  выполняется равенство  $\text{Hомео}_1(\bar{Z}^c) \cap \text{Fib}(\bar{Z}^c) = \text{Fib}_1(\bar{Z}^c)$  (ВН-расслоение), а гомоморфизм  $\pi_1(\text{Fib}_1(\bar{Z}^c)) \rightarrow \pi_1(\text{Hомео}_1(\bar{Z}^c))$  сюръективен (ранг 1), так что сужение  $\lambda^c$  изотопии  $\lambda$  на  $\bar{Z}^c$  можно послойной изотопией продлить до стягиваемой петли  $\lambda_+^c$  в  $\text{Hомео}_1(\bar{Z}^c)$ . Поскольку слой линейно связан, а  $h$  послоен, то при всякой изотопии из  $\text{id}_E$  в  $h$  для любых двух точек  $x, y$  из  $E$  с  $p(x) = p(y)$  (и, в частности, для любых двух точек  $x, y$  из разных компонент связности пространства  $\bar{Z}$ , но лежащих в одном и том же слое, т. е. с  $p(x) = p(y)$ ), проекции путей этих точек в базу  $S^1$  связаны гомотопией с закрепленными концами. Отсюда в силу конечности числа компонент и их компактности (условие (С3)) нетрудно вывести, что продления  $\lambda_+^c$  для разных компонент  $\bar{Z}^c$  пространства  $\bar{Z}$  можно согласовать в смысле проекции на базу, так что и путь  $\lambda$  послойной изотопией продляется до стягиваемой петли  $\lambda_+$  в  $\text{Hомео}_1(\bar{Z})$ . В силу (С2) путь  $\tilde{\lambda}$  можно послойной изотопией продлить до такого пути  $\tilde{\lambda}_+$  в  $\text{Hомео}_1(E)$ , у которого сужение на  $\bar{Z}$  является петлей, гомотопной петле  $\lambda_+$ , т. е. стягиваемой петлей. Пусть  $h'$  — концевая точка пути  $\tilde{\lambda}_+$ . Тогда по построению сужение  $h'|_{\bar{Z}}$  автогомеоморфизма  $h'$  на  $\bar{Z}$  тождественно и  $h'$  связан с  $\text{id}_E$  изотопией, сужение которой на  $\bar{Z}$  дает стягиваемую в  $\text{Hомео}_1(\bar{Z})$  петлю  $\lambda_+$ . Поскольку  $h$  и  $h'$  связаны послойной изотопией, для демонстрации того, что  $h$  и  $\text{id}_E$  послойно изотопны, достаточно показать, что  $h'$  и  $\text{id}_E$  послойно изотопны.

**Шаг 1.2.** Переход от изотопии (между  $h'$  и  $\text{id}_E$ ) к гомотопии (между теми же  $h'$  и  $\text{id}_E$ ), тождественной на  $\bar{Z}$ .

Пусть  $\tau: E \times [0, 1] \rightarrow E$  — такая изотопия с  $\tau_0 = \text{id}_E$  и  $\tau_1 = h'$ , у которой сужение на  $\bar{Z}$  дает стягиваемую в  $\text{Hомео}_1(\bar{Z})$  петлю (см. шаг 1.1). Условие о стягиваемости означает, что для изотопии-сужения  $\tau|_{\bar{Z}}$  как для петли в  $\text{Hомео}_1(\bar{Z})$  найдется неподвижная на концах гомотопия, стягивающая эту петлю в точку, т. е. найдется непрерывное отображение

$$\rho: \bar{Z} \times [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \bar{Z}$$

такое, что

- сужение отображения  $\rho$  на  $\bar{Z} \times [0, 1] \times \{0\}$  совпадает с сужением отображения  $\tau$  на  $\bar{Z} \times [0, 1]$ ,
- обозначив через  $\rho_{s,t}$  сужение отображения  $\rho$  на  $\bar{Z} \times \{s\} \times \{t\}$ , для каждого  $r \in [0, 1]$  получим  $\rho_{0,r} = \rho_{r,1} = \rho_{1,r} = \text{id}_{\bar{Z}}$ .

Поскольку пара  $(E, \bar{Z})$  является парой Борсука (условие (C1)), то и пара  $(E \times [0, 1], \bar{Z} \times [0, 1])$  является парой Борсука (импликация видна, к примеру, из известного критерия, гласящего, что пара  $(S, T)$  является парой Борсука если и только если подпространство  $(S \times \{0\}) \cup (T \times [0, 1])$  является ретрактом для пространства  $S \times [0, 1]$ ; см., например, [Hat02, стр. 14]). Отсюда следует, что для изотопии  $\tau$  (рассматриваемой как отображение из  $E \times [0, 1]$  в  $E$ ) найдется гомотопия  $\kappa: E \times [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow E$  такая, что

- сужение отображения  $\kappa$  на  $E \times [0, 1] \times \{0\}$  совпадает с  $\tau$ , а
- сужение отображения  $\kappa$  на  $\bar{Z} \times [0, 1] \times [0, 1]$  совпадает с  $\rho$ .

Обозначая через  $\kappa_{s,t}$  сужение отображения  $\kappa$  на  $E \times \{s\} \times \{t\}$ , определим гомотопию  $\tau': E \times [0, 3] \rightarrow E$  правилом (проход по трем сторонам квадрата)

$$\tau'_t = \begin{cases} \kappa_{0,t} & \text{при } t \in [0, 1], \\ \kappa_{t-1,1} & \text{при } t \in [1, 2], \\ \kappa_{1,3-t} & \text{при } t \in [2, 3]. \end{cases}$$

По построению,  $\tau'$  связывает  $h'$  и  $\text{id}_E$  и тождественна на  $\bar{Z}$ .

**Шаг 1.3.** *Переход к гомотопии (между  $h'$  и  $\text{id}_E$ ), не только тождественной на  $\bar{Z}$ , но и внутрислойной, т. е. на всем протяжении сохраняющей каждую точку в одном слое.* (Ср. с построениями шага 1.3 в доказательстве теоремы 5.)

Заметим, что, поскольку  $h'$  переводит слои в слои,  $\bar{Z}$  непусто (так как  $Z$  предполагается непустым), а слой  $X$  — линейно связан, то гомотопия, переводящая  $\text{id}_E$  в  $h'$  и тождественная на  $\bar{Z}$ , является специальной. Отсюда в силу леммы 1 следует, что  $\text{id}_E$  и  $h'$  связаны и внутрислойной гомотопией. При этом из конструкции доказательства леммы 1 видно, что внутрислойная гомотопия, переводящая  $\text{id}_E$  в  $h'$ , может быть выбрана и тождественной на  $\bar{Z}$ .

**Шаг 2.** *Индукцированное расслоение со слоем  $\text{Map}_1(X, X; \text{fx } Z)$ .*

Таким образом, шаги 1.1–1.3 сводят ситуацию к случаю гомеоморфизма  $h': E \rightarrow E$ , у которого сужение на  $\bar{Z}$  тождественно и который связан с  $\text{id}_E$  тождественной на  $\bar{Z}$  внутрислойной гомотопией. (Ср. с доказательством теоремы 5, в котором ситуация сводится к случаю автогомеоморфизма  $h'': E \rightarrow E$ , связанного с  $\text{id}_E$  внутрислойной гомотопией, в каждый момент переводящей подпространство  $Z' \subset X'$ , отвечающее инвариантному подпространству  $Z \subset X$ , в  $Z'$ .) Завершающий шаг доказательства воспроизводит конструкцию завершающего шага 2 из доказательства теоремы 5 с заменой моноида  $\text{Map}_1(X, X; Z)$  и группы  $\text{Homeo}_1(X; Z)$  на моноид  $\text{Map}_1(X, X; \text{fx } Z)$  и группу  $\text{Homeo}_1(X; \text{fx } Z)$  соответственно: по заданному расслоению  $p$  строится индуцированное расслоение со слоем  $\text{Map}_1(X, X; \text{fx } Z)$  и т. д.  $\square$

*Доказательство теоремы 6.* Теорема 6 является частным случаем предложения 3. Укажем, из каких результатов вытекает, что условия предло-

жения 3 в теореме 6 выполняются. (Мы не упоминаем условия, непосредственно оговоренные в формулировке теоремы 6.)

