

ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

**В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов,
Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин**

**Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук**

**Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16
октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых
коммуникаций**

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны: (812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

<http://www.pdmi.ras.ru/preprint/>

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ОТВЕТ НА ВОПРОС МАТВЕЕВА О ВИРТУАЛЬНЫХ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

А. В. Малютин^{1,2} Е. А. Фоминых^{1,2}

¹Санкт-Петербургское отделение
математического института им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27, 191023, Санкт-Петербург, Россия

²Санкт-Петербургский государственный университет,
Факультет математики и компьютерных наук,
Университетская наб., д. 7–9
199034, Санкт-Петербург, Россия
malyutin@pdmi.ras.ru, efominykh@gmail.com

АННОТАЦИЯ

Введенное в 2009 г. С.В. Матвеевым понятие виртуального трехмерного многообразия обобщает понятие классического трехмерного многообразия. Виртуальные многообразия определяются как классы так называемых специальных полиэдров, рассматриваемых с точностью до обратимого преобразования Т (аналога 2-3 преобразования Пахнера для триангуляций). Это определение мотивировано тем, что компактное 3-многообразие полностью задается своим спайном, представляющим собой утолщаемый специальный полиэдр, причем любые два невырожденных специальных спайна одного и того же 3-многообразия связаны цепочкой Т-преобразований, и тем самым мы имеем естественное вложение множества настоящих 3-многообразий в множество виртуальных.

Каждое виртуальное многообразие естественным образом определяет 3-многообразие с особенностями типа конус над проективной плоскостью. Ранее С.В. Матвеев показал, что это сопоставление сюръективно, и поставил вопрос о его инъективности.

В настоящей работе мы доказываем, что данное отображение не инъективно. Более того, мы показываем, что виртуальные многообразия находятся в биективном соответствии с множеством пар, состоящих из 3-многообразий с особенностями типа конус над проективной плоскостью и набором дуг специального вида.

Ключевые слова: трехмерное многообразие, виртуальное многообразие, специальный полиэдр, преобразование Матвеева-Пиергалини.

Работа выполнена при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-01-00741).

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St. Petersburg Department
of Steklov Institute of Mathematics

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В. М. Бабич, Н. А. Вавилов, А. М. Вершик, М. А. Всемиров,
А. И. Генералов, И. А. Ибрагимов, Л. Ю. Колотилина,
Ю. В. Матиясевич, Н. Ю. Нецветаев,
С. И. Репин, Г. А. Серегин

1 Введение

Введенное в 2009 г. С. В. Матвеевым понятие виртуального трехмерного многообразия обобщает понятие классического трехмерного многообразия. Виртуальные многообразия определяются как классы так называемых специальных полиэдров, рассматриваемых с точностью до обратимого преобразования T (аналога 2-3 преобразования Пахнера для триангуляций). Это определение мотивировано тем, что компактное 3-многообразие полностью задается своим спайном, представляющим собой утолщаемый специальный полиэдр, причем любые два невырожденных специальных спайна одного и того же 3-многообразия связаны цепочкой T -преобразований, и тем самым мы имеем естественное вложение множества настоящих 3-многообразий в множество виртуальных.

Каждое виртуальное многообразие естественным образом определяет 3-многообразие с RP^2 -особенностями. В (Mat09) С. В. Матвеев показал, что это сопоставление сюръективно, и поставил вопрос о его инъективности.

В настоящей работе мы доказываем, что данное отображение не инъективно (предложение 1). Более того, мы показываем, что виртуальные многообразия находятся в биективном соответствии с множеством пар, состоящих из 3-многообразий с RP^2 -особенностями и набором дуг специального вида (теорема 3).

2 Предварительные сведения

Напомним основные определения, следуя (Mat07) и (Mat09).

2.1 Простые и специальные полиэдры и спайны

Компактный полиэдр P называется *простым*, если линк каждой его точки гомеоморфен одному из следующих одномерных полиэдров: (а) окружности (точки с таким линком называются *неособыми*); (б) объединению окружности и диаметра (точки с таким линком называются *тройными*); (с) объединением окружности и трех радиусов (точки с таким линком называются *истинными вершинами*). Окрестности точек простого полиэдра приведены на рисунке 1. Точки типов (б) и (с) будем называть *особыми*. Компоненты связности объединения всех неособых точек и объединения всех тройных точек называются соответственно *2-компонентами* и *тройными линиями* полиэдра P . Если 2-компонента простого полиэдра является 2-клеткой, то мы для простоты так и будем ее называть. Множество особых точек простого полиэдра P называется его *особым графом* и обозначается SP . В общем случае множество SP не является графом на множестве истинных вершин полиэдра P , так как SP может содержать замкнутые тройные линии без истинных вершин. Если же замкнутых тройных линий нет, то SP является 4-регулярным графом (каждая вершина инцидентна ровно четырем ребрам), возможно, имеющим петли и кратные ребра.

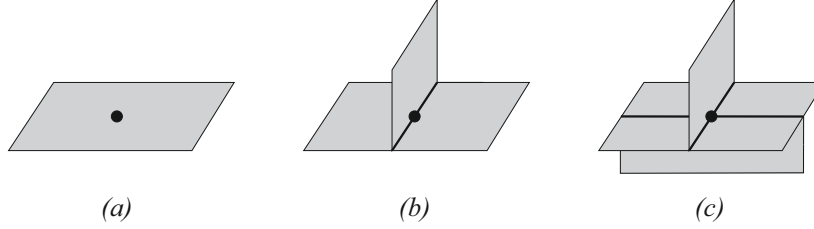


Рис. 1. Окрестности точек простого полиэдра.

Простой полиэдр называется *специальным*, если его тройные линии являются открытыми 1-клетками, а его 2-компоненты – открытыми 2-клетками. Поэтому тройные линии специального полиэдра естественно называть *ребрами*. Специальный полиэдр называется *невыврожденным*, если каждая его компонента связности имеет по меньшей мере две истинные вершины.

Пусть M – связное компактное 3-многообразие с непустым краем. Компактный полиэдр $P \subset M$ называется *спайном* многообразия M , если разность $M \setminus P$ гомеоморфна $\partial M \times (0, 1]$. Спайн трехмерного многообразия называется *простым* или *специальным*, если он является простым или специальным полиэдром, соответственно. Несложно видеть, что специальный спайн связного многообразия связан.

2.2 Виртуальные многообразия

Пусть P – невырожденный специальный полиэдр и E – стандартная окрестность отличного от петли ребра полиэдра P (см. левую часть рис. 2). Удалив из P полиэдр E и заменив его полиэдром E' , изображенным в правой части рис. 2, мы получим новый специальный полиэдр P' . В этом случае будем говорить, что специальный полиэдр P' получается из специального полиэдра P посредством *преобразования* T (а P из P' – *преобразованием* T^{-1}).

Два специальных полиэдра *эквивалентны*, если один можно получить из другого посредством конечной цепочки преобразований $T^{\pm 1}$. *Виртуальное 3-многообразие* определяется как класс эквивалентности невырожденных связных специальных полиэдров.

2.3 Настоящие многообразия есть подмножество виртуальных

Определение виртуального многообразия мотивировано тем, что множество связных замкнутых трехмерных многообразий (как и множество связных компактных трехмерных многообразий с непустым краем) естественным

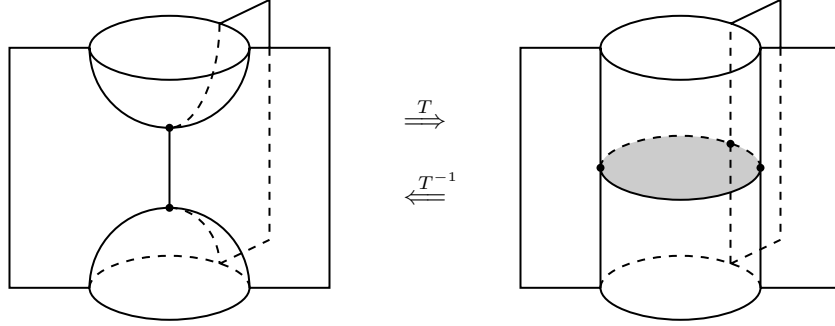


Рис. 2. Преобразования T и T^{-1} .

образом вкладывается в множество виртуальных многообразий. Опишем детали такого вложения.

Каждый специальный полиэдр относится к одному из двух типов. Если специальный полиэдр вкладывается в какое-нибудь 3-многообразие M , то он является специальным спайном своей регулярных окрестности в M и называется *утолщаемым* специальным полиэдром. Однако существуют *неутолщаемые* специальные полиэдры, которые нельзя вложить ни в какое 3-многообразие, что то же самое, нельзя утолщить до 3-многообразия.

