

ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

**В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов,
Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин**

**Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук**

**Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16
октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых
коммуникаций**

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны: (812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

<http://www.pdmi.ras.ru/preprint/>

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

КАНОНИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ C^* -АЛГЕБРЫ ЭЙКОНАЛОВ МЕТРИЧЕСКОГО ГРАФА

М. И. Белишев¹, А. В. Каплун²

Санкт-Петербургское Отделение Математического Института им.

В.А.Стеклова РАН

belishev@pdmi.ras.ru;

alex.v.kaplun@gmail.com

АННОТАЦИЯ

Алгебра эйконалов \mathfrak{E} метрического графа Ω это операторная C^* -алгебра, определяемая динамической системой, которая описывает распространение волн, порожденных источниками в граничных вершинах Ω . В работе описывается каноническая блочная форма алгебры \mathfrak{E} произвольного компактного связного метрического графа. Переход к этой форме равносителен построению функциональной модели, реализующей \mathfrak{E} в виде алгебры непрерывных матрично-значных функций на ее спектре $\hat{\mathfrak{E}}$. Результаты предполагается использовать в обратной задаче, состоящей в реконструкции графа по спектральным и динамическим граничным данным.

Ключевые слова: динамическая система на метрическом графе, достижимые множества, C^* -алгебра эйконалов, каноническая форма

¹поддержано грантом РФФИ 20-01-627А.

²поддержано грантом РФФИ 20-01-627А и Фондом Volks Wagen Foundation, при частичной поддержке Конкурса “Молодая математика России”.

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St. Petersburg Department
of Steklov Institute of Mathematics

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В. М. Бабич, Н. А. Вавилов, А. М. Вершик, М. А. Всемиров,
А. И. Генералов, И. А. Ибрагимов, Л. Ю. Колотилина,
Б. Б. Лурье, Ю. В. Матиясевич, Н. Ю. Нецветаев,
С. И. Репин, Г. А. Серегин

1 Введение

О работе

- Нашу работу можно позиционировать следующим образом. Существует подход к обратным задачам математической физики - *метод граничного управления* (ВС-метод) [7]. Подход имеет выражено междисциплинарный характер: он основан на связях обратных задач с теорией систем и теорией управления, использует асимптотические методы, функциональный анализ, теорию операторов и др. Разработана алгебраическая версия ВС-метода, основанная на связях с банаховыми алгебрами, давшая новое решение задачи реконструкции риманова многообразия по граничным данным [3, 7, 8]. Наша перспективная цель - применение этой версии к обратным задачам на графах. Данная работа - шаг в этом направлении.
- Алгебраическая версия основана на фундаментальном факте: топологическое пространство характеризуется адекватной алгеброй. Как пример, компактное хаусдорфово пространство Ω с точностью до гомеоморфизма определяется алгеброй непрерывных функций $\mathfrak{A} = C(\Omega)$ (И.М. Гельфанд, 1943). При этом спектр алгебры, - множество $\widehat{\mathfrak{A}}$ ее неприводимых представлений, снабженное адекватной топологией, - гомеоморфен пространству: $\widehat{\mathfrak{A}} \cong \Omega$. Как следствие, располагая *любым* представлением \mathfrak{A}' алгебры \mathfrak{A} , и находя его спектр $\widehat{\mathfrak{A}'} \cong \widehat{\mathfrak{A}} \cong \Omega$, мы получаем гомеоморфную копию пространства Ω . По этой схеме решается задача реконструкции: из данных обратной задачи извлекается представление \mathfrak{A}' и находится его спектр $\widehat{\mathfrak{A}'}$, который и доставляет решение задачи - гомеоморфную копию подлежащего восстановлению многообразия Ω . Содержательная часть подхода заключается в нахождении алгебры \mathfrak{A}' по известным данным. В качестве последней используется *алгебра эйконолов* \mathfrak{E} , определяемая динамической системой, которая описывает распространение волн в Ω .
- Варианты ВС-метода для обратных задач на графах предложены в [2, 10, 11]. Версия, использующая алгебру эйконолов, инициирована в [12] и дополнена в [9]. Наша работа развивает этот подход. Его общее направление - изучение связей между свойствами алгебры \mathfrak{E} (блочной структурой, алгебраическими инвариантами, представлениями) и геометрией графа. Перспективная цель - реконструкция графа по его граничным данным.

Алгебра эйконолов

- Без потери общности метрический граф Ω можно представлять как связный компактный граф в \mathbb{R}^3 , состоящий из гладких кривых (ребер) $\{e_1, \dots, e_l\} = E$, скрепленных во внутренних вершинах $\{v_1, \dots, v_m\} = V$. Имеются граничные вершины $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} = \Gamma$, из которых выходит по одному ребру. Метрика (внутреннее расстояние) в Ω индуцирована евклидовой метрикой из \mathbb{R}^3 .
- Ребра графа "материальны": вдоль них распространяются колебания (волны), инициированные точечными источниками (управлениями), которые помещены в граничных вершинах. Волны движутся от границы с единичной скоростью, постепенно заполняя граф. Процесс описывается динамической системой

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0 && \text{в } \mathcal{H}, \quad 0 < t < T, \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} &= 0 && \text{в } \Omega, \\ u &= f && \text{в } \Gamma \times [0, T], \end{aligned}$$

где $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$, Δ - Лапласиан, определенный на гладких функциях, удовлетворяющих условиям сшивания (Кирхгофа) во внутренних вершинах; $f = f(\gamma, t)$ - *граничное управление* класса $L_2(\Gamma \times [0, T]) =: \mathcal{F}^T$; $u = u^f(x, t)$ - решение (*волна*), $u^f(\cdot, t) \in \mathcal{H}$ при $0 \leq t \leq T$.

Имеется возможность управлять волнами не со всей границы, а с подмножества $\Sigma \subset \Gamma$: в этом случае используются управления класса $\mathcal{F}_\Sigma^T := \{f \in \mathcal{F}^T \mid \text{supp } f \subset \Sigma \times [0, T]\} = \oplus \sum_{\gamma \in \Sigma} \mathcal{F}_\gamma^T$.

Каждой граничной вершине сопоставлено семейство *достижимых множеств* $\mathcal{U}_\gamma^t := \{u^f(\cdot, t) \mid f \in \mathcal{F}_\gamma^T\}$, $0 \leq t \leq T$ и соответствующих проекторов P_γ^t в \mathcal{H} на \mathcal{U}_γ^t . Оператор $E_\gamma^T := \int_0^T t dP_\gamma^t$ называется *эйкономом*, отвечающим вершине γ . Эйконы суть самосопряженные операторы - элементы алгебры ограниченных операторов $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

- Для C^* -алгебры \mathfrak{A} и множества $S \subset \mathfrak{A}$, через $\vee S$ обозначим C^* -алгебру, порожденную этим множеством, т.е. минимальную C^* -подалгебру в \mathfrak{A} , содержащую S . *Алгебра эйконолов*, отвечающая выделенному семейству граничных вершин $\Sigma \subset \Gamma$, есть операторная C^* -алгебра

$$\mathfrak{E}_\Sigma^T := \vee \{E_\gamma^T \mid \gamma \in \Sigma\} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H}). \quad (1)$$

Результаты и комментарии

- Как установлено в [12], алгебра \mathfrak{E}_Σ^T имеет блочную структуру: она изометрически изоморфна некоторой подалгебре алгебры $\bigoplus_{j=1}^J C([0, \epsilon_j]; \mathbb{M}^{m_j})$

и отличается от последней определенными связями между блоками. Для простейших графов (трехлучевых звезд) характер этих связей и их эволюция с изменением T рассмотрены в [9].

Главный результат данной работы - *каноническое блочное представление* алгебры эйконалов. Это представление, во-первых, выделено отсутствием связей между блоками и, во-вторых, инвариантно: с точностью до тривиальных преобразований (перестановки блоков, замены параметризации и т.п.) оно определяется по *любому* представлению алгебры (1). Последнее и подкрепляет надежду на полезность \mathfrak{E}_Σ^T в обратных задачах, данные которых определяют ее с точностью до изометрии.

Разумеется, об эффективности подхода в полной мере можно будет судить по конкретным приложениям в обратных задачах. В данной работе их нет, но приведенные выше результаты представляются важным шагом в этом направлении.

- Алгебра эйконалов относится к классу C^* -алгебр с конечномерными представлениями *разных* размерностей [15, 21]. Приведение к канонической форме равносильно построению функциональной модели, которая реализует \mathfrak{E}_Σ^T в виде алгебры непрерывных матрично-значных функций на ее спектре. Она относится к типу моделей, описанных в работе Н.Б.Васильева [15].

Определение (1) фактически воспроизводит определение соответствующих алгебр, применяемых в [3, 8, 7] для реконструкции многообразий. Собственно, успех такого применения и мотивировал попытку перенести подход на задачи на графах. Препятствием оказалась некоммутативность алгебры \mathfrak{E}_Σ^T . Эта проблема встречалась и раньше, - в обратной задаче электродинамики [8], - но там она снималась факторизацией по идеалу компактных операторов, с помощью которой дело сводилось к коммутативной $C(\Omega; \mathbb{R})$. Некоммутативность \mathfrak{E}_Σ^T неустранима, что существенно осложняет ее изучение.

- Обратные задачи на графах - вполне актуальная тема. Различные постановки и подходы содержатся в работах С.А.Авдонина, П.А.Курасова, А.С. и В.С.Михайловых, П.Кучмента, В.А.Юрко. В [4, 5, 6, 17, 18] ВС-метод используется для решения динамических и спектральных обратных задач для различных классов графов. Работы В.А.Юрко и его учеников используют спектральный подход к обратным задачам для дифференциальных операторов на графах [22, 23, 24]. Упомянем весьма содержательный обзор П.Кучмента и Г.Берколайко по всей тематике квантовых графов, в том числе и обратным задачам на них [13].

Весьма объемная вводная часть нашей работы фактически повто-

ряет соответствующие разделы из [12] и [9]. Это неизбежно, поскольку изложение относящихся к \mathfrak{E}_Σ^T фактов и результатов требует основательной подготовки. Техническая часть довольно сложна, поскольку работа имеет дело с максимально общим объектом - *произвольным* компактным связным метрическим графом имеющим границу. Для читателя может быть полезен разбор простых примеров, проведенный в [12, 9] с иллюстрациями.

Читатель, на внимание и интерес которого авторы особо рассчитывают и надеются, это специалист по C^* -алгебрам со вкусом к приложениям и/или специалист в области математической физики, разделяющий мнение о полезности абстракций. Алгебра эйконалов - сложный и богатый свойствами объект, достойный всестороннего исследования.

2 Волны на графе

Граф

- Пусть $\Omega = E \cup W$ есть связный компактный граф в \mathbb{R}^3 с ребрами $\{e_1, \dots, e_L\} = E$ и вершинами $\{w_1, \dots, w_M\} = W$. Ребра суть гладкие¹ кривые, концами которых служат вершины. Удобно считать ребра открытыми, не относя к ним их концы. Вершина w и ребро e *инцидентны* (мы пишем: $w \prec e$), если w является концом e . Вершины $\{\gamma_1, \dots, \gamma_N\} = \Gamma$, каждая из которых инцидентна единственному ребру, называются *граничными*; вершины $\{v_1, \dots, v_{M-N}\} = V = W \setminus \Gamma$ суть *внутренние*.

Число $\mu(w)$ ребер, инцидентных вершине w называется ее валентностью; для $\gamma \in \Gamma$ имеем $\mu(\gamma) = 1$. Дополнительно предполагаем, что вершин с $\mu(w) = 2$ нет, так что во внутренних вершинах выполнено $\mu(v) \geq 3$.

Граф снабжен метрикой (внутренним расстоянием) τ , индуцированной евклидовой метрикой из \mathbb{R}^3 . При этом $\tau(a, b)$ есть минимум длин кусочно-гладких кривых, лежащих в Ω и соединяющих точки a и b . Для множества $A \subset \Omega$ через

$$\Omega_A^r := \{x \in \Omega \mid \tau(x, A) < r\}, \quad r > 0$$

обозначается его метрическая окрестность радиуса r .

- Каждое ребро e параметризовано длиной τ , отсчитываемой от одного из его концов. Для функции y на графе, знак производной по длине $\frac{dy}{d\tau}$

¹Всюду в работе *гладкий* означает C^∞ -гладкий.

зависит от выбора конца, но вторая производная $\frac{d^2 y}{d\tau^2}$ от этого выбора не зависит. Для вершины w и инцидентного ей ребра e определяется производная

$$\left[\frac{dy}{d\tau} \right]_e^+(w) := \lim_{e \ni x \rightarrow w} \frac{dy}{d\tau}(x)$$

по направлению, исходящему из w . Величина

$$F_w[y] := \sum_{e \succ w} \left[\frac{dy}{d\tau} \right]_e^+(w)$$

называется потоком функции y через вершину w .

- Метрика τ на графе определяет (вещественное) гильбертово пространство $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$ со скалярным произведением:

$$(y, u)_{\mathcal{H}} := \int_{\Omega} y u \, d\tau = \sum_{e \in E} \int_e y u \, d\tau.$$

Пусть $C(\Omega)$ есть пространство непрерывных функций с нормой $\|y\| = \sup_{\Omega} |y(\cdot)|$. Функцию y отнесем к классу Соболева $H^2(\Omega)$, если $y \in C(\Omega)$ и на каждом ребре выполнено $\frac{dy}{d\tau}, \frac{d^2 y}{d\tau^2} \in L_2(e)$.

Определим класс Кирхгофа

$$\mathcal{K} := \{y \in H^2(\Omega) \mid F_v[y] = 0, \quad v \in V\}.$$

Оператор Лапласа на графе вводится определением

$$\Delta : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}; \quad \text{Dom } \Delta = \mathcal{K}; \quad (\Delta y)|_e = \frac{d^2 y}{d\tau^2}, \quad e \in E. \quad (2)$$

Он плотно задан и замкнут.

Волны

- Начально-краевая задача, описывающая распространение волн в графе, имеет вид

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \quad \text{в } \mathcal{H}, \quad 0 < t < T; \quad (3)$$

$$u(\cdot, t) \in \mathcal{K} \quad \text{при } 0 \leq t \leq T; \quad (4)$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \Omega; \quad (5)$$

$$u = f \quad \text{на } \Gamma \times [0, T]. \quad (6)$$

Здесь $T > 0$ - финальный момент времени; $f = f(\gamma, t)$ - *граничное управление*; $u = u^f(x, t)$ - решение (*волна*). При гладком (по t) управлении f , исчезающем вблизи $t = 0$, задача имеет единственное классическое решение u^f .

Как следует из определения (2), на каждом ребре e решение u^f удовлетворяет уравнению однородной струны $u_{tt} - u_{\tau\tau} = 0$. Отсюда видно, что волны распространяются от границы внутрь Ω с единичной скоростью. Как следствие, если управление действует с части границы $\Sigma \subseteq \Gamma$, т.е. выполнено $\text{supp } f \subset \Sigma \times [0, T]$, имеем соотношение

$$\text{supp } u^f(\cdot, t) \subset \overline{\Omega_\Sigma^t}, \quad t > 0. \quad (7)$$

Ниже вводятся (обобщенные) решения задачи (3)-(6) для управлений класса $L_2(\Gamma \times [0, T])$. Их определение требует некоторой подготовки.

- Через δ_x мы обозначаем меру Дирака, т.е. функционал на $C(\Omega)$, принимающий значения по правилу $\langle \delta_x, y \rangle = y(x)$. Пусть $\delta = \delta(t)$ есть дельта-функция Дирака. Ближайшая цель - определить и описать *фундаментальное решение* задачи (3)-(6) с $T = \infty$, отвечающее управлению $f = \delta_\gamma \delta(t)$, которое действует мгновенно из граничной вершины γ .

Для описания решения $u^{\delta_\gamma \delta}$ удобно использовать следующий формализм "динамики частиц".

0. Под *частицей* понимается мера $a\delta_x$; постоянная $a \neq 0$ называется ее амплитудой.

1. Каждая частица $a\delta_{x(t)}$ движется по ребру со скоростью 1 в одном из двух возможных направлений, так что $|\dot{x}(t)| = 1$ при $x(t) \in e$.

2. (*принцип суперпозиции*) Частицы движутся независимо друг от друга. Если в момент t имеется несколько частиц $a_1\delta_{x(t)}, \dots, a_p\delta_{x(t)}$, расположенных в точке $x(t) \in \Omega \setminus \Gamma$, они считаются одной частицей $[a_1 + \dots + a_p]\delta_{x(t)}$.

3. (*прохождение через внутреннюю вершину*) Перемещаясь вдоль ребра e и проходя через внутреннюю вершину v , частица $a\delta_{x(t)}$ делится на $\mu(v)$ частиц: одну отраженную и $\mu(v) - 1$ прошедших. Отраженная частица движется вдоль e в обратном направлении и имеет амплитуду $\frac{2-\mu(v)}{\mu(v)}a$. Каждая из прошедших частиц движется вдоль своего (инцидентного v) ребра в сторону от v и имеет амплитуду $\frac{2}{\mu(v)}a$.

Таким образом, общая амплитуда составляет $\frac{2-\mu(v)}{\mu(v)}a + [\mu(v) - 1]\frac{2}{\mu(v)}a = a$, что соответствует закону сохранения Кирхгофа $F_v[y] = 0$.

4. (*отражение от границы*) Как только частица $a\delta_{x(t)}$ достигает вершины $\gamma \in \Gamma$, она мгновенно меняет свое направление на противоположное и изменяет амплитуду с a на $-a$.

Приняв эти правила, можно описать решение $u^{\delta_\gamma\delta}$ следующим образом (напомним, что τ - это расстояние в Ω):

(\star) при $0 \leq t \leq \tau(\gamma, V)$ имеем $u^{\delta_\gamma\delta} = \delta_{x(t)}$, где $x(t)$ точка ребра $e \succ \gamma$ такая, что $\tau(x(t), \gamma) = t$. Таким образом, при малых временах, $u^{\delta_\gamma\delta}$ это одна частица единичной амплитуды, вошедшая в граф из вершины γ и движущаяся по e с единичной скоростью;

($\star\star$) дальнейшая эволюция при временах $t > \tau(\gamma, V)$ определяется правилами **1-4**.

Нетрудно убедиться, что такое описание является вполне детерминированным. В каждый момент времени $t \geq 0$ решение $u^{\delta_\gamma\delta}$ представляет собой набор конечного числа частиц, движущихся в Ω .

• Таким образом, фундаментальное решение есть некоторое пространственно-временное распределение в $\Omega \times \{t \geq 0\}$. Структура его такова, что для управлений вида $f = \delta_\gamma \varphi$ с $\varphi \in L_2[0, T]$ свертка по времени

$$u^f(x, t) := \left[u^{\delta_\gamma\delta}(x, \cdot) * \varphi \right](t), \quad x \in \Omega, \quad 0 \leq t \leq T \quad (8)$$

корректно определена. Кроме того, можно показать, что $u^f \in C([0, T]; \mathcal{H})$ и, если φ является гладким и исчезает около $t = 0$, то u^f совпадает с классическим решением задачи (3)–(6).

С этого момента, функция u^f , определяемая соотношением (8), рассматривается как (обобщенное) решение для управлений указанного вида. В более общем случае, для $f \in L_2(\Gamma \times [0, T])$ вида $f = \sum_{\gamma \in \Sigma} f_\gamma$ с $f_\gamma = \delta_\gamma \varphi_\gamma$ полагаем

$$u^f(x, t) := \sum_{\gamma \in \Sigma} u^{f_\gamma}(x, t), \quad x \in \Omega, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (9)$$

Нетрудно показать, что и для обобщенного решения соотношение (7) остается верным. Оно показывает, что метрическая окрестность Ω_Σ^T есть часть графа, захваченная волнами, идущими от Σ , к моменту $t = T$.

Гидра

Здесь мы вводим пространственно-временной граф, который используется для эффективного описания волн.

• Фиксируем граничную вершину γ . Рассматривая фундаментальное решение как пространственно-временное распределение, определим множество

$$H_\gamma := \text{supp } u^{\delta_\gamma\delta} \subset \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+,$$

которое будем называть *гидрой* [11]. По существу это пространственно-временной граф, образованный траекториями частиц в ходе эволюции, описываемой правилами **1-4** и $(\star), (\star\star)$: см. Рис. 1 ². Его ребра суть характеристики волнового уравнения (3).

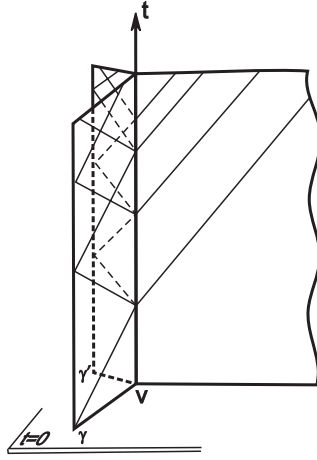


Рис. 1: Гидра

Определим проекции:

$$\begin{aligned} \pi : H_\gamma \ni h = (x, t) &\mapsto x \in \Omega, & \pi^{-1}(x) &:= \{h \in H_\gamma \mid \pi(h) = x\}; \\ \rho : H_\gamma \ni h = (x, t) &\mapsto t \in \overline{\mathbb{R}}_+, & \rho^{-1}(t) &:= \{h \in H_\gamma \mid \rho(h) = t\}. \end{aligned}$$

На гидре зададим функцию (*амплитуду*) $a(\cdot)$ по следующему правилу:

для точки $h \in H_\gamma$ такой, что $\pi(h) = x \in \Omega \setminus \Gamma$ и $\rho(h) = t > 0$ имеем $u^{\delta_\gamma \delta}(\cdot, t) = a\delta_x(\cdot)$ и определяем $a(h) := a$;

для $h \in H_\gamma$ такой, что $\pi(h) \in \Gamma$ и $\rho(h) > 0$, полагаем $a(h) := 0$;

для $h \in H_\gamma$ такой, что $\pi(h) = \gamma$ и $\rho(h) = 0$, полагаем $a(h) := 1$.

Как видно, амплитуда является кусочно-постоянной функцией, определенной на всей гидре H_γ : см. Рис. 2. Уточним, что в точках самопересечения p , согласно правилу **2** эволюции частиц имеем $a(p) = -\frac{4}{9} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{9}$. Точки вида p суть вершины H_γ , проектирующиеся в $\Omega \setminus [V \cup \Gamma]$.

- Приведем представление, ради которого введена гидра (см. [12]). Используя запись $h = (x, t) \in H_\gamma$ и $a(h) = a(x, t)$, для управления $f =$

²Иллюстрации заимствованы из работы [12]

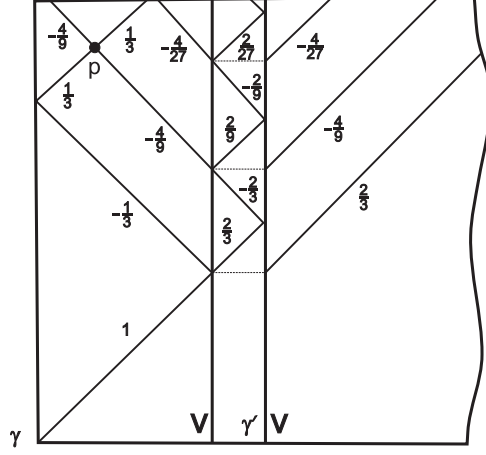


Рис. 2: Амплитуда на гидре

$\delta_\gamma \varphi(t)$ с $\varphi \in L_2[0, T]$ согласно (8) получим:

$$u^f(x, T) = \sum_{t \in \rho(\pi^{-1}(x))} a(x, t) \varphi(T - t), \quad x \in \Omega. \quad (10)$$

В общем случае, когда управление $f = \sum_{\gamma \in \Sigma} \delta_\gamma \varphi_\gamma(t)$ действует из нескольких граничных вершин, согласно (9) имеем:

$$u^f(x, T) = \sum_{\gamma \in \Sigma} \sum_{t \in \rho(\pi^{-1}(x))} a_\gamma(x, t) \varphi_\gamma(T - t), \quad x \in \Omega, \quad (11)$$

где a_γ суть амплитуды на гидрах H_γ^T .

Приведенные представления вполне эффективны: по ним можно вычислять значения волн. Однако, для предстоящего анализа алгебры эйконоалов потребуется их модификация, к описанию которой мы переходим. Модификация использует разбиение графа Ω на части (*семейства*), согласованное со структурой гидр. Во всех подробностях и с графическими иллюстрациями оно описано в [12].

Разбиение II

В дальнейшем мы имеем дело с *усеченными* гидрами

$$H_\gamma^T := H_\gamma \cap \{\Omega \times [0, T]\}.$$

• Введем одно понятие общего характера. Пусть дано множество X и рефлексивное симметричное (но, вообще говоря, не транзитивное!) бинарное отношение \sim_0 на нем. Элементы, связанные этим отношением, будем называть *соседними*. Соседство определяет эквивалентность по следующему правилу. Мы говорим, что x и y эквивалентны (и пишем $x \sim y$), если в X имеется конечный набор элементов x_1, \dots, x_n такой, что выполнено $x \sim_0 x_1 \sim_0 \dots \sim_0 x_n \sim_0 y$.

