ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПОМИ ПРЕПРИНТ — 7/2020

К юбилею Василия Михайловича Бабича

ПОРОГОВЫЕ АППРОКСИМАЦИИ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО НЕОТРИЦАТЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРНОГО ПУЧКА

В. А. Слоущ, Т. А. Суслина

Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., д. 7/9,
Санкт-Петербург, 199034, Россия

e-mail: v.slouzh@spbu.ru
e-mail: t.suslina@spbu.ru

24 ноября 2020 г.

АННОТАЦИЯ

В гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ рассматривается семейство операторов $A(t)$, $t \in \mathbb{R}$, допускающих факторизацию вида $A(t) = X(t)^*X(t)$, где $X(t) = X_0 + X_1 t + \dots + X_p t^p$, $p \geqslant 2$. Предполагается, что точка $\lambda_0 = 0$ является изолированным собственным значением оператора $A(0)$ конечной кратности. Пусть $F(t)$ — спектральный проектор оператора $A(t)$ для промежутка $[0, \delta]$. При $|t| \leqslant t^0$ получены аппроксимации по операторной норме в $\mathfrak{H}$ для проектора $F(t)$ с погрешностью $O(t^{2p})$ и для оператора $A(t)F(t)$ с погрешностью $O(t^{4p})$ (так называемые пороговые аппроксимации). Числа δ и t^0 контролируются явно. На основе пороговых аппроксимаций найдено приближение по операторной норме в $\mathfrak{H}$ для резольвенты $(A(t) + \varepsilon^{2p} I)^{-1}$ при $|t| \leqslant t^0$ и малом $\varepsilon > 0$ с погрешностью $O(1)$. Все упомянутые аппроксимации даются в терминах спектральных характеристик оператора $A(t)$ вблизи нижнего края спектра. Результаты нацелены на применение к задачам усреднения периодических дифференциальных операторов в пределе малого периода.

Ключевые слова: теория усреднения, полиномиальные операторные пучки, пороговые аппроксимации, корректоры, аналитическая теория возмущений.

Исследование выполнено при поддержке РНФ (проект 17-11-01069).

Введение

0.1. **Теоретико-операторный подход к задачам теории усреднения.** В серии работ Бирмана и Суслиной [BSu1, BSu2, BSu3, BSu4] был предложен и развит теоретико-операторный (спектральный) подход к задачам теории усреднения (гомогенизации) периодических дифференциальных операторов. В упомянутых работах была найдена аппроксимация резольвенты матричного эллиптического оператора A_ε второго порядка, действующего в $\mathbb{R}^d$. Коэффициенты оператора периодичны и зависят от $\mathbf{x}/\varepsilon$, где ε — малый положительный параметр. Подход основан на применении масштабного преобразования, теории Флоке–Блоха и аналитической теории возмущений. К матричным эллиптическим операторам высокого порядка $2p$ теоретико-операторный подход применялся в работах Вениаминова [Ve] и Кукушкина и Суслиной [KuSu].

В обсуждаемом подходе после масштабного преобразования и разложения оператора в прямой интеграл возникает семейство дифференциальных операторов, действующих на ячейке периодичности и зависящих от параметра (квазиимпульса). Удобно изучать это операторное семейство в рамках абстрактной теоретико-операторной схемы. См. [BSu1, глава 1], [BSu2], [BSu4, глава 1], [Ve, §3,4], [KuSu, §1–3]. Изучается пучок самосопряженных операторов $A(t)$ вида $A(t) = X(t)^*X(t)$, где $X(t)$ полиномиально зависит от одномерного параметра $t \in \mathbb{R}$ (это полином степени p). Случай $p = 1$ отвечает дифференциальным операторам второго порядка. В настоящей работе предполагается, что $p \geqslant 2$.

Предлагаемая работа посвящена дальнейшему развитию теоретико-операторной схемы из статей [Ve] и [KuSu]. Этот материал представляет и самостоятельный интерес для спектральной теории операторных пучков, аналитически зависящих от параметра. Применению полученных результатов к задачам гомогенизации авторы планируют посвятить отдельную статью; для операторов четвертого порядка (случай $p = 2$) результаты анонсированы в заметках [SlSu1, SlSu2].

0.2. **Операторное семейство $A(t)$. Пороговые аппроксимации.** Пусть $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_*$ — некоторые комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. В пространстве $\mathfrak{H}$ рассматривается семейство самосопряженных операторов $A(t)$, зависящих от одномерного параметра $t \in \mathbb{R}$ и заданных в факторизованном виде $A(t) = X(t)^*X(t)$. Здесь $X(t) : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$ — полиномиальный пучок операторов

$$X(t) = X_0 + X_1 t + \cdots + X_p t^p, \quad p \geqslant 2.$$

Оператор X_0 замкнут и плотно определен, оператор X_p ограничен. Накладываются некоторые условия подчиненности операторов $X_1, \dots, X_{p-1}$ оператору X_0, обеспечивающие замкнутость оператора $X(t)$ на области $\operatorname{Dom} X_0$. Основное предположение состоит в том, что точка $\lambda_0 = 0$ является изолированным собственным значением конечной кратности n "невозмущенного" оператора $A(0) = X_0^* X_0$. Пусть $\mathfrak{N} = \operatorname{Ker} A(0)$ и P — ортопроектор пространства $\mathfrak{H}$ на подпространство $\mathfrak{N}$.

Семейство $A(t)$ аналитически зависит от параметра t. Мы изучаем спектральные характеристики оператора $A(t)$ вблизи нижнего края спектра методами аналитической теории возмущений. При этом за счет использования факторизации оператора $A(t)$ удается далеко продвинуться.