Утолщаемость специального полиэдра зависит от его поведения в окрестности края каждой 2-клетки. А именно, для любой 2-клетки ξ специального полиэдра P имеет место характеристическое отображение $f : D^2 \rightarrow P$, которое гомеоморфно отображает внутренность диска D^2 на ξ , а ограничение которого на $S^1 = \partial D^2$ является локальным вложением. Кривая $f|_{\partial D^2} : \partial D^2 \rightarrow P$ (и ее образ $f|_{\partial D^2}(\partial D^2)$) называется *граничной кривой* компоненты ξ и обозначается $\partial\xi$. Обозначим через $A^2 \cup D^2$ кольцо $S^1 \times I$ с диском D^2 , приклеенным вдоль средней окружности, а через $M^2 \cup D^2$ — лист Мёбиуса с диском D^2 , приклеенным вдоль средней линии. Говорят, что граничная кривая $\partial\xi$ имеет *тривиальное* или *нетривиальное нормальное расслоение*, если её характеристическое отображение $f : D^2 \rightarrow P$ продолжается до локального вложения $f^{(A^2 \cup D^2)} : A^2 \cup D^2 \rightarrow P$ или до локального вложения $f^{(M^2 \cup D^2)} : M^2 \cup D^2 \rightarrow P$, соответственно. Для краткости мы будем говорить, что 2-клетка ξ полиэдра P *утолщаема* (или *неутолщаема*), если ее граничная кривая $\partial\xi$ имеет тривиальное (или нетривиальное) нормальное расслоение. Известно (Mat07, теорема 1.1.20), что специальный полиэдр неутолщаем тогда и только тогда, когда хотя бы одна его 2-клетка неутолщаема.

Пусть P — невырожденный специальный спайн многообразия M . Из (Mat07, теорема 1.2.5) следует, что его класс эквивалентности совпадает с множеством всех невырожденных специальных спайнов многообразия M .

Тем самым мы имеем искомое вложение множества настоящих многообразий (замкнутых или с краем) в множество виртуальных многообразий.

2.4 Виртуальные многообразия и многообразия с RP^2 -особенностями

Для получения трехмерной интерпретации виртуальных многообразий в (Mat09) используются трехмерные многообразия с RP^2 -особенностями, которые мы для краткости будем называть RP^2 -образиями. Компактный трехмерный полиэдр M называется *трехмерным многообразием с RP^2 -особенностями* (или RP^2 -образием), если линк каждой его точки гомеоморфен либо двумерной сфере, либо двумерному диску, либо проективной плоскости RP^2 . Следуя Матвееву (Mat09), построим RP^2 -образ $W(P)$ для заданного специального полиэдра P . Заменяя истинные вершины в P трехмерными шарами, а ребра – ручками индекса 1, мы получаем (не обязательно ориентируемое) тело с ручками H , причем каждая 2-клетка C полиэдра P высекает на крае ∂H окружность γ_C . На крае ∂H регулярная окрестность N окружности γ_C гомеоморфна либо кольцу, либо ленте Мёбиуса. В первом случае мы утолщаем C до ручки индекса 2. Во втором случае мы «утолщаем» C до конуса $\text{Con}(RP^2)$, приклеивая к H двумерный диск D вдоль края ∂N и беря конус над гомеоморфным RP^2 объединением $N \cup D$.

Теорема 1 ((Mat09)). *Соответствие $P \mapsto W(P)$ корректно определяет сюръективное отображение $\varphi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ из множества \mathcal{V} всех виртуальных 3-многообразий в множество \mathcal{W} всех связных RP^2 -образов с непустым краем.*

3 Ответ на вопрос Матвеева и точное представление виртуальных многообразий

В (Mat09) ставится вопрос о биективности отображения φ . В данном параграфе мы докажем, что прообраз $\varphi^{-1}(\text{Con}(RP^2))$ бесконечен, тем самым дав отрицательный ответ на поставленный вопрос. Далее мы покажем, что отображение из множества всех виртуальных 3-многообразий в множество всех связных RP^2 -образов с дугами и с непустым краем будет не только сюръективным, но и инъективным. Сначала введем понятие RP^2 -образия с дугами.

RP^2 -образом с дугами назовем пару (W, I) , где W – RP^2 -образ, а I – одномерный подполиэдр в W , гомеоморфный дизъюнктному объединению дуг, такой что число компонент связности в I равно числу особых точек в W , причем у каждой из этих компонент один из концов расположен в особой точке RP^2 -образия W , а второй – на крае ∂W (пересечение $I \cap \partial W$ конечно).

Отталкиваясь от приведенной выше конструкции $P \mapsto W(P)$, построим для произвольного заданного специального полиэдра P RP^2 -образе с дугами $\widetilde{W}(P) = (W(P), I(P))$. Для этого модифицируем конструкцию $P \mapsto W(P)$ на завершающем этапе, отмечая во внутренности диска D точку x и «усложняя» конус над гомеоморфным RP^2 объединением $N \cup D$ до конуса над парой $(N \cup D, \{x\})$. Под конусом $\text{Con}(RP^2, \{x\})$ над парой $(RP^2, \{x\})$, где $x \in RP^2$, мы понимаем пару

$$(\text{Con}(RP^2), \text{Con}\{x\})$$

вложенных конусов, которая в нашем случае и сама является RP^2 -образом с дугой.

Теорема 2. *Сопоставление $P \mapsto \widetilde{W}(P)$ корректно определяет отображение $\tilde{\varphi}: \mathcal{V} \rightarrow \widetilde{\mathcal{W}}$ из множества \mathcal{V} всех виртуальных 3-многообразий в множество $\widetilde{\mathcal{W}}$ всех связных RP^2 -образов с дугами и с непустым краем. Отображение $\tilde{\varphi}$ сюръективно.*

Доказательство. Для доказательства того, что отображение $\tilde{\varphi}$ определено корректно, достаточно проверить, что у специальных полиэдров P и P' , связанных преобразованием T , RP^2 -образия с дугами $\widetilde{W}(P)$ и $\widetilde{W}(P')$ гомеоморфны (как пары). Для этой проверки заметим, что можно считать, что подполиэдр $E \subset P$, заменяемый преобразованием T , содержится внутри тела H , используемого при создании $W(P)$ и $\widetilde{W}(P)$. Это показывает, что H можно представлять себе как H' с одним приклеенным утолщенным диском $D \times [0, 1]$, и тогда 2-клетки полиэдра P высекают на ∂H те же кривые, что и соответствующие им 2-клетки полиэдра P' высекают на $\partial(H' \cup (D \times [0, 1])) = \partial H$, что и демонстрирует требуемую гомеоморфность между $\widetilde{W}(P)$ и $\widetilde{W}(P')$.

Перейдем к доказательству сюръективности. Вырежем в заданном связном RP^2 -образе \widetilde{W} (с дугами и непустым краем) дизъюнктные регулярные окрестности дуг. Остаток U — обычное компактное многообразие с краем. У многообразия U имеется специальный спайн $P \subset U$ (см. (Cas65)) и деформационная ретракция $p: U \rightarrow P$ (см. (Mat07, теорема 1.1.7)). (Очевидно, мы можем считать, что у P не менее двух истинных вершин.) Мы можем выбрать центральные линии $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ лент Мёбиуса, по которым отрезались окрестности дуг, таким образом, чтобы при приклейке к P 2-клеток по кривым $p(\gamma_1), p(\gamma_2), \dots$ получался специальный полиэдр (нужно лишь проконтролировать, чтобы проекции не проходили через истинные вершины и т.п.). Как нетрудно видеть, отображение $\tilde{\varphi}$ переведет получившийся полиэдр в исходное \widetilde{W} , что и демонстрирует сюръективность. \square

Пусть $\pi: \widetilde{\mathcal{W}} \rightarrow \mathcal{W}$ — отображение забывания о дугах, так что $\varphi = \pi \circ \tilde{\varphi}$.

Предложение 1. *Прообраз $\pi^{-1}(\text{Con}(RP^2))$ бесконечен.*

Доказательство. Мы воспользуемся теорией классических узлов и тэнглов. *Одноиточным тэнглом* называется пара (B, t) , где B — трехмерный шар, а t — гомеоморфный дуге одномерный подполиэдр в B

с $t \cap \partial B = \partial t$. Тэнглы рассматриваются с точностью до гомеоморфизма пар. Тэнгл (B, t) называется *незаузелненным*, если существует правильно вложенный двумерный диск $D \subset B$, содержащий t . Говорят, что однониточный тэнгл (B, t) является *суммой* однониточных тэнглов (B_1, t_1) и (B_2, t_2) , если для некоторых дисков $D_1 \subset \partial B_1$, $D_2 \subset \partial B_2$ и гомеоморфизма $f: (D_1, D_1 \cap t_1) \rightarrow (D_2, D_2 \cap t_2)$ тэнгл (B, t) гомеоморфен тэнглу, получаемому из тэнглов (B_1, t_1) и (B_2, t_2) отождествлением дисков D_1 и D_2 при помощи гомеоморфизма f . Заузелненный однониточный тэнгл называют *простым*, если он не представим в виде суммы двух заузелненных тэнглов. Из классической теории узлов известно, что существует бесконечно много заузелненных попарно негомеоморфных однониточных тэнглов, и что каждый однониточный тэнгл каноническим образом разлагается на простые слагаемые (вытекает из теоремы Шуберта о факторизации классических узлов).