Класс эквивалентности $[x]$ элемента $x \in X$ по введенному выше отношению \sim можно описать конструктивно. Введем операцию ext , расширяющую подмножество $B \subset X$ по правилу

$$B \mapsto \text{ext}B := \bigcup_{b \in B} \{x \in X \mid x \sim_0 b\}; \quad (12)$$

обозначим $\text{ext}^1 B := \text{ext}B$ и $\text{ext}^j B := \text{ext} \text{ext}^{j-1} B$, $j \geq 2$. Нетрудно убедиться в справедливости представления

$$[x] = \bigcup_{j \geq 1} \text{ext}^j \{x\}. \quad (13)$$

Если множество X конечно, то последовательность ext^j на некотором шаге стабилизируется: $\text{ext}^1 \{x\} \subset \dots \subset \text{ext}^N \{x\} = \text{ext}^{N+1} \{x\} = \dots = [x]$. Этот случай встретится в работе.

• Рассмотрим эквивалентность такого вида на гидре. Скажем, что точки $h, h' \in H_\gamma^T$ суть соседние ($h \sim_0 h'$), если выполнено хотя бы одно из условий: $\pi(h) = \pi(h')$ или $\rho(h) = \rho(h')$. Через \mathcal{Z} обозначим отношение эквивалентности, порожденное таким соседством. Класс эквивалентности

$$\mathcal{L}[h] := \{h' \in H_\gamma^T \mid h' \mathcal{Z} h\}$$

назовем *решеткой*. Можно показать, что этот класс состоит из конечного числа точек. Для подмножества $B \subset H_\gamma^T$ определим решетку

$$\mathcal{L}[B] := \bigcup_{h \in B} \mathcal{L}[h].$$

Заметим, что операция $B \mapsto \mathcal{L}[B]$ обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} B \subset \mathcal{L}[B]; \quad \mathcal{L}[\mathcal{L}[B]] &= \mathcal{L}[B]; \quad \mathcal{L}[B_1 \cup B_2] = \mathcal{L}[B_1] \cup \mathcal{L}[B_2]; \\ \pi^{-1}(\pi(\mathcal{L}[B])) &= \rho^{-1}(\rho(\mathcal{L}[B])) = \mathcal{L}[B]. \end{aligned}$$

Первые три свойства показывают, что она является топологическим замыканием (по Куратовскому).

- С каждой точкой $x \in \overline{\Omega_\gamma^T}$ свяжем множество

$$\Lambda[x] := \pi(\mathcal{L}[\pi^{-1}(x)]) \subset \overline{\Omega_\gamma^T}, \quad (14)$$

(замыкание в метрике Ω) которое назовем *множеством определенности* точки x . Это множество конечно. Как нетрудно проверить, отношение

$$x \sim x' \Leftrightarrow \Lambda[x] = \Lambda[x']$$

есть эквивалентность, а операция $A \mapsto \Lambda[A] := \cup_{x \in A} \Lambda[x] = \pi(\mathcal{L}[\pi^{-1}(A)])$ - топологическое замыкание. Множества $A = \Lambda[A]$ мы называем *Λ -замкнутыми*.

- На полной гидре, точку $h \in H_\gamma$ назовем *угловой*, если $\pi(h) \in V \cup \Gamma$ или h является точкой самопересечения (как p на Рис.2). Последние суть вершины гидры валентности 4, проектирующиеся в $\Omega \setminus [V \cup \Gamma]$.

На усеченной гидре H_γ^T , помимо содержащихся в ней угловых точек полной гидры, отнесем к угловым и точки множества $\rho^{-1}(T)$. Через $\text{Corn } H_\gamma^T$ обозначим множество всех угловых точек усеченной гидры.

Решетка $\mathcal{L}[\text{Corn } H_\gamma^T]$ разделяет гидру на конечное число открытых пространственно-временных интервалов. На каждом интервале амплитуда a принимает постоянное значение.

Точки, составляющие конечное множество

$$\Theta := \pi(\mathcal{L}[\text{Corn } H_\gamma^T]) \subset \overline{\Omega_\gamma^T},$$

называются *критическими*. Оставшиеся точки $x \in \overline{\Omega_\gamma^T} \setminus \Theta$ назовем *регулярными*. Критические точки делят $\overline{\Omega_\gamma^T}$ на части. Множество регулярных точек

$$\Pi := \overline{\Omega_\gamma^T} \setminus \Theta$$

представляет собой совокупность конечного числа открытых интервалов, каждый из которых принадлежит некоторому ребру e . Таким образом, $\overline{\Omega_\gamma^T} = \Pi \cup \Theta$ есть разбиение части графа Ω , захваченной волнами, определяемое структурой гидры H_γ^T .

- Пусть $\omega = (c, c') \subset \Pi$ есть *максимальный* интервал, состоящий из регулярных точек. Максимальность означает, что концы интервала c и c' суть критические точки, так что расширение ω с сохранением регулярности внутренних точек невозможно. Несложно убедиться, что множество

$$\Phi := \Lambda(\omega) = \pi(\mathcal{L}[\pi^{-1}(\omega)]) \quad (15)$$

состоит из максимальных интервалов $\omega_1, \dots, \omega_m$ одинаковой длины:

$$\Phi = \bigcup_{k=1}^m \omega_k, \quad \text{diam } \omega_1 = \dots = \text{diam } \omega_m = \tau(c, c') =: \epsilon_\Phi,$$

где τ - расстояние на графе. Будем говорить, что интервалы ω_k являются *клетками* семейства Φ .

Сравнивая определения (14) и (15), приходим к представлению

$$\Phi = \bigcup_{x \in \omega} \Lambda[x], \quad (16)$$

где ω - любая из клеток Φ .

Пусть $\omega' \subset \Pi$ есть максимальный интервал, не лежащий в семействе Φ . Он определяет еще одно семейство $\Phi' = \Lambda[\omega']$, состоящее из клеток и т.д. В результате множество Π оказывается конечным набором непересекающихся семейств Φ^1, \dots, Φ^J , каждое из которых состоит из непересекающихся клеток:

$$\Pi = \bigcup_{j=1}^J \Phi^j = \bigcup_{j=1}^J \bigcup_{k=1}^{m_j} \omega_k^j, \quad (17)$$

где m_j - количество клеток в Φ^j .

- В пару к множеству определенности (14), каждому $x \in \overline{\Omega_\gamma^T} \setminus \Gamma$ сопоставим множество

$$\Xi[x] := \rho(\mathcal{L}[\pi^{-1}(x)]) \subset [0, T].$$

При этом, как легко видеть, для $x \neq x'$ выполнено либо $\Xi[x] = \Xi[x']$, либо $\Xi[x] \cap \Xi[x'] = \emptyset$. Также определим $\Xi[B] := \bigcup_{x \in B} \Xi[x]$.

Пусть $\Phi = \bigcup_{k=1}^{m_\Phi} \omega_k \subset \Pi$ есть семейство. Легко проверить, что множество

$$\Psi := \Xi[\Phi] = \bigcup_{i=1}^{n_\Phi} \psi_i \subset [0, T] \quad (18)$$

состоит из временных интервалов $\psi_i := (t_i, \tilde{t}_i)$ таких, что $0 \leq t_1 < \tilde{t}_1 \leq t_2 < \tilde{t}_2 \leq \dots \leq t_{n_\Phi} < \tilde{t}_{n_\Phi} \leq T$ и имеющих одинаковую длину $\tilde{t}_i - t_i = \epsilon_\Phi$. Множество Ψ также будем называть семейством, состоящим из *временных* клеток ψ_i .

В дальнейшем используются функции $\tau^i : \Phi \rightarrow [0, T]$, связанные с разбиением графа на семейства. Они вводятся следующим образом ³. Пусть $x \in \Phi$; положим

$$\tau^i(x) := \psi_i \cap \rho(\mathcal{L}[\pi^{-1}(x)]), \quad i = 1, \dots, n_\Phi. \quad (19)$$

Из того, что для любого $x_k \in \Lambda[x]$ выполнено $\mathcal{L}[\pi^{-1}(x)] = \mathcal{L}[\pi^{-1}(x_k)]$, следует, что эти функции постоянны на множествах определенности: $\tau^i(x) = \tau^i(x_k)$. Из определения следует, что

$$\tau^i(x) \neq \tau^{i'}(x) \quad \text{при } i \neq i', \quad x \in \Phi. \quad (20)$$

С изменением x внутри клетки $\omega = (c, c') \subset \Phi$, изменяется множество $\Lambda[x]$. При этом значение $\tau^i(x)$ замечает клетку $\psi_i = (t_i, \tilde{t}_i) \subset \Psi$ и, как нетрудно видеть из определения (19), справедливо *одно* из двух представлений

$$\tau^i(x) = t_i + \tau(x, c) \quad \text{или} \quad \tau^i(x) = \tilde{t}_i - \tau(x, c). \quad (21)$$

Имея ввиду это представление, можно сказать, что функции τ^i зависят от $x \in \omega$ *линейно*.

Свойство (21) позволяет доопределить функции τ^i в критических точках: если $x \in \omega = (c, c')$, $x \rightarrow c$, то $\tau^i(c) = t_i$ или $\tau^i(c) = \tilde{t}_i$, в зависимости от того, какое из представлений (21) имеет место.

Для каждого семейства $\Phi \subset \Pi$ набор функций τ^i свой и, при необходимости, мы отмечаем это обозначением τ_Φ^i . Добавим, что в силу (20) и (21), равенство $\tau_\Phi^i(x) = \tau_{\Phi'}^{i'}(x)$ для разных Φ и Φ' возможно лишь в критических точках x .

• Разбиение графа на семейства мотивировано, в частности, тем, что волны u^f зависят от управлений f *локально* в следующем смысле. Как видно из (10), значения $u^f(\cdot, T)|_\Phi$ определяются значениями $f|_{\Xi[\Phi]}$. Более того, условия

$$\text{supp } f \subset \Xi[\Phi] \quad \text{и} \quad \text{supp } u^f(\cdot, T) \subset \Phi \quad (22)$$

являются равносильными.

Модификация представлений (10) и (11), о которой говорилось в конце предыдущего раздела, состоит в эффективном представлении волн на множествах определенности. Оно использует функции (векторы) на $\Lambda[x]$, к описанию которых мы переходим.

³Приводимое определение отличается от принятого в [12]. Причину изменений мы укажем позже.

Амплитудные векторы

Текущие рассуждения по-прежнему относятся к одной граничной вершине $\gamma \in \Gamma$, фиксированному $T > 0$ и соответствующему разбиению Π .

- Пусть $A = \{x_1, \dots, x_m\} \subset \overline{\Omega_\gamma^T}$ есть конечное Λ -замкнутое множество и

$$\Xi[A] = \rho(\mathcal{L}[\pi^{-1}(A)]) = \{t_1, \dots, t_n\},$$

где $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Множеству A сопоставим функции (*амплитудные векторы*) $\alpha^i : A \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ по правилу

$$\alpha^i(x_k) := \begin{cases} a(x_k, t_i), & \text{если } (x_k, t_i) \in H_\gamma^T, \\ 0, & \text{если } (x_k, t_i) \notin H_\gamma^T, \end{cases} \quad k = 1, \dots, m.$$

Набор $\{\alpha^1, \dots, \alpha^n\}$ назовем α -набором над множеством A . Для каждого $x \in \overline{\Omega_\gamma^T}$ множество определенности $\Lambda[x]$ является Λ -замкнутым и над ним имеется свой α -набор.

- Как видно из (7), величина

$$T_\gamma := \inf \{t > 0 \mid \Omega_\gamma^t = \Omega\}$$

есть время заполнения всего графа Ω волнами, идущими (с единичной скоростью) от вершины γ . Справедлива

Лемма 1. Пусть x есть точка в $\overline{\Omega_\gamma^T}$, $\Lambda[x]$ - ее множество определенности и пусть $\alpha^1, \dots, \alpha^n$ есть α -набор над $\Lambda[x]$. Если $T < T_\gamma$, то векторы α^i линейно-независимы.

Доказательство. Фиксируем какой-либо момент времени $t^* = t_i \in \Xi[x]$ с $i \neq 1$. В решетке $\mathcal{L}[\pi^{-1}(x)]$ обязательно найдется точка (x^*, t^*) , такая, что x^* принадлежит границе $\overline{\Omega_\gamma^{t^*}} \setminus \Omega_\gamma^{t^*}$ области $\Omega_\gamma^{t^*}[\gamma]$, захваченной волнами к моменту $t = t^*$. Эта граница *непуста* в силу $t^* \leq T < T_\gamma$; при этом $x^* \in \Lambda[x]$, $t^* = \tau(x^*, \gamma)$ и, очевидно, $a(x^*, t^*) = \alpha^i(x^*) \neq 0$.

В то же время, во всех точках (x^*, t) с $t \in \Xi[x^*] = \Xi[x]$, $t < t^*$ выполнено $a(x^*, t) = 0$, поскольку такие (x^*, t) не лежат на гидре H_γ^T . Последнее соответствует простому факту: при указанных временах t волны от γ не успевают дойти до точки x^* (см. (7)).

Таким образом, в точках (x^*, t) с $t = t_k \in \Xi[x]$, $t_i < t^*$ ($k = 1, \dots, i-1$) имеем $a(x^*, t_k) = \alpha^k(x^*) = 0$ и, в то же время, $a(x^*, t^*) = \alpha^i(x^*) \neq 0$. Это исключает линейную зависимость α^i от $\alpha^1, \dots, \alpha^{i-1}$. В силу произвольности i получаем линейную независимость всего набора $\alpha^1, \dots, \alpha^n$. \square

Следствие 1. При $T < T_\gamma$ справедливо равенство $\Xi[\overline{\Omega_\gamma^T}] = [0, T]$.

В самом деле, из доказательства Леммы 1 легко видеть, что условие $T < T_\gamma$ обеспечивает непустоту множества $\rho^{-1}(t) \subset H_\gamma^T$ при $0 \leq t \leq T$, что равносильно равенству $\Xi[\overline{\Omega_\gamma^T}] = [0, T]$.

• Вернемся к представлению (10). Как нетрудно убедиться, в терминах амплитудных векторов оно может быть записано в форме

$$u^f(x_k, T)|_{x_k \in \Lambda[x]} = \sum_{i=1}^{n[x]} \varphi(T - t_i) \alpha^i(x_k), \quad \text{где } f = \delta_\gamma \varphi, \quad n[x] := \sharp \Xi[x], \quad (23)$$

представляющей волну не только в точке x , но и на всем множестве определенности $\Lambda[x]$. Более того, согласно (16), варьируя точку x внутри клетки $\omega \subset \Phi$, мы представляем волну $u^f(\cdot, T)$ на всем семействе Φ .

Заключительный шаг к модификации исходного представления (10) состоит в переходе в (23) к более удобной системе амплитудных векторов.

β -представление волн

• Пусть опять $A = \Lambda[A] = \{x_1, \dots, x_m\} \subset \overline{\Omega_\gamma^T}$. Введем пространство $\mathbb{I}_2(A)$ функций (векторов) на A со скалярным произведением

$$\langle f, g \rangle = \sum_{x \in A} f(x) g(x) = \sum_{k=1}^m f(x_k) g(x_k).$$

Оно содержит подпространство

$$\mathbb{A}[A] := \text{span}\{\alpha^1, \dots, \alpha^n\}, \quad \dim \mathbb{A}[A] \leq n,$$

определяемое α -набором над A . Используя процедуру Грама-Шмидта, перейдем в $\mathbb{A}[A]$ к набору

$$\beta^i := \begin{cases} \frac{\alpha^1}{\|\alpha^1\|}, & \text{если } i = 1; \\ \frac{\alpha^i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \alpha^i, \beta^j \rangle \beta^j}{\|\alpha^i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \alpha^i, \beta^j \rangle \beta^j\|}, & \text{если } i \geq 2 \text{ и } \alpha^i \notin \text{span}\{\alpha^1, \dots, \alpha^{i-1}\}; \\ 0, & \text{если } \alpha^i \in \text{span}\{\alpha^1, \dots, \alpha^{i-1}\}. \end{cases}$$

Для ненулевых элементов набора выполнено $\langle \beta^i, \beta^j \rangle = \delta_{ij}$, а их линейная оболочка, очевидно, совпадает с $\mathbb{A}[A]$. Совокупность векторов $\beta^i = \{\beta^i(x_1), \dots, \beta^i(x_m)\}$ назовем β -набором над множеством A .

Для каждого $x \in \overline{\Omega_\gamma^T}$ над множеством определенности $\Lambda[x]$ имеется свой β -набор. Согласно Лемме 1, при $T < T_\gamma$ векторы α^i линейно независимы. Как следствие, при таких T все векторы β^i суть ненулевые и выполнено $\dim \mathbb{A}[\Lambda[x]] = n \leq m$.

- С использованием β -набора над множеством $A = \Lambda[x]$ представление (23) приобретает окончательный вид

$$u^f(x_k, T)|_{x_k \in \Lambda[x]} = \sum_{j=1}^{n[x]} c_j^\varphi \beta^j(x_k), \quad c_j^\varphi = \sum_{i=1}^{n[x]} \rho_{ji} \varphi(T - t_i), \quad (24)$$

где ρ - матрица перехода, связывающая наборы α и β .

Гидра H_Σ^T

Введенные выше понятия и объекты относились к одной граничной вершине γ . В дальнейшем, указывая на это при необходимости, мы используем обозначения \mathcal{Z} , \mathcal{L}_γ , Λ_γ и т.п.

- Для набора граничных вершин $\Sigma \subseteq \Gamma$ определим пространственно-временной граф

$$H_\Sigma^T := \bigcup_{\gamma \in \Sigma} H_\gamma^T \subset \Omega \times [0, T].$$

На нем задаются аналоги объектов, введенных ранее для отдельных гидр H_γ^T . Опишем их.

Проекции из H_Σ^T в $\overline{\Omega_\Sigma^T}$ и в $[0, T]$ суть $\pi((x, t)) := x$ и $\rho((x, t)) := t$; под π^{-1} и ρ^{-1} понимаются полные прообразы в H_Σ^T .

Соседство $h \sim_0 h'$ на H_Σ^T по определению означает, что $\pi(x) = \pi(x')$ и/или $\rho(x) = \rho(x')$. Соседство определяет эквивалентность $h \stackrel{\Sigma}{\sim} h'$. Через $\mathcal{L}_\Sigma[h]$ обозначается класс эквивалентности (*решетка*) точки $h \in H_\Sigma^T$. Операция $H_\Sigma^T \supset B \mapsto \mathcal{L}_\Sigma[B]$ есть (топологическое) замыкание.

Множество $\Lambda_\Sigma[x] := \pi(\mathcal{L}_\Sigma[\pi^{-1}(x)])$ назовем *множеством определенности* точки $x \in \overline{\Omega_\Sigma^T}$. Отметим очевидное вложение $\Lambda_\gamma[x] \subset \Lambda_\Sigma[x]$ для $\gamma \in \Sigma$. Операция $\overline{\Omega_\Sigma^T} \supset A \mapsto \Lambda_\Sigma[A]$ есть (топологическое) замыкание.

Множество угловых точек $\text{Corn } H_\Sigma^T$ состоит из всех угловых точек гидр $H_\gamma^T \subset H_\Sigma^T$ плюс точки (трансверсального) пересечения ребер *разных* гидр H_γ^T . Критические точки в $\overline{\Omega_\Sigma^T}$ суть $\Theta_\Sigma := \pi(\mathcal{L}_\Sigma[\text{Corn } H_\Sigma^T])$, регулярные суть $\Pi_\Sigma := \overline{\Omega_\Sigma^T} \setminus \Theta_\Sigma$. Имеет место разбиение

$$\Pi_\Sigma = \bigcup_{j=1}^J \Phi^j = \bigcup_{j=1}^J \bigcup_{k=1}^{m_j} \omega_k^j, \quad \text{diam } \omega_k^j = \epsilon_j := \epsilon_\Phi$$

на семейства и клетки, вполне аналогичное разбиению (17). Для каждого семейства $\Phi \subset \Pi_\Sigma$ множество

$$\Xi_\Sigma[\Phi] := \rho(\mathcal{L}_\Sigma[\pi^{-1}(\Phi)]) = \bigcup_{i=1}^{n_\Phi} \psi_i \subset [0, T]$$

состоит из временных интервалов $\psi_i = (t_i, \tilde{t}_i)$ таких, что $0 \leq t_1 < \tilde{t}_1 \leq t_2 < \tilde{t}_2 \leq \dots \leq t_{n_\Phi} < \tilde{t}_{n_\Phi} \leq T$, все интервалы имеют одинаковую длину $\tilde{t}_i - t_i = \epsilon_\Phi$. На каждом семействе определен набор функций τ^i :

$$\tau_\Phi^i(x) := \psi_i \cap \rho(\mathcal{L}_\Sigma[\pi^{-1}(x)]), \quad x \in \Phi, \quad i = 1, \dots, n_\Phi. \quad (25)$$

Эти функции постоянны на множествах определенности: $\tau_\Phi^i(x) = \tau_\Phi^i(x')$ для регулярных $x, x' \in \Lambda_\Sigma[x]$. Для них выполнено (20) и справедливо представление (21). Последнее позволяет доопределить функции τ_Φ^i в критических точках (концах клеток ω) по непрерывности.

• Пусть $\gamma \in \Sigma$, $\Phi \subset \Pi_\Sigma$ и $x \in \Phi$. Нетрудно показать, что множество $\Lambda_\Sigma[x] \cap \Omega_\gamma^T$ является Λ_γ -замкнутым (в Ω_γ^T). Следовательно, на нем имеется β -набор векторов $\beta_{\gamma\Phi}^1, \dots, \beta_{\gamma\Phi}^{n_\Phi}$. Условимся считать их заданными на всем $\Lambda_\Sigma[x]$, продолжив с $\Lambda_\Sigma[x] \cap \Omega_\gamma^T$ на $\Lambda_\Sigma[x]$ нулем.

Повторив построение для всех $\gamma \in \Sigma$, получим совокупность β -наборов

$$\left\{ \beta_{\gamma\Phi}^1, \dots, \beta_{\gamma\Phi}^{n_\Phi} \mid \gamma \in \Sigma \right\}, \quad \beta_{\gamma\Phi}^i = \{(\beta_{\gamma\Phi}^i)_k \mid k = 1, \dots, m_\Phi\}, \quad (26)$$

где $m_\Phi = \#\Lambda_\Sigma[x]$. Каждый из наборов ортонормирован в $\mathbf{l}_2(\Lambda_\Sigma[x])$. Соответственно, на каждом семействе $\Phi \subset \Pi_\Sigma$ заданы функции $\beta_{\gamma\Phi}^i(\cdot)$, принимающие постоянные значения $(\beta_{\gamma\Phi}^i)_k$ на клетках $\omega_k \subset \Phi$.

• Для данного семейства Φ и *разных* вершин $\gamma \in \Sigma$ набор $\left\{ \beta_{\gamma\Phi}^1, \dots, \beta_{\gamma\Phi}^{n_\Phi} \right\}$ содержит одно и то же число векторов, равное n_Φ , а функции τ_Φ^i суть одни и те же. Тем не менее, примем по определению

$$n_{\gamma\Phi} := n_\Phi; \quad \tau_{\gamma\Phi}^i(x) := \tau_\Phi^i(x), \quad x \in \Phi; \quad \gamma \in \Sigma \quad (27)$$

Это на первый взгляд избыточное обозначение (индекс γ) окажется удобным в дальнейших рассмотрениях.

3 Эйконалы

Достижимые множества и проекторы

Здесь мы рассматриваем задачу (3)–(6) как динамическую систему и снабжаем ее атрибутами теории управления - пространствами и операторами.

- Пространство управлений $\mathcal{F}^T := L_2(\Gamma \times [0, T])$ со скалярным произведением

$$(f, g)_{\mathcal{F}^T} = \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_0^T f(\gamma, t) g(\gamma, t) dt$$

называется *внешним* пространством системы (3)–(6). Оно содержит подпространства управлений, действующих с отдельных граничных вершин $\gamma \in \Gamma$:

$$\mathcal{F}_\gamma^T := \{f \in \mathcal{F}^T \mid \text{supp } f \subset \{\gamma\} \times [0, T]\}$$

Каждое управление $f \in \mathcal{F}_\gamma^T$ имеет вид $f = \delta_\gamma \varphi$ с некоторым $\varphi \in L_2[0, T]$. Подмножеству граничных вершин $\Sigma \subseteq \Gamma$ соответствует подпространство

$$\mathcal{F}_\Sigma^T := \sum_{\gamma \in \Sigma}^{\oplus} \mathcal{F}_\gamma^T$$

действующих с него управлений (слагаемые ортогональны в \mathcal{F}^T).