- То, что край многообразия является его  $h$ -инвариантным подпространством, вытекает из теоремы об инвариантности области.
- То, что пара, состоящая из многообразия и его края, является парой Борсука (условие (C1) в формулировке предложения 3), следует, например, из результата [Br62] о воротниковой окрестности края (см. также [Nat02, Example 0.15]).
- То, что в теореме 6 естественная проекция  $Fib_1(E) \rightarrow Fib_1(\partial E)$  сюръективна и индуцирует эпиморфизм фундаментальных групп (условие (C2) предложения 3), вытекает из предложения 2, в силу которого всякая послойная изотопия края локально тривиально расслоенного над окружностью многообразия с краем продолжается до послойной изотопии всего многообразия.  $\square$

## 6 Доказательство теорем 1 и 3 в случае $n = 1$

В случае, когда расслоение из теоремы 1 есть гомеоморфизм окружностей  $p: S^1 \rightarrow S^1$ , его слой является точкой и утверждения теорем 1 и 3 в таком случае очевидны (поскольку изотопия между автогомеоморфизмами расслоения-гомеоморфизма в силу определений послойна, т.е.  $Homeo_1(M) = Fib_1(M)$ ). Случай произвольного накрытия  $S^1 \rightarrow S^1$  следует отсюда в силу приведенного ниже предложения 4: утверждения теорем 1 и 3 следуют из пунктов (1) и (2) предложения соответственно. (Предложение 4 используется и в дальнейших доказательствах для сведения ситуации к случаю расслоений со связным слоем.)

**Предложение 4.** Пусть  $F$  — связный метрический компакт,  $p: M \rightarrow S^1$  — локально тривиальное расслоение со слоем  $F$ ,  $s: S^1 \rightarrow S^1$  — накрытие. Пусть  $Fib^{cop}(M)$  и  $Fib^p(M)$  — подгруппы послойных автогомеоморфизмов в  $Homeo(M)$ , отвечающие слоям расслоений  $s \circ p$  и  $p$  соответственно, а  $Fib_1^{cop}(M)$  и  $Fib_1^p(M)$  — компоненты этих подгрупп, содержащие тождественное отображение  $id_M$ . Тогда  $Fib^{cop}(M)$  содержится в  $Fib^p(M)$  и включение  $Fib^{cop}(M) \subset Fib^p(M)$  является гомотопической эквивалентностью. Отсюда следует, в частности, что

- (1) расслоение  $p$  является ВН-расслоением если и только если  $s \circ p$  является ВН-расслоением,
- (2) включение  $Fib_1^{cop}(M) \subset Fib_1^p(M)$  есть гомотопическая эквивалентность.

*Доказательство.* То, что подгруппа  $Fib^{cop}(M)$  содержится в  $Fib^p(M)$ , обусловлено связностью слоя  $F$ : действительно, произвольный слой  $F'$  расслоения  $p$  является компонентой связности некоторого слоя  $\tilde{F}'$  расслоения  $s \circ p$ ,

так что произвольный элемент  $h \in Fib^{cop}(M)$  переводит  $F'$  в компоненту связности слоя  $h(\tilde{F}')$ , а это означает, что образ  $h(F')$  является слоем для  $p$ , так что  $h$  лежит и в  $Fib^p(M)$ .

Перейдем к доказательству того, что включение  $Fib^{cop}(M) \subset Fib^p(M)$  есть гомотопическая эквивалентность. Здесь можно было бы показать, что пространство группы  $Fib^p(M)$  расслаивается со стягиваемым слоем над подгруппой  $Fib^{cop}(M)$ , — наподобие того как  $Homeo(S^1)$  расслаивается над  $Fib^c(S^1)$  в случае накрытия  $c: S^1 \rightarrow S^1$ . Однако мы используем не расслаивание  $Fib^p(M)$  над  $Fib^{cop}(M)$ , а расслаивания  $Fib^{cop}(M)$  и  $Fib^p(M)$  над описываемой ниже подгруппой  $I^p(M)$ .

Обозначим через  $S_{(1)}^1$  и  $S_{(2)}^1$  базовые окружности расслоений  $p$  и  $c \circ p$  соответственно. Пусть  $\rho$  — произвольная (совместимая с топологией) внутренняя метрика на  $S_{(2)}^1$ . Обозначим через  $I^p(M)$  подгруппу тех автогомеоморфизмов из  $Fib^{cop}(M)$ , у которых индуцированные автоморфизмы  $S_{(2)}^1 \rightarrow S_{(2)}^1$  являются изометриями по отношению к  $\rho$ . Возникает цепочка включений

$$I^p(M) \subset Fib^{cop}(M) \subset Fib^p(M) \subset Homeo(M).$$

Покажем, что включение  $I^p(M) \subset Fib^{cop}(M)$  является гомотопической эквивалентностью. Для этого зафиксируем произвольный слой  $\tilde{F}_0$  расслоения  $c \circ p$  и произвольную непрерывную сюръекцию

$$\phi: \tilde{F}_0 \times [0, 1] \rightarrow M,$$

гомеоморфно отправляющую каждый слой  $\tilde{F}_0 \times \{t\}$ ,  $t \in [0, 1]$ , в тот или иной слой расслоения  $c \circ p$  и такую, что композиция  $c \circ p \circ \phi$  индуцирует гомеоморфизм между фактор-пространством  $[0, 1]/\{0, 1\}$  и базовой окружностью расслоения  $c \circ p$ . Обозначим через  $L$  подгруппу  $\text{id}_{\tilde{F}_0} \times Homeo_1([0, 1])$  в  $Homeo_1(\tilde{F}_0 \times [0, 1])$ . Заметим, что  $L$  изоморфна стягиваемой группе  $Homeo_1([0, 1])$ , а отображение  $\phi$  индуцирует мономорфизм  $\phi_*: L \rightarrow Fib_1^{cop}(M)$ . Как нетрудно удостовериться, подгруппы  $I^p(M)$  и  $\phi_*(L)$  замкнуты в  $Fib^{cop}(M)$ , а любой элемент  $g \in Fib^{cop}(M)$  единственным образом представляется в виде произведения  $g = ab$  с  $a \in I^p(M)$  и  $b \in \phi_*(L)$ . Из указанных свойств вытекает, что отображение

$$I^p(M) \times \phi_*(L) \rightarrow Fib^{cop}(M), \quad a \times b \mapsto ab,$$

является гомеоморфизмом. Последнее утверждение для общего случая польской группы (т. е. сепарабельной топологической группы, допускающей полную метрику) доказывается, к примеру, в [Ros21, Theorem A.3] (см. также [VINK, 27.Vx] для случая полупрямых произведений): *Если  $G$  — польская группа, а  $A$  и  $B$  — такие замкнутые подгруппы в  $G$ , что  $G = AB$  и  $A \cap B = 1_G$ , то групповая операция индуцирует гомеоморфизм между  $A \times B$  и  $G$ .* (Группа  $Fib^{cop}(M)$  — польская, поскольку является замкнутой подгруппой в польской<sup>6</sup> группе  $Homeo(M)$ .) Отсюда в силу стягиваемости

<sup>6</sup>Как хорошо известно, группы автогомеоморфизмов метрических компактов являются польскими.

$\phi_*(L)$  следует, что включение  $I^\rho(M) \subset Fib^{cop}(M)$  есть гомотопическая эквивалентность.

Теперь покажем, что и включение  $I^\rho(M) \subset Fib^p(M)$  является гомотопической эквивалентностью. Пусть  $\tilde{\rho}$  — метрика на  $S_{(1)}^1$ , индуцированная накрытием  $c: S_{(1)}^1 \rightarrow S_{(2)}^1$  и метрикой  $\rho$  на  $S_{(2)}^1$ , а  $I^{\tilde{\rho}}(M)$  — подгруппа тех автогомеоморфизмов в  $Fib^p(M)$ , у которых проекция в  $S_{(1)}^1$  является изометрией по отношению к  $\tilde{\rho}$ . Из условия о связности слоя  $F$  элементарными рассуждениями выводится, что  $I^{\tilde{\rho}}(M)$  совпадает с  $I^\rho(M)$ . Применяя к включению  $I^\rho(M) = I^{\tilde{\rho}}(M) \subset Fib^p(M)$  ту же схему рассуждений, что и к включению  $I^\rho(M) \subset Fib^{cop}(M)$ , мы видим, что оно является гомотопической эквивалентностью.

Отсюда вытекает, что и включение  $Fib^{cop}(M) \subset Fib^p(M)$  является гомотопической эквивалентностью, поскольку, если  $f_1: A \rightarrow B$  — гомотопическая эквивалентность и  $f_2: B \rightarrow C$  — такое отображение, что композиция  $f_2 \circ f_1$  является гомотопической эквивалентностью, то и  $f_2$  является гомотопической эквивалентностью, так как  $f_2$  гомотопно композиции гомотопических эквивалентностей:

$$f_2 = f_2 \circ \text{id}_B \simeq f_2 \circ (f_1 \circ g) = (f_2 \circ f_1) \circ g,$$

где  $g: B \rightarrow A$  — гомотопическая эквивалентность такая, что  $g \circ f_1 \simeq \text{id}_A$  и  $f_1 \circ g \simeq \text{id}_B$ .  $\square$

## 7 Доказательство теоремы 1 в случае $n = 2$

Предложение 4 сводит ситуацию к случаю расслоения со связным слоем.