Пусть $(W, I) = \text{Con}(RP^2, \{x\}) = (\text{Con}(RP^2), \text{Con}\{x\})$, где $x \in RP^2$, — конус над $(RP^2, \{x\})$. Пару (W, I) естественно интерпретировать как RP^2 -образе W с дугой, в котором дуга незаузелнена. Заметим, что двулистное разветвленное накрытие над (W, I) с ветвлением в особой точке дает незаузелненный тэнгл. Пусть $E \subset \text{Con}(RP^2)$ — шар в $\text{Con}(RP^2)$, такой что $(E, E \cap I)$ есть незаузелненный однониточный тэнгл. Удалив из дуги I участок $I \cap E$ и заменив его заузелненной в E дугой t (имеется в виду, что пара (E, t) есть заузелненный тэнгл, а $\partial t = I \cap \partial E$), мы получаем RP^2 -образе W с «заузелненной» дугой $J := (I \setminus E) \cup t$. Заметим, что двулистное разветвленное накрытие над (W, J) с ветвлением в особой точке дает заузелненный тэнгл, разложение которого на простые однониточные тэнглы (с учетом кратности) есть удвоение разложения заузелненного тэнгла (E, t) . Поскольку гомеоморфность RP^2 -образов с дугами влечет гомеоморфность их разветвленных двулистных накрытий, из описанного в силу вышеупомянутого аналога теоремы Шуберта очевидно вытекает требуемое. \square

Итак, мы доказали, что отображение $\tilde{\varphi}$ сюръективно, а прообраз $\pi^{-1}(\text{Con}(RP^2))$ бесконечен. Поскольку $\varphi = \pi \circ \tilde{\varphi}$, отсюда вытекает следующее.

Следствие 1. *Прообраз $\varphi^{-1}(\text{Con}(RP^2))$ бесконечен.*

Оставшаяся часть работы посвящена доказательству следующей теоремы.

Теорема 3. *Отображение $\tilde{\varphi}$ инъективно.*

4 Вспомогательные сведения

4.1 Полиэдры с краем.

Компактный полиэдр P называется *простым полиэдром с краем*, если линк каждой его точки гомеоморфен одному из следующих одномерных полиэдров:

- (a) окружности;
- (b) окружности с диаметром;
- (c) окружности с тремя радиусами;
- (d) отрезку;
- (e) букету трех отрезков с общим концом.

Множество точек полиэдра P , не имеющих окрестностей типа (a), (b), (c), называется *краем* полиэдра P и обозначается через ∂P .

4.2 Луночные и вершинные преобразования.

Опишем теперь объемлемое луночное преобразование L . Термин «объемлемое» означает, что оно определено не для абстрактных простых полиэдров, а для простых подполиэдров 3-многообразия. Пусть E_T, E'_T – простые полиэдры с краем, участвующие в определении преобразования T . Можно представлять их вложенными в трехмерный шар B^3 . Пусть пара (B^3, E_L) получается из пары (B^3, E_T) удалением крыла, проходящего через обе вершины полиэдра E_T . Аналогично, пара (B^3, E'_L) получается из пары (B^3, E'_T) удалением соответствующего крыла. Пусть P – простой подполиэдр 3-многообразия M , и B^3 – шар в M . Предположим, что пара $(B^3, B^3 \cap P)$ гомеоморфна паре (B^3, E_L) , описанной выше. Тогда объемлемое луночное преобразование L заменяет фрагмент $E_L = B^3 \cap P$ полиэдра P на фрагмент $E'_L \subset B^3$. Заметим, что результат применения преобразования L полностью определяется кривой γ , см. (Mat07, рис. 1.16).

Нам понадобится еще одно преобразование – так называемое вершинное преобразование V , введенное Матвеевым и являющееся частным случаем преобразования L . Выберем по точке на двух ребрах некоторой 2-компоненты α простого полиэдра P и соединим их в α кривой γ , которая разбивает α на две части, причем одна из частей является диском, граничная кривая которого содержит ровно одну истинную вершину полиэдра P . Тогда преобразование V есть преобразование L , определяемое кривой γ , см. (Mat07, рис. 1.14).

4.3 Безупречные полиэдры.

Простой полиэдр P с возможно непустым краем называется *безупречным*, если выполнены следующие условия:

1. Особый граф полиэдра P связан и содержит хотя бы две истинных вершины;
2. Каждая 2-компонента полиэдра P является либо открытой 2-клеткой, либо кольцом, одна из компонент края замыкания которого содержится в крае полиэдра P .

Каждый безупречный полиэдр либо является невырожденным специальным полиэдром, либо получен из такого полиэдра заменой части его 2-клеток кольцами.

Лемма 1. Пусть безупречный полиэдр P вложен в многообразие M так, что пересечение $P \cap \partial M$ содержится в ∂P . Тогда

- (1) Все полиэдры, получающиеся из полиэдра P объемлемыми $T^{\pm 1}$ -преобразованиями в M , безупречны.
- (2) Всякое луночное преобразование для P в M представляется в виде суперпозиции преобразований $T^{\pm 1}$.
- (3) Эквивалентно, если полиэдр, полученный обратным луночным преобразованием, безупречен, то безупречен и исходный, а преобразование представляется в виде суперпозиции преобразований $T^{\pm 1}$.
- (4) Если полиэдр $Q \subset M$, получающийся из полиэдра P цепочкой $T^{\pm 1}$ -преобразований и $L^{\pm 1}$ -преобразований, безупречен, то Q получается из P и цепочкой одних лишь $T^{\pm 1}$ -преобразований.

Доказательство. Утверждения леммы являются аналогами и расширениями утверждений из (Mat07) и доказываются комбинациями представленных в (Mat07) аргументов. Опишем схемы доказательств.

- (1) Легко следует из определений безупречного полиэдра и преобразования T .
- (2) Утверждение является аналогом леммы 1.2.11 из (Mat07). Схема доказательства выглядит следующим образом. Если полиэдр P' получается в результате применения луночного преобразования к P , то P' однозначно определяется по некоторой простой дуге γ правильно вложенной в одну из 2-компонент полиэдра P (концевые точки дуги γ — тройные точки особого графа). Поскольку всякая 2-компонента в P является либо 2-клеткой, либо кольцом, найдется гомотопия дуги γ , являющаяся изотопией на относительной внутренности дуги и локальной изотопией на ее концевых фрагментах и переводящая дугу γ в простую правильно вложенную в ту 2-компоненту полиэдра дугу γ' , расположенную в окрестности некоторой истинной вершины с концевыми точками по разные стороны от этой вершины. То, что луночное преобразование полиэдра P вдоль дуги γ' представимо в виде суперпозиции преобразований $T^{\pm 1}$, доказывается рассуждениями из доказательства предложения 1.2.8 в (Mat07) (см. рис. 1.15 в (Mat07)). То, что в рассматриваемом случае полиэдры, задаваемые луночными преобразованиями вдоль дуг, отличающихся на проход конца дуги через вершину, $T^{\pm 1}$ -эквивалентны, доказывается рассуждением из доказательства леммы 1.2.11 в (Mat07) (см. рис. 1.18 в (Mat07)). То, что в рассматриваемом случае полиэдры, задаваемые луночными преобразованиями вдоль дуг, отличающихся на проход одного конца дуги

через другой, $T^{\pm 1}$ -эквивалентны, доказывается вторым рассуждением из доказательства той же леммы 1.2.11 (см. рис. 1.19 в (Mat07)). Отсюда следует требуемое.

- (3) Утверждение эквивалентно утверждению (2).
- (4) Утверждение доказывается методом создания «арок с мембранами», описанным в (Mat07, стр. 37–39, определение 1.2.28) и примененным в финальной части доказательства теоремы 1.2.30 на стр. 39 в (Mat07). Метод позволяет исключить преобразования L^{-1} и применим к нашему случаю без каких-либо изменений.

□

5 Преобразования неутолщаемых 2-клеток

5.1 Определение Φ -преобразования.

