ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

Препринт ПОМИ — 09/2020

ЭРГОДИЧНОСТЬ И ТОТАЛЬНОСТЬ РАЗБИЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С АЛГОРИТМОМ RSK

А. М. Вершик [1], **Н. В. Цилевич** [2]

[1] С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, С.-Петербургский государственный университет, Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН.
E-mail: `avershik@pdmi.ras.ru`.

[2] С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН.
E-mail: `natalia@pdmi.ras.ru`.

АННОТАЦИЯ

Рассматриваются асимптотические свойства последовательностей разбиений (σ-алгебр), ассоциированных с алгоритмом Робинсона–Шенстеда–Кнута, в пространствах с бернуллиевской мерой.

Ключевые слова: алгоритм RSK, юнгизация, эргодичность последовательности разбиений, тотальность последовательности разбиений.

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

---

1 Введение

В работе рассматриваются динамические свойства алгоритма Робинсона–Шенстеда–Кнута (RSK) при последовательном его применении к растущим последовательностям символов. В частности, мы интересуемся асимптотическими свойствами этого алгоритма. По-видимому, впервые «динамическая» точка зрения на RSK появилась в статье [?], в которой обнаружено, что применение RSK к бесконечной последовательности независимых символов из линейно упорядоченного множества, точнее использование «правой части» алгоритма (Q-таблицы), задаёт соответствие между мерами Бернулли (т. е. ансамблями независимых последовательностей символов) и центральными (марковскими) мерами на пространствах путей некоторого графа (графа Юнга). Иначе говоря, алгоритм RSK задаёт сохраняющие меру гомоморфизмы бернуллиевских пространств в марковские пространства путей. В связи с этим неизбежен вопрос, является ли этот гомоморфизм изоморфизмом mod0. Положительный ответ на него был получен сравнительно недавно в важных работах [?, ?]; применяемый там метод использует преобразование Шютценберже (jeu de taquin) и технически довольно сложен.

Первым автором [?] предложена программа возможного решения этих задач для определённого класса графов, включающая развитие эргодического метода [?] для нахождения инвариантных мер и так называемой *бернуллизации* графов. Здесь оказались полезными методы теории фильтраций (убывающих последовательностей σ-алгебр) [?]; в частности, возникла новая задача о характеризации фильтраций *типа де Финетти*, т. е. таких фильтраций, для которых всякая эргодическая центральная мера есть мера Бернулли. В этой связи отметим, что в данной работе (как и в [?]) рассматриваются свойства и структура некоторых эргодических центральных мер — мер бернуллиевского происхождения; тот факт, что таковы все центральные меры для графа Юнга с конечным числом частот, отнюдь не вытекает из этих рассмотрений. Однако методы, предложенные в [?], позволили авторам в готовящейся работе доказать, что всякая центральная мера такого типа является бернуллиевской в указанном смысле. Следовательно, алгоритм RSK как раз связывает *все* центральные меры с бернуллиевскими. Именно таким образом должно возникнуть давно ожидаемое чисто комбинаторное доказательство известной теоремы Тома (см. [?]).

В этой статье мы исследуем лишь часть общей проблемы для простейшего случая, а именно для случая конечного числа символов в линейно упорядоченном множестве, и доказываем справедливость двух в известном смысле двойственных друг другу фактов: тотальность коплактического отношения эквивалентности (= двойственной эквивалентности по Кнуту) и эргодичность так называемой юнговской фильтрации, т. е. хвостовой фильтрации, определяемой Q-таблицами в алгоритме RSK. Наши рассуждения, с одной стороны, доказывают соответствующие утверждения из [?] новым способом, а с другой, применимы в гораздо более общей ситуации. В доказательствах мы рассматриваем отдельно случай двух строк ввиду его наглядности и того, что соответствующие утверждения используются далее в качестве базы индукции.

Мы считаем читателя знакомым с понятием алгоритма Робинсона–Шенстеда–Кнута (RSK) и его основными свойствами (см., например, [?]); необходимые сведения относительно теории представлений бесконечной симметрической группы (граф Юнга, центральные меры, параметры Тома и т. п.) см., например, в [?], а относительно теории измеримых разбиений и фильтраций — например, в [?].