### 7.1 Случай слоя, гомеоморфного окружности

Этот случай следует из теоремы 4. Тот факт, что

$$\text{Map}_1(S^1, S^1) \cap \text{Homeo}(S^1) = \text{Homeo}_1(S^1),$$

т. е. что гомотопные автогомеоморфизмы окружности изотопны, хорошо известен и вытекает из многих классических конструкций. Из второго (двойного) условия теоремы 4 выполняется вторая часть условия — о том, что включение  $\text{Homeo}_1(S^1) \subset \text{Map}_1(S^1, S^1)$  индуцирует изоморфизм фундаментальных групп (см. предложение 5).

**Предложение 5.** Включение  $\text{Homeo}_1(S^1) \subset \text{Map}_1(S^1, S^1)$  является гомотопической эквивалентностью.

*Доказательство.* Имеется естественное вложение

$$SO(2) \subset \text{Homeo}_1(S^1) \subset \text{Map}_1(S^1, S^1),$$

где под  $SO(2) \subset \text{Homeo}_1(S^1)$  понимаются евклидовы повороты.

То, что вложение  $SO(2) \subset \text{Homeo}_1(S^1)$  является гомотопической эквивалентностью, доказывается, например, в [Ghy01, Proposition 4.2] (также см. [McC61, Lemma 3.3]).

То, что вложение  $SO(2) \subset \text{Map}_1(S^1, S^1)$  является гомотопической эквивалентностью, следует, например, из результатов о так называемых  $H_*$ -пространствах, доказанных в [Wad56] (см. также [Wad58], [Koh60, Theorem (2.2)], [Ada58], [Ada60], [Han74, Theorem 5.1]).

Отсюда в силу аргумента, использованного в завершение доказательства предложения 4, получаем требуемое.  $\square$

*Замечание.* Предложение 5 (и тем более — утверждение о том, что включение  $\text{Homeo}_1(S^1) \subset \text{Map}_1(S^1, S^1)$  индуцирует изоморфизм фундаментальных групп) имеет альтернативные пути доказательства в терминах других классических конструкций. К примеру, можно рассмотреть расслоения  $\text{Homeo}_1(S^1) \rightarrow SO(2)$  и  $\text{Map}_1(S^1, S^1) \rightarrow SO(2)$ , где в качестве слоев выступают пространства отображений с неподвижной точкой. Поскольку эти слои, как нетрудно убедиться, стягиваемы, длинная точная последовательность гомотопических групп показывает, что эти расслоения являются слабыми гомотопическими эквивалентностями, так что и  $\text{Homeo}_1(S^1) \subset \text{Map}_1(S^1, S^1)$  является слабой гомотопической эквивалентностью. Поскольку рассматриваемые пространства являются абсолютными окрестностными ретрактами, отсюда в силу теоремы Дж. Х. К. Уайтхеда следует и гомотопическая эквивалентность.

## 7.2 Случай слоя, гомеоморфного отрезку

Этот случай следует из теоремы 5 (как и из теоремы 6). Стягиваемость пространства  $\text{Homeo}_1([0, 1])$  доказывается применением трюка Александра (см. [Ham74, Theorem 1.1.1] и [Ale23]).

## 8 Доказательство теоремы 3 в случае $n = 2$

Предложение 4 сводит ситуацию к случаю расслоения со связным слоем. Таким образом, мы рассматриваем расслоение  $p: E \rightarrow S^1$  со слоем окружность (а пространство  $E$  есть тор или бутылка Клейна). Введем на  $E$  локально евклидову метрику так, чтобы все слои расслоения  $p$  являлись геодезическими, обозначим через  $I_1(E)$  содержащую тождественное отображение компоненту группы изометрий пространства  $E$  и рассмотрим естественные включения

$$I_1(E) \subset \text{Fib}_1(E) \subset \text{Homeo}_1(E).$$

В случае тора  $E = T = S^1 \times S^1$  пространство группы  $I_1(E)$  гомеоморфно тору, а в случае бутылки Клейна  $E = K$  группа  $I_1(K)$  изоморфна группе  $SO(2)$  (проходу вдоль окружности  $SO(2)$  отвечает двойной поворот вдоль базы расслоения). В [Ham65a] и в [Ham65b] доказывается, что включения

$I_1(T) \subset \text{Homeo}_1(T)$  и  $I_1(K) \subset \text{Homeo}_1(K)$  являются слабыми гомотопическими эквивалентностями; как известно [LM72], действующие пространства являются абсолютными окрестностными ретрактами (ANR); отсюда в силу классической теоремы Дж. Х. К. Уайтхеда следует, что указанные включения являются и гомотопическими эквивалентностями. Убедимся в том, что в каждом из случаев  $E = T$  и  $E = K$  и включение  $I_1(E) \subset \text{Fib}_1(E)$  является гомотопической эквивалентностью. Искомое утверждение о том, что  $\text{Fib}_1(E) \subset \text{Homeo}_1(E)$  есть гомотопическая эквивалентность, последует отсюда в силу аргумента, использованного в завершение доказательства предложения 4.

**Случай тора.** Покажем, что включение  $I_1(T) \subset \text{Fib}_1(T)$  есть гомотопическая эквивалентность. Выберем в  $T$  произвольную точку  $x$  и обозначим через  $\text{Fib}_1(T, x)$  подгруппу в  $\text{Fib}_1(T)$ , образованную гомеоморфизмами, переводящими  $x$  в  $x$ . Как нетрудно удостовериться, подгруппы  $I_1(T)$  и  $\text{Fib}_1(T, x)$  замкнуты в  $\text{Fib}_1(T)$ , а любой элемент  $g \in \text{Fib}_1(T)$  единственным образом представляется в виде произведения  $g = ab$  с  $a \in I_1(T)$  и  $b \in \text{Fib}_1(T, x)$ , т. е.

$$I_1(T)\text{Fib}_1(T, x) = \text{Fib}_1(T), \quad I_1(T) \cap \text{Fib}_1(T, x) = \{\text{id}_T\}.$$

Отсюда, воспроизводя аргументы из доказательства предложения 4, получаем, что отображение

$$I_1(T) \times \text{Fib}_1(T, x) \rightarrow \text{Fib}_1(T), \quad a \times b \mapsto ab,$$

является гомеоморфизмом. (Группа  $\text{Fib}_1(T)$  — польская, поскольку является замкнутой подгруппой в польской<sup>7</sup> группе  $\text{Homeo}_1(T)$ .)

Теперь покажем, что пространство группы  $\text{Fib}_1(T, x)$  стягиваемо. Для этого зафиксируем какое-нибудь проходящее через точку  $x$  сечение  $\gamma$  расслоения  $T = E \rightarrow S^1$  и рассмотрим следующие подгруппы  $G_1$ ,  $G_2$  и  $G_3$  в  $\text{Fib}_1(T, x)$ :

$G_1$  — подгруппа, состоящая из всех тождественных на  $\gamma$  внутрислойных автогомеоморфизмов из  $\text{Fib}_1(T, x)$ ,

$G_2$  — подгруппа тех внутрислойных автогомеоморфизмов из  $\text{Fib}_1(T, x)$ , у которых сужение на каждый из слоев является изометрией (по отношению к сужению на слои исходной локально евклидовой метрики на  $E$ ),

$G_3$  — подгруппа тех автогомеоморфизмов из  $\text{Fib}_1(T, x)$ , у которых сужение на каждый из слоев является изометрией (по отношению к сужению на слои исходной локально евклидовой метрики на  $E$ ) и при этом переводящих  $\gamma$  в  $\gamma$ .

---

<sup>7</sup>Как хорошо известно, группы автогомеоморфизмов метрических компактов являются польскими.