Пусть P — специальный полиэдр с неутолщаемой 2-клеткой C . Рассмотрим P вложенным в отвечающее ему RP^2 -образе $W(P)$, выберем на граничной кривой 2-клетки C произвольный участок J без истинных вершин, выберем какой-нибудь прилегающий к участку J односвязный фрагмент U 2-клетки C , фиксируем какую-нибудь ориентацию¹ на нормальном расслоении к U и, продавливая изотопией дугу J в направлении фрагмента U , выполним в окрестности 2-клетки C четверку луночных преобразования по схеме, представленной на рис. 3 (подробные пояснения к схеме приведены ниже). Будем называть осуществленную по такому правилу трансформацию *преобразованием Φ* (или *Φ -преобразованием*) (полиэдра P по 2-клетке C).

Приведем пояснения к рис. 3. Здесь подразумевается, что полиэдр P трансформируется в фиксированной малой окрестности 2-клетки C , и шесть фрагментов рисунка пошагово описывают эту трансформацию через проекцию на исходную 2-клетку. Для удобства описания мы в основном обсуждаем случай, когда граничная кривая рассматриваемой 2-клетки вложена (в случае с невложенной граничной кривой преобразование проводится тем же способом, но этот случай менее удобен для описания). В случае с вложенной граничной кривой естественно представлять, что на каждом из шести фрагментов рисунка изображен непосредственно диск (обозначим его через D), являющийся замыканием рассматриваемой неутолщаемой 2-клетки C , с проекциями на этот диск трансформируемой в его окрестности части полиэдра. При этом малая окрестность диска D , в которой происходит трансформация и фиксированную проекцию которой на диск мы рас-

¹Окрестность дуги J в полиэдре P есть объединение трех полуплоскостей; выбор ориентации на нормальном расслоении к одной из этих полуплоскостей интерпретируется как выбор порядка на паре, элементами которой являются две оставшиеся полуплоскости.

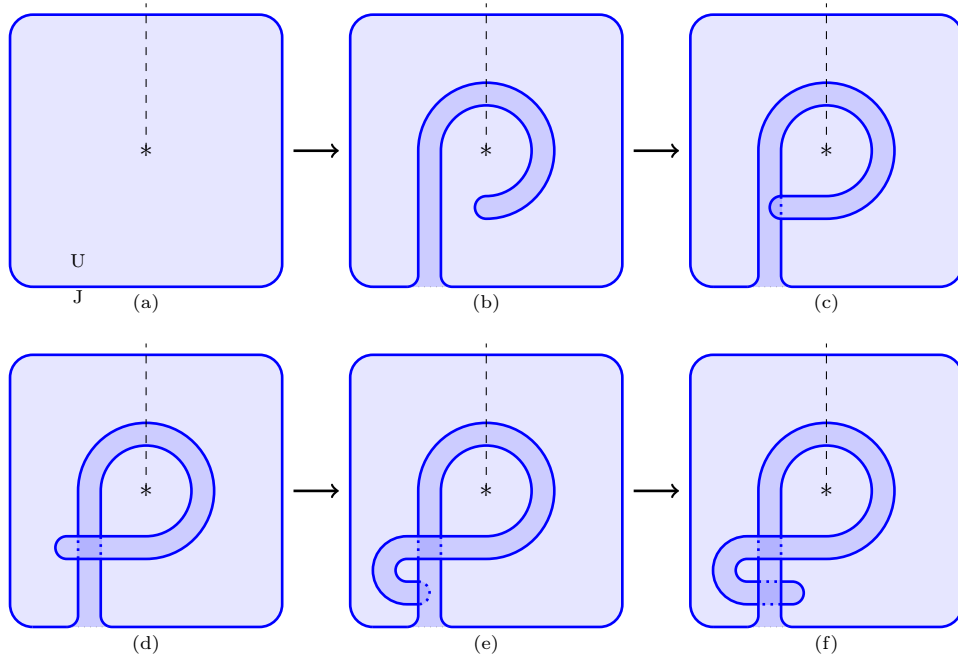


Рис. 3. Преобразование Φ : четверка последовательных луночных преобразований на неутолщаемой 2-клетке.

считаем, представляет собой конус над проективной плоскостью — с вершиной в лежащей в выбранной 2-клетке особой точке.

На рисунке особая точка обозначена символом «*», жирные и пунктирные жирные линии (смысл пунктира объясняется ниже) отвечают особому графу трансформируемого фрагмента полиэдра, три нарастающие градации цвета областей отвечают количеству — одному, двум и трем, соответственно, — проектирующихся в область листов трансформируемого фрагмента полиэдра. Кроме того, в данной конструкции удобно считать, что особый граф трансформируемого фрагмента полиэдра целиком содержится в D , так что жирные (и пунктирные жирные) линии можно мыслить не просто как проекции тройных линий, а именно как сами тройные линии. При этом все перекрестки тройных линий являются именно истинными вершинами, а не перекрестками проекций.

Подробнее остановимся на смысле пунктирных линий на рис. 3. Мы считаем, что проекция окрестности рассматриваемого диска D происходит вдоль нормального расслоения на $D \setminus \{*\}$. Для восстановления комбинаторной структуры полиэдра по его проекции на D требуется информация о порядке расположения элементов полиэдра по отношению к слою проекции. При этом необходимо учитывать, что рассматриваемое нормальное расслоение неориентируемо: прообраз края диска, как и прообраз любой

другой простой замкнутой кривой в D , имеющей единичный индекс относительно особой точки, в проектируемой окрестности является лентой Мебиуса, прообраз окрестности кривой указанного вида дает полную бутылку Клейна, край такого прообраза представляет собой бутылку Клейна. Мы выбираем на D выходящий из особой точки луч R (он изображен на рисунке тонким пунктиром) и экстраполируем фиксированную на нормальном расслоении к U ориентацию на односвязную область $D \setminus R$. Тройная линия особого графа изображена пунктиром в случае, если, выйдя из точки этой тройной линии в направлении фиксированной ориентации нормального расслоения, мы (еще не достигнув края малой окрестности, в которой происходит трансформация) встретим часть трансформируемого полиэдра. (Это соответствует ситуации, когда взгляд наблюдателя направлен навстречу выбранной ориентации, или, другими словами, когда наблюдатель располагается в той части края окрестности, к которой ведет выбранная ориентация.) При такой системе обозначений тройная линия, отделенная от наблюдателя и изображенная, соответственно, пунктирной линией, пересекая R , может становиться «видимой» и должна после момента перехода изображаться уже сплошной, но на рис. 3 в силу сделанного нами выбора луча R такая ситуация не встречается.

Описанная система обозначений однозначно задает комбинаторную схему проводимого преобразования и позволяет восстановить структуру сформированного в результате преобразования нового фрагмента полиэдра. Переход от (а) к (b) отвечает изотопии, начинающейся с «продавливания» участка J тройной линии и создающей «лунку» вдоль простой ρ -образной дуги в неутолщаемой 2-клетке C . При таком продавливании фрагмент 2-клетки, являющийся окрестностью дуги, вдоль которой происходит продавливание, заменяется на два близких «почти параллельных» фрагмента с совпадающими проекциями. Эти фрагменты образуют край лунки и разделены очерчивающей контуры лунки тройной линией. Естественно представлять, что эти продвигающиеся вместе с лункой вглубь клетки фрагменты-половинки расположены в утолщении плоскости рисунка симметрично относительно этой плоскости. При определении взаимного расположения элементов трансформируемого полиэдра мы считаем, что при пересечении луча R «углубляющейся» в процессе изотопии лункой относительный порядок этих двух разделенных тройной линией симметричных и совпадающих на проекции фрагментов-половинок, составляющих край лунки, обращается по отношению к направлению взгляда наблюдателя: та половина края лунки, которая была «ближе» к наблюдателю в области U и слева от луча R , становится после пересечения луча R «дальше» от наблюдателя, чем симметричная противоположащая ей половина. В результате к моменту достижения концом лунки своего же бокового участка (момент (с)) находящаяся изначально (т. е. в районе области U) ближе к наблюдателю половинка края лунки оказывается «дальше» от наблюдателя, а «загораживает» от взора наблюдателя обозначенную пунктиром на рисунке 3(с) часть тройной линии та половина края лунки, которая в районе области U была для наблюдателя «дальней». Дальнейшая трансформация состоит в еще трех

луночных преобразованиях $(c) \rightarrow (d)$, $(d) \rightarrow (e)$ и $(e) \rightarrow (f)$. В каждом случае форма и расположение 2-компонент также определено с помощью пунктира. На рис. 3(f) представлена финальная стадия преобразования Φ . В результате преобразования в полиэдре появляется 8 новых истинных вершин, а исходная неутолщаемая 2-клетка C трансформируется в 9 2-клеток. Эти 2-клетки изображены на рис. 4, — со сдвигом трех фрагментов вправо, чтобы избежать наложения.