Пространство $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$ называется *внутренним*; волны $u^f(\cdot, t)$ суть его элементы, зависящие от времени. Для множества $B \subset \Omega$ определим подпространство $\mathcal{H}\langle B \rangle := \{y \in \mathcal{H} \mid \text{supp } y \subset \overline{B}\}$ функций, локализованных в B .

Множество волн

$$\mathcal{U}_\gamma^s := \{u^f(\cdot, s) \mid f \in \mathcal{F}_\gamma^T\} \subset \mathcal{H}, \quad 0 \leq s \leq T$$

называется *достижимым* (с вершины γ , к моменту $t = s$). Из представлений (10) и (11) легко усмотреть, что \mathcal{U}_γ^s суть (замкнутые) подпространства в \mathcal{H} . С ростом s они расширяются: $\mathcal{U}_\gamma^s \subset \mathcal{U}_\gamma^{s'}$ при $s < s'$.

Отмеченная в (22) локальность соответствия "управление – волна" ведет к разложению по семействам

$$\mathcal{U}_\gamma^T = \sum_{\Phi \in \Pi_\Sigma}^{\oplus} \mathcal{U}_\gamma^T \langle \Phi \rangle, \quad (28)$$

где подпространство $\mathcal{U}_\gamma^T \langle \Phi \rangle \subset \mathcal{H} \langle \Phi \rangle$ состоит из волн $u^f(\cdot, T) \in \mathcal{U}_\gamma^T$, локализованных в $\Phi \cap \Omega_\gamma^T$. Ортогональность слагаемых – следствие дизъюнктивности семейств: $\Phi^j \cap \Phi^k = \emptyset$ для $j \neq k$.

- Фиксируем граничную вершину $\gamma \in \Sigma$; пусть P_γ^T есть проектор в \mathcal{H} на подпространство \mathcal{U}_γ^T . Обсудим его свойства и опишем его действие.

Как следствие (28), имеем представление

$$P_\gamma^T = \sum_{\Phi \in \Pi_\Sigma} P_\gamma^T \langle \Phi \rangle, \quad (29)$$

где $P_\gamma^T \langle \Phi \rangle$ суть проекторы в \mathcal{H} на $\mathcal{U}_\gamma^T \langle \Phi \rangle$. Таким образом, проектор P_γ^T приводится подпространствами $\mathcal{U}_\gamma^T \langle \Phi \rangle$ и, следовательно, его характеристика сводится к описанию действия проекторов $P_\gamma^T \langle \Phi \rangle$.

Как показано в [12], проекторы $P_\gamma^T \langle \Phi \rangle$ выражаются через векторы (26) и отвечающие им функции $\beta_{\gamma\Phi}^i(\cdot)$ следующим образом:

$$(P_\gamma^T \langle \Phi \rangle y)(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n_{\gamma\Phi}} \langle y|_{\Lambda_\gamma[x]}, \beta_{\gamma\Phi}^i \rangle \beta_{\gamma\Phi}^i(x), & x \in \Phi; \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Phi; \end{cases}, \quad (30)$$

где $y \in \mathcal{H}$ - произвольная функция на графе ⁴. Это представление выводится из представления (24), для получения которого и вводились векторы β^i .

Как легко видеть из (29) и (30), если проектируемая на \mathcal{U}_γ^T функция $y \in \mathcal{H}$ непрерывна и такова, что $y|_{\Lambda_\gamma[x]} \equiv 0$, то и $(P_\gamma^T y)|_{\Lambda_\gamma[x]} \equiv 0$. Другими словами, значения проекции $P_\gamma^T y$ на множестве $\Lambda_\gamma[x]$ вполне определяются значениями y на $\Lambda_\gamma[x]$. Именно в этом состоит повод называть $\Lambda_\gamma[x]$, а с ними и $\Lambda_\Sigma[x]$, множествами определенности.

Напомним, что векторы $\beta_{\gamma\Phi}^i$ суть элементы подпространства $\mathbb{A}[\Lambda_\Sigma[x]] \subset \mathbf{l}_2(\Lambda_\Sigma[x])$. Из сказанного выше следует, что проектор P_γ^T определяет в $\mathbf{l}_2(\Lambda_\Sigma[x])$ оператор $p_{\gamma\Phi}[x]$, проектирующий на $\mathbb{A}[\Lambda_\gamma[x]] \subset \mathbb{A}[\Lambda_\Sigma[x]]$. Пусть $\chi_1, \dots, \chi_{m_\Phi}$ есть (стандартный) базис в $\mathbf{l}_2(\Lambda_\Sigma[x])$, состоящий из индикаторов точек множества $\Lambda_\Sigma[x]$; в нем $(\beta_{\gamma\Phi}^i)_k = \langle \beta_{\gamma\Phi}^i, \chi_k \rangle$. Согласно (30), в этом базисе матрица проектора $p_{\gamma\Phi}[x]$ принимает вид

$$\check{p}_{\gamma\Phi}[x] = B_{\gamma\Phi}^*[x] B_{\gamma\Phi}[x], \quad B_{\gamma\Phi}[x] := \begin{pmatrix} (\beta_{\gamma\Phi}^1)_1(x) & \dots & (\beta_{\gamma\Phi}^1)_{m_\Phi}(x) \\ (\beta_{\gamma\Phi}^2)_1(x) & \dots & (\beta_{\gamma\Phi}^2)_{m_\Phi}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\beta_{\gamma\Phi}^{n_{\gamma\Phi}})_1(x) & \dots & (\beta_{\gamma\Phi}^{n_{\gamma\Phi}})_{m_\Phi}(x) \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Эйконал

- Семейство $\{P_\gamma^s \mid 0 \leq s \leq T\}$ проекторов в \mathcal{H} на достижимые множества \mathcal{U}_γ^s определяет оператор эйконала (коротко - *эйконал*)

$$E_\gamma^T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad E_\gamma^T := \int_0^T s dP_\gamma^s.$$

⁴В точном смысле, (30) есть представление "почти всюду" в Ω . Для $y \in C(\Omega)$ оно верно "всюду".

Из определения следует, что E_γ^T есть ограниченный самосопряженный положительный оператор. Как и проектор P_γ^T , эйконал E_γ^T приводится подпространствами $\mathcal{H}\langle\Phi\rangle$: для него справедливы соотношения $E_\gamma^T \mathcal{H}\langle\Phi\rangle \subset \mathcal{H}\langle\Phi\rangle$ и разложение

$$E_\gamma^T = \sum_{\Phi \subset \Pi} E_\gamma^T \langle\Phi\rangle,$$

где $E_\gamma^T \langle\Phi\rangle := E_\gamma^T|_\Phi$ есть сужение E_γ^T , действующее в $\mathcal{H}\langle\Phi\rangle$.

Как показано в [12], справедливо согласованное с (30) представление

$$(E_\gamma^T \langle\Phi\rangle y)(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n_{\gamma\Phi}} \tau_{\gamma\Phi}^i(x) \langle y|_{\Lambda_\gamma[x]}, \beta_{\gamma\Phi}^i \rangle \beta_{\gamma\Phi}^i(x), & x \in \Phi; \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Phi; \end{cases} \quad (32)$$

в котором $y \in \mathcal{H}$ произвольно, а функции $\tau_{\gamma\Phi}^i$ даются определениями (25) и (27).⁵

Оператор E_γ^T индуцирует в $\mathbf{l}_2(\Lambda_\Sigma[x])$ оператор $e_{\gamma\Phi}[x]$. Согласно (31) и (32), в базисе $\chi_1, \dots, \chi_{m_\Phi}$ его матрица имеет вид

$$\begin{aligned} \check{e}_{\gamma\Phi}[x] &= B_{\gamma\Phi}^*[x] D_{\gamma\Phi}[x] B_{\gamma\Phi}[x]; \\ B_{\gamma\Phi}[x] &:= \begin{pmatrix} (\beta_{\gamma\Phi}^1)_1(x) & \dots & (\beta_{\gamma\Phi}^1)_{m_\Phi}(x) \\ (\beta_{\gamma\Phi}^2)_1(x) & \dots & (\beta_{\gamma\Phi}^2)_{m_\Phi}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\beta_{\gamma\Phi}^{n_{\gamma\Phi}})_1(x) & \dots & (\beta_{\gamma\Phi}^{n_{\gamma\Phi}})_{m_\Phi}(x) \end{pmatrix}, \quad D_{\gamma\Phi}[x] = \text{diag}\{\tau_{\gamma\Phi}^i(x)\}_{i=1}^{n_{\gamma\Phi}}. \end{aligned}$$

Подпространство $\mathbb{A}_{\gamma\Phi}[x] = \text{span}\{\beta_{\gamma\Phi}^1, \dots, \beta_{\gamma\Phi}^{n_{\gamma\Phi}}\} \subset \mathbf{l}_2(\Lambda_\Sigma[x])$ приводит эту матрицу, а ее ненулевой блок в базисе $\beta_{\gamma\Phi}^1, \dots, \beta_{\gamma\Phi}^{n_{\gamma\Phi}}$ есть $\text{diag}\{\tau_{\gamma\Phi}^i(x)\}_{i=1}^{n_{\gamma\Phi}}$. Как видно из (20), все ее собственные значения $\tau_{\gamma\Phi}^i(x)$ внутри клеток семейства *различны*; при изменении x в $\omega \subset \Phi$ они замечают интервалы $(t_i, \tilde{t}_i) \subset \Xi[\Phi]$. Согласно Предложению 1, при $T < T_\gamma$ объединение (по всем семействам $\Phi \subset \Pi$) всех сегментов $[t_i, \tilde{t}_i]$ совпадает $[0, T]$.

Из приведенных рассмотрений легко усматриваются общие свойства эйконала как оператора в \mathcal{H} (см., например, [14]).

Предложение 1. *Для эйконала E_γ^T выполнено $\overline{\text{Ran } E_\gamma^T} = \mathcal{U}_\gamma^T$ и $\text{Ker } E_\gamma^T = \mathcal{H} \ominus \mathcal{U}_\gamma^T$. Эйконал приводится частями достижимого множества: $E_\gamma^T \mathcal{U}_\gamma^T \langle\Phi\rangle \subset \mathcal{U}_\gamma^T \langle\Phi\rangle$, $\Phi \subset \Pi_\Sigma$. При $T < T_\gamma$ оператор $E_\gamma^T|_{\mathcal{U}_\gamma^T}$ имеет в*

⁵В соответствующем представлении в [12] использовались некорректно определенные функции τ_Φ^i : см. сноску на стр 12. Представление (32) с функциями, определенными в (19), (27) исправляет эту ошибку.

\mathcal{U}_γ^T простой абсолютно непрерывный спектр, заполняющий сегмент $[0, T]$.

Замечание 1. Из представления (32) также следует, что при временах $T > T_\gamma$ спектр $E_\gamma^T|_{\mathcal{U}_\gamma^T}$ есть объединение сегментов $[0, T_0] \cup [T_1, T_2] \cup \dots \cup [T_{N-1}, T_N]$, где $T_\gamma \leq T_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_N \leq T$, а каждый сегмент состоит из областей значений функций $\tau_{\gamma\Phi}^i$ (замыканий временных клеток $\psi_{\gamma\Phi}^i$ - см. (18)).⁶

Параметризация

• Выберем семейство $\Phi = \bigcup_{k=1}^{m_\Phi} \omega_k \subset \Pi_\Sigma$; пусть $\omega = (c, c') \subset \Phi$ - одна из его клеток. Напомним, что все клетки имеют одинаковую длину $\epsilon_\Phi = \tau(c, c')$. Для $x \in \omega$ введем обозначение $x = x(r)$, если $\tau(c, x) = r$. Наряду с x , множество определенности также оказывается параметризованным: $\Lambda_\Sigma[x(r)] = \{x_k(r)\}_{k=1}^{m_\Phi}$. При изменении r в интервале $(0, \epsilon_\Phi)$ точки $x_k(r)$ непрерывно меняют положение и заматают клетки ω_k . Таким образом, семейство Φ параметризовано.

Параметризованы по r и все элементы представлений (30) и (32): векторы

$$\begin{aligned} \beta_{\gamma\Phi}^i &= \{(\beta_{\gamma\Phi}^i)_k(r)\}_{k=1}^{m_\Phi}, \quad (\beta_{\gamma\Phi}^i)_k(r) := \beta_{\gamma\Phi}^i(x_k(r)) = \\ &= (\beta_{\gamma\Phi}^i)_k = \text{const}, \quad 0 < r < \epsilon_\Phi \end{aligned} \quad (33)$$

и функции $\tau_{\gamma\Phi}^i(r) := \tau_{\gamma\Phi}^i(x(r))$. Последние, согласно (21), принимают значения

$$\tau_{\gamma\Phi}^i(r) = t_{i\Phi} + r \quad \text{или} \quad \tau_{\gamma\Phi}^i(r) = \tilde{t}_{i\Phi} - r = (t_{i\Phi} + \epsilon_\Phi) - r. \quad (34)$$

Отметим, что параметризаций семейства Φ суть две: принятая выше с $r = \tau(x, c)$ и отвечающая параметру $r = \tau(x, c')$. Они вполне равноправны. В дальнейшем будем считать, что каждое семейство $\Phi \subset \Pi_\Sigma$ параметризовано каким-либо одним из двух способов.

• Параметризация определяет матричные представления функций и операторов на графе.

⁶Однако, точное описание спектра - открытый вопрос. Есть гипотеза, что он всегда исчерпывается интервалом $[0, T_0]$ с достаточно большим T_0 . Вопрос связан с тонкими деталями строения достижимых множеств \mathcal{U}_γ^T метрического графа.

Пусть $\Phi \subset \Pi_\Sigma$ есть параметризованное семейство, $y \in \mathcal{H}$ - функция на графе, $x = x(r) \in \Lambda_\Sigma[x(r)] = \{x_k(r)\}_{k=1}^{m_\Phi} \subset \Phi$, $0 < r < \epsilon_\Phi$. Легко проверить, что отображение

$$U_\Phi : \mathcal{H} \rightarrow L_2([0, \epsilon_\Phi]; \mathbb{R}^{m_\Phi}); \quad (U_\Phi y)(r) := \begin{pmatrix} y(x_1(r)) \\ \dots \\ y(x_{m_\Phi}(r)) \end{pmatrix}, \quad r \in (0, \epsilon_\Phi).$$

унитарно. Для каждой вершины $\gamma \in \Sigma$ определим (постоянные - см. (33)) столбцы и образованные ими матрицы

$$\beta_{\gamma\Phi}^i = \begin{pmatrix} (\beta_{\gamma\Phi}^i)_1 \\ \dots \\ (\beta_{\gamma\Phi}^i)_{m_\Phi} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m_\Phi}, \quad B_{\gamma\Phi} := \begin{pmatrix} (\beta_{\gamma\Phi}^1)_1 & \dots & (\beta_{\gamma\Phi}^1)_{m_\Phi} \\ (\beta_{\gamma\Phi}^2)_1 & \dots & (\beta_{\gamma\Phi}^2)_{m_\Phi} \\ \dots & \dots & \dots \\ (\beta_{\gamma\Phi}^{n_{\gamma\Phi}})_1 & \dots & (\beta_{\gamma\Phi}^{n_{\gamma\Phi}})_{m_\Phi} \end{pmatrix};$$

введем матрицы

$$D_{\gamma\Phi}(r) := \{\tau_{\gamma\Phi}^i(r) \delta_{ij}\}_{i,j=1}^{n_{\gamma\Phi}}, \quad r \in (0, \epsilon_\Phi),$$

где $\tau_{\gamma\Phi}^i(r)$ имеют вид (34). При изменении параметра r матрица $B_{\gamma\Phi}$ не меняется в силу постоянства ее элементов в клетках $\omega_1, \dots, \omega_{m_\Phi}$ семейства Φ . Вместе с ней постоянна и матрица $B_{\gamma\Phi}^* B_{\gamma\Phi}$. Последняя, в силу того, что столбцы $\beta_{\gamma\Phi}^i$ составляют ортонормированный набор, является проектором в \mathbb{R}^{m_Φ} на подпространство

$$\mathcal{A}_\gamma[\Phi] := \text{span} \left\{ \beta_{\gamma\Phi}^1, \dots, \beta_{\gamma\Phi}^{n_{\gamma\Phi}} \right\} = [B_{\gamma\Phi}^* B_{\gamma\Phi}] \mathbb{R}^{m_\Phi}.$$

Матрица-проектор $B_{\gamma\Phi}^* B_{\gamma\Phi}$ допускает разложение в сумму попарно ортогональных одномерных проекторов

$$B_{\gamma\Phi}^* B_{\gamma\Phi} = \sum_{i=1}^{n_{\gamma\Phi}} P_{\gamma\Phi}^i, \quad P_{\gamma\Phi}^i := \langle \cdot, \beta_{\gamma\Phi}^i \rangle \beta_{\gamma\Phi}^i, \quad (35)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - стандартное скалярное произведение в \mathbb{R}^{m_Φ} . В соответствии с (32) имеем представление:

$$(U_\Phi E_\gamma^T \langle \Phi \rangle y)(r) = [B_{\gamma\Phi}^* D_{\gamma\Phi}(r) B_{\gamma\Phi}] (U_\Phi y)(r), \quad r \in (0, \epsilon_\Phi)$$

с матрицами

$$B_{\gamma\Phi}^* D_{\gamma\Phi}(r) B_{\gamma\Phi} = U_\Phi E_\gamma^T \langle \Phi \rangle U_\Phi^{-1} \stackrel{(32), (35)}{=} \sum_{i=1}^{n_{\gamma\Phi}} \tau_{\gamma\Phi}^i(r) P_{\gamma\Phi}^i. \quad (36)$$

- Опишем параметризацию пространств и операторов, отвечающую разбиению Π_Σ в целом. Аналог разложения (28) приобретает вид

$$\mathcal{U}_\Sigma^T = \oplus \sum_{\Phi \in \Pi_\Sigma} \mathcal{U}_\Sigma^T \langle \Phi \rangle, \quad \mathcal{U}_\Sigma^T \langle \Phi \rangle := \text{span} \{ \mathcal{U}_\gamma^T \langle \Phi \rangle \mid \gamma \in \Sigma \},$$

причем каждое из подпространств-слагаемых приводит все эйконалы одновременно:

$$E_\gamma^T \mathcal{U}_\Sigma^T \langle \Phi \rangle \subset \mathcal{U}_\Sigma^T \langle \Phi \rangle, \quad \gamma \in \Sigma.$$

Используя параметризации в семействах, имеем:

$$U_\Phi \mathcal{H} \langle \Phi \rangle = L_2([0, \epsilon_\Phi]; \mathbb{R}^{m_\Phi}), \quad U_\Phi \mathcal{U}_\Sigma^T [\Phi] = L_2([0, \epsilon_\Phi]; \mathcal{A}_\Sigma[\Phi]),$$

где $\mathcal{A}_\Sigma[\Phi] := \text{span} \{ \mathcal{A}_\gamma[\Phi] \mid \gamma \in \Sigma \}$, а части $E_\gamma^T \langle \Phi \rangle$ эйконалов умножают элементы $L_2([0, \epsilon_\Phi]; \mathbb{R}^{m_\Phi})$ на матрицы-функции (36).

Соглашение 1. Условимся об обозначениях. Для пространств $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n$ сумма $\mathcal{S} = \oplus \sum_j \mathcal{S}_j$ есть пространство наборов $s = \{s_1, \dots, s_n\}$, $s_j \in \mathcal{S}_j$ (с покомпонентными операциями). Для операторов A_1, \dots, A_n , $A_j \in \text{End } \mathcal{S}_j$, сумма $A = \oplus \sum_j A_j \in \text{End } \mathcal{S}$ есть оператор, действующий по правилу $As := \{A_1 s_1, \dots, A_n s_n\}$. Для матриц M_1, \dots, M_n , $M_j \in \mathbb{M}^{z_j}$, сумма $M = \oplus \sum_j M_j \in \mathbb{M}^{z_1 + \dots + z_n}$ есть блочно-диагональная матрица с блоками M_1, \dots, M_n (мы также пишем $[M]_j = M_j$). Для алгебр $\{\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n\}$, $\mathfrak{A} = \oplus_j \mathfrak{A}_j$ есть прямая сумма алгебр-слагаемых (мы также пишем $[\mathfrak{A}]_j = \mathfrak{A}_j$ и называем \mathfrak{A}_j блоками).

Параметризация всего Π_Σ реализуется оператором $U := \oplus \sum_{\Phi \in \Pi_\Sigma} U_\Phi$:

$$U \mathcal{H} \langle \Omega_\Sigma^T \rangle = \oplus \sum_{\Phi \in \Pi_\Sigma} L_2([0, \epsilon_\Phi]; \mathbb{R}^{m_\Phi});$$

$$U E_\gamma^T U^{-1} = \oplus \sum_{\Phi \in \Pi_\Sigma} U_\Phi E_\gamma^T \langle \Phi \rangle U_\Phi^{-1} \stackrel{(36)}{=} \oplus \sum_{\Phi \in \Pi_\Sigma} \sum_{i=1}^{n_{\gamma\Phi}} \tau_{\gamma\Phi}^i P_{\gamma\Phi}^i \quad \gamma \in \Sigma. \quad (37)$$

Смещенные эйконалы

- В техническом отношении, при описании алгебры, порожденной эйконалами, удобно использовать операторы (смещенные эйконалы)

$$\dot{E}_\gamma^T := \int_0^T (s+1) dP_\gamma^s = E_\gamma^T + P_\gamma^T. \quad (38)$$

Установленные ранее свойства и представления для E_γ^T очевидным образом переформулируются для \dot{E}_γ^T . Так, аналог представления (37) имеет вид:

$$\begin{aligned} U \dot{E}_\gamma^T U^{-1} &= \oplus \sum_{\Phi \subset \Pi_\Sigma} U_\Phi \dot{E}_\gamma^T \langle \Phi \rangle U_\Phi^{-1} = \oplus \sum_{\Phi \subset \Pi_\Sigma} [B_{\gamma\Phi}^* \dot{D}_{\gamma\Phi}(\cdot) B_{\gamma\Phi}] = \\ &\stackrel{(37)}{=} \oplus \sum_{\Phi \subset \Pi_\Sigma} \sum_{i=1}^{n_{\gamma\Phi}} \dot{\tau}_{\gamma\Phi}^i P_{\gamma\Phi}^i, \quad \gamma \in \Sigma, \end{aligned} \quad (39)$$

где $\dot{D}_{\gamma\Phi}(\cdot) := D_{\gamma\Phi}(\cdot) + I$, I - единичная матрица соответствующей размерности и $\dot{\tau}_{\gamma\Phi}^i(r) := \tau_{\gamma\Phi}^i(r) + 1$. Аналог Предложения 1 имеет вид

Предложение 2. Для оператора \dot{E}_γ^T выполнено $\text{Ran } \dot{E}_\gamma^T = \mathcal{U}_\gamma^T$, $\text{Ker } \dot{E}_\gamma^T = \mathcal{H} \ominus \mathcal{U}_\gamma^T$ и $\dot{E}_\gamma^T \mathcal{U}_\gamma^T \langle \Phi \rangle \subset \mathcal{U}_\gamma^T \langle \Phi \rangle$, $\Phi \subset \Pi$. При $T < T_\gamma$ он имеет собственное значение 0 бесконечной кратности и простой абсолютно непрерывный спектр, заполняющий сегмент $[1, T + 1]$. При $T > T_\gamma$, согласно Замечанию 1, выполнено

$$\begin{aligned} \sigma(\dot{E}_\gamma^T|_{\mathcal{U}_\gamma^T}) &= \sigma_{\text{ac}}(\dot{E}_\gamma^T) = \\ &= [1, T_0 + 1] \cup [T_1 + 1, T_2 + 1] \cup \dots \cup [T_{N-1} + 1, T_N + 1], \end{aligned} \quad (40)$$

где $T_\gamma \leq T_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_N \leq T$, а сегменты суть объединения областей значений функций $\dot{\tau}_{\gamma\Phi}^i$ (смещенных на 1 временных клеток $\dot{\psi}_{\gamma\Phi}^i$).

4 Алгебра эйконалов

Определения и общие факты

- Напомним, что C^* -алгеброй называется банахова алгебра с инволюцией [16, 19]. Таковыми, в частности, являются алгебры ограниченных операторов $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ в гильбертовом пространстве \mathcal{H} , в которых роль инволюции играет операторное сопряжение. Запись $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ будет означать, что C^* -алгебры \mathfrak{A} и \mathfrak{B} связаны изометрическим $*$ -изоморфизмом (далее коротко - *изометричны*). Для множества $S \subset \mathfrak{A}$ через $\vee S$ обозначается минимальная C^* -(под)алгебра в \mathfrak{A} , содержащая S .

Под M^n понимается алгебра вещественных $n \times n$ -матриц, рассматриваемых как операторы в \mathbb{R}^n и снабженных соответствующей (операторной) нормой. Она *неприводима*.