Из определений ясно, что пространства групп  $G_1$ ,  $G_2$  и  $G_3$  гомеоморфны (очевидно, стягиваемым) пространству свободных петель в  $\text{Homeo}_1([0, 1])$ , пространству петель в  $\mathbb{R}^1$  с базовой точкой в нуле и пространству  $\text{Homeo}_1([0, 1])$  соответственно. Таким образом, каждая из подгрупп  $G_1$ ,  $G_2$  и  $G_3$  стягиваема. Кроме того, как следует из простых аргументов, каждая из подгрупп  $G_1$ ,  $G_2$  и  $G_3$  замкнута в  $\text{Fib}_1(T, x)$ , а каждый элемент  $g \in \text{Fib}_1(T, x)$  единственным образом представляется в виде произведения  $g = abc$  с  $a \in G_1$ ,  $b \in G_2$  и  $c \in G_3$ . Отсюда в силу вышеупомянутой теоремы из [Ros21, Theorem A.3] вытекает, что пространство группы  $\text{Fib}_1(T, x)$  стягиваемо.

Итак, мы видим, что группа  $\text{Fib}_1(T)$  тривиально расслаивается над подгруппой  $I_1(T)$  со стягиваемым слоем, так что включение  $I_1(T) \subset \text{Fib}_1(T)$  есть гомотопическая эквивалентность.

**Случай бутылки Клейна.** В случае с бутылкой Клейна  $K$  выберем и обозначим через  $m$  один из слоев расслоения  $p$ , обозначим через  $\text{Fib}_1(K, m)$  подгруппу в  $\text{Fib}_1(K)$ , образованную элементами, переводящими  $m$  в  $m$  с сохранением ориентации. Как нетрудно удостовериться, подгруппы  $I_1(K)$  и  $\text{Fib}_1(K, m)$  замкнуты в  $\text{Fib}_1(K)$ , а любой элемент  $g \in \text{Fib}_1(K)$  единственным образом представляется в виде произведения  $g = ab$  с  $a \in I_1(K)$  и  $b \in \text{Fib}_1(K, m)$ . Требуемый результат следует в силу аргументов, аналогичных случаю тора. Для проверки стягиваемости подгруппы  $\text{Fib}_1(K, m)$  по аналогии со случаем тора можно определить подгруппы  $G_1$ ,  $G_2$  и  $G_3$  в  $\text{Fib}_1(K, m)$  по некоторому выбранному сечению (в определении  $G_2$  не участвующему). При этом пространство группы  $G_3$  будет гомеоморфно пространству  $\text{Homeo}_1([0, 1])$ ,  $G_2$  — пространству сечений расслоенной над окружностью открытой ленты Мебиуса (со слоем открытый интервал), а  $G_1$  — пространству тождественных на крае послойных автогомеоморфизмов расслоенной над окружностью (со слоем отрезок) ленты Мебиуса. (Проверка стягиваемости этих пространств — несложное упражнение.)

## 9 Доказательство теоремы 1 в случае $n = 3$

Предложение 4 сводит ситуацию к случаю расслоения со связным слоем.

### 9.1 Случай слоя — замкнутой поверхности

В случае, когда слой расслоения из теоремы 1 есть замкнутая связная поверхность, утверждение теоремы следует из теоремы 4. Укажем, из каких результатов вытекает, что условия теоремы 4 здесь выполняются.

- То, что гомотопные автогомеоморфизмы замкнутой поверхности изотопны, доказывается в [Ер66].<sup>8 9</sup>
- То, что для всякой замкнутой связной поверхности  $X$  включение  $Homeo_1(X) \subset Map_1(X, X)$  индуцирует изоморфизм фундаментальных групп, вытекает из нижеследующего предложения 6.

**Предложение 6.** *Если связная замкнутая поверхность  $F$  не является ни сферой  $S^2$ , ни проективной плоскостью  $P^2$ , то включение  $Homeo_1(F) \subset Map_1(F, F)$  является гомотопической эквивалентностью. Если  $F \in \{S^2, P^2\}$ , то указанное включение индуцирует изоморфизм на уровне фундаментальных групп, но не является ни гомотопической эквивалентностью, ни слабой гомотопической эквивалентностью.*

*Доказательство.* Доказательство сводится к сопоставлению известных результатов о пространствах групп  $Homeo_1(F)$  и  $Map_1(F, F)$ . Необходимые нам результаты о  $Homeo_1(F)$  содержатся в основном в серии работ [Ham66, HD58, Ham62, Ham65a, Ham65b], а о  $Map_1(F, F)$  — в работах [Got65], [Ham83] и [Yam93] (покрывающих случаи асферических поверхностей, сферы и проективной плоскости соответственно). Ниже приведена более подробная информация по каждому классу.

Напомним, что, поскольку для компактных поверхностей известно [LM72], что пространство  $Homeo_1(F)$  является абсолютным окрестностным ретрактом (ANR), а  $Map_1(F, F)$  также является ANR (см., например, [Hu65, Theorem 3.1, p.188]), то в силу классической теоремы Дж. Х. К. Уайтхеда вложение  $Homeo_1(F) \subset Map_1(F, F)$  является гомотопической эквивалентностью если и только если оно является слабой гомотопической эквивалентностью.

$\chi(F) < 0$  В случае замкнутой связной поверхности  $F$  отрицательной эйлеровой характеристики пространства групп  $Homeo_1(F)$  и  $Map_1(F, F)$  гомотопически тривиальны, так что включение  $Homeo_1(F) \subset Map_1(F, F)$  есть слабая гомотопическая эквивалентность. Гомотопическая тривиальность для  $Homeo_1(F)$  доказывается в [Ham66].<sup>10</sup> Гомотопическая тривиальность для  $Map_1(F, F)$  следует из [Got65, Corollary III.2], где утверждается, что для линейно связного асферического полиэдра  $X$ ,

<sup>8</sup>Для случая замкнутой ориентируемой поверхности рода выше 1 этот факт доказан уже в [Bae27, Bae28].

<sup>9</sup>В [Ер66] изложение ведется в рамках кусочно-линейной категории. Результат распространяется и на топологическую категорию. Действительно, пусть два автогомеоморфизма замкнутой поверхности гомотопны; поскольку всякий автогомеоморфизм поверхности изотопен кусочно-линейному ([Ер66, Theorem A4]), проблема сводится к случаю гомотопных кусочно-линейных автогомеоморфизмов; гомотопные кусочно-линейные автогомеоморфизмы кусочно-линейно гомотопны и, следовательно, кусочно-линейно изотопны ([Ер66, Theorems 6.3, 6.4]).

<sup>10</sup>Таким образом, в случае замкнутой поверхности отрицательной эйлеровой характеристики выполняются оба альтернативных условия теоремы 4: и об индуцированном включением  $Homeo_1(X) \subset Map_1(X, X)$  изоморфизме фундаментальных групп, и об одностойности пространства группы  $Homeo_1(X)$ .

у которого центр фундаментальной группы тривиален, пространство группы  $Map_1(X, X)$  стягиваемо.

$T$  В случае тора  $T = S^1 \times S^1$  имеется естественное вложение

$$T \subset Homeo_1(T) \subset Map_1(T, T),$$

доставляемое изометриями тора, снабженного локально евклидовой метрикой. В [Ham65a] доказывается, что включение  $T \subset Homeo_1(T)$  есть слабая гомотопическая эквивалентность. Слабая гомотопическая эквивалентность для включения  $T \subset Map_1(T, T)$  следует из известной теоремы [Got65, Theorem III.2], дающей описание слабого гомотопического типа для асферических (локально конечных линейно связанных симплициальных) полиэдров.<sup>11</sup> <sup>12</sup> Следовательно, вложение  $Homeo_1(T) \subset Map_1(T, T)$  есть слабая гомотопическая эквивалентность.

$K$  В случае бутылки Клейна  $K$  имеется естественное вложение

$$SO(2) \subset Homeo_1(K) \subset Map_1(K, K),$$

где вложение  $SO(2) \subset Homeo_1(K)$  отвечает двойному повороту вдоль базы при представлении бутылки Клейна в виде расслоения над окружностью со слоем окружностью (см. [Ham65b, Sec. 4]). В [Ham65b] доказывается, что включение  $SO(2) \subset Homeo_1(K)$  является слабой гомотопической эквивалентностью. Из конструкции доказательства вышеупомянутой [Got65, Theorem III.2] следует, что включение  $SO(2) \subset Map_1(K, K)$  является слабой гомотопической эквивалентностью. Таким образом, включение  $Homeo_1(K) \subset Map_1(K, K)$  является слабой гомотопической эквивалентностью.