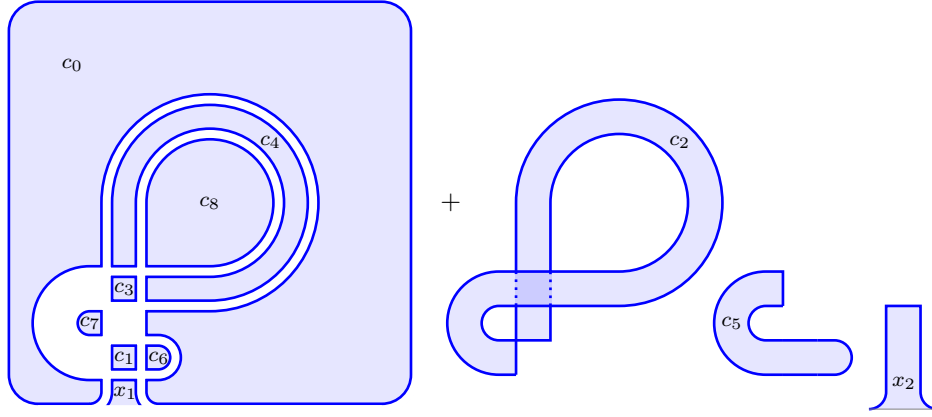


Рис. 4. 2-Клетки, возникающие в результате преобразования Φ .

На рис. 3 новые 2-клетки обозначены через c_0 – c_8 . 2-Компонента c_2 изображена с самоналожением проекции, но она также является 2-клеткой (граничная кривая которой по пяти из лежащих на ней семи истинных вершин проходит дважды). Неутолщаемой является лишь содержащая особую точку 2-клетка c_8 . Фрагменты x_1 и x_2 не являются клетками, — они представляют собой новые фрагменты одной или двух 2-клеток исходного полиэдра P , если граничная кривая исходной неутолщаемой 2-клетки C вложена. В противном случае возможно, что один из фрагментов x_1 и x_2 или они оба относятся к 2-клетке c_0 (см. пример на рис. 5).

Лемма 2. Пусть полиэдр P' получается в результате применения преобразования Φ к некоторой неутолщаемой 2-клетке связного специального полиэдра P , и пусть c' — неутолщаемая 2-клетка полиэдра P' , возникающая в результате этого преобразования. Тогда

- (1) Полиэдр P' специален и невырожден.
- (2) Если полиэдр P невырожден, то полиэдры P и P' $T^{\pm 1}$ -эквивалентны.
- (3) Граничная кривая 2-клетки c' вложена, а замыкание 2-клетки c' пересекает замыкания лишь тех 2-компонент полиэдра P' , которые возникли в результате Φ -преобразования, переводящего P в P' .

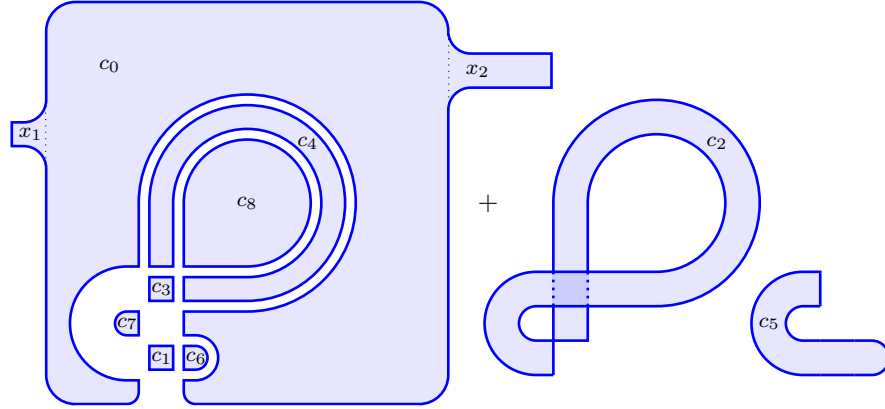


Рис. 5. Случай, когда граничная кривая исходной 2-клетки не вложена, а фрагменты x_1 и x_2 относятся к 2-клетке c_0 .

В частности, замыкание 2-клетки c' не пересекает замыкания ни одной другой неутолщаемой 2-клетки полиэдра P' .

Доказательство. (1) То, что полиэдр P' специален, проверяется непосредственно по структуре его 1- и 2-компонент (см. рис. 3(f) и 4), а также следует из того, что он получается в результате луночных преобразований из специального полиэдра. При этом P' невырожден, поскольку его единственная компонента связности имеет по меньшей мере восемь новых истинных вершин.

- (2) Если полиэдр P невырожден, то $T^{\pm 1}$ -эквивалентность полиэдров P и P' вытекает из леммы 1, поскольку, вложив P в отвечающее ему RP^2 -образе $W(P)$, реализовав Φ -преобразование, переводящее P в P' , как суперпозицию четырех луночных преобразований в $W(P)$, и вырезав из $W(P)$ достаточно малые регулярные окрестности особых точек, мы можем интерпретировать эти луночные преобразования как луночные преобразования вложенного в многообразие безупречного подполиэдра полиэдра P .
- (3) Утверждение вытекает из представленной на рис. 3(f) и 4 структуры окрестности 2-клетки c' (на рис. 4 соответствующая 2-клетка обозначена через c_8).

□

Теорема 4. *У любого невырожденного специального полиэдра найдется $T^{\pm 1}$ -эквивалентный полиэдр, остающийся специальным и невырожденным при удалении любого набора неутолщаемых 2-клеток.*

Доказательство. Пусть P — невырожденный специальный полиэдр. Рассмотрим P вложенным в отвечающее ему RP^2 -образе $W(P)$ и последовательно осуществим (то или иное) Φ -преобразование на каждой из исходных неутолщаемых 2-клеток полиэдра P . (Если замыкания некоторых из исходных неутолщаемых 2-клеток полиэдра пересекаются, то в процессе проведения Φ -преобразования по одним из 2-клеток другие неутолщаемые 2-клетки могут деформироваться — в смысле добавления фрагментов типа x_1 и x_2 как на рис. 4; в таком случае очередные Φ -преобразования проводятся на деформированных неутолщаемых 2-клетках. Это не вызывает затруднения, поскольку неутолщаемые 2-клетки однозначно идентифицируются по содержащимся в них особым точкам. Соответственно, общее количество неутолщаемых 2-клеток в процессе трансформации сохраняется.) Обозначим получившийся полиэдр через P' .

Полиэдры P и P' T^\pm -эквивалентны в силу леммы 2. Покажем, что P' удовлетворяет требованию из формулировки теоремы в том смысле, что каждый полиэдр P'' , получаемый из P' удалением того или иного поднабора неутолщаемых 2-клеток, является специальным и невырожденным. Для доказательства специальности и невырожденности полиэдра достаточно проверить:

- (i) простоту;
- (ii) отсутствие тройных линий, являющихся окружностями;
- (iii) отсутствие 2-компонент, не являющихся 2-клетками;
- (iv) невырожденность.

Предваряя проверку пунктов (i)–(iv) заметим, что каждая неутолщаемая 2-клетка полиэдра P' возникает в результате Φ -преобразования (это определяет структуру окрестности этой 2-клетки в трансформируемом полиэдре на момент ее возникновения: см. 2-клетку c_8 на рис. 4) и что при проведении последующих Φ -преобразований структура окрестности возникшей неутолщаемой 2-клетки не меняется: малая открытая окрестность 2-клетки в полиэдре при проведении последующих Φ -преобразований не затрагивается.

Изменение структуры полиэдра при удалении неутолщаемой 2-клетки, возникшей в результате осуществления Φ -преобразования, иллюстрируется рисунком 6: удаляется 2-клетка c_8 (в обозначениях рис. 4), что ведет к исчезновению одного ребра (петля, ограничивавшая 2-клетку c_8) и одной истинной вершины (правый верхний «угол» 2-клетки c_3), при этом происходит объединение 2-клеток c_2 и c_4 в одну 2-клетку и слияние «верхнего» и «правого» ребер 2-клетки c_3 в одно ребро. 2-Компонента, возникающая как объединение 2-клеток c_2 и c_4 , является 2-клеткой, но изображена на рис. 6 с наложением фрагментов; граничная кривая 2-клетки $c_2 + c_4$ дважды проходит по ребру, примыкающему к 2-клетке c_0 .

Перейдем к проверке условий (i)–(iv).