2 Юнгизация

Пусть $\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, k\}$ — конечный алфавит. Рассмотрим пространство бесконечных слов $X = \mathcal{A}^\infty$ в алфавите $\mathcal{A}$ с бернуллиевской мерой m_p^∞, где $p = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$, $p_i = \mathrm{Prob}(i)$, и $p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_k > 0$.

Пусть $\mathcal{T}$ — множество бесконечных стандартных таблиц Юнга (или, что то же самое, множество бесконечных путей в графе Юнга $\mathbb{Y}$) и μ_p — центральная мера на $\mathcal{T}$ с параметрами Тома $(p, 0, 0)$. Заметим, что мера μ_p сосредоточена на подмножестве таблиц, состоящих из не более k строк.

Через $\mathrm{RSK}(w) = (P(w), Q(w))$ будем обозначать отображение Робинсона–Шенстеда–Кнута (RSK), применённое к конечной последовательности (слову) w в алфавите $\mathcal{A}$. Таким образом, $P(w), Q(w)$ — пара таблиц Юнга одинаковой формы (с не более чем k строками), которую мы будем обозначать через $\mathrm{sh}(w)$; таблица $P(w)$ полустандартна, а таблица $Q(w)$ стандартна. Для бесконечной последовательности $x \in X$ обозначим через $[x]_n = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{A}^n$ её начальный сегмент длины n, а через $\{x\}_{n+1} := (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots) \in \mathcal{A}^\infty$ — её «хвост». Также обозначим через $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ таблицы, полученные применением алгоритма RSK к начальному сегменту последовательности x: $\mathrm{RSK}([x]_n) = (P_n(x), Q_n(x))$.

Следуя [**?**], введём отображение из пространства бесконечных последовательностей в пространство бесконечных таблиц Юнга.

Определение 1. Будем последовательно применять отображение RSK к начальным сегментам $[x]_n$ последовательности $x \in X$. Из конструкции алгоритма RSK ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n(x) =: Q(x)$ есть бесконечная стандартная таблица Юнга, которую мы обозначим $\pi(x)$. Полученное отображение

$$\pi : (X, m_p^\infty) \to (\mathcal{T}, \mu_p) \tag{1}$$

называется *юнгизацией*.

В [**?**] доказано, что юнгизация (**??**) есть гомоморфизм пространств с мерой.

3 Юнговские последовательности разбиений на пространстве Бернулли. Основные теоремы

На пространстве (X, m_p^∞) бесконечных бернуллиевских последовательностей естественным образом определены следующие измеримые разбиения:

- *цилиндрическое* разбиение σ_n уровня n, элемент которого есть множество (конечной меры) последовательностей, у которых фиксирован начальный сегмент длины n, а хвост какой угодно;
- *хвостовое* разбиение τ_n уровня n, элемент которого есть (конечное) множество последовательностей, у которых фиксирован хвост начиная с $(n+1)$-го этажа, а начало какое угодно.

Будем называть их *бернуллиевскими* цилиндрическим и хвостовым разбиениями. Они обладают следующими свойствами:

- последовательность разбиений σ_n монотонно возрастает и в слабой топологии стремится к разбиению ε на отдельные точки;
- последовательность разбиений τ_n монотонно убывает и в слабой топологии стремится к тривиальному разбиению ν;
- при каждом n разбиения τ_n и σ_n независимы по бернуллиевской мере m_p^∞.

Теперь рассмотрим следующие измеримые разбиения на пространстве бесконечных таблиц Юнга $\mathcal{T}$:

- *цилиндрическое* разбиение ξ_n уровня n, элемент которого есть множество (конечной меры) бесконечных путей в графе Юнга (т. е. бесконечных таблиц Юнга), у которых фиксирован начальный сегмент длины n, а хвост какой угодно.
- *хвостовое* разбиение η_n уровня n, элемент которого есть (конечное) множество бесконечных путей в графе Юнга, у которых фиксирован хвост начиная с n-го этажа, а начало какое угодно.