$S^2$  В случае сферы  $S^2$  имеется естественное вложение

$$SO(3) \subset Homeo_1(S^2) \subset Map_1(S^2, S^2),$$

где под  $SO(3) \subset Homeo_1(S^2)$  понимаются евклидовы повороты. Кнезер показал [Kne26], что образ включения  $SO(3) \subset Homeo_1(S^2)$  является деформационным ретрактом для  $Homeo_1(S^2)$ , а Хансен доказывает ([Han83, p. 364], [Han90, p. 44]), что включение  $SO(3) \subset Map_1(S^2, S^2)$  дает изоморфизм фундаментальных групп, не являясь при этом гомотопической эквивалентностью (и, следовательно,

<sup>11</sup>Здесь и далее в аналогичных случаях непосредственно в формулировках указываемых утверждений речь как правило идет лишь об изоморфизмах групп, а то, что эти изоморфизмы индуцированы интересующими нас вложениями пространств, видно из конструкций доказательств.

<sup>12</sup>Для отображений в пространства Эйленберга–Маклейна с абелевой группой описание слабого гомотопического типа было известно и ранее [Tho57]; подробнее см. обзоры [Rut97, Sec. 2.1], [Smi10, Sec. 2.1.2].

поскольку мы имеем дело с ANR, не являясь и слабой гомотопической эквивалентностью). Отсюда следует, что и  $\text{Homeo}_1(S^2) \subset \text{Map}_1(S^2, S^2)$  дает изоморфизм фундаментальных групп, не являясь при этом слабой гомотопической эквивалентностью.

$P^2$  В случае проективной плоскости  $P^2$  имеется естественное вложение

$$SO(3) \subset \text{Homeo}_1(P^2) \subset \text{Map}_1(P^2, P^2).$$

В [Нам65b] показано (см. доказательство теоремы 3.2 и раздел 5 в [Нам65b]), что вложение  $SO(3) \subset \text{Homeo}_1(P^2)$  является слабой гомотопической эквивалентностью. В [Yam93] доказывается, что включение  $SO(3) \subset \text{Map}_1(P^2, P^2)$  не является гомотопической эквивалентностью (и, следовательно, поскольку мы имеем дело с ANR, не является и слабой гомотопической эквивалентностью), однако из результатов [Yam93] следует (см. пояснения с вычислениями фундаментальной группы  $\pi_1(\text{Map}_1(P^2, P^2))$  в [GS09, Remark 3.2]), что включение  $SO(3) \subset \text{Map}_1(P^2, P^2)$  дает изоморфизм фундаментальных групп. Отсюда следует, что и  $\text{Homeo}_1(P^2) \subset \text{Map}_1(P^2, P^2)$  индуцирует изоморфизм на уровне фундаментальных групп, но не является слабой гомотопической эквивалентностью.  $\square$

## 9.2 Случай, когда слой есть поверхность с краем

Этот случай теоремы 1 выводится из теоремы 6. Перечислим результаты, из которых следует, что в случае, когда слой есть связная компактная поверхность с непустым краем, в теореме 1 выполняются условия теоремы 6.

- То, что автогомеоморфизмы поверхности с краем, связанные тождественной на крае гомотопией, связаны и тождественной на крае изотопией, доказывается в [Ер66, Theorems 6.3, 6.4].<sup>13</sup>
- Односвязность (более того, стягиваемость) пространства группы  $\text{Homeo}_1(X; \text{fx } \partial X)$  в случае, когда  $X$  — связная компактная поверхность с непустым краем, доказывается в серии работ [Нам66, HD58, Нам62, Нам65а, Нам65b] (конечно же, случай диска следует уже из [Ale23]).
- То, что сужение расслоения  $p$  на каждую из компонент связности края  $\partial E$  является ВН-расслоением ранга 1, объясняется следующим образом. Поскольку слой  $u$   $p$  есть связная компактная поверхность, каждая из компонент связности края  $\partial E$  является либо тором, либо бутылкой

<sup>13</sup>В формулировках теорем 6.3 и 6.4 в [Ер66] речь идет о гомотопиях и изотопиях без ограничения тождественности на крае, но в приведенном в [Ер66] доказательстве этих теорем ситуация сводится именно к случаю тождественных на крае и нужный нам факт доказывается.

Клейна. Ясно, что локально тривиальное расслоение  $p': M \rightarrow S^1$  связного компактного многообразия над окружностью раскладывается в композицию локально тривиальных расслоений

$$M \xrightarrow{\dot{p}} S^1 \xrightarrow{c} S^1,$$

где у  $\dot{p}$  слой связан, а  $c$  является накрытием. В силу рассмотренного выше случая теоремы 1 о расслоениях со слоем, гомеоморфным окружности, расслоение  $\dot{p}$  является ВН-расслоением, а в силу теоремы 3  $\dot{p}$  является<sup>14</sup> ВН-расслоением ранга 1. Отсюда в силу предложения 4 получаем, что и  $p' = c \circ \dot{p}$  есть ВН-расслоение ранга 1.

## 10 Доказательство теоремы 2

Предложение 4 сводит общий случай теоремы 2 к случаю расслоения со связным слоем. В случае связного слоя утверждение теоремы 2 следует из теоремы 4 в силу результатов из [Wal68] и [Lau74]. В [Wal68] доказывается, что гомотопные автогомеоморфизмы хаковского многообразия  $M$  изотопны (первое условие для слоя из теоремы 4), а в [Lau74] доказывается, что включение  $\text{Homeo}_1(M) \subset \text{Map}_1(M, M)$  индуцирует изоморфизм фундаментальных групп (второе условие для слоя из теоремы 4). См. также [Nat76], где доказывается более сильный результат о гомотопической эквивалентности. В указанных работах используются кусочно-линейная и гладкая категории; как указано в [Nat76, стр. 343], переход между ними и топологической категорией обеспечивается триангуляционными теоремами Бинга и Мойза и доказанной Хэтчером в [Hat83] гипотезой Смейла.

## 11 Альтернативные доказательства частных случаев теоремы 1

Приведем альтернативные варианты доказательства теоремы 1 для некоторых классов расслоений.

### 11.1 Второе доказательство теоремы 1 для случая двумерного сферического слоя

Пусть  $p: E \rightarrow S^1$  — локально тривиальное расслоение над окружностью со «сферическим» слоем  $F \in \{S^2, P^2\}$  (т. е. со слоем, гомеоморфным либо сфере  $S^2$ , либо проективной плоскости  $P^2$ ). (В таком случае  $E$  есть либо одно из произведений  $S^2 \times S^1$  и  $P^2 \times S^1$ , либо трехмерная бутылка Клейна  $S^2 \tilde{\times} S^1$ ; см. [Ste44, р. 299].) Мы доказываем, что  $p$  есть ВН-расслоение,

<sup>14</sup>Конечно же, нужная для ранга 1 эпиморфность на уровне фундаментальных групп следует уже из конструкций работ [Ham65a, Ham65b].

т. е. что каждый изотопный тождественному послойный автогомеоморфизм  $h: E \rightarrow E$  еще и послойно изотопен тождественному.

**Шаг B0.** Сведение к случаю автогомеоморфизма, связанного с тождественным отображением внутрислойной гомотопией.

Рассуждения из шагов 1.1–1.3 доказательства теоремы 5 показывают, что ситуация сводится к случаю автогомеоморфизма  $h': E \rightarrow E$ , связанного с  $\text{id}_E$  внутрислойной гомотопией.

**Шаг B1.** Сведение к случаю автогомеоморфизма, тождественного на сечении.

Поскольку  $p$  — расслоение над окружностью с линейно связным слоем, у  $p$  имеются сечения ([Hus94, Theorem 7.1]). Пусть  $\gamma$  — какое-нибудь сечение для  $p$ . Поскольку  $h'$  связан с  $\text{id}_E$  внутрислойной гомотопией, сечения  $\gamma$  и  $h'(\gamma)$  гомотопны (и, следовательно, изотопны) в классе сечений. Поскольку слой  $F \in \{S^2, P^2\}$  предполагается однородным, изотопия сечения продолжается до внутрислойной изотопии расслоения. Это сводит доказательство к случаю автогомеоморфизма  $h_2: E \rightarrow E$ , не только связанного с  $\text{id}_E$  внутрислойной гомотопией, но еще и тождественного на  $\gamma$ .

**Шаг B2.** Сведение к случаю автогомеоморфизма, сохраняющего окрестность сечения.

Из теоремы Шёнфлиса выводится, что у сечения  $\gamma$  найдется замкнутая окрестность  $N_\gamma$  (полноторий или полная бутылка Клейна), пересекающая каждый слой расслоения  $p$  по диску, и что автогомеоморфизм  $h_2$  внутрислойно изотопен автогомеоморфизму  $h_3$  с  $h_3(N_\gamma) = N_\gamma$ .