Через $C([a, b], \mathbb{M}^n)$ обозначается алгебра непрерывных \mathbb{M}^n -значных функций с нормой $\|c\| = \sup_{a \leq t \leq b} \|c(t)\|_{\mathbb{M}^n}$. Тем же символом мы обозначаем операторную (под)алгебру в $\mathfrak{B}(L_2([a, b]; \mathbb{R}^n))$, элементы которой умножают квадратично-суммируемые \mathbb{R}^n -значные функции на функции из $C([a, b], \mathbb{M}^n)$. Соответствие $c \mapsto c \cdot$ устанавливает изометрию этих алгебр.

C^* -подалгебру $\mathfrak{A} \subset \mathbb{M}^n$ условимся считать неприводимой, если выполнено $\mathfrak{A} \cong \mathbb{M}^k$, где $k \leq n$. Такая алгебра, в подходящем базисе в \mathbb{R}^n , принимает блочно-диагональную форму и состоит из двух блоков, один из которых есть \mathbb{M}^k , а второй (если имеется) - нулевой.

Приведем сводку известных результатов ⁷.

Предложение 3. *Любая C^* -подалгебра алгебры \mathbb{M}^n изометрична прямой сумме $\bigoplus_k \mathbb{M}^{n_k}$, где $\sum_k n_k \leq n$.*

Предложение 4. *Пусть $\mathfrak{P} \subset \mathbb{M}^n$ и C^* -подалгебра $\mathfrak{A} \subset C([a, b]; \mathfrak{P})$ такова, что для любых $t, t' \in [a, b]$ и $p, p' \in \mathfrak{P}$ найдется элемент $u \in \mathfrak{A}$, для которого выполнено $u(t) = p$, $u(t') = p'$. Тогда $\mathfrak{A} = C([a, b]; \mathfrak{P})$.*

(см. [16]).

• Представление C^* -алгебры \mathfrak{A} это гомоморфизм $\pi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(H)$, где H - гильбертово пространство. Эквивалентность представлений $\pi \sim \pi'$ означает, что $\iota\pi(a) = \pi'(a)\iota$, $a \in \mathfrak{A}$, где $\iota : H \rightarrow H'$ - изометрия пространств представлений. Представление *неприводимо*, если операторы $\pi(\mathfrak{A})$ не имеют общего ненулевого инвариантного подпространства в H .

Спектром C^* -алгебры \mathfrak{A} называется множество $\widehat{\mathfrak{A}}$ классов эквивалентности ее неприводимых представлений. Класс эквивалентности (точку спектра), отвечающий представлению π , будем обозначать через $\hat{\pi}$. Спектр снабжен канонической топологией Джекобсона [16, 19].

Изометрия алгебр $u : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ определяет соответствие представлений

$$\widehat{\mathfrak{A}} \ni \pi \rightarrow u_*\pi \in \widehat{\mathfrak{B}}, \quad (u_*\pi)(b) := \pi(u^{-1}(b)), \quad b \in \mathfrak{B}, \quad (41)$$

которое продолжается до канонического гомеоморфизма спектров:

$$\widehat{\mathfrak{A}} \ni \hat{\pi} \rightarrow u_*\hat{\pi} \in \widehat{\mathfrak{B}}, \quad u_*\hat{\pi} := \{u_*\pi \mid \pi \in \hat{\pi}\}. \quad (42)$$

⁷В работе [9], в аналогичной сводке ‘On matrix algebras’, допущена ошибка: утверждение **3** неверно. Однако, после соответствующих исправлений, все результаты работы сохранили силу.

Предложение 5. *Представления*

$$\pi_t : C([a, b], \mathbb{M}^n) \rightarrow \mathbb{M}^n, \quad \pi_t(\phi) := \phi(t) \quad (43)$$

неприводимы; их классы эквивалентности исчерпывают спектр алгебры $C([a, b], \mathbb{M}^n)$. Для любого неприводимого представления π алгебры $C([a, b], \mathbb{M}^n)$ существует единственная точка $t \in [a, b]$, такая, что $\pi \sim \pi_t$.

Пусть

$$\dot{C}([a, b]; \mathbb{M}^n) := \{ \phi \in C([a, b]; \mathbb{M}^n) \mid \phi(a) \in \mathbb{M}_a, \phi(b) \in \mathbb{M}_b \},$$

где $\mathbb{M}_a, \mathbb{M}_b$ суть C^* -подалгебры \mathbb{M}^n , которые мы называем *граничными*. Из Предложения 3 следует, что

$$\mathbb{M}_a \cong \bigoplus_{k=1}^{n_a} \mathbb{M}^{\varkappa_k}, \quad \varkappa_1 + \dots + \varkappa_{n_a} \leq n; \quad \mathbb{M}_b \cong \bigoplus_{k=1}^{n_b} \mathbb{M}^{\lambda_k}, \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_{n_b} \leq n. \quad (44)$$

В случае $\mathbb{M}_a = \mathbb{M}_b = \mathbb{M}^n$ имеем $\dot{C}([a, b]; \mathbb{M}^n) = C([a, b]; \mathbb{M}^n)$. Алгебры $\dot{C}([a, b]; \mathbb{M}^n)$ мы будем называть *стандартными*.

Спектр стандартной алгебры состоит из классов $\hat{\pi}_t$, $t \in (a, b)$ неприводимых представлений вида (43) и представлений $\hat{\pi}_a, \hat{\pi}_b$, которые могут оказаться приводимыми. Если, например, $n_a \geq 2$, то π_a распадается на неприводимые представления

$$\pi_a^k : \phi(a) \mapsto [\phi(a)]^k \in \mathbb{M}^{\varkappa_k},$$

где $[\dots]^k$ есть k -й блок блочно-диагональной матрицы в представлениях (44). В этом случае мы говорим, что $\hat{\pi}_a^1, \dots, \hat{\pi}_a^{n_a}$ образуют *кластер* в спектре стандартной алгебры. Этот термин мотивирован тем, что они неотделимы друг от друга в топологии Джекобсона. Аналогичный кластер может иметься и на правом конце $t = b$. В то же время, все $\hat{\pi}_t$ с разными $t \in (a, b)$ отделимы друг от друга и от кластеров (см. [12], [9]). Спектр алгебры $C([a, b]; \mathbb{M}^n)$ кластеров не содержит.

- Центральным объектом работы является *алгебра эйконолов* графа Ω

$$\mathfrak{E}_\Sigma^T := \vee \{ E_\gamma^T \mid \gamma \in \Sigma \} \subset \mathfrak{B}(L_2(\Omega));$$

см. [12], [9]. Входящие в нее подалгебры

$$\mathfrak{E}_\gamma^T := \vee E_\gamma^T, \quad \gamma \in \Sigma$$

мы называем *парциальными*. В рассмотрениях удобно использовать "смещенные" алгебры

$$\mathfrak{E}_\gamma^T := \vee \dot{E}_\gamma^T, \quad \mathfrak{E}_\Sigma^T := \vee \{\dot{E}_\gamma^T \mid \gamma \in \Sigma\} = \vee \{\mathfrak{E}_\gamma^T \mid \gamma \in \Sigma\}.$$

Переход от \mathfrak{E}_γ^T к $\dot{\mathfrak{E}}_\gamma^T$ состоит в добавлении проектора P_γ^T , играющего роль единицы в $\dot{\mathfrak{E}}_\gamma^T$ (см. (38)), а алгебра \mathfrak{E}_γ^T оказывается подалгеброй в $\dot{\mathfrak{E}}_\gamma^T$,

- Согласно функциональному исчислению самосопряженных операторов и в силу ортогональности проекторов $P_{\gamma\Phi}^i$ в (39), имеем:

$$\varphi(\dot{E}_\gamma^T) = \int_{\sigma_{\text{ac}}(\dot{E}_\gamma^T)} \varphi(s) dP_\gamma^s = U^{-1} \left[\oplus \sum_{\Phi \subset \Pi_\Sigma} \sum_{i=1}^{n_{\gamma\Phi}} (\varphi \circ \dot{\tau}_{\gamma\Phi}^i) P_{\gamma\Phi}^i \right] U \quad (45)$$

для $\varphi \in C(\sigma_{\text{ac}}(\dot{E}_\gamma^T))$. Задаваемое первым равенством соответствие $\varphi(\dot{E}_\gamma^T) \leftrightarrow \varphi$ есть изометрия алгебр $\dot{\mathfrak{E}}_\gamma^T$ и $C(\sigma_{\text{ac}}(\dot{E}_\gamma^T))$.

Соглашение 2. Далее всюду, если не оговорено противное, мы имеем дело только со смещенными эйконалами и опускаем (\cdot) в относящихся к ним обозначениях, $\dot{E}_\gamma^T \equiv E_\gamma^T$, $\dot{\tau}_{\gamma l}^k \equiv \tau_{\gamma l}^k$, $\dot{\psi}_{\gamma l}^k \equiv \psi_{\gamma l}^k$, $\dot{\mathfrak{E}}_\Sigma^T \equiv \mathfrak{E}_\Sigma^T$ и т.д.

Представления и связи между блоками

- Из (29) и (32) имеем представление

$$\mathfrak{E}_\Sigma^T = \vee \left\{ \oplus \sum_{\Phi \subset \Pi_\Sigma} E_\gamma \langle \Phi \rangle \mid \gamma \in \Sigma \right\}.$$

Параметризация (37) приводит к представлению

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_\Sigma^T &\cong U \mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1} \stackrel{(39)}{=} \\ &= \vee \left\{ \oplus \sum_{\Phi \subset \Pi_\Sigma} \sum_{i=1}^{n_{\gamma\Phi}} \tau_{\gamma\Phi}^i(\cdot) P_{\gamma\Phi}^i \mid \gamma \in \Sigma \right\} \subset \bigoplus_{\Phi \subset \Pi_\Sigma} C([0, \epsilon_\Phi], \mathbb{M}^{m_\Phi}) \end{aligned} \quad (46)$$

в виде операторной алгебры; ее элементы умножают функции из пространства представления

$$\mathcal{R}_\Sigma^T := \oplus \sum_{\Phi \subset \Pi_\Sigma} L_2([0, \epsilon_\Phi]; \mathbb{R}^{m_\Phi}) \quad (47)$$

на непрерывные матрицы-функции соответствующего вида.

В более наглядной блочно-матричной записи представления (46) имеем:

$$U \mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1} = \vee \left\{ \left(\begin{array}{ccc} \sum_{i=1}^{n_{\gamma\Phi^1}} \tau_{\gamma\Phi^1}^i(\cdot_1) P_{\gamma\Phi^1}^i & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{i=1}^{n_{\gamma\Phi^J}} \tau_{\gamma\Phi^J}^i(\cdot_J) P_{\gamma\Phi^J}^i \end{array} \right) \middle| \gamma \in \Sigma \right\} \subset$$

$$\subset \left(\begin{array}{ccc} C([0, \epsilon_1]; \mathbb{M}^{m_{\Phi^1}}) & & \\ & \ddots & \\ & & C([0, \epsilon_J]; \mathbb{M}^{m_{\Phi^J}}) \end{array} \right); \quad (48)$$

здесь нулевые внедиагональные блоки опущены; $\Pi_\Sigma = \Phi^1 \cup \dots \cup \Phi^J$. Обозначение (\cdot_j) подчеркивает, что аргументы $r_j \in [0, \epsilon_j]$ у функций $\tau_{\gamma\Phi^j}^i$ суть разные, в соответствии с представлением (47).

Определим наборы проекторов $\mathbb{P}_{\Phi^j} := \{P_{\gamma\Phi^j}^i \mid i = 1, \dots, n_{\gamma\Phi^j}; \gamma \in \Sigma\}$. Тогда с привлечением алгебр

$$\mathfrak{P}_{\Phi^j} := \vee \mathbb{P}_{\Phi^j} \subseteq \mathbb{M}^{m_{\Phi^j}} \quad (49)$$

вложение в (48) уточняется следующим образом:

$$U \mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1} \subset \bigoplus_{j=1}^J C([0, \epsilon_j]; \mathfrak{P}_{\Phi^j}). \quad (50)$$

Как можно предвидеть из (48) и (50), описание структуры алгебры эйконолов сведется к установлению связи между ее блоками $[U \mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1}]_j(\cdot_j)$, отвечающими разным семействам $\Phi^j \subset \Pi_\Sigma$. Именно эти связи отличают $U \mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1}$ от алгебры в правой части (50), у которой блоки вполне независимы. Приводимая ниже лемма - шаг в изучении связей между блоками алгебры $U \mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1}$.

- Определим проекторы

$$\mathcal{P}_{\gamma\Phi^j}^i := \begin{pmatrix} O_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & P_{\gamma\Phi^j}^i & \\ & & & \ddots \\ & & & & O_J \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \mathfrak{P}_{\Phi^1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathfrak{P}_{\Phi^j} & \\ & & & \ddots \\ & & & & \mathfrak{P}_{\Phi^J} \end{pmatrix} = \bigoplus_{j=1}^J \mathfrak{P}_{\Phi^j},$$

где O_k - нулевые матрицы соответствующей размерности. Как и $P_{\gamma\Phi^j}^i$, эти проекторы попарно ортогональны. Определим также "точки" $\mathbf{r} := \{r_1, \dots, r_J\}$ с координатами $r_j \in [0, \epsilon_j]$, матрицы

$$(UE_\gamma^T U^{-1})(\mathbf{r}) := \bigoplus_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_{\gamma\Phi^j}} \tau_{\gamma\Phi^j}^i(r_j) P_{\gamma\Phi^j}^i = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_{\gamma\Phi^j}} \tau_{\gamma\Phi^j}^i(r_j) \mathcal{P}_{\gamma\Phi^j}^i \in \bigoplus_{j=1}^J \mathfrak{P}_{\Phi^j} \quad (51)$$

(см. (39)) и матричные алгебры

$$(U\mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1})(\mathbf{r}) := \vee \{(UE_\gamma^T U^{-1})(\mathbf{r}) \mid \gamma \in \Sigma\}.$$

Лемма 2. *Фиксируем γ, i, j . Пусть точки \mathbf{r} и \mathbf{r}' таковы, что их координаты удовлетворяют условиям $r_j \in (0, \epsilon_j)$ и $r_j \neq r'_j$. Тогда найдется элемент $e \in U\mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1}$, для которого выполнено $e(\mathbf{r}) = \mathcal{P}_{\gamma j}^i$ и $e(\mathbf{r}') = O$.*

Доказательство. В силу попарной ортогональности проекторов в (51), при $\mu \in \mathbb{N}$ имеем:

$$((UE_\gamma^T U^{-1})^\mu)(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^J \sum_{l=1}^{n_{\gamma\Phi^k}} \left(\tau_{\gamma\Phi^k}^l(r_k) \right)^\mu \mathcal{P}_{\gamma\Phi^k}^l.$$

Как следствие, для полинома $q = q(t) = a_\nu t^\nu + \dots + a_1 t$ выполнено

$$(q(UE_\gamma^T U^{-1}))(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^J \sum_{l=1}^{n_{\gamma\Phi^k}} q(\tau_{\gamma\Phi^k}^l(r_k)) \mathcal{P}_{\gamma\Phi^k}^l.$$

По условию на координаты точек \mathbf{r} и \mathbf{r}' и свойству (20), в наборе

$$\{\tau_{\gamma\Phi^k}^l(\eta) \mid k = 1, \dots, J; l = 1, \dots, n_{\gamma\Phi^k}; \eta = r_k, r'_k\}$$

число $\tau_{\gamma j}^i(r_j)$ встречается один раз. Выберем полином так, чтобы он обращался в 1 при $t = \tau_{\gamma j}^i(r_j)$ и в 0 во всех остальных точках набора. Для $e := q(UE_\gamma^T U^{-1})$, очевидно, имеем $e(\mathbf{r}) = \mathcal{P}_{\gamma j}^i$, $e(\mathbf{r}') = O$. \square

Следствие 2. *Если координаты точки \mathbf{r} не принимают крайних значений, т.е. $r_j \notin \{0, \epsilon_j\}$ для всех j , то выполнено*

$$(U\mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1})(\mathbf{r}) = \bigoplus_{j=1}^J \mathfrak{P}_{\Phi^j}. \quad (52)$$

Если координаты таковы, что для фиксированного j выполнено $0 < a_j \leq r_j \leq b_j < \epsilon_j$, а остальные координаты произвольны, то справедливо соотношение

$$[U \mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1}]_j \big|_{a_j \leq r_j \leq b_j} = C([a_j, b_j]; \mathfrak{P}_{\Phi j}). \quad (53)$$

Первое соотношение - прямое следствие утверждения леммы; второе легко выводится из первого с использованием Предложения 4. Равенство (53) указывает на отсутствие связей между блоками $[U \mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1}]_j$ при принятых ограничениях на координаты.

• Если координаты точки \mathbf{r} принимают *крайние* значения, то равенство (52), вообще говоря, нарушается: в матричной алгебре $[U \mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1}](\mathbf{r})$ появляются связи между ее блоками. Именно они отличают левую и правую части во вложении (50): у состоящей из стандартных алгебр правой части такие связи отсутствуют. Поясним это на примерах.

Из определения и свойств функций $\tau_{\gamma\Phi j}^i$ (см. (20)) следует, что равенства $\tau_{\gamma\Phi j}^i(r_j) = \tau_{\gamma\Phi j'}^{i'}(r_{j'})$ возможны только при *крайних* значениях координат, т.е. при $r_j \in \{0, \epsilon_j\}$ и $r_{j'} \in \{0, \epsilon_{j'}\}$. Пусть функции $\tau_{\gamma\Phi j}^i$ таковы, что выполнено $\tau_{\gamma\Phi j}^i(\epsilon_j) = \tau_{\gamma\Phi j}^{i+1}(\epsilon_j) = \tau$. В этом случае j -тый блок эйконала в (48) примет вид

$$[[U E_\gamma^T U^{-1}](\mathbf{r})]_j = \tau_{\gamma\Phi j}^1(\epsilon_j) P_{\gamma\Phi j}^1 + \cdots + \tau(P_{\gamma\Phi j}^i + P_{\gamma\Phi j}^{i+1}) + \cdots + \tau_{\gamma\Phi j}^{n_{\gamma\Phi j}}(\epsilon_j) P_{\gamma\Phi j}^{n_{\gamma\Phi j}}.$$

Поэтому в состав образующих алгебры $[U \mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1}](\mathbf{r})$ проекторы $P_{\gamma\Phi j}^i$ и $P_{\gamma\Phi j}^{i+1}$ войдут не порознь, а в составе суммы $P_{\gamma\Phi j}^i + P_{\gamma\Phi j}^{i+1}$ и, таким образом, число образующих уменьшится на 1. Как следствие, возможно (и в содержательных случаях происходит) нарушение (52): вместо равенства гарантировано лишь вложение $[U \mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1}](\mathbf{r}) \subset \bigoplus_{j=1}^J \mathfrak{P}_{\Phi j}$.

Аналогичным образом могут связываться проекторы, входящие в разные блоки. Пусть $\tau_{\gamma\Phi j}^i$ таковы, что для каких-то *разных* j и j' выполнено $\tau_{\gamma\Phi j}^i(\epsilon_j) = \tau_{\gamma\Phi j'}^{i'}(\epsilon_{j'}) = \tau$. В этом случае в (48) блоки с номерами j и j' примут вид

$$\begin{aligned} [[U E_\gamma^T U^{-1}](\mathbf{r})]_j &= \tau_{\gamma\Phi j}^1(\epsilon_j) P_{\gamma\Phi j}^1 + \cdots + \tau P_{\gamma\Phi j}^i + \cdots + \tau_{\gamma\Phi j}^{n_{\gamma\Phi j}}(\epsilon_j) P_{\gamma\Phi j}^{n_{\gamma\Phi j}}, \\ [[U E_\gamma^T U^{-1}](\mathbf{r})]_{j'} &= \tau_{\gamma\Phi j'}^1(\epsilon_{j'}) P_{\gamma\Phi j'}^1 + \cdots + \tau P_{\gamma\Phi j'}^{i'} + \cdots + \tau_{\gamma\Phi j'}^{n_{\gamma\Phi j'}}(\epsilon_{j'}) P_{\gamma\Phi j'}^{n_{\gamma\Phi j'}} \end{aligned}$$

и окажутся связанными (через проекторы $P_{\gamma\Phi j}^i$ и $P_{\gamma\Phi j'}^{i'}$), что также может привести к уменьшению числа образующих алгебры $[U \mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1}](\mathbf{r})$.

Приводимость

- Алгебры \mathfrak{P}_{Φ^j} , определяемые наборами проекторов \mathbb{P}_{Φ^j} в (49), вообще говоря, приводимы: по Предложению 3 имеем

$$\mathfrak{P}_{\Phi^j} = \bigoplus_{k=1}^{q_j} \mathfrak{P}_{\Phi^j}^k, \quad \mathfrak{P}_{\Phi^j}^k \cong \mathbb{M}^{\varkappa_{j,k}}, \quad \varkappa_{j,1} + \dots + \varkappa_{j,q_k} \leq m_{\Phi^j}$$

и вложение (50) принимает вид

$$U \mathfrak{E}_{\Sigma}^T U^{-1} \subset \bigoplus_{j=1}^J C([0, \epsilon_j]; \bigoplus_{k=1}^{q_j} \mathfrak{P}_{\Phi^j}^k) = \bigoplus_{j=1}^J \bigoplus_{k=1}^{q_j} C([0, \epsilon_j]; \mathfrak{P}_{\Phi^j}^k) \quad (54)$$

с неприводимыми $\mathfrak{P}_{\Phi^j}^k$. Ниже, в алгебраической Теореме 1, в числе прочих результатов, будет установлено равенство:

$$\mathfrak{P}_{\Phi^j}^k = \vee \mathbb{P}_{\Phi^j}^k, \quad (55)$$

где $\mathbb{P}_{\Phi^j}^k$ суть некоторые поднаборы из \mathbb{P}_{Φ^j} , такие, что

$$\bigcup_{k=1}^{q_j} \mathbb{P}_{\Phi^j}^k = \mathbb{P}_{\Phi^j}; \quad \mathbb{P}_{\Phi^j}^k \cap \mathbb{P}_{\Phi^j}^{k'} = \emptyset \text{ при } k \neq k'. \quad (56)$$

Тем самым, приведение алгебры $U \mathfrak{E}_{\Sigma}^T U^{-1}$ к сумме неприводимых блоков в (54) сведется к адекватной группировке проекторов *внутри каждого из наборов* \mathbb{P}_{Φ^j} . При группировке удобно перейти к новой нумерации.

Первым шагом является переход к сквозной нумерации алгебр, входящих в (54):

$$\mathfrak{P}_{\Phi^1}^1, \dots, \mathfrak{P}_{\Phi^1}^{q_1}; \mathfrak{P}_{\Phi^2}^1, \dots, \mathfrak{P}_{\Phi^2}^{q_2}; \dots; \mathfrak{P}_{\Phi^J}^1, \dots, \mathfrak{P}_{\Phi^J}^{q_J} \Rightarrow \mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_{q_1}; \mathfrak{P}_{q_1+1}, \dots, \mathfrak{P}_{q_1+q_2}; \dots; \mathfrak{P}_{q_1+s+q_{J-1}}, \dots, \mathfrak{P}_L, \quad (57)$$

где $L := q_1 + \dots + q_J$. Аналогично (т.е. формальной заменой \mathfrak{P} на \mathbb{P} в (57)) перейдем от наборов $\mathbb{P}_{\Phi^j}^k$ к наборам \mathbb{P}_l , где $l = 1, \dots, L$. Каждый набор \mathbb{P}_l , в свою очередь, можно разбить на поднаборы, отвечающие отдельным вершинам $\gamma \in \Sigma$:

$$\mathbb{P}_l = \bigcup_{\gamma \in \Sigma} \mathbb{P}_l^\gamma, \quad \mathbb{P}_l^\gamma := \{P_{\gamma, \Phi^j}^i \in \mathbb{P}_l \mid \gamma' = \gamma\} = \{P_{\gamma, \Phi^j}^{i_1}, \dots, P_{\gamma, \Phi^j}^{i_{n_{\gamma^l}}}\},$$

где $n_{\gamma l} := \# \mathbb{P}_l^\gamma$. Наконец, перенумеруем проекторы внутри каждого \mathbb{P}_l^γ :

$$\begin{aligned} P_{\gamma\Phi^j}^{i_1}, \dots, P_{\gamma\Phi^j}^{i_k}, \dots, P_{\gamma\Phi^j}^{i_{n_{\gamma l}}} &\Rightarrow \\ P_{\gamma l}^1, \dots, P_{\gamma l}^k, \dots, P_{\gamma l}^{n_{\gamma l}}, \end{aligned}$$

а с ними - функции $\tau_{\gamma\Phi^j}^i$ и проекторы $\mathcal{P}_{\gamma\Phi^j}^i$:

$$\begin{aligned} \tau_{\gamma\Phi^j}^{i_1}, \dots, \tau_{\gamma\Phi^j}^{i_k}, \dots, \tau_{\gamma\Phi^j}^{i_{n_{\gamma l}}}; \quad \mathcal{P}_{\gamma\Phi^j}^{i_1}, \dots, \mathcal{P}_{\gamma\Phi^j}^{i_k}, \dots, \mathcal{P}_{\gamma\Phi^j}^{i_{n_{\gamma l}}} &\Rightarrow \\ \tau_{\gamma l}^1, \dots, \tau_{\gamma l}^k, \dots, \tau_{\gamma l}^{n_{\gamma l}}; \quad \mathcal{P}_{\gamma l}^1, \dots, \mathcal{P}_{\gamma l}^k, \dots, \mathcal{P}_{\gamma l}^{n_{\gamma l}}. \end{aligned}$$

В новой нумерации вложение (54) запишется в форме

$$U \mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1} \subset \bigoplus_{l=1}^L C([0, \varepsilon_l]; \mathfrak{P}_l), \quad (58)$$

где $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_{q_1} = \varepsilon_1$; $\varepsilon_{q_1+1} = \dots = \varepsilon_{q_1+q_2} = \varepsilon_2$; ..., а представление эйконалов (37) и соотношение (52) примут согласованный с (58) вид

$$U E_\gamma^T U^{-1} = \bigoplus \sum_{l=1}^L \left[\sum_{k=1}^{n_{\gamma l}} \tau_{\gamma l}^k P_{\gamma l}^k \right] = \sum_{l=1}^L \left[\sum_{k=1}^{n_{\gamma l}} \tau_{\gamma l}^k \mathcal{P}_{\gamma l}^k \right] \quad (59)$$

и

$$(U \mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1})(\mathbf{r}) = \bigoplus_{l=1}^L \mathfrak{P}_l,$$

где координаты точки $\mathbf{r} = \{r_1, \dots, r_L\}$ не принимают крайних значений.