Определение 2. *Юнговским цилиндрическим* и *юнговским хвостовым разбиениями* пространства X бесконечных последовательностей будем называть разбиения $\bar{\xi}_n := \pi^{-1}\xi_n$ и $\bar{\eta}_n := \pi^{-1}\eta_n$ соответственно, т. е. прообразы цилиндрического и хвостового разбиения на таблицах Юнга под действием юнгизации π. Убывающую последовательность разбиений $\{\bar{\eta}_n\}$ будем называть также юнговской фильтрацией.

Таким образом, $x \sim_{\bar{\xi}_n} y \iff Q([x]_n) = Q([y]_n)$, а $x \sim_{\bar{\eta}_n} y \iff \operatorname{sh}([x]_N) = \operatorname{sh}([y]_N)$ при $N \geq n$. Очевидно, $\bar{\xi}_n \prec \sigma_n$.

Для начала опишем структуру юнговских разбиений. Напомним (см., например, [**?**]), что *класс эквивалентности по Кнуту* (или *плактический класс*) $\mathcal{P}_t$ и *класс двойственной эквивалентности по Кнуту* (или *коплактический класс*) $\mathcal{C}_t$, соответствующий данной таблице Юнга t размера n, — это множество всех слов u длины n, для которых $P(u) = t$ (соответственно $Q(u) = t$).

Теорема 1. *Юнговские разбиения на пространстве X описываются следующим образом.*

- *Элементы разбиения $\bar{\xi}_n$ параметризуются стандартными таблицами Юнга t размера n и совпадают с коплактическими классами $\mathcal{C}_t$.*
- *Элементы разбиения $\bar{\eta}_n$ параметризуются парами (t, y), где t — полустандартная таблица Юнга размера n, а y — бесконечное слово в алфавите $\mathcal{A}$, и имеют вид*

  $$\{x \in X : [x]_n \in \mathcal{P}_t,\ \{x\}_{n+1} = y\};$$

  иными словами, это множество всех последовательностей, у которых начальный сегмент длины n принадлежит данному плактическому классу, а хвост совпадает с данной бесконечной последовательностью.

Первое утверждение этой теоремы очевидно, а второе будет доказано в следующем параграфе (см. лемму **??**).

Напомним, что убывающая последовательность разбиений (фильтрация) в пространстве с мерой называется *эргодической*, если она стремится в слабой топологии к тривиальному разбиению ν (на одно непустое множество). В свою очередь, возрастающая последовательность разбиений в пространстве с мерой называется *тотальной*, если она стремится в слабой топологии к разбиению ε на отдельные точки. Таким образом, эргодичность последовательности разбиений означает, что не существует неконстантной измеримой функции, постоянной на элементах всех разбиений, а тотальность — что для почти всех пар различных точек они рано или поздно окажутся в разных элементах разбиения.

Очевидно, последовательность разбиений $\bar{\xi}_n$ монотонно возрастает, а последовательность разбиений $\bar{\eta}_n$ монотонно убывает. Наша цель – исследовать предельные разбиения $\bar{\xi} := \lim\limits_{n\to\infty} \bar{\xi}_n$ и $\bar{\eta} := \lim\limits_{n\to\infty} \bar{\eta}_n$, а именно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Юнговские разбиения на пространстве X бесконечных бернуллиевских последовательностей обладают следующими свойствами:*

- *последовательность разбиений $\bar{\xi}_n$ тотальна;*
- *последовательность разбиений $\bar{\eta}_n$ эргодична.*

В качестве следствия мы получаем результат, доказанный (для случая произвольной центральной меры) в [**?**].

Следствие 1. *Отображение юнгизации* (**??**) *является изоморфизмом пространств с мерой между (X, m_p^∞) и $(\mathcal{T}, \mu_p)$.*

Заметим, что пространство $(\mathcal{T}, \mu_p)$ бесконечных путей на графе Юнга с центральной мерой μ_p можно отождествить с пространством траекторий марковского процесса — случайного блуждания на «камере Вейля»

$$\mathcal{W}_k = \{(x_1, \ldots, x_k) : x_i \in \mathbb{Z},\, x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_k \geq 0\},$$