**Шаг B3.** Сведение к случаю автогомеоморфизма, сохраняющего окрестность сечения и ориентации слоевых дисков.

Поскольку сужение автогомеоморфизма  $h_3$  на каждый слой расслоения  $p$  гомотопно тождественному отображению, это сужение и изотопно тождественному ([Er66]), так что в случае ориентируемого слоя  $F = S^2$  сужение автогомеоморфизма  $h_3$  на каждый слоевой диск расслоения  $p|_{N_\gamma}: N_\gamma \rightarrow S^1$  автоматически сохраняет ориентацию этого диска. В случае  $F = P^2$  возможна ситуация, когда  $h_3$  переводит  $N_\gamma$  в  $N_\gamma$  с обращением ориентации слоевых дисков. В таком случае представим слой  $P^2$  как фактор-пространство  $M/\partial M$  ленты Мёбиуса  $M$  по ее краю  $\partial M$ , зафиксируем в  $M$  некоторую центральную кривую  $\ell$  (т. е. простую замкнутую кривую в  $\text{int}(M)$ , являющуюся для  $M$  ретрактом) и заметим, что сечение  $\gamma$  может быть выбрано таким образом, чтобы при проекции  $P^2 \times S^1 \rightarrow P^2 = M/\partial M$  его образ содержался в  $\ell$  (будучи, к примеру, точкой), а  $N_\gamma$  может быть выбрана таким образом, чтобы переходить в себя при внутрислойной изотопии расслоения  $P^2 \times S^1$ , однократно прокручивающей тор  $\ell \times S^1 \subset P^2 \times S^1$  вдоль  $\ell$ . Композиция  $h_4$  автогомеоморфизма  $h_3$  с такой изотопией дает желаемый результат.

**Шаг B4.** Сведение к случаю автогомеоморфизма, сохраняющего окрестность сечения и ориентации слоевых дисков и тождественного на одной из параллелей края этой окрестности.

Теперь выберем на крае  $\partial N_\gamma$  (этот край гомеоморфен тору или бутылке Клейна) какую-нибудь замкнутую кривую  $\lambda$ , являющуюся сечением для  $p$ .

Если край  $\partial N_\gamma$  гомеоморфен бутылке Клейна, то на  $\partial N_\gamma$  имеются ровно два изотопических класса таких сечений (в классе изотопий на  $\partial N_\gamma$ ), и из [CCS, Theorem 1.5] следует, что всякая изотопия  $\tau_t: E \rightarrow E$  с  $\tau_0 = \text{id}_E$ , переводящая  $N_\gamma$  в  $N_\gamma$ , сохраняет каждый из этих классов (в [CCS] изложение ведется в гладкой категории, перенос в топологическую категорию обеспечивается доказанной Хэтчером гипотезой Смейла, — см. [Hat83, Appendix, (3)]). Отсюда заключаем, поскольку  $h_4$  изотопен  $\text{id}_E$ , что  $h_4(\lambda)$  и  $\lambda$  изотопны на  $\partial N_\gamma$ . Отсюда следует, что некоторая внутрислойная изотопия  $\tau_t: E \rightarrow E$  с  $\tau_0 = \text{id}_E$  и  $\tau_t(N_\gamma) = N_\gamma$  для всех  $t \in [0, 1]$  переводит  $h_4(\lambda)$  в  $\lambda$ . Переходя от  $h_4$  к композиции  $h_5 := \tau_1 \circ h_4$ , получаем требуемое.

Если край  $\partial N_\gamma$  гомеоморфен тору (а  $\partial N_\gamma$ , соответственно, — полноторию), выберем какой-нибудь слой  $F_0$  расслоения  $p$ , обозначим через  $m$  «меридианную» кривую  $\partial N_\gamma \cap F_0$ , ориентируем кривые  $\lambda$  и  $m$  произвольным образом и обозначим через  $[\lambda]$  и  $[m]$  соответствующие гомологические классы из  $H_1(\partial N_\gamma)$ . Тогда множество расположенных на торе  $\partial N_\gamma$  сечений расслоения  $p$  разбивается на изотопические классы  $\Lambda_i$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , где  $\Lambda_i$  — класс, содержащий кривые класса  $[\lambda] + i[m]$ .

Как известно, в произвольной сколь угодно тонкой окрестности  $U_\epsilon(F') \cong F' \times [-\epsilon, +\epsilon]$  произвольного слоя  $F'$  расслоения  $p$  можно осуществить внутрислойную изотопию  $\tau_t: E \rightarrow E$  с  $\tau_0 = \text{id}_E$  и  $\tau_1(N_\gamma) = N_\gamma$  и тождественную вне  $U_\epsilon(F')$ , «подкручивающую»  $N_\gamma$  на два полных оборота (скручивания Дена), т. е. переводящую кривые классов  $\Lambda_i$  в кривые классов  $\Lambda_{i+2}$ . В случае  $F = S^2$  такая изотопия известна из так называемого «трюка Дирака» или «трюка с ремнем» (см., например, [BIMPW] и приведенные там ссылки); в процессе одной из возможных реализаций такой изотопии дуга (ось ремня)  $U_\epsilon(F_0) \cap \gamma$  — в проекции на слой — образует петлю, эта петля, увеличиваясь, закрывает весь слой, а затем возвращается в исходное положение. В случае  $F = P^2$  конструкция, дающая внутрислойную изотопию с такими свойствами, описана в доказательстве теоремы 1.5 в [CCS].

Таким образом, воспроизводя указанную послойную изотопию или обратную к ней необходимое число раз, мы можем послойными изотопиями переводить  $N_\gamma$  в  $N_\gamma$  с любым четным количеством подкруток, т. е. переводить кривые класса  $\Lambda_i$  в кривые класса  $\Lambda_j$  для любого четного  $j - i$ . Вместе с тем из полученных в [CCS] результатов прямо следует, что если вложенный в 3-многообразие  $W$  полноторий  $V$  переводится в себя изотопией в  $W$ , то разница между классом целых 1-гомологий в  $\partial V$  и его образом под действием этой изотопии не может равняться классу меридианной кривой на  $\partial V$ . Отсюда следует, поскольку  $h_4$  изотопен  $\text{id}_E$  (а  $\lambda$  по определению лежит в классе  $\Lambda_0$ ), что сечение  $h_4(\lambda)$  лежит в классе  $\Lambda_j$  с четным  $j$ , так что некоторая внутрислойная изотопия, переводящая  $N_\gamma$  в  $N_\gamma$  с сохранением ориентации слоевых дисков, переводит  $h_4(\lambda)$  в  $\lambda$ . Дополнив этой изотопией гомеоморфизм  $h_4$ , получаем гомеоморфизм  $h_5$  с требуемым свойством.

**Шаг В5.** *Сведение к случаю автогомеоморфизма, сохраняющего окрестность сечения и тождественного на крае этой окрестности.*

Конструкция шага 2 доказательства теоремы 5 сводит вопрос о внутрислойной изотопности сужения  $h_5|_{\partial N_\gamma}$  полученного на предыдущем ша-

ге автоморфизма  $h_5$  тождественному отображению  $\text{id}_{\partial N_\gamma}$  (имеется в виду внутрислойность в слоях расслоения  $p|_{\partial N_\gamma}$ ) к вопросу об изотопности сечений некоторого локально тривиального расслоения над окружностью со слоем  $\text{Homeo}_1(S^1, *)$ ; все сечения такого расслоения изотопны в силу линейной связности и односвязности пространства группы  $\text{Homeo}_1(S^1, *)$ , которое, как нетрудно видеть, гомеоморфно пространству  $\text{Homeo}_1([0, 1])$  и тем самым стягиваемо.<sup>15</sup> (См. также предложение 1 и его доказательство.) Теорема Шенфлиса позволяет продолжить существующую в силу этого рассуждения внутрислойную изотопию, переводящую автоморфизм  $h_5|_{\partial N_\gamma}$  в тождественный, до внутрислойной изотопии  $\tau_t$  всего пространства  $E$ . Положив  $h_6 := \tau_1 \circ h_5$ , получаем желаемое.

**Шаг В6.** *Сведение к случаю автогомеоморфизма, тождественного на окрестности сечения.*

Применяя предложение 1 к расслоению  $p|_{N_\gamma}: N_\gamma \rightarrow S^1$  со слоем диск  $D^2$  и нормальной подгруппе  $\text{Homeo}_1(D^2, \text{fx } \partial D^2)$ , получаем, что гомеоморфизм  $h_6$  внутрисло изотопен автогомеоморфизму  $h_7$ , тождественному на  $N_\gamma$ . То, что подгруппа  $\text{Homeo}_1(D^2, \text{fx } \partial D^2)$  линейно связна и односвязна (и, более того, стягиваема) доказывается применением трюка Александра.