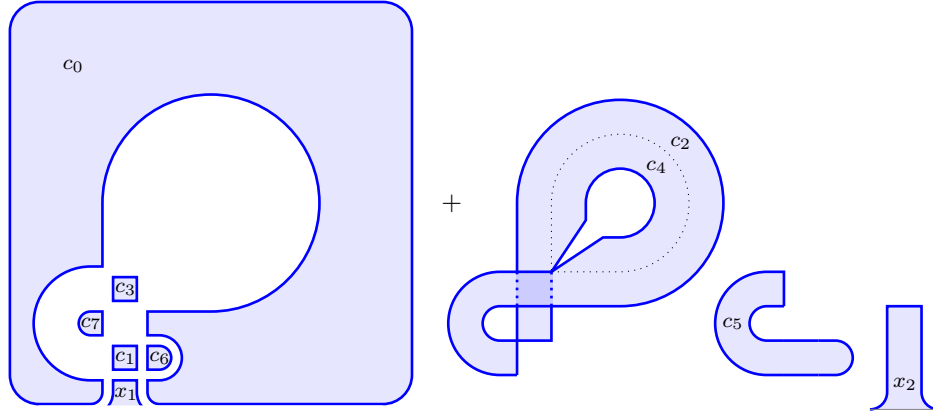


Рис. 6. Изменение структуры полиэдра при удалении неутолщаемой 2-клетки c_8 .

- (i) Заметим, что граничная кривая каждой неутолщаемой 2-клетки в P' вложена, а замыкания неутолщаемых 2-клеток дизъюнкты. Это вытекает из следующего наблюдения: при переходе от P к P' в момент формирования очередной неутолщаемой 2-клетки (т. е. при осуществлении очередного Φ -преобразования) граничная кривая этой 2-клетки вложена и замыкание этой 2-клетки не пересекает замыканий других неутолщаемых 2-клеток трансформируемого полиэдра (см. рис. 4, ср. с леммой 2), а при проведении последующих Φ -преобразований над другими неутолщаемыми 2-клетками окрестность сформированной 2-клетки не затрагивается и граничащие с ней 2-клетки не обращаются в неутолщаемые (см. рис. 4). Отсюда следует, что простота полиэдра P' при удалении его неутолщаемых 2-клеток сохраняется, поскольку потеря простоты при удалении 2-компонент из простого полиэдра происходит лишь в случае, когда в особом графе полиэдра найдется хотя бы одна 1-компонента, по которой граничные кривые удаляемых 2-компонент суммарно проходят в точности два раза.
- (ii) При удалении 2-компонент возникновение тройной линии, являющейся окружностью, происходит лишь в случае, когда в особом графе исходного полиэдра найдется цикл, у которого исчезают (в процессе удаления 2-компонент) все вершины, но не исчезает ни одного ребра. В нашем случае такого цикла не найдется (см. рис. 6): при удалении каждой неутолщаемой 2-клетки выбывает ровно одна истинная вершина — вместе с ребром-петлей в этой вершине, а у каждого из двух остающихся инцидентных этой вершине (и сливающихся при ее исчезновении в одно ребро) ребер в качестве второй концевой вершины выступает вершина, не входящая в замыкание ни одной неутолщаемой 2-клетки. В последнем легко убедиться, обратив внимание на то, что

никакие две истинные вершины полиэдра P' , входящие в замыкания неутолщаемых 2-клеток, не являются смежными вершинами особого графа полиэдра (это ясно следует из определения Φ -преобразования; см рис. 4).

- (iii) Рассмотрим для P' вариант двойственного графа, в котором каждой 2-компоненте отвечает вершина, а каждой 1-компоненте — три ребра, соединяющие вершины, отвечающие 2-компонентам, у которых граничные кривые проходят через эту 1-компоненту (возможны петли). Удалению набора 2-компонент поставим в соответствие раскраску этого двойственного графа $\Gamma(P')$, в которой черным цветом покрашены все вершины, отвечающие удаляемым 2-компонентам, и все ребра, отвечающие исчезающим при этом удалении 1-компонентам, а остальные ребра и вершины в $\Gamma(P')$ покрашены белым. Тогда удаление набора 2-компонент дает 2-компоненту, не являющуюся 2-клеткой, лишь в случае, когда в $\Gamma(P')$ найдется цикл без черных вершин и без белых ребер. В нашем случае такого цикла не возникнет, поскольку каждая удаляемая неутолщаемая 2-клетка дает три черных ребра (ребра между вершинами c_8 и c_2 , c_8 и c_4 , c_2 и c_4 в обозначениях рисунка 4), лишь одно из этих ребер (c_2-c_4) инцидентно двум белым вершинам, и ни одна из этих вершин не инцидентна другим черным ребрам.
- (iv) Невырожденность следует из того, что при удалении каждой из неутолщаемых 2-клеток исчезает лишь одна истинная вершина, в то время как каждое Φ -преобразование дает 8 новых истинных вершин;

Теорема доказана. \square

Замечание. Отметим, что для доказательства теоремы 4 вместо преобразования Φ можно использовать более простое преобразование ρ , определяемое по аналогии с Φ , но с заменой перехода (a)→(f) на более короткий переход (a)→(d) из суперпозиции двух луночных преобразований (см. рис. 3). Однако для ρ -преобразования не выполняется аналог последнего пункта леммы 2, что несколько усложняет доказательство теоремы 4 через ρ -преобразование, поскольку аналогичная конструкция с последовательным применением ρ -преобразования к каждой неутолщаемой 2-клетке потребовала бы не произвольного (как в случае Φ -преобразования), а специального подбора участка особого графа, с которого начинается каждое следующее преобразование цепочки.

6 Точность представления $\tilde{\varphi}$

В настоящем параграфе доказывается теорема 3 об инъективности отображения $\tilde{\varphi}$.

Доказательство. Утверждение об инъективности отображения $\tilde{\varphi}$ равносильно утверждению о том, что каждые два невырожденных связанных спе-

циальных полиэдра, определяющие гомеоморфные (в смысле гомеоморфизма пар) RP^2 -образия с дугами, $T^{\pm 1}$ -эквивалентны.

Случай, когда полиэдры не имеют неутолщаемых 2-клеток, а определяемые ими RP^2 -образия с дугами являются настоящими многообразиями с пустыми множествами особенностей и дуг, составляет в точности «трудную первую часть» теоремы 1.2.5 (см. также теорему 1.2.30) из (Mat07). Нам достаточно рассмотреть случай, когда множества неутолщаемых 2-клеток у специальных полиэдров и, соответственно, множества особенностей и дуг у соответствующих RP^2 -образий с дугами непусты.

Итак, пусть невырожденные связные специальные полиэдры P_1 и P_2 (с непустым множеством неутолщаемых 2-клеток) определяют гомеоморфные RP^2 -образия с дугами (W_1, I_1) и (W_2, I_2) . Мы считаем полиэдр P_i , $i = 1, 2$, вложенным в W_i в качестве I_i -спайна RP^2 -образия W_i в том смысле, что пересечение P_i с I_i совпадает с множеством особых точек в W_i и существует гомеоморфизм $f_i: \partial W_i \times (0, 1] \rightarrow W_i \setminus P_i$ такой, что $f_i(X_i \times (0, 1]) = I_i \setminus P_i$ для некоторого конечного подмножества $X_i \subset \partial W_i$. (Существование таких вложений $P_i \subset W_i$ гарантировано принятым нами определением соответствия между специальными полиэдрами и RP^2 -образиями с дугами.)

Совместим гомеоморфные пары (W_1, I_1) и (W_2, I_2) гомеоморфизмом и обозначим результат через (W, I) , так что P_1 и P_2 — два I -спайна в W . Поскольку Hauptvermutung выполняется для трехмерных симплициальных комплексов (см. (Bro69)), мы можем выбрать совмещающий гомеоморфизм таким образом, чтобы P_1 и P_2 являлись подполиэдрами полиэдра W , что и предполагается в дальнейшем. Заметим, что линк каждой особой точки в W представляет собой проективную плоскость, что в проективной плоскости имеется единственный изотопический класс нестягиваемых простых кривых, что полиэдры P_1 и P_2 пересекают линк каждой особой точки именно по двум таким кривым и что любые две такие кривые изотопны в дополнении к любой точке, через которую ни одна из этих кривых не проходит. Отсюда следует, что совмещающий гомеоморфизм между (W_1, I_1) и (W_2, I_2) может быть выбран еще и так, чтобы в достаточно малой окрестности каждой особой точки полиэдры P_1 и P_2 совпадали, что также предполагается в дальнейшем.