Отметим, что именно при смене нумерации становится необходимым использовать индекс γ для функций τ_Φ^i (см. (27)). Это связано с тем, что исходные *равные* функции $\tau_{\gamma\Phi^j}^i = \tau_{\gamma'\Phi^j}^i$ для фиксированного семейства Φ^j могут соответствовать проекторам $P_{\gamma\Phi^j}^i$ и $P_{\gamma'\Phi^j}^i$, которые после смены нумерации оказываются в *разных* блоках \mathfrak{P}_l и $\mathfrak{P}_{l'}$.

• Как показывают Следствие 2 и последующие комментарии, связи между блоками алгебры $U \mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1}$ возможны только на границах интервалов $[0, \varepsilon_j]$. Для детального описания этих связей удобно использовать следующий формализм.

Фиксируем вершину $\gamma \in \Sigma$ и рассмотрим набор (k, l, r_l) , отвечающий значению $\tau_{\gamma l}^k(r_l)$ функции $\tau_{\gamma l}^k$. Скажем, что наборы (k, l, r_l) и $(k', l', r_{l'})$ *связаны* и будем писать $(k, l, r_l) \leftrightarrow (k', l', r_{l'})$, если выполнено $\tau_{\gamma l}^k(r_l) = \tau_{\gamma l'}^{k'}(r_{l'})$. По свойствам (20) и (21), такие равенства возможны только при

крайних значениях параметров $r_l \in \{0, \varepsilon_l\}$ и $r_{l'} \in \{0, \varepsilon_{l'}\}$; в приводимом ниже предложении фигурируют *только такие* значения. Эти же свойства ведут к следующим свойствам связи \leftrightarrow .

Предложение 6. *Для заданного набора (k, l, r_l) выполняется одно и только одно из следующих условий:*

1. *не существует отличного от (k, l, r_l) набора $(k', l', r_{l'})$, такого, что $(k, l, r_l) \leftrightarrow (k', l', r_{l'})$;*
2. *существует единственный набор $(k', l', r_{l'})$, такой, что $(k, l, r_l) \leftrightarrow (k', l', r_{l'})$; при этом $l' = l$, $r_{l'} = r_l$, $k' \neq k$;*
3. *существует единственный набор $(k', l', r_{l'})$, такой, что $(k, l, r_l) \leftrightarrow (k', l', r_{l'})$; при этом $l' \neq l$.*

Условимся разделять наборы (k, l, r_l) на соответствующие типы **1**, **2** и **3**.

Лемма 3. *Пусть $\mathbf{r} = \{r_1, \dots, r_l, \dots, r_{\mathcal{L}}\}$, $r_l \in \{0, \varepsilon_l\}$.*

1. *Если $(k, l, r_l) \in \mathbf{1}$, то для любого $\tilde{\mathbf{r}}$ с координатой $\tilde{r}_l \neq r_l$, существует элемент $e \in U \mathfrak{E}_{\Sigma}^T U^{-1}$ такой, что выполнено*

$$e(\mathbf{r}) = \mathcal{P}_{\gamma l}^k, \quad e(\tilde{\mathbf{r}}) = O.$$

2. *Если $(k, l, r_l) \in \mathbf{2}$ и $(k, l, r_l) \leftrightarrow (k', l, r_l)$, то для любого $\tilde{\mathbf{r}}$ с $\tilde{r}_l \neq r_l$, существует элемент $e \in U \mathfrak{E}_{\Sigma}^T U^{-1}$, такой, что выполнено*

$$e(\mathbf{r}) = \mathcal{P}_{\gamma l}^k + \mathcal{P}_{\gamma l'}^{k'}, \quad e(\tilde{\mathbf{r}}) = O.$$

3. *Если $(k, l, r_l) \in \mathbf{3}$ и $(k, l, r_l) \leftrightarrow (k', l', r_{l'})$, то для $\mathbf{r} = \{r_1, \dots, r_l, \dots, r_{l'}, \dots, r_{\mathcal{L}}\}$ и любого $\tilde{\mathbf{r}}$ с координатами $\tilde{r}_j \neq r_j$, $\tilde{r}_{j'} \neq r_{j'}$ существует элемент $e \in U \mathfrak{E}_{\Sigma}^T U^{-1}$, такой, что выполнено*

$$e(\mathbf{r}) = \mathcal{P}_{\gamma l}^k + \mathcal{P}_{\gamma l'}^{k'}, \quad e(\tilde{\mathbf{r}}) = O.$$

Доказательство мы опускаем - оно вполне аналогично доказательству Леммы 2: как и последнее, оно сводится к выбору подходящего полинома q . Причина "склейки" проекторов в суммы та же, что и в рассмотренных ниже Следствия 2 примерах.

Как отмечалось, отличие алгебры $U \mathfrak{E}_{\Sigma}^T U^{-1}$ от $\bigoplus_{l=1}^L C([0, \varepsilon_l]; \mathfrak{P}_l)$ состоит в возможных связях между блоками матричной алгебры $(U \mathfrak{E}_{\Sigma}^T U^{-1})(\mathbf{r})$,

которые могут появиться, когда координаты r_l принимают крайние значения. Для изучения связей будет использована *граничная алгебра*

$$\partial(U\mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1}) := \left\{ e(\mathbf{0}) \oplus e(\boldsymbol{\varepsilon}) \mid e \in U\mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1} \right\} \subset \left[\bigoplus_{l=1}^L \mathfrak{P}_l \right] \oplus \left[\bigoplus_{l=1}^L \mathfrak{P}_l \right] \quad (60)$$

где $\mathbf{0} = \{0, \dots, 0\}$ и $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_L\}$. Их описанию мы предположим результаты общего характера, касающиеся структуры матричных алгебр типа $\bigoplus_{l=1}^L \mathfrak{P}_l$.

Алгебры, образованные одномерными проекторами

• Пусть в гильбертовом пространстве \mathcal{G} со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ задан набор одномерных проекторов $P^1, \dots, P^n : P^i = \langle \cdot, \beta^i \rangle \beta^i$, где $\|\beta^i\| = 1$; обозначим

$$\mathcal{A} := \text{span} \{ \beta^1, \dots, \beta^n \}; \quad \mathfrak{P} := \vee \{ P^1, \dots, P^n \} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{G}).$$

На наборе $B := \{ \beta^1, \dots, \beta^n \}$ введем отношение: $\beta^i \sim_0 \beta^{i'}$ если $\langle \beta^i, \beta^{i'} \rangle \neq 0$. Оно определяет эквивалентность: $\beta^i \sim \beta^{i'}$ если найдутся векторы $\beta^{i_1}, \dots, \beta^{i_k}$ такие, что $\beta^i \sim_0 \beta^{i_1} \sim_0 \dots \sim_0 \beta^{i_k} \sim_0 \beta^{i'}$. Перенесем эту эквивалентность на проекторы, приняв $P^i \sim P^{i'}$ если $\beta^i \sim \beta^{i'}$.

Пусть $B = B_1 \cup \dots \cup B_q$ есть разбиение на классы эквивалентности; обозначим $\mathcal{A}_k := \text{span } B_k$. Из определения отношения \sim легко следует: $\mathcal{A}_k \perp \mathcal{A}_l$ при $k \neq l$. Как следствие, имеем разложение $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{A}_q$, которое, очевидно, приводит все проекторы P^i .

Предложение 7. Алгебра \mathfrak{P} приводится подпространствами L_k , причем справедливо разложение

$$\mathfrak{P} = \bigoplus_{k=1}^q \mathfrak{P}|_{\mathcal{A}_k}, \quad (61)$$

где $\mathfrak{P}|_{\mathcal{A}_k} \cong \mathbb{M}^{\varkappa_k}$, $\varkappa_k = \dim \mathcal{A}_k$.

Приводимость очевидна; равенство для размерности следует из того, что любой $\beta^i \in \mathcal{A}_k$ является циклическим в \mathcal{A}_k для части $\mathfrak{P}|_{\mathcal{A}_k}$. Для приведения \mathfrak{P} к виду (61) можно воспользоваться процедурой (12), (13).

- Следующие рассуждения моделируют ситуацию, которая встретится при изучении алгебры эйконалов. Именно, в абстрактной форме обсуждаются возможные связи между ее блоками в представлении (48).

Пусть имеются три гильбертовых пространства \mathcal{G}_k , $k = 1, 2, 3$, в каждом из которых задан набор одномерных проекторов $P_k^1, \dots, P_k^{n_k} : P_k^i = \langle \cdot, \beta_k^i \rangle \beta_k^i$, $\|\beta_k^i\| = 1$, где β_k^i суть векторы из наборов

$$B_k := \{\beta_k^i \mid i = 1, \dots, n_k\} \subset \mathcal{G}_k.$$

Проекторы порождают алгебры:

$$\mathfrak{P}_1 = \vee\{P_1^1, \dots, P_1^{n_1}\}, \quad \mathfrak{P}_2 = \vee\{P_2^1, \dots, P_2^{n_2}\}, \quad \mathfrak{P}_3 = \vee\{P_3^1, \dots, P_3^{n_3}\}.$$

Составим алгебру

$$\mathfrak{P} := \mathfrak{P}_1 \oplus \mathfrak{P}_2 \oplus \mathfrak{P}_3 \subset \mathfrak{B}(\mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2 \oplus \mathcal{G}_3) \quad (62)$$

(подалгебру алгебры ограниченных операторов, действующих в пространстве $\mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2 \oplus \mathcal{G}_3$) с образующими

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1^i &:= P_1^i \oplus O_2 \oplus O_3, \quad i = 1, \dots, n_1; & \mathcal{P}_2^i &:= O_1 \oplus P_2^i \oplus O_3, \quad i = 1, \dots, n_2; \\ \mathcal{P}_3^i &:= O_1 \oplus O_2 \oplus P_3^i, \quad i = 1, \dots, n_3; \end{aligned} \quad (63)$$

где O_k - нулевой оператор, действующий в k -й компоненте пространства $\mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2 \oplus \mathcal{G}_3$. Об алгебрах \mathfrak{P}_k в (62) будем говорить как о *блоках* алгебры \mathfrak{P} . Заметим, что в текущих рассуждениях, грубо говоря, алгебры \mathfrak{P}_1 и \mathfrak{P}_2 отвечают какой-то паре выделенных блоков в (48), а \mathfrak{P}_3 - "все остальное".

Скажем, что алгебра $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{P}$ *разделяет* (не связывает) блоки \mathfrak{P}_1 и \mathfrak{P}_2 в (62), если вместе с *любым* элементом $q_1 \oplus q_2 \oplus q_3 \in \mathfrak{Q}$ в ней содержатся элементы $q_1 \oplus O_2 \oplus q'_3$ и $O_1 \oplus q_2 \oplus q''_3$, где q'_3, q''_3 - некоторые элементы \mathfrak{P}_3 . В противном случае будем говорить, что она эти блоки *связывает*. Аналогично определяется связь (или ее отсутствие) для любой пары блоков в (62).

Отметим очевидный факт: если алгебра \mathfrak{Q} допускает систему образующих, каждая из которых имеет вид либо $q_1 \oplus O_2 \oplus q'_3$, либо $O_1 \oplus q_2 \oplus q''_3$, то она разделяет блоки \mathfrak{P}_1 и \mathfrak{P}_2 .

- Пусть

$$\mathbb{P} := \{\mathcal{P}_k^i \mid i = 1, \dots, n_k; \quad k = 1, 2, 3\} \quad (64)$$

есть полный набор образующих алгебры \mathfrak{P} . Зададим на нем отображение (инволюцию) $\mathcal{T} : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$, такое, что если $\mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) = \mathcal{P}_{k'}^{i'}$, то $\mathcal{T}(\mathcal{P}_{k'}^{i'}) = \mathcal{P}_k^i$, а также выполнено одно (и только одно) из условий:

$$\mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) = \mathcal{P}_k^i \quad \text{или} \quad \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) \mathcal{P}_k^i = \mathcal{P}_k^i \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) = 0.$$

Это отображение определяет разбиение множества \mathbb{P} на пары $\{\mathcal{P}, \mathcal{T}(\mathcal{P})\}$, причем компоненты в каждой из пар либо совпадают, либо ортогональны друг другу. Легко видеть, что такие \mathcal{T} найдутся, причем во множественном числе. Однако, в алгебре эйконалов отображение \mathcal{T} окажется вполне конкретным и будет определяться значениями функций $\tau_{\gamma l}^k(r)$ при $r = 0$ и $r = \varepsilon$.

По данному отображению определим проекторы \mathcal{Q}_k^i :

$$\mathcal{Q}_k^i := \begin{cases} \mathcal{P}_k^i, & \text{если } \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) = \mathcal{P}_k^i \\ \mathcal{P}_k^i + \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i), & \text{если } \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) \mathcal{P}_k^i = 0 \end{cases},$$

среди которых могут быть совпадающие. Если \mathcal{T} не тождественно, то за счет совпадений их общее число, очевидно, будет меньше $n_1 + n_2 + n_3$. Образует алгебру

$$\mathfrak{Q} := \vee \{ \mathcal{Q}_k^i \mid i = 1, \dots, n_k; \ k = 1, 2, 3 \} \subset \mathfrak{P}. \quad (65)$$

Она определяется отображением \mathcal{T} . В то же время, разным допустимым \mathcal{T} и \mathcal{T}' может отвечать одна и та же алгебра \mathfrak{Q} . Этот факт используется ниже в доказательстве Теоремы 1.

Далее обсуждается вопрос о том, при каких условиях введенная таким образом алгебра \mathfrak{Q} разделяет или связывает блоки \mathfrak{P}_1 и \mathfrak{P}_2 .

• Разобьем определенный в (64) набор проекторов \mathbb{P} на части $\mathbb{P}_k := \{ \mathcal{P}_k^i \mid i = 1, \dots, n_k \}$, $k = 1, 2, 3$. Каждой части сопоставим матрицы

$$G(\mathbb{P}_k) := \left\{ \|\mathcal{P}_k^i \mathcal{P}_k^j\| \right\}_{i,j=1}^{n_k} = \begin{pmatrix} \|\mathcal{P}_k^1 \mathcal{P}_k^1\| & \cdots & \|\mathcal{P}_k^1 \mathcal{P}_k^{n_k}\| \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \|\mathcal{P}_k^{n_k} \mathcal{P}_k^1\| & \cdots & \|\mathcal{P}_k^{n_k} \mathcal{P}_k^{n_k}\| \end{pmatrix}$$

и $G(\mathcal{T}(\mathbb{P}_k)) = \left\{ \|\mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^j)\| \right\}_{i,j=1}^{n_k}$. Пусть

$$B := \{ \beta_k^i \mid i = 1, \dots, n_k; \ k = 1, 2, 3 \} = B_1 \cup B_2 \cup B_3; \quad B_k = \{ \beta_k^i \mid i = 1, \dots, n_k \}.$$

В силу очевидных равенств $\|\mathcal{P}_k^i \mathcal{P}_k^j\| = |\langle \beta_k^i, \beta_k^j \rangle|^2$, имеем:

$$G(\mathbb{P}_k) = \begin{pmatrix} |\langle \beta_k^1, \beta_k^1 \rangle|^2 & \cdots & |\langle \beta_k^1, \beta_k^{n_k} \rangle|^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ |\langle \beta_k^{n_k}, \beta_k^1 \rangle|^2 & \cdots & |\langle \beta_k^{n_k}, \beta_k^{n_k} \rangle|^2 \end{pmatrix}.$$

Следующий критерий связи блоков используется ниже в алгебре эйкonalов.

Теорема 1. Пусть блоки \mathfrak{P}_1 и \mathfrak{P}_2 алгебры (62) таковы, что каждый из отвечающих им наборов B_1 и B_2 является классом эквивалентности по отношению \sim . Тогда алгебра \mathfrak{Q} связывает \mathfrak{P}_1 и \mathfrak{P}_2 в том и только в том случае, если

$$\mathcal{T}(\mathbb{P}_1) = \mathbb{P}_2 \quad \text{и} \quad G(\mathbb{P}_1) = G(\mathcal{T}(\mathbb{P}_1)).$$

При выполнении этих условий справедливы соотношения

$$\dim \text{span } B_1 = \dim \text{span } B_2 =: l; \quad \mathfrak{P}_1 \cong \mathfrak{P}_2 \cong \mathbb{M}^l,$$

а для алгебры \mathfrak{Q} справедливо представление:

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_{12} \oplus \mathfrak{Q}_3,$$

где

$$\mathfrak{Q}_{12} = \vee \{ \mathcal{P} \oplus \mathcal{T}(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \mathbb{P}_1 \} \subset \mathfrak{P}_1 \oplus \mathfrak{P}_2, \quad \mathfrak{Q}_3 \subseteq \mathfrak{P}_3.$$

При этом алгебра \mathfrak{Q} разделяет \mathfrak{Q}_{12} и \mathfrak{Q}_3 .

Доказательство. 1. Для $k, k' = 1, 2, 3$, $k' \neq k$ положим

$$\mathbb{Q}_{kk'} := \{ \mathcal{Q}_k^i = \mathcal{P}_k^i + \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) \mid \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) \in \mathbb{P}_{k'} \}$$

и отметим следующее из инволютивности \mathcal{T} равенство:

$$\mathbb{Q}_{k'k} = \{ \mathcal{Q}_{k'}^{i'} = \mathcal{P}_{k'}^{i'} + \mathcal{T}(\mathcal{P}_{k'}^{i'}) \mid \mathcal{T}(\mathcal{P}_{k'}^{i'}) \in \mathbb{P}_k \} = \mathbb{Q}_{kk'}.$$

При $k = k' = 1, 2, 3$ примем

$$\mathbb{Q}_{kk} := \left\{ \mathcal{Q}_k^i = \begin{cases} \mathcal{P}_k^i + \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i), & \text{если } \mathcal{P}_k^i \neq \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) \in \mathbb{P}_k \\ \mathcal{P}_k^i, & \text{если } \mathcal{P}_k^i = \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) \end{cases} \mid i = 1, \dots, n_k \right\}.$$

Таким образом, все $\mathbb{Q}_{kk'}$ состоят из одномерных и двумерных проекторов, а алгебра \mathfrak{Q} представляется в виде:

$$\mathfrak{Q} = \vee [\mathbb{Q}_{11} \cup \mathbb{Q}_{22} \cup \mathbb{Q}_{33} \cup \mathbb{Q}_{12} \cup \mathbb{Q}_{13} \cup \mathbb{Q}_{23}] \quad (66)$$

Из вида проекторов (63) легко усмотреть, что связывать блоки \mathfrak{P}_1 и \mathfrak{P}_2 алгебра \mathfrak{Q} может только при условии $\mathbb{Q}_{12} \neq \emptyset$; в противном случае она их разделяет.

2. Предположим, что алгебра \mathfrak{Q} допускает представление:

$$\mathfrak{Q} = \vee [\mathbb{Q}'_{11} \cup \mathbb{Q}'_{22} \cup \mathbb{Q}_{33} \cup \mathbb{Q}_{13} \cup \mathbb{Q}_{23}], \quad (67)$$

где

$$\mathbb{Q}'_{11} := \mathbb{Q}_{11} \cup \{\mathcal{P}_1^i \mid \mathcal{P}_1^i + \mathcal{T}(\mathcal{P}_1^i) \in \mathbb{Q}_{12}\}, \quad \mathbb{Q}'_{22} := \mathbb{Q}_{22} \cup \{\mathcal{P}_2^i \mid \mathcal{P}_2^i + \mathcal{T}(\mathcal{P}_2^i) \in \mathbb{Q}_{12}\}.$$

Тогда она разделяет блоки \mathfrak{P}_1 и \mathfrak{P}_2 . В самом деле, в этом случае в алгебру \mathfrak{Q} , вместе с элементами $\mathcal{Q}_1^i = \mathcal{P}_1^i + \mathcal{T}(\mathcal{P}_1^i)$ и $\mathcal{Q}_2^i = \mathcal{P}_2^i + \mathcal{T}(\mathcal{P}_2^i)$, *порознь* войдут все проекторы $\mathcal{P}_1^i = P_1^i \oplus O_2 \oplus O_3$ и $\mathcal{P}_2^i = O_1 \oplus P_2^i \oplus O_3$. Вводя их в число образующих алгебры \mathfrak{Q} вместо элементов из \mathbb{Q}_{12} , легко убедиться в том, что разделение имеет место.

Здесь поясним следующее. Определение отображения \mathcal{T} исключает одновременное присутствие элементов $\mathcal{Q}_k^i = \mathcal{P}_k^i + \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i)$ и \mathcal{P}_k^i в списке образующих $\{\mathcal{Q}_k^i \mid i = 1, \dots, n_k; k = 1, 2, 3\}$ алгебры \mathfrak{Q} : см. (65). Тем не менее, содержаться в *самой* алгебре они вполне могут. Это соответствует возможности заменить \mathcal{T} на другое отображение $\mathcal{T}' : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ так, чтобы отвечающая ему алгебра \mathfrak{Q}' совпала с исходной \mathfrak{Q} .

3. Покажем, что если

$$\mathbb{Q}_{11} \cup \mathbb{Q}_{13} \cup \mathbb{Q}_{22} \cup \mathbb{Q}_{23} \neq \emptyset,$$

то для алгебры \mathfrak{Q} справедливо представление (67) и, следовательно, она разделяет блоки \mathfrak{P}_1 и \mathfrak{P}_2 . Последующие рассуждения, в силу равнозначности \mathfrak{P}_1 и \mathfrak{P}_2 , вполне аналогичны для частей $\mathbb{Q}_{11} \cup \mathbb{Q}_{13}$ и $\mathbb{Q}_{22} \cup \mathbb{Q}_{23}$. Проведем их для случая $\mathbb{Q}_{11} \cup \mathbb{Q}_{13} \neq \emptyset$. При этом имеем $\mathbb{Q}_{12} \neq \emptyset$, ибо в противном случае блоки \mathfrak{P}_1 и \mathfrak{P}_2 заведомо разделены.

Каждый элемент $\mathcal{Q}_1^i \in \mathbb{Q}_{11} \cup \mathbb{Q}_{12} \cup \mathbb{Q}_{13}$ имеет вид:

$$\mathcal{Q}_1^i := \begin{cases} \mathcal{P}_1^i + \mathcal{T}(\mathcal{P}_1^i), & \text{если } \mathcal{T}(\mathcal{P}_1^i) \neq \mathcal{P}_1^i \\ \mathcal{P}_1^i, & \text{если } \mathcal{T}(\mathcal{P}_1^i) = \mathcal{P}_1^i \end{cases}. \quad (68)$$

Каждому вектору β_1^i из набора B_1 отвечает проектор $\mathcal{P}_1^i = P_1^i \oplus O_2 \oplus O_3 = \langle \cdot, \beta_1^i \rangle \beta_1^i \oplus O_2 \oplus O_3$, который, в свою очередь, определяет соответствующий проектор \mathcal{Q}_1^i вида (68). Это позволяет определить отображение $\mathbf{b} : B_1 \rightarrow \mathbb{Q}_{11} \cup \mathbb{Q}_{12} \cup \mathbb{Q}_{13}$ по правилу

$$\mathbf{b}(\beta_1^i) := \mathcal{Q}_1^i$$

Заметим, что если $\mathcal{Q}_1^i = \mathcal{P}_1^i + \mathcal{T}(\mathcal{P}_1^i) = \mathcal{P}_1^i + \mathcal{P}_1^{i'} \in \mathbb{Q}_{11}$, то имеются два вектора $\beta_1^i, \beta_1^{i'}$ таких, что $\mathbf{b}(\beta_1^i) = \mathbf{b}(\beta_1^{i'}) = \mathcal{Q}_1^i = \mathcal{Q}_1^{i'}$. Далее под $\mathbf{b}^{-1}(\cdot)$ понимается полный прообраз.