**Шаг В7.** *Завершение доказательства.*

Итак, задача свелась к случаю послойного автогомеоморфизма, тождественного на  $N_\gamma$ . Пусть  $E_2 := E \setminus \text{int}(N_\gamma)$ . Рассмотрим сужения  $p|_{E_2}$  и  $h_7|_{E_2}$  расслоения  $p$  и автоморфизма  $h_7$  на  $E_2$ . Слой  $F_2$  расслоения  $p|_{E_2}$  является диском  $D^2$  или лентой Мёбиуса  $M$ , а  $h_7|_{E_2}$  есть послойный автоморфизм, тождественный на крае  $\partial E_2$ . Заметим, что группа  $\text{Homeo}_1(F_2, \text{fx } \partial F_2)$  стягиваема (в случае  $F_2 = D^2$  это доказывается применением трюка Александра [Ale23]; в случае  $F_2 = M$  это вытекает из [Ham65b, Theorem 2.1] в силу уже упоминавшихся выше результатов [LM72] и теоремы Дж. Х. К. Уайтхеда). Применяя предложение 1 к расслоению  $p|_{E_2}$ , гомеоморфизму  $h_7|_{E_2}$  и нормальной подгруппе  $\text{Homeo}_1(F_2, \text{fx } \partial F_2)$ , получаем, что  $h_7|_{E_2}$  связан с  $\text{id}_{E_2}$  внутрислойной тождественной на  $\partial E_2$  изотопией, а значит  $h_7$  связан внутрислойной изотопией с  $\text{id}_E$ . Итак, мы показали, что исходный автоморфизм  $h$  послойно изотопен тождественному.

## 11.2 Второе доказательство теоремы 1 в случае торического слоя

Пусть  $p: E \rightarrow S^1$  — локально тривиальное расслоение над окружностью со слоем тор  $T = S^1 \times S^1$ . Мы доказываем, что  $p$  есть ВН-расслоение, т. е. что каждый изотопный тождественному послойный автогомеоморфизм  $h: E \rightarrow E$  еще и послойно изотопен тождественному. Применяя рассуждения шагов 1.1–1.3 доказательства теоремы 5 и шага В1 для сферического случая, мы видим, что доказательство сводится к случаю автогомеоморфизма  $h': E \rightarrow E$ , связанного с  $\text{id}_E$  внутрислойной гомотопией и тождествен-

<sup>15</sup>Как уже упоминалось, стягиваемость пространства  $\text{Homeo}_1([0, 1])$  доказывается применением трюка Александра (см. [Ham74, Theorem 1.1.1] и [Ale23]).



ного на произвольно выбранном сечении  $\gamma \subset E$  расслоения  $p$ . Здесь нить доказательства для случая торического слоя отклоняется от приведенного выше доказательства для сферического слоя: мы воспользуемся следующей леммой.

**Лемма 5.** Пусть  $T$  — тор,  $x \in T$  — точка. Тогда

$$\text{Hoteo}(T, x) \cap \text{Hoteo}_1(T) = \text{Hoteo}_1(T, x),$$

т. е. всякий гомеоморфизм  $h: T \rightarrow T$  с  $h(x) = x$ , изотопный тождественному отображению  $\text{id}_T$ , связан с  $\text{id}_T$  изотопией, неподвижной в  $x$ .

*Доказательство.* Введем на  $T$  локально евклидову метрику. Тогда для любых двух точек  $a$  и  $b$  из  $T$  в  $\text{Hoteo}_1(T)$  имеется единственная изометрия, переводящая  $a$  в  $b$ . Если  $\tau: T \times [0, 1] \rightarrow T \times [0, 1]$  — изотопия, связывающая  $\tau_0 = \text{id}_T$  с  $\tau_1 = h$ , и  $\tau_1(x) = x$ , то изотопия-произведение  $\rho \star \tau$  (в смысле определений из доказательства предложения 2), где  $\rho_t$  есть изометрия из  $\text{Hoteo}_1(T)$ , переводящая  $\tau_t(x)$  в  $x$ , связывает  $\text{id}_T$  с  $\tau_1 = h$ , будучи неподвижной в  $x$ .  $\square$

Применим предложение 1 к расслоению  $p|_{E \setminus \gamma}: E \setminus \gamma \rightarrow S^1$  со слоем — проколотый тор  $T \setminus \{x\}$ , гомеоморфизму  $h|_{E \setminus \gamma}: E \setminus \gamma \rightarrow E \setminus \gamma$  и нормальной подгруппе  $\text{Hoteo}_1(T \setminus \{x\})$ . Условия предложения 1 в данном случае выполнены: сужение гомеоморфизма  $h|_{E \setminus \gamma}$  на каждый слой лежит в  $\text{Hoteo}_1(T \setminus \{x\})$  в силу леммы 5, группа  $\text{Hoteo}_1(T \setminus \{x\})$  односвязна и, более того, стягиваема ([Yag00]). Таким образом, в силу предложения 1 существует внутрислойная изотопия между  $\text{id}_{E \setminus \gamma}$  и  $h|_{E \setminus \gamma}$ , так что существует внутрислойная изотопия и между  $\text{id}_E$  и  $h$ . Доказательство завершено.

*Замечание.* Приведенные альтернативные варианты доказательств используют часть рассуждений из первых вариантов доказательств; ключевое отличие в том, что альтернативные варианты не обращаются к пространствам  $\text{Map}_1(X, X)$ .

*Замечание.* Каждый из описанных в настоящем разделе подходов — и подход, примененный в случае сферического слоя, и подход, примененный к торическому слою, дают альтернативные доказательства теоремы 1 в случае слоя, гомеоморфного окружности.

## Список литературы

- [Ada58] J. F. Adams, On the nonexistence of elements of Hopf invariant one, Bull. Amer. Math. Soc., 1958, 64, 279–282.
- [Ada60] J. F. Adams, On the non-existence of elements of Hopf invariant one, Ann. of Math. (2), 1960, 72, 20–104.
- [Ale23] J. W. Alexander, On the deformation of an  $n$ -cell, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1923, 9, 406–407.

- [Art25] E. Artin, Theorie der Zöpfe, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1925, 4, 47–72.
- [AM20] F. Atalan, E. Medetogullari, The Birman–Hilden property of covering spaces of nonorientable surfaces, Ukrain. Mat. Zh., 2020, 72:3, 307–315.
- [Bae27] R. Baer, Kurventypen auf Flächen, J. Reine Angew. Math., 1927, 156, 231–246.
- [Bae28] R. Baer, Isotopie von Kurven auf orientierbaren, geschlossenen Flächen und ihr Zusammenhang mit der topologischen Deformation der Flächen, J. Reine Angew. Math., 1928, 159, 101–116.
- [BIMPW] R. P. Bakshi, D. Ibarra, G. Montoya-Vega, J. H. Przytycki, D. Weeks, On framings of links in 3-manifolds, Canad. Math. Bull., 2020, pp. 1–13, <http://dx.doi.org/10.4153/S000843952000079X>.
- [BH71] J. S. Birman, H. M. Hilden, On the mapping class groups of closed surfaces as covering spaces, Ann. of Math. Stud., 1971, 66, 81–115.
- [BH72a] J. S. Birman, H. M. Hilden, Isotopies of homeomorphisms of Riemann surfaces and a theorem about Artin’s braid group, Bull. Amer. Math. Soc., 1972, 78, 1002–1004.
- [BH72b] J. S. Birman, H. M. Hilden, Lifting and projecting homeomorphisms, Arch. Math. (Basel), 1972, 23, 428–434.
- [BH73] J. S. Birman, H. M. Hilden, On isotopies of homeomorphisms of Riemann surfaces, Ann. of Math. (2), 1973, 97, 424–439.
- [BH17] J. S. Birman, H. M. Hilden, Erratum to ‘Isotopies of homeomorphisms of Riemann surfaces’, Ann. of Math. (2), 2017, 185, 345.
- [Br62] M. Brown, Locally flat imbeddings of topological manifolds, Ann. of Math. (2), 1962, 75, 331–341.
- [BZ85] G. Burde, H. Zieschang, Knots, de Gruyter Studies in Math., vol. 5, Walter de Gruyter, Berlin, 1985.
- [CCS] P. Cahn, V. Chernov, R. Sadykov, The number of framings of a knot in a 3-manifold, J. Knot Theory Ramifications, 2014, 23:13, 1450072, 9 pp.
- [Ch69] A. В. Чернавский, Локальная стягиваемость группы гомеоморфизмов многообразия, Матем. сб., 1969, 79(121):3(7), 307–356.
- [EE69] C. J. Earle, J. Eells, A fibre bundle description of Teichmüller theory, J. Differential Geometry, 1969, 3, 19–43.