Сведем ситуацию к рассмотрению обычного многообразия без особенностей, вырезав из W окрестности всех особенностей. Для того, чтобы оставшиеся части полиэдров P_1 и P_2 являлись спайнами получающегося многообразия без особенностей, удалим окрестности особенностей вместе с окрестностями дуг из I . Регулярная окрестность каждой дуги из I (как и регулярная окрестность каждой особой точки) представляет собой конус над проективной плоскостью. Выберем и вырежем из W такой набор открытых малых регулярных окрестностей дуг из I , что замыкания этих окрестностей попарно дизъюнкты и каждое из этих замыканий пересекает полиэдры P_1 и P_2 только по неутолщаемым 2-клеткам, содержащим конец соответствующей дуги, причем только по диску, содержащемуся в общей части этих 2-клеток. Получившееся в результате такого вырезания компактное многообразие обозначим через W° , а полиэдры $P_1 \cap W^\circ$ и $P_2 \cap W^\circ$ — через P_1° и

P_2° , соответственно. Таким образом, от неутолщаемых 2-клеток полиэдров P_1 и P_2 в полиэдрах P_1° и P_2° остаются наборы полукрытых колец, а пересечения $P_1^\circ \cap \partial W^\circ$ и $P_2^\circ \cap \partial W^\circ$ совпадают и состоят из простых кривых, являющихся компонентами края указанных колец. Из построения следует, что полиэдры P_1° и P_2° являются спайнами многообразия W° .

Обозначим через P'_1 и P'_2 лежащие в W° полиэдры, получающиеся из полиэдров P_1 и P_2 , соответственно, удалением всех неутолщаемых 2-клеток. Полиэдры P'_1 и P'_2 получаются из P_1° и P_2° коллапсированием колец и являются тем самым спайнами многообразия W° . Согласно теореме 4, мы можем не умаляя общности ограничиться рассмотрением случая, когда каждый из полиэдров P'_1 и P'_2 специален и невырожден (положим, что и P_1 , и P_2 перед началом построений были посредством T^\pm -преобразований трансформированы к нужному виду; это предположение не умаляет общности, поскольку T^\pm -преобразования специального полиэдра не меняют соответствующего RP^2 -образия с дугами).

Согласно «трудной первой части» теоремы 1.2.5 из (Mat07) (см. также теорему 1.2.30 в (Mat07)), полиэдры P'_1 и P'_2 , будучи специальными невырожденными спайнами одного и того же многообразия W° , $T^{\pm 1}$ -эквивалентны. Более того, доказательство в (Mat07) проводится для спайнов, вложенных в многообразие (см. теоремы 1.2.20, 1.2.23, 1.2.27, 1.2.30), и по сути демонстрирует, что любые два невырожденных специальных спайна произвольного связного многообразия переводятся друг в друга конечной цепочкой объемлемых изотопий многообразия и объемлемых преобразований $T^{\pm 1}$. Таким образом, полиэдр P'_1 переводится в P'_2 конечной цепочкой \mathfrak{T}' объемлемых преобразований $T^{\pm 1}$ и объемлемых изотопий многообразия W° . Очевидно, мы можем считать, что P'_1 и P'_2 лежат во внутренней части многообразия W° , а элементы цепочки \mathfrak{T}' не затрагивают края ∂W° .

Дальнейшее доказательство разбивается на два следующих шага.

Шаг 1. Мы «экстраполируем» доставляемый цепочкой \mathfrak{T}' переход от P'_1 к P'_2 на кольца $P_1^\circ \setminus P'_1$ и тем самым на полиэдры P_1° и P_1 ; а именно, мы покажем, что найдется конечная цепочка \mathfrak{L}_1 объемлемых изотопий и объемлемых преобразований $T^{\pm 1}$ и $L^{\pm 1}$ с носителями в W° , переводящая P'_1 в P'_2 .

Шаг 2. Мы дополним цепочку \mathfrak{L}_1 до цепочки \mathfrak{L}_2 объемлемых изотопий и объемлемых преобразований $T^{\pm 1}$ и $L^{\pm 1}$ (с носителями в W°), переводящей P_1° в P_2° (и значит, P_1 в P_2).

Тем самым мы завершим доказательство теоремы: поскольку полиэдры P_1° и P_2° безупречны, в силу леммы 1 цепочка \mathfrak{L}_2 может быть заменена на цепочку \mathfrak{T} , переводящую P_1° в P_2° (и значит, P_1 в P_2) и состоящую из одних лишь $T^{\pm 1}$ -преобразований.

Цепочка \mathfrak{L}_1 шага 1 получается пополнением цепочки \mathfrak{T}' : если к моменту выполнения очередного преобразования из цепочки \mathfrak{T}' замыкания колец из $P_1^\circ \setminus P'_1$ (точнее, замыкания образов этих колец, полученных к данному моменту трансформации) пересекают фрагмент, который нужно заменить при выполняемом преобразовании, то мы сначала сдвигаем кольца «в стороны» преобразованиями $T^{\pm 1}$ и $L^{\pm 1}$, и только затем выполняем преобра-

зование из \mathfrak{T}' (подобная аргументация используется, например, в (Mat07) при доказательстве теоремы 1.2.30). При этом в процессе построения цепочки \mathfrak{L}_1 мы соблюдаем дополнительное условие, состоящее в том, чтобы при «очистке» каждого фрагмента (а значит и на всем протяжении выполнения преобразований строимой цепочки \mathfrak{L}_1) часть преобразуемого полиэдра, отвечающая набору полукоткрытых колец $P_1^\circ \setminus P'_1$, продолжала оставаться набором полукоткрытых колец, т. е. чтобы ни у одного из колец этого набора в процессе преобразований краевые участки не смещались ни на другие кольца набора, ни на другие участки того же самого кольца. (Это условие эквивалентно тому, что особый граф преобразуемого полиэдра продолжает содержаться в его подполиэдре, отвечающем специальному подполиэдру P'_1 , — в таком случае удаление этого подполиэдра дает полиэдр с пустым особым графом, т. е. набор колец.)

Вообще говоря, как нетрудно убедиться, для «очистки» фрагмента достаточно преобразований $T^{\pm 1}$ и L . Пользуясь тем, что полиэдр P_1° безупречен, отсюда можно было бы получить цепочку \mathfrak{L}_1 , состоящую из одних лишь $T^{\pm 1}$ -преобразований. Однако доказательство существования такой $T^{\pm 1}$ -цепочки с добавочным условием о том, что она переводит P'_1 в P'_2 , потребовало бы дополнительного уточнения к лемме 1. Поскольку обратные луночные преобразования снова возникают на шаге 2, мы не будем разрабатывать здесь такое уточнение.

Обозначим полиэдр, в который полученная нами цепочка \mathfrak{L}_1 переводит полиэдр P_1 , через $P_{\frac{3}{2}}$ и перейдем к шагу 2.

Как отмечалось выше, по построению полиэдры P_1° , P_2° , P'_1 и P'_2 являются спайнами многообразия W° . Более того, из конструкции RP^2 -образия с дугами, отвечающего полиэдру, мы заключаем, что найдутся отображения

$$F_i : \partial W^\circ \times [0, 1] \rightarrow W^\circ, \quad i = 1, 2,$$

обладающие следующими свойствами:

- (E1) Ограничение отображения F_i на $\partial W^\circ \times \{0\}$ является тождественным отображением на ∂W° .
- (E2) Ограничение отображения F_i на $\partial W^\circ \times [0, 1]$ является гомеоморфизмом на $W^\circ \setminus P'_i$.
- (E3) $F_i(\partial W^\circ \times \{1\}) = P'_i$.
- (E4) F_i является локальным вложением.
- (E5) $F_i((\partial W^\circ \cap P_i) \times [0, 1)) = P_i^\circ \setminus P'_i$.

Поскольку цепочка \mathfrak{L}_1 строилась с соблюдением дополнительного условия (о том, чтобы часть преобразуемого полиэдра, отвечающая набору полукоткрытых колец $P_1^\circ \setminus P'_1$, продолжала оставаться набором полукоткрытых колец), отсюда следует, что найдется отображение

$$F_{\frac{3}{2}} : \partial W^\circ \times [0, 1] \rightarrow W^\circ,$$

удовлетворяющее тому же набору свойств (E1)–(E5) при $i = \frac{3}{2}$ и $P'_{\frac{3}{2}} = P'_2$.

Из свойств (E1)–(E5) вытекает, что существует (единственный) автогомеоморфизм h цилиндра $\partial W^\circ \times [0, 1]$ такой, что $F_{\frac{3}{2}} \circ h = F_2$. (Действительно, поскольку $F_{\frac{3}{2}}$ и F_2 являются локальными вложениями, определенный на $\partial W^\circ \times [0, 1)$ автогомеоморфизм $F_{\frac{3}{2}}^{-1} \circ F_2$ имеет единственное непрерывное продолжение на $\partial W^\circ \times [0, 1]$.)