где для пути $\mathcal{T} \ni t = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots)$ мы полагаем $\lambda^{(n)} = (\lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_k^{(n)}) \in \mathcal{W}_k$ (таким образом, на каждом шаге процесса одна из координат увеличивается на 1). Итого, отображение юнгизации (**??**) устанавливает изоморфизм между пространством (X, m_p^∞) траекторий *бернуллиевского процесса* и пространством траекторий *марковского процесса* случайного блуждания на $\mathcal{W}_k$. Например, в случае $k = 2$ и равномерной меры $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ переходные вероятности марковского процесса задаются следующей формулой (см. [**?**]): если обозначить через $j = \lambda_1 - \lambda_2$ разность длин строк диаграммы, то

$$\mathrm{Prob}(j, j+1) = \frac{j+2}{2(j+1)}, \qquad \mathrm{Prob}(j, j-1) = \frac{j}{2(j+1)}.$$

Введём ещё одно семейство разбиений ζ_n. А именно, на пространстве последовательностей X определено естественное действие бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_\infty$ перестановками элементов. Обозначим через ζ_n разбиение пространства X на орбиты конечной подгруппы $\mathfrak{S}_n \subset \mathfrak{S}_\infty$. Иными словами, две последовательности $x, y \in X$ принадлежат одному элементу разбиения ζ_n тогда и только тогда, когда $\{x\}_{n+1} = \{y\}_{n+1}$, а $[x]_n$ и $[y]_n$ имеют одинаковый состав элементов. Будем называть разбиения ζ_n *де финеттиевскими*. Заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n = \nu$ по закону нуля и единицы Хьюитта–Сэвиджа.

4 Доказательства основных теорем

4.1 Случай $k = 2$

В этом разделе мы для наглядности подробно разберём случай двухбуквенного алфавита $\mathcal{A}_2 = \{1, 2\}$. Заметим, что пространство $X_2 = \mathcal{A}_2^\infty$ с бернуллиевской мерой m^∞, где $m = (p_1, p_2)$, можно естественным образом рассматривать как пространство траекторий случайного блуждания на одномерной решётке с вероятностью p_1 шага направо и вероятностью p_2 шага налево. Напомним, что мы предполагаем, что $p_1 \geq p_2 > 0$.

Рассмотрим последовательность из $\mathcal{A}_2^n$ как слово $w = x_1 \dots x_n$. Поместим в скобки каждый фактор в w вида 21. Оставшиеся буквы составляют подслово w_1 в w. Поместим в скобки каждый фактор в w_1 вида 21. Останется подслово w_2. Будем продолжать эту процедуру, пока это возможно, т. е. пока не останется слово вида $w_k = 1^a 2^b = x_{i_1} \dots x_{i_{a+b}}$, где $a, b \geq 0$. Элементы $x_{i_1}, \dots, x_{i_{a+b}}$ последовательности w назовём *свободными*, а остальные элементы — *связанными*. Количество поставленных пар скобок назовём *рангом* последовательности и обозначим $r(w)$.

Заметим, что из свойств случайного блуждания на одномерной решётке с $p_1 \geq p_2$ следует, что у п. в. последовательности $x \in X_2$ существует начальный фрагмент, в котором единиц больше, чем двоек. Это означает, что x содержит бесконечно много свободных единиц, а каждая двойка в достаточно длинном начальном сегменте становится связанной.

Следующее утверждение с очевидностью следует из конструкции RSK.

Лемма 1. *Пусть* $\mathrm{sh}([x]_n) = (\lambda_1, \lambda_2)$. *Тогда* $\lambda_2 = r([x]_n)$. *Именно, вторая строка таблицы* $Q([x]_n)$ *содержит индексы связанных единиц, а первая — индексы всех остальных элементов.*

Отсюда можно получить явное описание разбиений $\bar{\xi}_n$ и $\bar{\eta}_n$, из которого, в частности, следует теорема **??** для случая двухбуквенного алфавита.

Предложение 1. *Юнговские разбиения на пространстве* $X_2 = \mathcal{A}_2^\infty$ *описываются следующим образом:*

- $x \sim_{\bar{\xi}_n} y \iff$ *в* $[x]_n, [y]_n$ *совпадают все связанные координаты;*
- $x \sim_{\bar{\eta}_n} y \iff [x]_n, [y]_n$ *имеют одинаковый состав элементов и одинаковый ранг (т. е.* $P_n(x) = P_n(y)$*) и* $\{x\}_{n+1} = \{y\}_{n+1}$.