По условиям Леммы, B_1 есть класс эквивалентности по отношению \sim . Из условия $\mathbb{Q}_{11} \cup \mathbb{Q}_{13} \neq \emptyset$ следует, что найдется пара векторов $\beta_1^i \in \mathbf{b}^{-1}(\mathbb{Q}_{12})$ и $\beta_1^{i'} \in \mathbf{b}^{-1}(\mathbb{Q}_{11} \cup \mathbb{Q}_{13})$ таких, что $\langle \beta_1^i, \beta_1^{i'} \rangle \neq 0$. В самом деле, отсутствие такой пары означало бы, что

$$\text{span } B_1 = \text{span } \mathbf{b}^{-1}(\mathbb{Q}_{12}) \oplus \text{span } \mathbf{b}^{-1}(\mathbb{Q}_{11} \cup \mathbb{Q}_{13})$$

что невозможно по определению эквивалентности \sim^* .

Выбранная пара векторов определяет проекторы $\mathcal{Q}_1^i = \mathcal{P}_1^i + \mathcal{T}(\mathcal{P}_1^i) = \mathbf{b}(\beta_1^i) \in \mathbb{Q}_{12}$ и $\mathcal{Q}_1^{i'} = \mathbf{b}(\beta_1^{i'}) \in \mathbb{Q}_{11} \cup \mathbb{Q}_{13}$, а с ними и элемент

$$\tilde{\mathcal{Q}}_1^i := \mathcal{Q}_1^i \mathcal{Q}_1^{i'} \mathcal{Q}_1^i \in \mathfrak{Q}.$$

В соответствии с (62), имеем представления

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1^i &= (\mathcal{Q}_1^i)_1 \oplus (\mathcal{Q}_1^i)_2 \oplus (\mathcal{Q}_1^i)_3, & \mathcal{Q}_1^{i'} &= (\mathcal{Q}_1^{i'})_1 \oplus (\mathcal{Q}_1^{i'})_2 \oplus (\mathcal{Q}_1^{i'})_3, \\ \tilde{\mathcal{Q}}_1^i &= (\tilde{\mathcal{Q}}_1^i)_1 \oplus (\tilde{\mathcal{Q}}_1^i)_2 \oplus (\tilde{\mathcal{Q}}_1^i)_3, \end{aligned}$$

где $(\mathcal{Q}_1^i)_k, (\mathcal{Q}_1^{i'})_k, (\tilde{\mathcal{Q}}_1^i)_k \in \mathfrak{P}_k$, $k = 1, 2, 3$; при этом выполнено

$$(\tilde{\mathcal{Q}}_1^i)_k = (\mathcal{Q}_1^i)_k (\mathcal{Q}_1^{i'})_k (\mathcal{Q}_1^i)_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

По выбору вектора β_1^i имеем $\mathcal{Q}_1^i = \mathbf{b}(\beta_1^i) \in \mathbb{Q}_{12}$. Поэтому $(\mathcal{Q}_1^i)_3 = O_3$, а, значит, и $(\tilde{\mathcal{Q}}_1^i)_3 = O_3$. Аналогично, из того, что $\mathcal{Q}_1^{i'} \in \mathbb{Q}_{11} \cup \mathbb{Q}_{13}$ следует, что $(\mathcal{Q}_1^{i'})_2 = O_2$, а значит и $(\tilde{\mathcal{Q}}_1^i)_2 = O_2$. Таким образом, ненулевой может быть только компонента $(\tilde{\mathcal{Q}}_1^i)_1$. В этой ситуации имеются две возможности.

1) Пусть $\mathcal{Q}_1^{i'} \in \mathbb{Q}_{13}$. Тогда $(\mathcal{Q}_1^{i'})_1 = P_1^{i'}$ и $(\mathcal{Q}_1^i)_1 = P_1^i$, а $(\tilde{\mathcal{Q}}_1^i)_1$ имеет вид:

$$(\tilde{\mathcal{Q}}_1^i)_1 = P_1^i P_1^{i'} P_1^i = \langle \beta_1^i, \beta_1^{i'} \rangle^2 P_1^i. \quad (69)$$

2) Пусть теперь $\mathcal{Q}_1^{i'} \in \mathbb{Q}_{11}$. Если $\mathcal{Q}_1^{i'} = \mathcal{P}_1^{i'}$, то рассмотрения, вполне аналогичные приведенным выше, ведут к тому же равенству (69). Рассмотрим случай, когда $\mathcal{Q}_1^{i'} = \mathcal{P}_1^{i'} + \mathcal{T}(\mathcal{P}_1^{i'})$, причем $\mathcal{T}(\mathcal{P}_1^{i'}) = \mathcal{P}_1^j \in \mathbb{P}_1$ и $\mathcal{P}_1^j \mathcal{P}_1^{i'} = O_1$. Проектору \mathcal{P}_1^j соответствует вектор $\beta_1^j \in B_1$. Тогда $(\tilde{\mathcal{Q}}_1^i)_1$ имеет вид:

$$(\tilde{\mathcal{Q}}_1^i)_1 = P_1^i (P_1^{i'} + P_1^j) P_1^i = \left[\langle \beta_1^i, \beta_1^{i'} \rangle^2 + \langle \beta_1^i, \beta_1^j \rangle^2 \right] P_1^i. \quad (70)$$

Сопоставляя (69) с (70), приходим к соотношению

$$\tilde{\mathcal{Q}}_1^i = c\mathcal{P}_1^i, \quad c \geq \langle \beta_1^i, \beta_1^{i'} \rangle^2 > 0.$$

Это означает, что в алгебру \mathfrak{Q} по-отдельности входят проекторы $\mathcal{P}_1^i \in \mathbb{P}_1$ и $\mathcal{T}(\mathcal{P}_1^i) \in \mathbb{P}_2$. Об этом результате скажем, что проектор $\mathcal{Q}_1^i = \mathcal{P}_1^i + \mathcal{T}(\mathcal{P}_1^i)$ распался на независимые (в алгебре \mathfrak{Q}) одномерные части \mathcal{P}_1^i и $\mathcal{T}(\mathcal{P}_1^i)$.

Далее рассмотрим отображение $\mathcal{T}' : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$, отличающееся от \mathcal{T} значениями только на двух проекторах \mathcal{P}_1^i и $\mathcal{T}(\mathcal{P}_1^i)$ и положим

$$\mathcal{T}'(\mathcal{P}_1^i) := \mathcal{P}_1^i, \quad \mathcal{T}'(\mathcal{T}(\mathcal{P}_1^i)) := \mathcal{T}(\mathcal{P}_1^i).$$

При этом алгебры \mathfrak{Q} и \mathfrak{Q}' , определенные отображениями \mathcal{T} и \mathcal{T}' , очевидно совпадают, а для \mathfrak{Q}' справедливо свое представление вида (66):

$$\mathfrak{Q}' = \vee [\mathcal{Q}'_{11} \cup \mathcal{Q}'_{22} \cup \mathcal{Q}'_{33} \cup \mathcal{Q}'_{12} \cup \mathcal{Q}'_{13} \cup \mathcal{Q}'_{23}] = \mathfrak{Q},$$

причем его связь с (66) такова:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}'_{11} &= \mathcal{Q}_{11} \cup \{\mathcal{P}_1^i\}, & \mathcal{Q}'_{22} &= \mathcal{Q}_{22} \cup \{\mathcal{T}(\mathcal{P}_1^i)\}, & \mathcal{Q}'_{12} &= \mathcal{Q}_{12} \setminus \{\mathcal{Q}_1^i\}, \\ \mathcal{Q}'_{13} &= \mathcal{Q}_{13}, & \mathcal{Q}'_{23} &= \mathcal{Q}_{23}, & \mathcal{Q}'_{33} &= \mathcal{Q}_{33}. \end{aligned}$$

Таким образом, распад \mathcal{Q}_1^i привел к тому, что часть \mathcal{Q}_{12} , отвечающая за связь блоков \mathfrak{P}_1 и \mathfrak{P}_2 , уменьшилась на один проектор.

Повторяя рассмотрения для части $\mathcal{Q}'_{12} \subset \mathcal{Q}_{12}$, убедимся, что и из нее можно изъять очередной проектор, *не меняя при этом алгебры \mathfrak{Q}* . Продолжение процедуры за конечное число шагов приведет к распаду всех проекторов, содержавшихся в \mathcal{Q}_{12} и, как следствие, к представлению (67).

Итак, показано, что условие $\mathcal{Q}_{11} \cup \mathcal{Q}_{13} \cup \mathcal{Q}_{22} \cup \mathcal{Q}_{23} = \emptyset$ необходимо для того, чтобы алгебра связывала блоки \mathfrak{P}_1 и \mathfrak{P}_2 . Заметим, что условие $\mathcal{Q}_{11} \cup \mathcal{Q}_{13} = \emptyset$ эквивалентно тому, что $\mathcal{T}(\mathbb{P}_1) \subset \mathbb{P}_2$, а условие $\mathcal{Q}_{22} \cup \mathcal{Q}_{23} = \emptyset$ - тому, что $\mathcal{T}(\mathbb{P}_2) \subset \mathbb{P}_1$. Поскольку отображение \mathcal{T} инволютивно, отсюда получаем, что $\mathcal{Q}_{11} \cup \mathcal{Q}_{13} \cup \mathcal{Q}_{22} \cup \mathcal{Q}_{23} = \emptyset$ выполняется тогда и только тогда, когда $\mathcal{T}(\mathbb{P}_1) = \mathbb{P}_2$.

4. С этого момента будем считать, что условие $\mathcal{T}(\mathbb{P}_1) = \mathbb{P}_2$ выполнено, а, значит, для алгебры \mathfrak{Q} , связывающей блоки \mathfrak{P}_1 и \mathfrak{P}_2 , справедливо представление:

$$\mathfrak{Q} = \vee [\mathcal{Q}_{12} \cup \mathcal{Q}_{33}].$$

Отсюда видно, что $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_{12} \oplus \mathfrak{Q}_3$, где $\mathfrak{Q}_{12} := \vee \mathcal{Q}_{12}$, $\mathfrak{Q}_3 := \vee \mathcal{Q}_{33}$, причем алгебра \mathfrak{Q} разделяет блоки \mathfrak{Q}_{12} и \mathfrak{Q}_3 .

Далее мы уточним структуру алгебры \mathfrak{Q}_{12} . С этой целью удобно использовать матричную запись:

$$\mathfrak{Q}_{12} = \vee \left\{ \mathcal{Q}^i := \begin{pmatrix} P_1^i & \\ & P_2^{i'} \end{pmatrix} \middle| \mathcal{T}(\mathcal{P}_1^i) = \mathcal{P}_2^{i'}; \quad i = 1, \dots, n_1 \right\}$$

(нулевые элементы опущены) и представление

$$\mathcal{Q}^i = \begin{pmatrix} \langle \cdot, \beta_1^i \rangle \beta_1^i & \\ & \langle \cdot, \beta_2^{i'} \rangle \beta_2^{i'} \end{pmatrix}$$

через векторы β_k^i , отвечающие проекторам P_1^i и $P_2^{i'}$. Теперь предположим, что $G(\mathbb{P}_1) \neq G(\mathcal{T}(\mathbb{P}_1))$. Отметим, что это возможно только если в каждом из наборов B_1 и B_2 больше одного элемента. В этом предположении, в алгебре \mathfrak{Q}_{12} найдутся такие \mathcal{Q}^i и \mathcal{Q}^j , что $|\langle \beta_1^i, \beta_1^j \rangle| \neq |\langle \beta_2^{i'}, \beta_2^{j'} \rangle|$. Для произведения $\mathcal{Q}^i \mathcal{Q}^j \mathcal{Q}^i \in \mathfrak{Q}_{12}$ легко получаем представление:

$$\mathcal{Q}^i \mathcal{Q}^j \mathcal{Q}^i = \begin{pmatrix} \langle \beta_1^i, \beta_1^j \rangle^2 \langle \cdot, \beta_1^i \rangle \beta_1^i & \\ & \langle \beta_2^{i'}, \beta_2^{j'} \rangle^2 \langle \cdot, \beta_2^{i'} \rangle \beta_2^{i'} \end{pmatrix}$$

и приходим к соотношениям:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^i &= \begin{pmatrix} P_1^i & \\ & O_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O_1 & \\ & P_2^{i'} \end{pmatrix}; \\ \mathcal{Q}^i \mathcal{Q}^j \mathcal{Q}^i &= \langle \beta_1^i, \beta_1^j \rangle^2 \begin{pmatrix} P_1^i & \\ & O_2 \end{pmatrix} + \langle \beta_2^{i'}, \beta_2^{j'} \rangle^2 \begin{pmatrix} O_1 & \\ & P_2^{i'} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Из них, с учетом неравенства $|\langle \beta_1^i, \beta_1^j \rangle| \neq |\langle \beta_2^{i'}, \beta_2^{j'} \rangle|$, заключаем, что в алгебра \mathfrak{Q}_{12} содержит каждый из проекторов

$$\begin{pmatrix} P_1^i & \\ & O_2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} O_1 & \\ & P_2^{i'} \end{pmatrix}$$

по-отдельности. Из этого следует, что алгебра \mathfrak{Q} разделяет блоки \mathfrak{P}_1 и \mathfrak{P}_2 и справедливо представление

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1 \oplus \mathfrak{P}_2 \oplus \mathfrak{Q}_3.$$

5. Таким образом, условие $G(\mathbb{P}_1) = G(\mathcal{T}(\mathbb{P}_1))$ также необходимо для того, чтобы алгебра \mathfrak{Q} связывала блоки \mathfrak{P}_1 и \mathfrak{P}_2 . При его выполнении справедливо представление:

$$\mathfrak{Q}_{12} = \vee \left\{ \begin{pmatrix} \mathcal{P} & \\ & \mathcal{T}(\mathcal{P}) \end{pmatrix} \middle| \mathcal{P} \in \mathbb{P}_1 \right\} = \vee \{ \mathcal{P} \oplus \mathcal{T}(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \mathbb{P}_1 \},$$

что и требовалось доказать. \square

Укажем на важное обстоятельство. Если условия Теоремы 1 выполнены, то наличие связи между блоками \mathfrak{P}_1 и \mathfrak{P}_2 исключает связь какого-либо из этих блоков с блоком \mathfrak{P}_3 . Это следует из факта о разделении блоков \mathfrak{Q}_{12} и \mathfrak{Q}_3 , отмеченного курсивом в начале п.4 доказательства.

• Рассмотрим более общую ситуацию. Пусть имеется N гильбертовых пространств \mathcal{G}_k , $k = 1, \dots, N$. В каждом \mathcal{G}_k задан свой набор одномерных проекторов

$$\mathbb{P}_k := \{P_k^1, \dots, P_k^{n_k}\}, \quad P_k^i = \langle \cdot, \beta_k^i \rangle \beta_k^i, \quad \|\beta_k^i\| = 1,$$

определяемый набором векторов $B_k := \{\beta_k^i \mid i = 1, \dots, n_k\} \subset \mathcal{G}_k$, причем каждый B_k является классом эквивалентности по отношению \sim . Проекторы порождают алгебры:

$$\mathfrak{P}_k := \vee \mathbb{P}_k = \vee \{P_k^1, \dots, P_k^{n_k}\} \cong \mathbb{M}^{l_k},$$

где $l_k := \dim \text{span } B_k$. Составим алгебру

$$\mathfrak{P} := \bigoplus_{k=1}^N \mathfrak{P}_k \quad (71)$$

с образующими

$$\mathcal{P}_k^i := O_1 \oplus \dots \oplus O_{k-1} \oplus P_k^i \oplus O_{k+1} \oplus \dots \oplus O_N,$$

где O_k - нулевой оператор, действующий в k -й компоненте пространства $\bigoplus_{k=1}^N \mathcal{G}_k$. О слагаемых \mathfrak{P}_k в (71) будем говорить как о *блоках* алгебры \mathfrak{P}_* .

На полном наборе образующих

$$\mathbb{P} := \mathbb{P}_1 \cup \dots \cup \mathbb{P}_N = \{\mathcal{P}_k^i \mid i = 1, \dots, n_k; k = 1, \dots, N\}$$

алгебры \mathfrak{P} зададим отображение $\mathcal{T} : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ такое, что если $\mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) = \mathcal{P}_{k'}^{i'}$, то $\mathcal{T}(\mathcal{P}_{k'}^{i'}) = \mathcal{P}_k^i$, а также выполнено одно (и только одно) из условий:

$$\mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) = \mathcal{P}_k^i \quad \text{или} \quad \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) \mathcal{P}_k^i = \mathcal{P}_k^i \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) = 0.$$

По данному отображению определим проекторы \mathcal{Q}_k^i :

$$\mathcal{Q}_k^i := \begin{cases} \mathcal{P}_k^i, & \text{если } \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) = \mathcal{P}_k^i \\ \mathcal{P}_k^i + \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i), & \text{если } \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) \mathcal{P}_k^i = 0 \end{cases},$$

среди которых могут быть совпадающие. Образует алгебру

$$\Omega := \vee \{ \mathcal{Q}_k^i \mid i = 1, \dots, n_k; k = 1, \dots, N \} \subset \mathfrak{P} \quad (72)$$

и опишем ее структуру, используя результаты Теоремы 1.

Из блоков, составляющих алгебру \mathfrak{P} в (71), составим всевозможные пары $\{\mathfrak{P}_k, \mathfrak{P}_{k'}\}$ с $k \neq k'$ и отберем те из них, в которых компоненты связаны через алгебру Ω (в том же смысле, что и $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ в Теореме 1). Такой отбор однозначен, поскольку, как отмечалось после доказательства Теоремы, каждый из \mathfrak{P}_k может быть связан лишь с одним $\mathfrak{P}_{k'}$. Перенумеруем блоки в (71), выделяя пары связанных блоков и независимые блоки:

$$\underbrace{\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2; \dots; \mathfrak{P}_{2k-1}, \mathfrak{P}_{2k}; \dots; \mathfrak{P}_{2N_1-1}, \mathfrak{P}_{2N_1}}_{\text{связанные}}; \mathfrak{P}_{2N_1+1}; \dots; \mathfrak{P}_{2N_1+j}; \dots; \mathfrak{P}_N \quad (73)$$

и соответствующим образом сгруппируем составляющие набора \mathbb{P} :

$$\underbrace{\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2; \dots; \mathbb{P}_{2k-1}, \mathbb{P}_{2k}; \dots; \mathbb{P}_{2N_1-1}, \mathbb{P}_{2N_1}}_{\text{связанные}}; \mathbb{P}_{2N_1+1}; \dots; \mathbb{P}_{2N_1+j}; \dots; \mathbb{P}_N.$$

Далее используется именно эта нумерация. Легко видеть, что такая группировка приводит отображение \mathcal{T} в следующем смысле:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\{\mathbb{P}_{2k-1}, \mathbb{P}_{2k}\}) &= \{\mathbb{P}_{2k-1}, \mathbb{P}_{2k}\}, \quad \mathcal{T}(\mathbb{P}_{2k-1}) = \mathbb{P}_{2k}, \quad k = 1, \dots, N_1; \\ \mathcal{T}(\mathbb{P}') &= \mathbb{P}', \quad \text{где } \mathbb{P}' := \mathbb{P}_{2N_1+1} \cup \dots \cup \mathbb{P}_N. \end{aligned} \quad (74)$$

Блоки \mathfrak{P}_{2N_1+j} выделены тем, что они попарно разделены (не связаны) алгеброй Ω . Из разделенности следует: если проектор

$$\mathcal{Q}_{2N_1+j}^i = \mathcal{P}_{2N_1+j}^i + \mathcal{T}(\mathcal{P}_{2N_1+j}^i)$$

таков, что $\mathcal{T}(\mathcal{P}_{2N_1+j}^i) \notin \mathbb{P}_{2N_1+j}$, то в алгебру Ω по-отдельности входят проекторы $\mathcal{P}_{2N_1+j}^i$ и $\mathcal{T}(\mathcal{P}_{2N_1+j}^i)$. Это позволяет заменить $\mathcal{T}|_{\mathbb{P}'}$ новым отображением $\mathcal{T}' : \mathbb{P}' \rightarrow \mathbb{P}'$, которое определяется на $\mathcal{P}_k^i \in \mathbb{P}'$ по правилам:

$$\mathcal{T}'(\mathcal{P}_k^i) := \begin{cases} \mathcal{P}_k^i, & \text{если } \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) \notin \mathbb{P}_k \\ \mathcal{P}_k^i, & \text{если } \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) = \mathcal{P}_k^i \\ \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i), & \text{если } \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) \in \mathbb{P}_k \text{ и } \mathcal{T}(\mathcal{P}_k^i) \neq \mathcal{P}_k^i \end{cases}.$$

Легко видеть, что отображение

$$\tilde{\mathcal{T}} : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}, \quad \tilde{\mathcal{T}} := \begin{cases} \mathcal{T} & \text{на } \mathbb{P} \setminus \mathbb{P}' \\ \mathcal{T}' & \text{на } \mathbb{P}' \end{cases}$$

определяет *ту же* алгебру \mathfrak{Q} , что и \mathcal{T} и, в дополнение к (74), приводится независимыми блоками: $\tilde{\mathcal{T}}(\mathbb{P}_{2N+j}) = \mathbb{P}_{2N+j}$. Внутри этих блоков оно либо действует тождественно, либо сопоставляет проектору ортогональный к нему.

Отображение \mathcal{T} определяет алгебру \mathfrak{Q} через проекторы-образующие Q_k^i согласно (72). Вполне аналогично, отображение $\tilde{\mathcal{T}}$ задает соответствующие проекторы \tilde{Q}_k^i , генерирующие ту же алгебру. Особенность последних заключается в их форме: по построению имеем

$$\tilde{Q}_k^i = \begin{cases} \mathcal{P}_k^i + \tilde{\mathcal{T}}(\mathcal{P}_k^i), & \text{если } \tilde{\mathcal{T}}(\mathcal{P}_k^i) \in \mathbb{P}_k, \tilde{\mathcal{T}}(\mathcal{P}_k^i) \neq \mathcal{P}_k^i \\ \mathcal{P}_k^i, & \text{в остальных случаях} \end{cases},$$

т.е. все двумерные \tilde{Q}_k^i суть суммы проекторов, входящих в *один и тот же* блок \mathfrak{P}_k .

Обозначим $\mathbb{Q}_k := \{\tilde{Q}_k^i \mid i = 1, \dots, n_k\}$. Следующий результат просто резюмирует проведенные выше рассуждения. Напомним, что блоки пронумерованы согласно (73).

Предложение 8. *Для алгебры \mathfrak{Q} справедливо представление:*

$$\mathfrak{Q} = \left[\bigoplus_{k=1}^{N_1} \mathfrak{Q}_k^I \right] \oplus \left[\bigoplus_{k=2N_1+1}^N \mathfrak{Q}_k^II \right], \quad (75)$$

где $\mathfrak{Q}_k^I := \vee \{\mathcal{P} \oplus \mathcal{T}(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \mathbb{P}_{2k-1}\} \subset \mathfrak{P}_{2k-1} \oplus \mathfrak{P}_{2k}$ и $\mathfrak{Q}_k^II := \vee \mathbb{Q}_k \subset \mathfrak{P}_k$.

Каноническое представление

Используем установленные выше результаты для описания структуры алгебры эйконалов. Оно сведется к некоторому каноническому представлению.

• Группировка проекторов в (56), проведенная в соответствии с разложением (55), есть разбиение наборов \mathbb{P}_{Φ^j} на классы эквивалентности $\mathbb{P}_{\Phi^j}^k$ (они же суть классы \mathbb{P}_l) по отношению \sim . Она мотивирована Предложением 7 и подготавливает применение Теоремы 1.