- [ES70] C. J. Earle, A. Schatz, Teichmüller theory for surfaces with boundary. *J. Differential Geometry*, 1970, 4, 169–185.
- [EK71] R. D. Edwards, R. Kirby, Deformations of spaces of imbeddings. *Ann. of Math. (2)*, 1971, 93, 63–88.
- [Ep66] D. B. A. Epstein, Curves on 2-manifolds and isotopies, *Acta Math.*, 1966, 115, 83–107.
- [FW86] J. L. Friedman, D. M. Witt, Homotopy is not isotopy for homeomorphisms of 3-manifolds, *Topology*, 1986, 25:1, 35–44.
- [F01] T. Fuller, On fiber-preserving isotopies of surface homeomorphisms, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2001, 129, 1247–1254.
- [Ghy01] É. Ghys, Groups acting on the circle, *Enseign. Math. (2)*, 2001, 47:3–4, 329–407.
- [GS09] D. L. Gonçalves, M. Spreafico, The fundamental group of the space of maps from a surface into the projective plane, *Math. Scand.*, 2009, 104:2, 161–181.
- [Got65] D. H. Gottlieb, A certain subgroup of the fundamental group. *Amer. J. Math.*, 1965, 87, 840–856.
- [Got69] D. H. Gottlieb, Covering transformations and universal fibrations, *Illinois J. Math.*, 1969, 13, 432–437.
- [Gr73] A. Gramain, Le type d’homotopie du groupe des difféomorphismes d’une surface compacte. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 1973, 6, 53–66.
- [Ham62] M.-E. Hamstrom, Some global properties of the space of homeomorphisms on a disc with holes, *Duke Math. J.*, 1962, 29, 657–662.
- [Ham65a] M.-E. Hamstrom, The space of homeomorphisms on a torus, *Illinois J. Math.*, 1965, 9, 59–65.
- [Ham65b] M.-E. Hamstrom, Homotopy properties of the space of homeomorphisms on  $P^2$  and the Klein bottle, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1965, 120, 37–45.
- [Ham66] M.-E. Hamstrom, Homotopy groups of the space of homeomorphisms on a 2-manifold, *Illinois J. Math.*, 1966, 10, 563–573.
- [Ham74] M.-E. Hamstrom, Homotopy in homeomorphism spaces, *TOP* and *PL*, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1974, 80, 207–230.
- [HD58] M.-E. Hamstrom, E. Dyer, Regular mappings and the space of homeomorphisms on a 2-manifold, *Duke Math. J.*, 1958, 25, 521–531.

- [Han74] V. L. Hansen, The homotopy problem for the components in the space of maps on the  $n$ -sphere, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 1974, 25, 313–321.
- [Han83] V. L. Hansen, The homotopy groups of a space of maps between oriented closed surfaces, *Bull. London Math. Soc.*, 1983, 15:4, 360–364.
- [Han90] V. L. Hansen, The space of self-maps on the 2-sphere, in: *Groups of self-equivalences and related topics (Montreal, PQ, 1988)*, 40–47, *Lecture Notes in Math.*, 1425, Springer, Berlin, 1990.
- [Hat76] A. Hatcher, Homeomorphisms of sufficiently large  $P^2$ -irreducible 3-manifolds, *Topology*, 1976, 15:4, 343–347.
- [Hat83] A. Hatcher, A Proof of the Smale Conjecture, *Diff( $S^3$ )  $\simeq$   $O(4)$* , *Ann. of Math. (2)*, 1983, 117:3, 553–607.
- [Hat02] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [Hir76] M. W. Hirsch, *Differential Topology*, *Grad. Texts in Math.*, vol. 33, Springer, New York, 1976.
- [Hu65] S. T. Hu, *Theory of Retracts*, Wayne State Univ. Press, Detroit, 1965.
- [Hus94] D. Husemoller, *Fibre Bundles*, Third edition, *Graduate Texts in Math.*, vol. 20, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [KT08] C. Kassel, V. Turaev, *Braid Groups*, *Grad. Texts in Math.*, vol. 247, Springer, New York, 2008.
- [Kne26] H. Kneser, Die Deformationssätze der einfach zusammenhängenden Flächen, *Math. Zeitschrift*, 1926, 25:1, 362–372.
- [Koh60] S. S. Koh, Note on the homotopy properties of the components of the mapping space  $X^{S^p}$ , *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1960, 11, 896–904.
- [Lau74] F. Laudenbach, Topologie de la dimension trois: homotopie et isotopie, *Astérisque*, No. 12, Sot. Math. de France., Paris, 1974.
- [LMST20] C. Leininger, Y. N. Minsky, J. Souto, S. J. Taylor, Weil–Petersson translation length and manifolds with many fibered fillings, *Adv. Math.*, 2021, 376, 107457.
- [LM72] R. Luke, W. K. Mason, The space of homeomorphisms on a compact two-manifold is an absolute neighborhood retract, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1972, 164, 275–285.

- [MH75] C. Maclachlan, W. J. Harvey, On mapping-class groups and Teichmüller spaces, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3), 1975, 30, 496–512.
- [MW21] D. Margalit, R. R. Winarski, Braids groups and mapping class groups: The Birman–Hilden theory, *Bull. London Math. Soc.*, 2021, 0, 1–17, doi:10.1112/blms.12456.
- [McC61] G. S. McCarty, Jr., Homeotopy groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1963, 106, 293–304.
- [Mor78] H. R. Morton, Infinitely many fibred knots having the same Alexander polynomial, *Topology*, 1978, 17, 101–104.
- [Ohs87] K. Ohshika, Finite subgroups of mapping class groups of geometric 3-manifolds, *J. Math. Soc. Japan*, 1987, 39:3, 447–454.
- [Ros21] C. Rosendal, *Coarse Geometry of Topological Groups*, Cambridge tracts in math., 223, Cambridge University Press, Cambridge, 2021.
- [Rut97] J. W. Rutter, Spaces of homotopy self-equivalences. A survey, *Lecture Notes in Mathematics*, 1662, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [Sch97] E. Schechter, *Handbook of Analysis and Its Foundations*, Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1997.
- [Sco70] G. P. Scott, The space of homeomorphisms of a 2-manifold, *Topology* 1970, 9, 97–109.
- [SW00] H. Short, B. Wiest, Orderings of mapping class groups after Thurston, *Enseign. Math.*, 2000, 46, 279–312.
- [Smi10] S. B. Smith, The homotopy theory of function spaces: a survey, in: *Homotopy theory of function spaces and related topics*, 3–39, *Contemp. Math.*, 519, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.
- [Ste44] N. E. Steenrod, The classification of sphere bundles, *Ann. of Math.* (2), 1944, 45:2, 294–311.
- [Ste51] N. E. Steenrod, *Topology of Fibre Bundles*, Princeton Mathematical Series, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1951.
- [Tho57] R. Thom, L’homologie des espaces fonctionnels, *Colloque de topologie algébrique*, Louvain, 1956, Georges Thone, Liège, 1957, pp. 29–39.
- [VINK] O. Ya. Viro, O. A. Ivanov, N. Yu. Netsvetaev, V. M. Kharlamov, *Elementary topology: problem textbook*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
- [Vog77] E. Vogt, Projecting isotopies of sufficiently large  $P^2$ -irreducible 3-manifolds. *Arch. Math. (Basel)*, 1977, 29:6, 635–642.

- [Wad56] H. Wada, On the space of mappings of a sphere on itself, *Ann. of Math. (2)*, 1956, 64, 420–435.
- [Wad58] H. Wada, Note on some mapping spaces, *Tohoku Math. J. (2)*, 1958, 10(2), 143–145.
- [Wal68] F. Waldhausen, On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, *Ann. Math. (2)*, 1968, 87, 56–88.
- [Win15] R. R. Winarski, Symmetry, isotopy, and irregular covers, *Geom. Dedicata*, 2015, 177, 213–227.
- [Yag00] T. Yagasaki, Homotopy types of homeomorphism groups of noncompact 2-manifolds, *Topology Appl.*, 2000, 108:2, 123–136.
- [Yam93] T. Yamanoshita, On the space of self-homotopy equivalences of the projective plane, *J. Math. Soc. Japan* 1993, 45, 489–494.
- [Zi73a] H. Zieschang, On the homeotopy group of surfaces, *Math. Ann.*, 1973, 206, 1–21.
- [Zi73b] H. Zieschang, Lifting and projecting homeomorphisms, *Arch. Math. (Basel)*, 1973, 24, 416–421.