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Докажем второе. Для начала покажем, что $\bar{\eta}_n \succ \tau_n$. Пусть $x \sim_{\bar{\eta}_n} y$. Надо доказать, что $x \sim_{\tau_n} y$, т. е. $x_N = y_N$ при $N \geq n + 1$. Пусть это не так, и пусть m — номер первой различающейся координаты. Не умаляя общности, $x_m = 1$, $y_m = 2$. Но $y_m = 2$ — свободный элемент в $[y]_m$, поэтому $x_m = 1$ — свободный элемент в $[x]_m$ (иначе $\mathrm{sh}([x]_m) \neq \mathrm{sh}([y]_m)$). Тогда хвост $\{y\}_{m+1}$ не содержит свободных единиц, что, как отмечено выше, имеет вероятность 0. Итак, $\bar{\eta}_n \succ \tau_n$. Утверждение про ранг очевидно. Покажем, что $[x]_n$ и $[y]_n$ имеют одинаковый состав элементов. Пусть это не так и, скажем, $[y]_n$ имеет больше свободных двоек, чем $[x]_n$. Поскольку каждая двойка с вероятностью 1 становится связанной в достаточно длинном сегменте, в момент появления единицы, связывающейся с «лишней» двойкой, нарушится условие $\mathrm{sh}([x]_N) = \mathrm{sh}([y]_N)$. □

Следствие 2. *Три хвостовые фильтрации на X_2 (бернуллиевская, юнговская и де финеттиевская) связаны соотношением*

$$\tau_n \prec \zeta_n \prec \bar{\eta}_n.$$

Предложение 2. *Для двухбуквенного алфавита верна теорема* **??**, *т. е. последовательность юнговских цилиндрических разбиений тотальна, а юнговская фильтрация эргодична.*

Доказательство. Пусть $x \sim_{\bar{\xi}} y$ и $x \neq y$. Тогда существует такое n, что $[x]_{n-1} = [y]_{n-1}$ и $x_n \neq y_n$. Но $x \sim_{\bar{\xi}_n} y$, поэтому все связанные координаты у $[x]_n$ и $[y]_n$ совпадают, а значит, отличаться могут только свободные. Не умаляя общности, x_n — свободная единица, а y_n — свободная двойка. Но с вероятностью 1 существует такое $N > n$, что в $[y]_N$ эта двойка становится связанной. При этом элемент $x_n = 1$ остаётся свободным и в $[x]_N$. Но тогда $x \nsim_{\bar{\xi}_N} y$, противоречие. Это доказывает, что $\bar{\xi} = \varepsilon$.

Теперь докажем, что $\bar{\eta} = \nu$. Рассмотрим де финеттиевские разбиения ζ_n и докажем, что если $x \sim_{\zeta_n} y$, то существует такое N, что $x \sim_{\bar{\eta}_N} y$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n = \nu$ по закону нуля и единицы Хьюитта–Сэвиджа, из этого следует искомое утверждение, что $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{\eta}_n = \nu$.

Итак, пусть $x \sim_{\zeta_n} y$, но $x \nsim_{\bar{\eta}_n} y$, т. е. $\{x\}_{n+1} = \{y\}_{n+1} =: z$, а $[x]_n, [y]_n$ имеют одинаковый состав элементов, но разный ранг. Рассмотрим общий хвост z последовательностей. По мере появления в z свободных единиц они будут спариваться со свободными двойками из $[x]_n$ и $[y]_n$. Пусть N — момент, когда оказалась связанной последняя из свободных двоек в $[x]_n, [y]_n$. Нетрудно понять, что $\mathrm{sh}([x]_N) = \mathrm{sh}([y]_N)$ и, следовательно, $x \sim_{\bar{\eta}_N} y$. Как обсуждалось выше, это завершает доказательство. □

4.2 Общий случай

В этом разделе мы докажем теоремы **??** и **??** в полном объёме. Напомним, что мы предполагаем, что $p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_k > 0$. Нам понадобится следующая лемма, показывающая, что каждый элемент $a \neq 1$ с вероятностью 1 рано или поздно будет выбит из первой строки P-таблицы.