Роль алгебры \mathfrak{P} из Теоремы 1 (см.(71)) играет алгебра

$$\mathfrak{P}^\partial := \left[\bigoplus_{l=1}^L \mathfrak{P}_l \right] \oplus \left[\bigoplus_{l=1}^L \mathfrak{P}_l \right].$$

Она состоит из $2L$ неприводимых блоков и имеет представление $\mathfrak{P}^\partial = \vee \mathbb{P}^\partial$, в котором

$$\mathbb{P}^\partial := \left\{ \mathcal{P}_{\gamma l}^k \oplus O \mid k = 1, \dots, n_{\gamma l}; l = 1, \dots, L; \gamma \in \Sigma \right\} \cup \left\{ O \oplus \mathcal{P}_{\gamma l}^k \mid k = 1, \dots, n_{\gamma l}; l = 1, \dots, L; \gamma \in \Sigma \right\},$$

где $\mathcal{P}_{\gamma l}^k$ суть проекторы из (59), O - нулевой элемент алгебры $\bigoplus_{l=1}^L \mathfrak{P}_l$. Обозначив

$$\mathcal{P}_{\gamma l}^{kr} := \begin{cases} \mathcal{P}_{\gamma l}^k \oplus O, & r = 0 \\ O \oplus \mathcal{P}_{\gamma l}^k, & r = \varepsilon_l \end{cases},$$

имеем:

$$\mathbb{P}^\partial = \left\{ \mathcal{P}_{\gamma l}^{kr} \mid k = 1, \dots, n_{\gamma l}, l = 1, \dots, L, r = 0, \varepsilon_l; \gamma \in \Sigma \right\}.$$

Зададим отображение $\mathcal{T} : \mathbb{P}^\partial \rightarrow \mathbb{P}^\partial$ с помощью введенного ранее формализма, определяющего связи между наборами (k, l, r_l) :

$$\mathcal{T}(\mathcal{P}_{\gamma l}^{kr_l}) := \begin{cases} \mathcal{P}_{\gamma l'}^{k' r_{l'}}, & \text{если } (k', l', r_{l'}) \leftrightarrow (k, l, r_l) \\ \mathcal{P}_{\gamma l}^{kr_l}, & \text{если } (k, l, r_l) \text{ не связан ни с каким } (k', l', r_{l'}) \end{cases}. \quad (76)$$

Несложно проверить, что набор \mathbb{P}^∂ и отображение \mathcal{T} удовлетворяют всем условиям Теоремы 1, а определяемая ими согласно (65) алгебра \mathfrak{Q} совпадает с граничной алгеброй (60):

$$\mathfrak{Q} = \partial(U \mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1}).$$

- При приведении алгебры эйконалов к канонической форме будет использовано *соединение* ее блоков, связанных через граничную алгебру. Опишем эту конструкцию.

Пусть имеются две стандартные алгебры $\mathfrak{A} = \dot{C}([0, \varepsilon]; \mathfrak{P})$ и $\mathfrak{B} = \dot{C}([0, \varepsilon']; \mathfrak{P}')$ такие, что

$$\mathfrak{A}(\varepsilon) := \{a(\varepsilon) \mid a \in \mathfrak{A}\} = \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{B}(0) := \{b(0) \mid b \in \mathfrak{B}\} = \mathfrak{P}'$$

и пусть $\mathfrak{P} \cong \mathfrak{P}'$ через изометрию $\mathcal{I} : \mathfrak{P}' \rightarrow \mathfrak{P}$. Определим алгебру

$$\mathfrak{A}^\oplus \mathfrak{B} := \{a \oplus b \mid a \in \mathfrak{A}, b \in \mathfrak{B}, a(\varepsilon) = \mathcal{I}b(0)\}.$$

Алгебры такого вида появятся при переходе к каноническому представлению в ситуации, когда в граничной алгебре $\partial(U\mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1}) = \mathfrak{Q}$ в представлении (75) имеются блоки типа \mathfrak{Q}_k^I , связывающие граничные значения $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ и $\mathfrak{B}(0)$ какой-то пары блоков \mathfrak{A} и \mathfrak{B} алгебры эйконалов.

Для $a \in \mathfrak{A}$ и $b \in \mathfrak{B}$ таких, что $a(\varepsilon) = \mathcal{I}b(0)$ определим элемент $a \sqcup b \in C([0, \varepsilon + \varepsilon'], \mathfrak{P})$ по правилу:

$$(a \sqcup b)(r) := \begin{cases} a(r), & r \in [0, \varepsilon] \\ \mathcal{I}b(r - \varepsilon), & r \in [\varepsilon, \varepsilon + \varepsilon'] \end{cases}, \quad (77)$$

который будем называть *соединением* a и b . Затем определим *соединение алгебр* \mathfrak{A} и \mathfrak{B} :

$$\mathfrak{A} \sqcup \mathfrak{B} := \{a \sqcup b \in C([0, \varepsilon + \varepsilon']; \mathfrak{P}) \mid a \in \mathfrak{A}, b \in \mathfrak{B}, a(\varepsilon) = \mathcal{I}b(0)\}.$$

Легко видеть, что $\mathfrak{A} \sqcup \mathfrak{B}$ есть подалгебра в $C([0, \varepsilon + \varepsilon']; \mathfrak{P})$, являющаяся стандартной алгеброй, для которой справедливо представление:

$$\mathfrak{A} \sqcup \mathfrak{B} = \{c \in C([0, \varepsilon + \varepsilon']; \mathfrak{P}) \mid c(0) \in \mathfrak{A}(0), c(\varepsilon + \varepsilon') \in \mathcal{I}[\mathfrak{B}(\varepsilon')]\},$$

и выполнены равенства

$$(\mathfrak{A} \sqcup \mathfrak{B})(0) = \mathfrak{A}(0), \quad (\mathfrak{A} \sqcup \mathfrak{B})(\varepsilon + \varepsilon') = \mathcal{I}[\mathfrak{B}(\varepsilon')].$$

Несложно заметить, что алгебры $\mathfrak{A}^\oplus \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A} \sqcup \mathfrak{B}$ изометрически изоморфны. Резюмируя рассуждения, условимся говорить, что алгебры \mathfrak{A} и \mathfrak{B} допускают соединение *через концы* $r = \varepsilon$ и $r' = 0$. Отметим при этом, что вид алгебр $\mathfrak{A}(0)$ и $\mathfrak{B}(\varepsilon')$ на возможность соединения и его результат влияния не оказывают.

Очевидным образом изменяя определение (77), можно ввести соединение $\mathfrak{A} \sqcup \mathfrak{B} \subset C([0, \varepsilon + \varepsilon']; \mathfrak{P})$

$$\begin{aligned} &\text{через концы } r = \varepsilon \text{ и } r' = \varepsilon', \text{ если } \mathfrak{A}(\varepsilon) = \mathcal{I}[\mathfrak{B}(\varepsilon')]; \\ &\text{через концы } r = 0 \text{ и } r' = \varepsilon', \text{ если } \mathfrak{A}(0) = \mathcal{I}[\mathfrak{B}(\varepsilon')]; \\ &\text{через концы } r = 0 \text{ и } r' = 0, \text{ если } \mathfrak{A}(0) = \mathcal{I}[\mathfrak{B}(0)]. \end{aligned} \quad (78)$$

На элементах алгебры $\mathfrak{A} = \dot{C}([0, \varepsilon], \mathfrak{P})$ определим *транспозицию* t : $a \mapsto a^t$, $a^t(r) := a(\varepsilon - r)$, $r \in [0, \varepsilon]$ и примем $\mathfrak{A}^t := \{a^t \mid a \in \mathfrak{A}\}$.

Изометрия $\mathcal{M} : \mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{P}$ определяет преобразование $\mathcal{M} : C([0, \varepsilon], \mathfrak{P}) \rightarrow C([0, \varepsilon], \mathfrak{P})$, $(\mathcal{M}a)(r) := \mathcal{M}[a(r)]$, $r \in [0, \varepsilon]$. Для стандартной алгебры \mathfrak{A} примем $\mathcal{M}\mathfrak{A} := \{\mathcal{M}a \mid a \in \mathfrak{A}\} \subset C([0, \varepsilon], \mathfrak{P})$.

Алгебры \mathfrak{A}^t и $\mathcal{M}\mathfrak{A}$ также являются стандартными; легко видеть, что $\check{\mathcal{M}}\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}^t \cong \mathfrak{A}$ и выполнено:

$$\mathfrak{A}^t(0) = \mathfrak{A}(\varepsilon), \quad \mathfrak{A}^t(\varepsilon) = \mathfrak{A}(0); \quad (\check{\mathcal{M}}\mathfrak{A})(0) = \mathcal{M}[\mathfrak{A}(0)], \quad (\check{\mathcal{M}}\mathfrak{A})(\varepsilon) = \mathcal{M}[\mathfrak{A}(\varepsilon)].$$

- Переход к каноническому представлению алгебры эйконалов вполне подготовлен и описывается следующей процедурой.

Шаг 1. Определим изометрию $\mathbf{U}_0 : \mathfrak{E}_\Sigma^T \rightarrow U\mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1} \stackrel{(58)}{\subset} \bigoplus_{l=1}^L C([0, \varepsilon_l], \mathfrak{P}_l)$, задав ее на образующих:

$$\mathbf{U}_0 E_\gamma^T := U E_\gamma^T U^{-1} \stackrel{(59)}{=} \oplus \sum_{l=1}^L \left[\sum_{k=1}^{n_{\gamma l}} \tau_{\gamma l}^k P_{\gamma l}^k \right].$$

Блоки алгебры $\mathbf{U}_0 \mathfrak{E}_\Sigma^T$ суть

$$[\mathbf{U}_0 \mathfrak{E}_\Sigma^T]_l := \vee \left\{ \sum_{k=1}^{n_{\gamma l}} \tau_{\gamma l}^k P_{\gamma l}^k \mid \gamma \in \Sigma \right\} \subset C([0, \varepsilon_l]; \mathfrak{P}_l).$$

Пусть блоки $[\mathbf{U}_0 \mathfrak{E}_\Sigma^T]_l$ и $[\mathbf{U}_0 \mathfrak{E}_\Sigma^T]_{l'}$ таковы, что их граничные значения $[\mathbf{U}_0 \mathfrak{E}_\Sigma^T]_l(\varepsilon_l)$ и $[\mathbf{U}_0 \mathfrak{E}_\Sigma^T]_{l'}(0)$ образуют один блок типа \mathfrak{Q}_k^I в граничной алгебре $\partial(\mathbf{U}_0 \mathfrak{E}_\Sigma^T) := \partial(U\mathfrak{E}_\Sigma^T U^{-1}) = \mathfrak{Q}$ (см. Предложение 8). В этом случае отображение \mathcal{T} (см. (76)) определяет изометрию $\mathcal{I} : \mathfrak{P}_{l'} \rightarrow \mathfrak{P}_l$

$$\mathcal{I}(P_{\gamma l'}^{k'}) = P_{\gamma l}^k, \quad \text{если } \mathcal{T}(\mathcal{P}_{\gamma l'}^{k'0}) = \mathcal{P}_{\gamma l}^{k\varepsilon_l}.$$

Как следствие, корректно определена алгебра $[\mathbf{U}_0 \mathfrak{E}_\Sigma^T]_l \sqcup [\mathbf{U}_0 \mathfrak{E}_\Sigma^T]_{l'}$ - соединение этих блоков через концы $r_l = \varepsilon_l$ и $r_{l'} = 0$. Несложно проверить, что элементы

$$([\mathbf{U}_0 E_\gamma^T]_l \sqcup [\mathbf{U}_0 E_\gamma^T]_{l'})(r) := \begin{cases} \sum_{k=1}^{n_{\gamma l}} \tau_{\gamma l}^k(r) P_{\gamma l}^k, & r \in [0, \varepsilon_l] \\ \mathcal{I} \left[\sum_{k'=1}^{n_{\gamma l'}} \tau_{\gamma l'}^{k'}(r - \varepsilon_l) P_{\gamma l'}^{k'} \right], & r \in [\varepsilon_l, \varepsilon_l + \varepsilon_{l'}] \end{cases}$$

составляют систему ее образующих.

По свойствам отображения \mathcal{T} , из существования связи между блоками следует, что $n_{\gamma l} = n_{\gamma l'}$ для любого $\gamma \in \Sigma$, а соединения $[\mathbf{U}_0 E_\gamma^T]_l \sqcup [\mathbf{U}_0 E_\gamma^T]_{l'}$ могут быть представлены в следующем виде:

$$([\mathbf{U}_0 E_\gamma^T]_l \sqcup [\mathbf{U}_0 E_\gamma^T]_{l'})(r) = \sum_{k=1}^{n_{\gamma l}} [\tau_{\gamma l}^k \sqcup \tau_{\gamma l'}^{k'}](r) P_{\gamma l}^k, \quad r \in [0, \varepsilon_l + \varepsilon_{l'}],$$

где

$$[\tau_{\gamma l}^k \sqcup \tau_{\gamma l'}^{k'}](r) := \begin{cases} \tau_{\gamma l}^k(r), & r \in [0, \varepsilon_l] \\ \tau_{\gamma l'}^{k'}(r - \varepsilon_l), & r \in [\varepsilon_l, \varepsilon_l + \varepsilon_{l'}]. \end{cases}$$

Функции $[\tau_{\gamma l}^k \sqcup \tau_{\gamma l'}^{k'}]$ являются непрерывными в силу равенства $\tau_{\gamma l}^k(\varepsilon_l) = \tau_{\gamma l'}^{k'}(0)$, определяющего связь между наборами (k, l, ε_l) и $(k', l', 0)$, которая, в свою очередь, определяет отображение \mathcal{T} и изоморфизм \mathcal{I} . Напомним, что каждая $\tau_{\gamma l}^k$ есть линейная функция одного из двух видов:

$$\text{либо } \tau_{\gamma l}^k(r) = t_{\gamma l}^k + r, \text{ либо } \tau_{\gamma l}^k(r) = t_{\gamma l}^k - r,$$

где $t_{\gamma l}^k = \text{const} \geq 0$.

Пусть, для определенности, $\tau_{\gamma l}^k(r) = t_{\gamma l}^k + r$. Тогда из условия $\tau_{\gamma l}^k(\varepsilon_l) = \tau_{\gamma l'}^{k'}(0)$ и того, что равенство $\tau_{\gamma l}^k(r_l) = \tau_{\gamma l'}^{k'}(r_{l'})$ возможно *только* в случае граничных значений параметров r_l и $r_{l'}$ (в нашем случае $r_l = \varepsilon_l$, $r_{l'} = 0$), следует, что $\tau_{\gamma l'}^{k'}(r) = t_{\gamma l'}^{k'} + r$, причем $t_{\gamma l'}^{k'} = t_{\gamma l}^k + \varepsilon_l$. Это приводит к следующим равенствам:

$$\begin{aligned} [\tau_{\gamma l}^k \sqcup \tau_{\gamma l'}^{k'}](r) &= \begin{cases} t_{\gamma l}^k + r, & r \in [0, \varepsilon_l] \\ (t_{\gamma l}^k + \varepsilon_l) + (r - \varepsilon_l), & r \in [\varepsilon_l, \varepsilon_l + \varepsilon_{l'}] \end{cases} = \\ &= \begin{cases} t_{\gamma l}^k + r, & r \in [0, \varepsilon_l] \\ t_{\gamma l}^k + r, & r \in [\varepsilon_l, \varepsilon_l + \varepsilon_{l'}] \end{cases} = t_{\gamma l}^k + r, \quad r \in [0, \varepsilon_l + \varepsilon_{l'}]. \end{aligned}$$

Аналогичные рассуждения справедливы и в случае $\tau_{\gamma l}^k(r) = t_{\gamma l}^k - r$. Таким образом, соединение функций $\tau_{\gamma l}^k$ и $\tau_{\gamma l'}^{k'}$ является *линейной* функцией того же вида, что и сами $\tau_{\gamma l}^k$ и $\tau_{\gamma l'}^{k'}$. Из этого следует, что соединение блоков $[\mathbf{U}_0 \mathfrak{E}_{\Sigma}^T]_l \sqcup [\mathbf{U}_0 \mathfrak{E}_{\Sigma}^T]_{l'}$ есть стандартная алгебра с образующими того же вида, что и у исходных блоков.

В рассмотренном случае связаны граничные значения $[\mathbf{U}_0 \mathfrak{E}_{\Sigma}^T]_l(\varepsilon_l)$ и $[\mathbf{U}_0 \mathfrak{E}_{\Sigma}^T]_{l'}(0)$. Вполне аналогично рассматриваются случаи других возможных связей между граничными значениями, допускающих соединение блоков: см. (78).

Шаг 2. Пусть блоки $[\mathbf{U}_0 \mathfrak{E}_{\Sigma}^T]_l$ и $[\mathbf{U}_0 \mathfrak{E}_{\Sigma}^T]_{l'}$ допускают соединение. Определим отображение

$$\mathbf{U}_1 : \mathfrak{E}_{\Sigma}^T \rightarrow \mathbf{U}_1 \mathfrak{E}_{\Sigma}^T \subset \left[\bigoplus_{\lambda=1}^L \bigoplus_{(\lambda \neq l, l')} C([0, \varepsilon_{\lambda}]; \mathfrak{P}_{\lambda}) \right] \oplus C([0, \varepsilon_l + \varepsilon_{l'}]; \mathfrak{P}_l),$$

задав его на образующих:

$$\mathbf{U}_1 E_\gamma^T := \left[\bigoplus_{\lambda=1}^L \sum_{(\lambda \neq l, l')} [\mathbf{U}_0 E_\gamma^T]_\lambda \right] \oplus ([\mathbf{U}_0 E_\gamma^T]_l \sqcup [\mathbf{U}_0 E_\gamma^T]_{l'}), \quad \gamma \in \Sigma.$$

Нетрудно видеть, что отображение \mathbf{U}_1 есть изометрия: изометричность алгебр $\mathbf{U}_0 \mathfrak{E}_\Sigma^T$ и $\mathbf{U}_1 \mathfrak{E}_\Sigma^T$ вполне аналогична изометричности $\mathfrak{A}^\oplus \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A} \sqcup \mathfrak{B}$. Изометрия \mathbf{U}_1 переводит алгебру эйконалов в алгебру того же вида, что и $\mathbf{U}_0 \mathfrak{E}_\Sigma^T$, но с меньшим на 1 количеством блоков; при этом в граничной алгебре $\partial(\mathbf{U}_1 \mathfrak{E}_\Sigma^T)$ блоков типа \mathfrak{Q}_k^I становится также на 1 меньше.

Последовательно заменяя аналогичным образом все пары связанных блоков на их соединения, придем к некоторому изометрическому изоморфизму $\mathbf{U}_N : \mathfrak{E}_\Sigma^T \rightarrow \mathbf{U}_N \mathfrak{E}_\Sigma^T$, такому, что в граничной алгебре $\partial(\mathbf{U}_N \mathfrak{E}_\Sigma^T)$ уже не содержится ни одного блока типа \mathfrak{Q}_k^I . Таким образом, отображение \mathbf{U}_N переводит алгебру эйконалов в алгебру той же структуры, что и $\mathbf{U}_0 \mathfrak{E}_\Sigma^T$, но уже с *независимыми* блоками. Отметим также, что в процессе перехода к представлению $\mathbf{U}_N \mathfrak{E}_\Sigma^T$ несколько (больше 2) блоков исходного представления $\mathbf{U}_0 \mathfrak{E}_\Sigma^T$ могут соединиться в один новый блок.

Шаг 3. На заключительном шаге еще раз используется неприводимость алгебр \mathfrak{P}_l . Для каждой из них подберем преобразование, реализующее изометрию $\mathfrak{P}_l \cong \mathbb{M}^{s_l}$. Как следствие, определится изометрия $\mathbf{U} : \mathfrak{E}_\Sigma^T \rightarrow \bigoplus_{l=1}^L C([0, \zeta_l]; \mathbb{M}^{s_l})$, заданная на образующих равенствами:

$$\mathbf{U} E_\gamma^T := \bigoplus_{l=1}^L \left[\sum_{k=1}^{s_{\gamma l}} \tilde{\tau}_{\gamma l}^k(\cdot) \tilde{P}_{\gamma l}^k \right], \quad \gamma \in \Sigma,$$

где $\tilde{P}_{\gamma l}^k \in \mathbb{M}^{s_l}$ суть одномерные (матричные) проекторы, попарно ортогональные для фиксированной вершины $\gamma \in \Sigma$, а $\tilde{\tau}_{\gamma l}^k$ - линейные функции одного из двух видов: либо $\tilde{\tau}_{\gamma l}^k(r) = \tilde{t}_{\gamma l}^k + r$, либо $\tilde{\tau}_{\gamma l}^k(r) = \tilde{t}_{\gamma l}^k - r$, $r \in [0, \zeta_l]$, где $\tilde{t}_{\gamma l}^k \geq 0$ суть постоянные, а каждое ζ_l есть сумма какого-то набора длин ε_k .

Таким образом, последовательными преобразованиями исходного параметрического представления (46), мы получаем представление такой же структуры, но уже с *независимыми* блоками, являющимися стандартными алгебрами. Сформулируем итоговый результат.

Теорема 2. *Существует изометрия \mathbf{U} , доставляющая алгебре \mathfrak{E}_Σ^T и*

ее образующим-эйконалам представление

$$\mathbf{U}\mathfrak{E}_\Sigma^T = \bigoplus_{l=1}^{\mathcal{L}} C([0, \zeta_l]; \mathbb{M}^{\mathcal{N}_l}); \quad \mathbf{U}E_\gamma^T = \bigoplus_{l=1}^{\mathcal{L}} \left[\sum_{k=1}^{s_{\gamma l}} \tilde{\tau}_{\gamma l}^k \tilde{P}_{\gamma l}^k \right], \quad \gamma \in \Sigma. \quad (79)$$

В нем $\tilde{\tau}_{\gamma l}^k$ - линейные функции от $r_l \in [0, \zeta_l]$, такие, что $|\frac{d\tilde{\tau}_{\gamma l}^k}{dr_l}| = 1$, а их области значений суть сегменты длины ζ_l , которые могут иметь раз-
 ве что общие концы. $\tilde{P}_{\gamma l}^k \in \mathbb{M}^{\mathcal{N}_l}$ суть проекторы, попарно ортогональ-
 ные для каждого γ и такие, что выполнено $\bigvee \{\tilde{P}_{\gamma l}^k \mid k = 1, \dots, s_{\gamma l}; \gamma \in \Sigma\} = \mathbb{M}^{\mathcal{N}_l}$.

Представление такого вида будем называть *каноническим*. Оно не
 единственно, но можно показать, что любые два таких представления
 отличаются друг от друга нумерацией блоков $[\mathbf{U}\mathfrak{E}_\Sigma^T]_l$, их транспозицией
 $[\mathbf{U}\mathfrak{E}_\Sigma^T]_l \rightarrow [\mathbf{U}\mathfrak{E}_\Sigma^T]_l^t$ и изометриями $[\mathbf{U}\mathfrak{E}_\Sigma^T]_l \rightarrow \check{\mathcal{M}}[\mathbf{U}\mathfrak{E}_\Sigma^T]_l$. Неоднозначность,
 связанная с транспозицией, очевидно, отвечает двум направлениям из-
 менения аргумента каждой из функций $\tilde{\tau}_{\gamma l}^k$ на интервале $[0, \delta_l]$ (двум
 возможным параметризациям l -го блока).

- В качестве комментария к Теореме 2 отметим следующее. Исходное
 параметрическое представление алгебры эйконалов (48) отвечало раз-
 биению части графа Ω_Σ^T на семейства Φ^1, \dots, Φ^J . Мы полагаем, что пе-
 реход к каноническому представлению соответствует некоторому новому
 разбиению. Это не доказано, но подкрепляется известными примерами
 [12, 9].

5 Приведение к канонической форме

Каноническое представление и спектры

Главное достоинство канонического представления состоит в том, что
 из него легко извлекается полная информация о спектре алгебры \mathfrak{E}_Σ^T и
 определяется ряд ее инвариантов. Перейдем к их описанию.

- Сопоставим содержание Теоремы 2 и Предложения 2.

С учетом отмеченной после Теоремы 2 неоднозначности канониче-
 ского представления, будем считать, что нумерация и параметризация
 его блоков фиксированы. Само представление (79) перепишем в *обнов-*
ленных удобных для дальнейшего обозначениях (заменяя ζ_l на ε_l и убрав
 ($\tilde{\cdot}$)):

$$\mathbf{U}\mathfrak{E}_\Sigma^T = \bigoplus_{l=1}^{\mathcal{L}} C([0, \varepsilon_l]; \mathbb{M}^{\mathcal{N}_l}); \quad \mathbf{U}E_\gamma^T = \bigoplus_{l=1}^{\mathcal{L}} \left[\sum_{k=1}^{n_{\gamma l}} \tau_{\gamma l}^k P_{\gamma l}^k \right], \quad \gamma \in \Sigma. \quad (80)$$

Пусть

$$\psi_{\gamma l}^k := \{\tau_{\gamma l}^k(r_l) \mid r_l \in (0, \varepsilon_l)\} = (\tau_{\gamma l}^k(0), \tau_{\gamma l}^k(\varepsilon_l))$$

суть временные клетки, соответствующие каноническому представлению. Правая часть представления (80) для оператора $\mathbf{U}E_{\gamma}^T$ определяет его спектр и, в силу изометричности \mathbf{U} , спектр эйконала:

$$\sigma_{\text{ac}}(E_{\gamma}^T) = [1, T_1^{\gamma}] \cup [T_2^{\gamma}, T_3^{\gamma}] \cup \dots \cup [T_{N_{\gamma}-1}^{\gamma}, T_{N_{\gamma}}^{\gamma}] = \bigcup_{l=1}^{\mathcal{L}} \bigcup_{k=1}^{n_{\gamma l}} \overline{\psi_{\gamma l}^k} \quad (81)$$

где каждый из сегментов $[T_{i-1}^{\gamma}, T_i^{\gamma}]$, в свою очередь, покрывается клетками $\overline{\psi_{\gamma l}^k}$, которые либо не пересекаются, либо имеют общие концы. По Предложению 2, то же верно и для клеток $\overline{\psi_{\gamma \Phi}^i}$, связанных с параметрическим представлением (39). Сравнивая разложения (81) и (40), заключаем, что каноническому представлению соответствует новая (каноническая) нарезка спектра эйконала на временные клетки. Можно показать, что каждая новая клетка состоит из старых, т.е. переходу к каноническому представлению отвечает укрупнение временных клеток.