Существование гомеоморфизма h в силу леммы 3 влечет существование неподвижной на $\partial W^\circ \times \{0\}$ гомеотопии Φ_t , $t \in [\frac{3}{2}, 2]$, на $\partial W^\circ \times [0, 1]$, в композиции с $F_{\frac{3}{2}}$ дающей гомотопию между $F_{\frac{3}{2}}$ и F_2 .

Обозначим набор кривых $P_1^\circ \cap \partial W^\circ = P_2^\circ \cap \partial W^\circ$ через \mathcal{C} . По соображениям общего положения мы можем выбрать гомеотопию Φ_t таким образом, чтобы объединение

$$P_t^\circ := P'_{\frac{3}{2}} \cup \left(F_{\frac{3}{2}} \circ \Phi_t(\mathcal{C} \times [0, 1]) \right)$$

образа колец $\mathcal{C} \times [0, 1]$ с полиэдром $P'_{\frac{3}{2}} = P'_2$ было при каждом $t \in [\frac{3}{2}, 2]$ полиэдром, этот полиэдр не являлся бы простым полиэдром с краем лишь в конечном числе моментов t и переходу через каждый из этих моментов t_* (т.е. переходу от $P_{t_*-\epsilon}^\circ$ к $P_{t_*+\epsilon}^\circ$ для некоторого $\epsilon > 0$) отвечало бы одно из четверки преобразований T^+ , T^- , L^+ , L^- . Подробно аналогичная конструкция изложена в (Mat07) (см. определение 1.2.15, лемму 1.2.16 и ее доказательство, а также рис. 1.21).

Эти переходы дополняют цепочку \mathfrak{L}_1 до цепочки \mathfrak{L}_2 , завершая шаг 2 и тем самым доказательство теоремы. \square

Замечание. Из приведенного доказательства вытекает, что для любого RP^2 -образия с дугами (W, I) любые два I -спайна в W связаны конечной цепочкой объемлемых изотопий и $T^{\pm 1}$ -преобразований. Это утверждение сильнее, чем доказываемое утверждение о том, что каждые два невырожденных связных специальных полиэдра, определяющие гомеоморфные RP^2 -образия с дугами, $T^{\pm 1}$ -эквивалентны, т.е. связаны конечной цепочкой «абстрактных» $T^{\pm 1}$ -преобразований. Доказательство утверждения об «абстрактных» $T^{\pm 1}$ -преобразованиях можно было бы проводить и другими средствами. Например, вместо гомотопии, переводящей кольца $P_{\frac{3}{2}}^\circ \setminus P'_2$ в кольца $P_2^\circ \setminus P'_2$ целиком и неподвижной на крае, можно использовать гомотопию, совмещающую лишь подкольца этих колец в окрестности полиэдра P'_2 или, эквивалентно, гомотопию, уводящую края колец от края ∂W° . Существование такой гомотопии следует уже из хорошо известного (более слабого в сравнении с леммой 3) утверждения о том, что гомотопные гомеоморфизмы произвольной замкнутой поверхности изотопны ((Ers66, Theorem 6.4)).

Замечание. У теоремы 3 имеется еще один ясно просматривающийся в контексте конструкций работы (Mat07) путь доказательства. Ключевой отличительный момент этого альтернативного пути состоит в экстраполяции на случай простых спайнов с краем техники так называемых *преобразований*

вздутия (раздел 1.2.3 в (Mat07)). Такой способ доказательства потребовал бы проверки следующих утверждений.

- В произвольном 3-многообразии любые два простых спайна с краем, если их края правильно вложены и совпадают, эквивалентны с точностью до добавления и удаления вздутий (экстраполяция теоремы 1.2.20 из (Mat07)).
- В произвольном 3-многообразии любые два простых спайна с краем, эквивалентные с точностью до добавления и удаления вздутий, эквивалентны с точностью до преобразований $T^{\pm 1}$ и $L^{\pm 1}$ (экстраполяция утверждения из доказательства теоремы 1.2.27 в (Mat07)).

Реализуя такую альтернативную схему доказательства, мы могли бы (начав доказательство так же, как это сделано выше, и дойдя в рассуждениях до многообразия W° со спайнами P_1° и P_2°) применить два вышеприведенных утверждения и затем воспользоваться последним утверждением леммы 1.

7 Вспомогательная лемма об изотопиях

Настоящий раздел посвящен вспомогательной лемме об изотопиях, используемой в доказательстве теоремы 3.

Лемма 3. *Пусть F — компактная поверхность. Тогда пространство тождественных на $F \times \{0\}$ гомеоморфизмов $F \times [0, 1] \rightarrow F \times [0, 1]$ связно.*

Доказательство. Утверждение леммы 3 достаточно проверить для связных поверхностей. Случай связной компактной поверхности, отличной и от проективной плоскости, и от сферы, следует из (Hat76, Lemma 2). Случай проективной плоскости ясен из конструкции, приведенной в доказательстве леммы 4.1.1 в (KM92). Случай сферы следует из эквивалентной формы гипотезы Смейла, данной в (Hat81, assertion (b) p. 430). \square

Замечание. Лемма 3 сформулирована в топологической категории, но, как известно, для размерности 3 это эквивалентно кусочно-линейной и гладкой категориям. Переход между топологической и кусочно-линейной категориями обеспечивается Hauptvermutung (Moi52) и трюком Александра, переход к гладкой категории обеспечивается доказанной в (Hat83) гипотезой Смейла, а во многих случаях достаточно и теоремы Серфа (Ser68) (подробности перехода между категориями обсуждаются, например, в (Bro69), (Lau74), (Ham74), (Hat83), (HR85, Remark 5.8(a)), (McC91)).

Замечание. Альтернативные доказательства для случая сферы в лемме 3 можно получить из теоремы Серфа (Ser68) или последовательным применением трюка из теоремы о лампочке, поворота и трюка Александра.

Список литературы

- [Bro69] E. M. Brown, The Hauptvermutung for 3-complexes, Trans. Amer. Math. Soc. 1969, 144, 173–196.
- [Cas65] B. G. Casler, An imbedding theorem for connected 3-manifolds with boundary, Proc. Amer. Math. Soc., 1965, 16, 559–566.
- [Cer68] J. Cerf, Sur les Difféomorphismes de la Sphère de Dimension Trois ($\Gamma_4 = 0$), Lecture Notes in Mathematics, vol. 53, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1968.
- [Eps66] D. B. A. Epstein, Curves on 2-manifolds and isotopies, Acta Math., 1966, 115, 83–107.
- [Ham74] M.-E. Hamstrom, Homotopy in homeomorphism spaces, TOP and PL. Bull. Amer. Math. Soc., 1974, 80, 207–230.
- [Hat76] A. Hatcher, Homeomorphisms of sufficiently large P^2 -irreducible 3-manifolds, Topology, 1976, 15, no. 4, 343–347.
- [Hat81] A. Hatcher, On the diffeomorphism group of $S^1 \times S^2$, Proc. Amer. Math. Soc., 1981, 83, 427–430.
- [Hat83] A. Hatcher, A Proof of the Smale Conjecture, $\text{Diff}(S^3) \simeq O(4)$. Ann. of Math. (2), 1983, 117, no. 3, 553–607.
- [Hem73] J. Hempel, 3-manifolds, Ann. of Math. Studies 86, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1976.
- [HR85] C. Hodgson, J. H. Rubinstein, Involutions and isotopies of lens spaces, in Knot Theory and Manifolds (Vancouver, B.C., 1983), Lecture Notes in Math. 1144, Springer-Verlag, Berlin (1985), pp. 60–96.
- [KM92] J. Kalliongis, D. McCullough, Homeotopy groups of irreducible 3-manifolds which may contain two-sided projective planes, Pacific J. Math., 1992, 153, no. 1, 85–117.
- [Lau74] F. Laudenbach, Topologie de la dimension trois: homotopie et isotopie, Astérisque 12, Soc. Math de France, Paris, 1974.
- [Mat09] S. V. Matveev, Virtual 3-manifolds, Siberian electronic mathematical reports, 2009, 6, 518–521.
- [Mat07] С. В. Матвеев. Алгоритмическая топология и классификация трехмерных многообразий. М. МЦНМО, 2007, 456 с.
- [McC91] D. McCullough, Virtually geometrically finite mapping class groups of 3-manifolds. J. Differential Geom., 1991, 33, no. 1, 1–65.
- [Moi52] E. Moise, Affine structures in 3-manifolds, V. The triangulation theorem and Hauptvermutung, Ann. of Math. (2), 1952, 56, 96–114.

[Wal68] F. Waldhausen, On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large,
Ann. of Math. (2), 1968, 87, 56–88.