Лемма 2. *Зафиксируем $\ell = 2, \ldots, k$ и обозначим через $m_n = m_n(\ell, x)$ число элементов, равных ℓ, в первой строке таблицы $P_n(x)$ случайной последовательности $x \in X$. Тогда для любого $q \in \mathbb{N}$ с вероятностью 1 существует такое $N \geq q$, что $m_N = 0$.*

Доказательство. Если $m_q = 0$, доказывать нечего. Пусть $m_q \neq 0$. Обозначим через a_n максимальное число, меньшее ℓ, в первой строке таблицы $P_n(x)$ (или 1, если такого числа нет). Ясно, что

$$m_{n+1} = \begin{cases} m_n + 1, & \text{если } x_{n+1} = \ell, \\ m_n - 1, & \text{если } a_n \leq x_{n+1} < \ell, \\ m_n, & \text{если } x_{n+1} > \ell \text{ или } x_{n+1} < a_n. \end{cases}$$

При этом первое событие происходит с вероятностью p_ℓ, а второе — с вероятностью $r_n := p_{a_n} + \ldots + p_{\ell-1} \geq p_{\ell-1}$. Если $p_{\ell-1} > p_\ell$, то искомое утверждение очевидно. В противном случае пусть $p_{\ell-1} = p_\ell = p$ и рассмотрим случайное блуждание $\{z_n\}$ на $\mathbb{Z}$ с переходными вероятностями

$$z_{n+1}=\begin{cases} z_n+1 & \text{с вероятностью } p,\\ z_n-1 & \text{с вероятностью } p,\\ z_n & \text{с вероятностью } 1-2p.\end{cases}$$

Воспользуемся критерием возвратности случайного блуждания с приращением (шагом) d (см., например, [?]): оно возвратно тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{t\nearrow 1}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{1-t\phi(x)}=\infty$, где $\phi(x)=\mathbb{E}e^{ixd}$. В нашем случае $\phi(x)=2p\cos x+1-2p$, откуда легко следует, что критерий выполнен и блуждание возвратно, а значит, по свойствам возвратного случайного блуждания, стартуя из m_q, оно с вероятностью 1 дойдёт до 0. Теперь применим метод каплинга. А именно, рассмотрим случайный процесс $\{z'_n\}_{n\geq q}$ на (X,m_p^∞), определённый следующим образом. Возьмём случайную величину ε_n, независимую от всех остальных и равную 1 с вероятностью $\frac{p}{r_n}$ и 0 с вероятностью $1-\frac{p}{r_n}$. Положим

$$z'_{n+1}=\begin{cases} z'_n+1, & \text{если } x_{n+1}=\ell,\\ z'_n-1, & \text{если } a_n\leq x_{n+1}<\ell \text{ и } \varepsilon_n=1,\\ z'_n & \text{иначе.}\end{cases}$$

Ясно, что, с одной стороны, $\{z'_n\}$ имеет то же распределение, что и $\{z_n\}$, а значит, с вероятностью 1 дойдёт до 0, а с другой, для любого $n\geq q$ выполнено неравенство $m_n\leq z'_n$. Отсюда следует, что исходный процесс $\{m_n\}$ также с вероятностью 1 дойдёт до 0. $\square$

Следующая лемма завершает доказательство теоремы **??**.

Лемма 3. *Две последовательности $x,y\in X$ принадлежат одному элементу юнговского хвостового разбиения $\bar\eta_n$ тогда и только тогда, когда их начала $[x]_n$ и $[y]_n$ принадлежат одному плактическому классу, а хвосты $\{x\}_{n+1}$ и $\{y\}_{n+1}$ совпадают.*