- Как отмечалось в справочном разделе, спектр стандартной алгебры $C([a, b]; \mathbb{M}^n)$ состоит из (классов эквивалентности) неприводимых представлений, отвечающих *внутренним* точкам сегмента $[a, b]$ и кластеров (если таковые имеются) $\{\hat{\pi}_a^1, \dots, \hat{\pi}_a^{n_a}\}$ и $\{\hat{\pi}_b^1, \dots, \hat{\pi}_b^{n_b}\}$, примыкающих к его концам. Такой спектр, оснащенный топологией Джекобсона, гомеоморфен пространству, которое естественно назвать *сегментом с расщепленными концами*. Оно описывается следующей конструкцией (см., например, [1]).

Рассмотрим n_a полусегментов $[a, b]$ и n_b полусегментов $(a, b]$ с топологией из \mathbb{R} . отождествим *внутренние* точки всех полусегментов, имеющие *одинаковые* координаты. Образовавшееся фактор-пространство $\mathcal{S}_{[a, b]}$ состоит из части $S_{(a, b)}$, гомеоморфной (a, b) и двух наборов попарно неотделимых точек (двух кластеров) K_a и K_b , которые состоят из n_a и n_b точек и отвечают концам a и b соответственно. Каждый из кластеров неотделим от $S_{(a, b)}$. Часть $S_{(a, b)} := \text{int } \mathcal{S}_{[a, b]}$ есть множество *внутренних точек*, каждая из которых имеет окрестность, гомеоморфную (открытому) интервалу вещественной оси.

- По первому из представлений (80), спектр алгебры $\mathbf{U}\mathfrak{E}_{\Sigma}^T$ гомеоморфен дизъюнктному объединению сегментов

$$\mathcal{S}_{\Sigma}^T = \mathcal{S}_{[0, \varepsilon_1]} \cup \dots \cup \mathcal{S}_{[0, \varepsilon_{\mathcal{L}}]}; \quad \mathcal{S}_{[0, \varepsilon_l]} := K_0^l \cup S_{(0, \varepsilon_l)} \cup K_{\varepsilon_l}^l.$$

Каждый сегмент $\mathcal{S}_{[0, \varepsilon_l]}$ характеризуется как *максимальная компактная линейно-связная компонента* пространства \mathcal{S}_Σ^T , а часть $S_{(0, \varepsilon_l)} = \text{int } \mathcal{S}_{[0, \varepsilon_l]}$ - как множество его внутренних точек.

Спектры алгебр \mathfrak{E}_Σ^T и $\mathbf{U}\mathfrak{E}_\Sigma^T$ связаны гомеоморфизмом $\mathbf{U}_* : \widehat{\mathfrak{E}_\Sigma^T} \rightarrow \widehat{\mathbf{U}\mathfrak{E}_\Sigma^T}$ (см. (42)). Следовательно, $\widehat{\mathfrak{E}_\Sigma^T}$ гомеоморфен пространству \mathcal{S}_Σ^T и допускает представление

$$\widehat{\mathfrak{E}_\Sigma^T} = \mathcal{S}_1 \cup \dots \cup \mathcal{S}_L; \quad \mathcal{S}_l = \eta(\mathcal{S}_{[0, \varepsilon_l]}) = \mathcal{K}_0^l \cup S_l \cup \mathcal{K}_{\varepsilon_l}^l, \quad (82)$$

где $\eta : \mathcal{S}_\Sigma^T \rightarrow \widehat{\mathfrak{E}_\Sigma^T}$ - гомеоморфизм, $S_l = \eta(S_{(0, \varepsilon_l)})$, $\mathcal{K}_0^l = \eta(K_0^l)$, $\mathcal{K}_{\varepsilon_l}^l = \eta(K_{\varepsilon_l}^l)$. Оно определяет разбиение спектра на максимальные компактные линейно-связные компоненты и, как таковое, имеет инвариантный топологический смысл. Последнее относится и к разбиению *сегментов* \mathcal{S}_l на внутренние точки S_l и *кластеры* $\mathcal{K}_0^l, \mathcal{K}_{\varepsilon_l}^l$. Множество внутренних точек спектра есть $\text{int } \widehat{\mathfrak{E}_\Sigma^T} = S_1 \cup \dots \cup S_L$.

Координаты

Напомним, что алгебры $\mathfrak{E}_\gamma^T = \vee\{E_\gamma^T\} \subset \mathfrak{E}_\Sigma^T$, отвечающие отдельным эйконалам, мы называем парциальными. Через π и $\hat{\pi}$ обозначаются неприводимое представление и его класс эквивалентности.

• Соответствие $\varphi(E_\gamma^T) \leftrightarrow \varphi$ есть изометрия алгебр \mathfrak{E}_γ^T и $C(\sigma_{\text{ac}}(E_\gamma^T))$, определяемая первым равенством в (45): см. [14]. Каждая \mathfrak{E}_γ^T есть коммутативная подалгебра в \mathfrak{E}_Σ^T . Ее спектр (множество характеров) $\widehat{\mathfrak{E}_\gamma^T}$ исчерпывается мерами Дирака:

$$\widehat{\mathfrak{E}_\gamma^T} = \left\{ \hat{\delta}_t \mid t \in \sigma_{\text{ac}}(E_\gamma^T) \right\}, \quad \mathfrak{E}_\gamma^T \ni \varphi(E_\gamma^T) \xrightarrow{\hat{\delta}_t} \varphi(t) \in \mathbb{R};$$

при этом $\hat{\delta}_t = \{\delta_t\}$: см. [19, 20]. Таким образом, каждому характеру отвечает точка (число) t из объединения сегментов (81), которую мы будем рассматривать как его γ -*координату*. Отметим также, что любое матричное приводимое представление алгебры \mathfrak{E}_γ^T имеет вид

$$\rho \sim \delta_{t_1} \oplus \dots \oplus \delta_{t_p}, \quad \rho(\varphi(E_\gamma^T)) \sim \text{diag} \{ \varphi(t_1), \dots, \varphi(t_p) \}. \quad (83)$$

Числа t_1, \dots, t_p , однозначно определяющие класс $\hat{\rho}$, назовем его γ -*координатами*. Следующий шаг - координатизация спектра алгебры \mathfrak{E}_Σ^T .

• Если коммутативная алгебра имеет конечное число образующих, то они составляют координаты на ее спектре: см. [20], глава III, Теорема 6. Здесь используется адекватный аналог этого факта для *некоммутативной* C^* -алгебры, образующие которой суть самосопряженные операторы с простым спектром. Именно, каждому $\hat{\pi} \in \widehat{\mathfrak{E}}_\Sigma^T$ мы сопоставим набор $\{\hat{\pi}|_{\mathfrak{E}_\gamma^T} \mid \gamma \in \Sigma\}$ сужений на парциальные алгебры. Каждый элемент набора есть представление вида (83), уже снабженное γ -координатами $t_\gamma^1, t_\gamma^2, \dots$. Соответствие

$$\widehat{\mathfrak{E}}_\Sigma^T \ni \hat{\pi} \rightarrow \{\{t_\gamma^1, t_\gamma^2, \dots\} \mid \gamma \in \Sigma\}, \quad t_\gamma^k = t_\gamma^k(\hat{\pi}) \quad (84)$$

доставляет требуемую координатизацию спектра. Уточним некоторые детали.

Соответствие (84), вообще говоря, не является инъективным, но оказывается таковым при сужении на $\text{int } \widehat{\mathfrak{E}}_\Sigma^T$. Поскольку множество $\widehat{\mathfrak{E}}_\Sigma^T \setminus \text{int } \widehat{\mathfrak{E}}_\Sigma^T$, состоящее из точек, образующих кластеры, конечно (так что, почти все точки спектра суть внутренние), употребление термина *координаты* представляется оправданным.

Если $\hat{\pi} \in S_l \subset \mathcal{S}_l$ (см. (82)), то $\mathbf{U}_* \hat{\pi}$ есть внутренняя точка спектра $\widehat{\mathbf{U}_* \mathfrak{E}_\Sigma^T}$ и ей, по первому из представлений (80), соответствует определенное значение параметра $r \in (0, \varepsilon_l)$. В этом случае точку $\hat{\pi}$ обозначим через $\hat{\pi}_r$ и выясним, каковы ее γ -координаты.

Пусть $\varphi \in C(\sigma_{\text{ac}}(E_\gamma^T))$. Из эквивалентных представлений, составляющих $\hat{\pi}_r$, выберем π_r из условия

$$(\mathbf{U}_* \pi_r)(\mathbf{U} E_\gamma^T) = \sum_{k=1}^{n_{\gamma l}} \tau_{\gamma l}^k(r) P_{\gamma l}^k$$

(см. (80)). Для такого π_r имеем соотношения:

$$\begin{aligned} \pi_r(\varphi(E_\gamma^T)) &\stackrel{(41)}{=} (\mathbf{U}_* \pi_r)(\mathbf{U} \varphi(E_\gamma^T)) = (\mathbf{U}_* \pi_r)(\varphi(\mathbf{U} E_\gamma^T)) \stackrel{(80)}{=} \\ &= (\mathbf{U}_* \pi_r) \left(\varphi \left(\bigoplus_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{k=1}^{n_{\gamma l}} \tau_{\gamma l}^k P_{\gamma l}^k \right) \right) = (\mathbf{U}_* \pi_r) \left(\bigoplus_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{k=1}^{n_{\gamma l}} (\varphi \circ \tau_{\gamma l}^k) P_{\gamma l}^k \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{n_{\gamma l}} (\varphi \circ \tau_{\gamma l}^k)(r) P_{\gamma l}^k = \sum_{k=1}^{n_{\gamma l}} \varphi(t_{\gamma l}^k) P_{\gamma l}^k = \sum_{k=1}^{n_{\gamma l}} \delta_{t_{\gamma l}^k}(\varphi) P_{\gamma l}^k, \end{aligned} \quad (85)$$

где

$$t_{\gamma l}^k = t_{\gamma l}^k(\hat{\pi}_r) := \tau_{\gamma l}^k(r), \quad r \in (0, \varepsilon_l), \quad k = 1, \dots, n_{\gamma l}. \quad (86)$$

Сопоставляя начало и конец этой выкладки, легко заключить, что представление $\pi_r|_{\mathfrak{E}_\gamma^T}$ эквивалентно приводимому представлению $\oplus \sum_{k=1}^{n_{\gamma l}} \delta_{t_{\gamma l}^k}$ алгебры \mathfrak{E}_γ^T , а числа $\tau_{\gamma l}^k(r)$ суть γ -координаты точки $\hat{\pi}_r \in S_l \subset \text{int } \widehat{\mathfrak{E}_\Sigma^T}$. Они определены корректно, поскольку выбор другого $\pi \neq \pi_r$, $\pi \in \hat{\pi}_r$ приведет лишь к замене в (85) проекторов $P_{\gamma l}^k$ на унитарно-эквивалентные им проекторы.

При $\varphi(t) = t$ соотношение (85) принимает вид

$$\pi_r(E_\gamma^T) = \sum_{k=1}^{n_{\gamma l}} \tau_{\gamma l}^k(r) P_{\gamma l}^k, \quad r \in (0, \varepsilon_l); \quad \gamma \in \Sigma, \quad (87)$$

что мы используем ниже.

- Как видно из (86), при вариациях точки $\hat{\pi}$ в S_l , ее координаты $t_{\gamma l}^k(\hat{\pi})$ замечают временные клетки $\psi_{\gamma l}^k \subset \sigma_{ac}(E_\gamma^T)$ и выполнено

$$\psi_{\gamma l}^k = \{t_{\gamma l}^k(\hat{\pi}) \mid \hat{\pi} \in S_l\}, \quad k = 1, \dots, n_{\gamma l}; \quad l = 1, \dots, \mathcal{L}; \quad \gamma \in \Sigma, \quad (88)$$

что указывает на инвариантный характер этих клеток, а, значит, и разбиения (81). Мы имеем ввиду, что они однозначно определяются *самой* алгеброй эйконалов; точнее - структурой (82) ее спектра. Длины клеток ε_l ; $l = 1, \dots, \mathcal{L}$ суть числовые инварианты алгебры \mathfrak{E}_Σ^T .

При фиксированном k соответствие $\text{int } \psi_{\gamma l}^k \ni t_{\gamma l}^k(\hat{\pi}) \leftarrow \hat{\pi} \in S_l$ биективно и определяет естественную параметризацию сегмента \mathcal{S}_l ⁸. Для его внутренних точек примем

$$r(\hat{\pi}) := |t_{\gamma l}^k(\hat{\pi}) - t_{\gamma l}^k(0)| \in (0, \varepsilon_l), \quad \hat{\pi} \in S_l, \quad (89)$$

где $t_{\gamma l}^k(0)$ - левый конец клетки $\psi_{\gamma l}^k$. Затем распространим параметризацию на "концы" $\mathcal{S}_l \setminus S_l$ по непрерывности, принимая для них $r = 0$ и $r = \varepsilon_l$ соответственно. Как легко видеть из (86), для внутренних точек выполнено $r(\hat{\pi}_r) = r$.

Выбрав параметризацию описанным выше способом, мы, очевидно, параметризуем остальные клетки $\psi_{\gamma l}^{k'}$, $k' \neq k$ и определяем функции $\tau_{\gamma l}^k(r)$, $r \in (0, \varepsilon_l)$, $k = 1, \dots, n_{\gamma l}$ согласно (86). Они также являются инвариантами алгебры эйконалов.

⁸точнее, одну из двух возможных параметризаций

Приведение

- Каноническое представление (80) было получено "переформатированием" параметрического представления (48). Покажем, как придти к нему, отправляясь от самой алгебры \mathfrak{E}_Σ^T и используя ее инварианты.

Итак, в нашем распоряжении эйконалы E_γ^T , $\gamma \in \Sigma$ и образованная ими алгебра \mathfrak{E}_Σ^T .

Шаг 1. Найдем спектр $\widehat{\mathfrak{E}_\Sigma^T}$, оснастим топологией (Джекобсона) и выделим в нем сегменты и их компоненты согласно (82).

Шаг 2. Найдем спектры $\sigma_{\text{ac}}(E_\gamma^T)$ и введем на $\text{int } \widehat{\mathfrak{E}_\Sigma^T}$ γ -координаты. Определим клетки $\psi_{\gamma l}^k$ по (88). Параметризуем сегменты по (89).

Шаг 3. Для каждого l выберем представления $\pi_r : \widehat{\mathfrak{E}_\Sigma^T} \rightarrow \mathbb{M}^{\mathcal{N}_l}$, $\pi_r \in \hat{\pi}_r \in S_l$, $r \in (0, \varepsilon_l)$ так, чтобы для всех $e \in \mathfrak{E}_\Sigma^T$ $\mathbb{M}^{\mathcal{N}_l}$ -значные функции $\pi_r(e)$ были непрерывны по $r \in (0, \varepsilon_l)$ и продолжались по непрерывности на $[0, \varepsilon_l]$ ⁹.

Шаг 4. Определим собственные значения $\tau_{\gamma l}^k(r)$ и собственные проекторы $P_{\gamma l}^k$ матриц $\pi_r(E_\gamma^T)$ (см. (87)). По ним зададим отображение

$$\mathbf{U} : E_\gamma^T \mapsto \sum_{k=1}^{n_{\gamma l}} \tau_{\gamma l}^k(\cdot) P_{\gamma l}^k \in C([0, \varepsilon_l]; \mathbb{M}^{\mathcal{N}_l}), \quad l = 1, \dots, \mathcal{L}; \quad \gamma \in \Sigma$$

и продолжим его с образующих-эйконалов до изометрии алгебр $\mathbf{U} : \mathfrak{E}_\Sigma^T \rightarrow \bigoplus_{l=1}^{\mathcal{L}} C([0, \varepsilon_l]; \mathbb{M}^{\mathcal{N}_l})$.

Отображение \mathbf{U} приводит \mathfrak{E}_Σ^T к канонической форме (точнее к одной из ее версий: см. замечание после Теоремы 2).

- Все полученные результаты относятся к *смещенным эйконалам* \dot{E}_γ^T : см. Соглашение 2. Их переформулировка для исходных $E_\gamma^T = \dot{E}_\gamma^T - P_\gamma^T$ очевидна и фактически сводится к замене в (80) функций $\tau_{\gamma l}^k$ на $\tau_{\gamma l}^k - 1$.

Комментарии

- Отображение $\mathbf{V} : \mathfrak{E}_\Sigma^T \rightarrow \bigoplus_{l=1}^{\mathcal{L}} C(\mathcal{A}_l; \mathbb{M}^{\mathcal{N}_l})$, задаваемое на образующих соотношением

$$(\mathbf{V}(E_\gamma^T))(\hat{\pi}) := \sum_{k=1}^{n_{\gamma l}} \tau_{\gamma l}^k(r(\hat{\pi})) P_{\gamma l}^k, \quad \hat{\pi} \in \mathcal{A}_l; \quad l = 1, \dots, \mathcal{L}; \quad \gamma \in \Sigma,$$

⁹Такой выбор возможен уже в силу существования канонического представления.

реализует элементы алгебры \mathfrak{E}_Σ^T как матрично-значные функции на ее спектре и, тем самым, доставляет *инвариантную функциональную модель* алгебры эйконолов. К этой модели, со всеми ее атрибутами - клетками $\psi_{\gamma l}^k$, функциями $\tau_{\gamma l}^k$, длинами ε_l , размерностями \varkappa_l - можно перейти, отправляясь от *любой* изометрической копии алгебры \mathfrak{E}_Σ^T и используя процедуру **Шаг 1-4**. Это важно для обратной задачи, поскольку ее данные определяют одну из таких копий. Вопрос в том, в какой мере эти атрибуты определяют строение графа Ω .

- Следующее наблюдение, возможно, окажется полезным в обратной задаче. На точках спектра $\widehat{\mathfrak{E}_\Sigma^T}$ введем отношение: $\hat{\pi} \sim_0 \hat{\pi}'$ если среди γ -координат этих точек имеются совпадающие, т.е. выполнено $\tau_{\gamma l}^k(\hat{\pi}) = \tau_{\gamma l'}^{k'}(\hat{\pi}')$. Затем определим эквивалентность: $\hat{\pi} \sim \hat{\pi}'$ если найдутся точки $\hat{\pi}_1, \dots, \hat{\pi}_p \in \widehat{\mathfrak{E}_\Sigma^T}$ и вершины $\gamma_1, \dots, \gamma_{p+1} \in \Sigma$, такие, что $\hat{\pi} \sim_0 \hat{\pi}_1 \sim_0^{\gamma_1} \dots \sim_0^{\gamma_p} \hat{\pi}_p \sim_0^{\gamma_{p+1}} \hat{\pi}'$. Можно показать, что при факторизации спектра по отношению $\hat{\pi} \sim \hat{\pi}'$ отождествляются только точки, входящие в кластеры. При этом факторизация превращает $\widehat{\mathfrak{E}_\Sigma^T}$ в пространство, гомеоморфное некоторому *графу*. В примерах прослеживается, что получившийся граф гомеоморфен заполненной волнами области Ω_Σ^T , факторизованной по некоторому отношению, имеющему простой геометрический смысл.
- В известных примерах [11, 9] кластеры появляются, когда внутренняя вершина графа Ω перекрывается волнами, идущими по крайней мере от двух граничных вершин. Мы полагаем, что это общий факт. Также интересен вопрос: можно ли характеризовать наличие циклов в Ω_Σ^T в терминах алгебры \mathfrak{E}_Σ^T (см. [11])? Вопрос открыт.

Список литературы

- [1] W.Arveson. An Invitation to C^* -Algebras., *Springer-Verlag Inc.*, 1976.
- [2] M.I.Belishev. Boundary spectral inverse problem on a class of graphs (trees) by the BC-method., *Inverse Problems*, 20 (2004), No 3: 647–672.
- [3] M.I.Belishev. Geometrization of Rings as a Method for Solving Inverse Problems. *Sobolev Spaces in Mathematics III. Applications in Mathematical Physics*, Ed. V.Isakov., Springer, 2008, 5–24.
- [4] S.Avdonin and P. Kurasov. Inverse problems for quantum trees., *Inverse Problems and Imaging*, 2(1):1–21, 2008.

- [5] S.Avdonin, P.Kurasov, and M.Nowaczyk. Inverse problems for quantum trees II: recovering matching conditions for star graphs., *Inverse Problems and Imaging*, 4(4):579–598, 2010.
- [6] S. Avdonin, G. Leugering, and V. Mikhaylov. On an inverse problem for tree-like networks of elastic strings., *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.*, 90(2):136– 150, 2010.
- [7] М.И.Белишев. Граничное управление и томография римановых многообразий (BC-метод). *Усп. Мат. Наук*, 72 (2017), вып. 4, 3–66.
- [8] M.I.Belishev and M.N.Demchenko. Elements of noncommutative geometry in inverse problems on manifolds., *Journal of Geometry and Physics*, Volume 78, April 2014, 29–47.
- [9] M.I.Belishev, A.V.Kaplun. Eikonal algebra on a graph of simple structure. *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications*, Vol. 6 Iss.3 (2018) 4-33.
- [10] M.I.Belishev, A.F.Vakulenko. Inverse problems on graphs: recovering the tree of strings by the BC-method. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 14 , no 1: 29–46, 2006.
- [11] M.I.Belishev, N.Wada. On revealing graph cycles via boundary measurements. *Inverse Problems*, 25 (2009), no 10, 105011, 1–25.
- [12] M.I.Belishev and N.Wada. A C^* -algebra associated with dynamics on a graph of strings. *J. Math. Soc. Japan*, Vol. 67, No. 3 (2015) pp. 1239–1274. doi: 10.2969/jmsj/06731239.
- [13] Berkolaiko G., Kuchment P. Introduction to quantum graphs. *American Mathematical Soc.*, 2013. – №. 186.
- [14] М.Ш.Бирман, М.З.Соломяк. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. *Санкт-Петербург, Москва, Краснодар. Лань*, 2010.
English translation: M.S.Birman, M.Z.Solomyak. Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space. *D.Reidel Publishing Comp.*, 1987.
- [15] Н.Б.Васильев. C^* -алгебры с конечномерными представлениями. *УМН*, том 21 (1966), вып.1(127), 135-154.

- English translation: N.B. Vasil'ev, C^* -algebras with finite dimensional irreducible representations. *Russian Math. Surveys*, 21 (1966), 137–155.
- [16] Ж.Диксмье. C^* -алгебры и их представления. *М.: Наука*, 1974.
J.Dixmier. Les C^* -algebrae et leurs representations. *Gauthier-Villars Ed, Paris*, 1969.
- [17] P. Kurasov and M. Nowaczyk. Inverse spectral problem for quantum graphs. *J. Phys. A*, 38(22):4901–4915, 2005.
- [18] P. Kurasov and M. Nowaczyk. Geometric properties of quantum graphs and vertex scattering matrices. *Opuscula Math.*, 30(3):295–309, 2010
- [19] Дж.Мерфи. C^* -алгебры и теория операторов. *Москва, Факториал*, 1997.
English translation: G.J.Murphy. C^* -Algebras and Operator Theory., *Academic Press, San Diego*, 1990.
- [20] М.А.Наймарк. Нормированные кольца. *М.: Наука*, 1968.
English translation: M.A.Naimark. Normed Rings. *WN Publishing, Gronnongen, The Netherlands*, 1970.
- [21] P.Niemiec. Models for subhomogeneous C^* -algebras. arXiv: 1310.5595v1 [math.OA] 21 Oct. 2013.
- [22] Yurko, V.A. On recovering Sturm—Liouville operators on graphs. *Math Notes* 79, 572–582 (2006).
- [23] Yurko, V. A. Inverse spectral problems for differential operators on arbitrary compact graphs. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems* 18.3 (2010): 245-261.
- [24] Yurko, V. A. An inverse problem for higher order differential operators on star-type graphs. *Inverse problems* 23.3 (2007): 893.