Доказательство. Проведём индукцию по числу букв k в алфавите $\mathcal{A}$. База индукции $k=2$ доказана в предложении **??**. Докажем индукционный переход $k-1\mapsto k$. Рассмотрим подтаблицы $P'([x]_i)$ и $P'([y]_i)$ в $P([x]_i)$ и $P([y]_i)$ соответственно, состоящие из всех строк кроме первой (и заполненные числами $2,\dots,k$). Тогда $\mathrm{sh}(P'([x]_i))=\mathrm{sh}(P'([y]_i))$ при $i\geq n$, значит, по предположению индукции $P'([x]_n)=P'([y]_n)$ и последовательности элементов, выбиваемых во вторую строку, в $\{x\}_{n+1}$ и $\{y\}_{n+1}$ одинаковы. Покажем, что $m_n(k,x)=m_n(k,y)$ в обозначениях леммы **??**. Пусть это не так, скажем, $m_n(k,x)>m_n(k,y)$. Из совпадения форм таблиц ясно, что разность $m_i(k,x)-m_i(k,y)$ может уменьшиться, только когда из первой строки таблицы $P([x]_i)$ выбивается k, а из из первой строки таблицы $P([y]_i)$ — меньший элемент, что, как отмечено выше, невозможно. Однако из леммы **??** следует, что существует такое $j>n$, что $m_j(k,x)=0$, противоречие. Значит, $m_n(k,x)=m_n(k,y)$ и, как следует из рассуждений выше, в $\{x\}_{n+1}$ и $\{y\}_{n+1}$ элементы k стоят на одних и тех же местах. Теперь заметим, что эти элементы не влияют на процесс роста подтаблиц, состоящих из меньших элементов. Обозначим через x' и y' подпоследовательности в x и y соответственно, получающиеся выкидыванием элементов, равных k. Из доказанного следует, что $x'\sim_{\bar\eta_{n'}}y'$, где n' — число элементов, меньших k, в $[x]_n$ и $[y]_n$. Осталось применить к x' и y' предположение индукции. $\square$

Следствие 3.

$$\bar{\xi}_n \prec \sigma_n, \qquad \bar{\eta}_n \succ \zeta_n \succ \tau_n.$$

Теперь перейдём к доказательству теоремы **??**.

1. Если $x \sim_{\bar{\xi}} y$, то $\mathrm{sh}([x]_n) = \mathrm{sh}([y]_n)$ для всех n, и из леммы **??** при $n = 0$ следует, что $x = y$.

2. Как и в предложении **??**, мы хотим воспользоваться де финеттиевскими разбиениями и законом Хьюитта–Сэвиджа. А именно, искомое утверждение вытекает из следующей леммы.

Лемма 4. *Если $x \sim_{\zeta_n} y$, то существует такое $N \geq n$, что $x \sim_{\bar{\eta}_N} y$.*

Доказательство. Поскольку ζ_n — разбиение на орбиты под действием симметрической группы $\mathfrak{S}_n$, достаточно доказать утверждение для случая, когда x и y получаются друг из друга действием кокстеровской образующей $\sigma_i = (i, i+1)$, т. е. перестановкой x_i и x_{i+1}. Не умаляя общности, предположим, что $x_i = u < v = x_{i+1}$. Тогда $y_i = v$, $y_{i+1} = u$ и $y_j = x_j$ при $j \neq i, i+1$.

Обозначим через $R^{(j)}(x)$ и $R^{(j)}(y)$ первые строки таблиц $P_j(x)$ и $P_j(y)$ соответственно (как мультимножества). Докажем, что с вероятностью 1 существует такое $N \geq i+1$, что $R^{(N)}(x) = R^{(N)}(y)$. Если $R^{(i+1)}(x) = R^{(i+1)}(y)$, доказывать нечего. В противном случае $\max R^{(i)}(x) = u$. Положим $v_{i+1} := v$. Тогда $R^{(i+1)}(x) = R^{(i+1)}(y) \cup \{v_{i+1}\}$.

Пусть на j-м шаге выполнено соотношение

$$R^{(j)}(x) = R^{(j)}(y) \cup \{v_j\}. \tag{2}$$

Положим $A_j := \{d \in R^{(j)}(x) : d < v_j\}$ и $B_j := \{d \in R^{(j)}(x) : d \geq v_j\} \setminus \{v_j\}$ (мультимножества) и обозначим $u_j := \max A_j$. В частности, $u_{i+1} = u$ и $B_{i+1} = \emptyset$. Посмотрим на вставку очередного элемента x_{j+1}, где $j > i$. Ясно, что если $x_{j+1} < u_j$ или $x_{j+1} \geq v_j$, то в $R^{(j)}(x)$ и $R^{(j)}(y)$ происходят одинаковые изменения; в этом случае мы полагаем $v_{j+1} = v_j$, и сохраняется соотношение (**??**).

Если же $u_j \leq x_{j+1} < v_j$, то $R^{(j+1)}(x) = R^{(j)}(x) \setminus \{v_j\} \cup \{x_{j+1}\}$ и возможны два случая. Если $B_j \neq \emptyset$, то $R^{(j+1)}(y) = R^{(j)}(y) \setminus \{\min B_j\} \cup \{x_{j+1}\}$, и соотношение (**??**) сохраняется при $v_{j+1} = \min B_j$. Наконец, если $B_j = \emptyset$, то $R^{(j+1)}(y) = R^{(j)}(y) \cup \{x_{j+1}\}$ и $R^{(j)}(x) = R^{(j)}(y)$.

Мы утверждаем, что такой момент наступит с вероятностью 1. Предположим, что это не так. Заметим, что v_j никогда не уменьшается, а увеличиваться может лишь конечное число раз, поскольку алфавит $\mathcal{A}$ конечен. Пусть $v_j = v$ при всех достаточно больших j. По лемме **??** с вероятностью 1 существует бесконечно много таких j, что $m_j(v, y) = 0$, т. е. $v \notin B_j$. Значит, с вероятностью 1 после какого-то из них произойдёт событие $u_j \leq x_{j+1} < v$ (имеющее вероятность $\geq p_{v-1} > 0$). Если при этом $B_j \neq \emptyset$, то $v_{j+1} = \min B_j > v$, противоречие. Следовательно, $B_j = \emptyset$ и, как показано ранее, $R^{(j)}(x) = R^{(j)}(y)$.

Итого, мы доказали, что если $x \sim_{\zeta_n} y$, то с вероятностью 1 существует такое N, что $P_N(x)$ и $P_N(y)$ имеют одинаковую первую строку. Но тогда последовательности элементов, выбиваемых во вторую строку в этих таблицах, также отличаются только перестановкой, а значит, по индукции мы получаем, что рано или поздно станут равными все строки (поскольку их конечное число). Лемма доказана. □

Как обсуждалось ранее, утверждение теоремы **??** о юнговской фильтрации следует из доказанной леммы **??** по закону нуля и единицы Хьюитта–Сэвиджа. Теорема доказана.

Список литературы

[1] А. М. Вершик, Описание инвариантных мер для действий некоторых бесконечномерных групп, *Докл. АН СССР* **218**, вып. 4, 749–752 (1974).

[2] А. М. Вершик, Теория фильтраций подалгебр, стандартность и независимость, *Успехи мат. наук* **72,** вып. 2 (434), 67–146 (2017).

[3] А. М. Вершик, Три теоремы о единственности меры Планшереля с разных позиций, *Тр. МИАН* **305**, 71–85 (2019).

[4] А. М. Вершик, К обоснованию эргодического метода описания инвариантных мер, готовится к печати.

[5] А. М. Вершик, Н. В. Цилевич, Марковские меры на таблицах Юнга и индуцированные представления бесконечной симметрической группы, *Теория вероятн. и ее примен.* **51**, вып. 1, 47–63 (2006).

[6] У. Фултон, *Таблицы Юнга и их приложения к теории представлений и геометрии*, МЦНМО, Москва, 2006.

[7] S. V. Kerov, *Asymptotic Representation Theory of the Symmetric Group and its Applications in Analysis*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[8] S. V. Kerov and A. M. Vershik, The characters of the infinite symmetric group and probability properties of the Robinson–Schensted–Knuth algorithm, *SIAM J. Algebraic Discrete Methods* **7**, No. 1, 116–124 (1986).

[9] D. Romik and P. Śniady, Jeu de taquin dynamics on infinite Young tableaux and second class particles, *Ann. Probab.* **43**, No. 2, 682–737 (2015).

[10] P. Śniady, Robinson–Schensted–Knuth algorithm, jeu de taquin, and Kerov–Vershik measures on infinite tableaux, *SIAM J. Discrete Math.* **28**, No. 2, 598–630 (2014).

[11] F. Spitzer, *Principles of Random Walk*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1976.