Фиксируем достаточно малое число $\delta > 0$. При достаточно малом t^0 и $|t| \leqslant t^0$ оператор $A(t)$ имеет на промежутке $[0, \delta]$ ровно n собственных значений с учетом кратностей. (Значения δ и t^0 контролируются; см. §1.) В силу аналитической теории возмущений существуют вещественно-аналитические ветви собственных значений $\lambda_j(t)$ и вещественно-аналитические ветви ортонормированных собственных векторов $\varphi_j(t)$, $j = 1, \dots, n$, оператора $A(t)$. При этом $\lambda_j(t) = \lambda_j^{(2p)} t^{2p} + O(|t|^{2p+1})$, $\lambda_j^{(2p)} \geqslant 0$, и $\varphi_j(t) = \varphi_j^{(0)} + O(|t|)$, $j = 1, \dots, n$. Векторы $\varphi_j^{(0)}$, $j = 1, \dots, n$, образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}$. Ключевое значение имеет понятие *спектрального ростка* операторного семейства $A(t)$ при $t = 0$:

росток — это самосопряженный оператор $S : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$, для которого $S\varphi_j^{(0)} = \lambda_j^{(2p)}\varphi_j^{(0)}$, $j = 1, \dots, n$. За счет факторизации удается дать инвариантное описание ростка.

Пусть $F(t)$ — спектральный проектор оператора $A(t)$ для промежутка $[0, \delta]$. *Наша первая цель* — найти аппроксимации по операторной норме в $\mathfrak{H}$ для операторов $F(t)$ и $A(t)F(t)$ на промежутке $|t| \leqslant t^0$ (пороговые аппроксимации). В [Ve, §4] были получены старшие члены таких аппроксимаций с оценками погрешностей

$$\|F(t) - P\| \leqslant C|t|, \quad \|A(t)F(t) - t^{2p}SP\| \leqslant C|t|^{2p+1}, \quad |t| \leqslant t^0.$$

Наш первый основной результат: *найдены более точные аппроксимации с оценками погрешностей следующего вида*:

$$\Big\|F(t) - \Big(P + \sum_{k=p}^{2p-1} F_k t^k\Big)\Big\| \leqslant Ct^{2p},$$

$$\Big\|A(t)F(t) - \sum_{k=2p}^{4p-1} G_k t^k\Big\| \leqslant Ct^{4p}.$$

Здесь $G_{2p} = SP$. Для операторов F_k, $k = p, \dots, 2p-1$, и G_k, $k = 2p, \dots, 4p-1$, удается получить инвариантное описание.

При этом, как и в предшествующих работах, для вычисления аппроксимаций используются степенные разложения аналитических ветвей собственных значений и собственных векторов оператора $A(t)$, а для получения оценок погрешностей применяется метод интегрирования разности резольвент операторов $A(t)$ и $A(0)$ по подходящему контуру в комплексной плоскости.

0.3. **Аппроксимация резольвенты** $(A(t) + \varepsilon^{2p}I)^{-1}$**.** Полученные аппроксимации для операторов $F(t)$ и $A(t)F(t)$ применяются к вопросу о приближении резольвенты $(A(t) + \varepsilon^{2p}I)^{-1}$ по операторной норме в $\mathfrak{H}$ при малом $\varepsilon > 0$. При этом дополнительно предполагается, что при некотором $c_* > 0$ выполнено неравенство $A(t) \geqslant c_* t^{2p} I$, $|t| \leqslant t^0$, что обеспечивает невырожденность спектрального ростка. Старший член аппроксимации резольвенты был найден в [Ve, §4]:

$$\big\|(A(t) + \varepsilon^{2p}I)^{-1} - (t^{2p}S + \varepsilon^{2p}I)^{-1}P\big\| \leqslant C\varepsilon^{-(2p-1)}, \quad |t| \leqslant t^0, \ \varepsilon > 0.$$

Наш второй основной результат: *найдена более точная аппроксимация резольвенты с учетом корректоров и оценкой погрешности порядка* $O(1)$. Корректоры описываются в терминах резольвенты спектрального ростка $(t^{2p}S + \varepsilon^{2p}I)^{-1}P$ и операторов F_l, G_k.

Подчеркнем, что норма оператора $(A(t)+\varepsilon^{2p}I)^{-1}F(t)^{\perp}$ оценивается константой и “уходит в остаток”. Это показывает “пороговую природу” вопроса.

Аналогичные результаты для квадратичного операторного семейства $A(t)$ (случай $p = 1$) были получены в работе [BSu2].

0.4. **План статьи.** Работа содержит четыре параграфа. В §1 вводится операторное семейство $A(t)$, обсуждаются свойства аналитических ветвей собственных значений и собственных элементов, а также степенные разложения для оператор-функций $F(t)$ и $A(t)F(t)$ в окрестности нуля. В §2 вычисляются первые коэффициенты этих степенных разложений в терминах разрешающих операторов некоторых вспомогательных задач. В §3 установлены пороговые аппроксимации для операторов $F(t)$ и $A(t)F(t)$. С их помощью в §4 найдена искомая аппроксимация резольвенты $(A(t) + \varepsilon^{2p}I)^{-1}$ при малом ε.

0.5. **Обозначения.** Пусть $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Символы $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{H}}$ и $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$ означают соответственно скалярное произведение и норму в $\mathfrak{H}$; символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*}$ означает норму линейного ограниченного оператора из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}_*$. Иногда мы опускаем индексы. Пространство линейных ограниченных операторов из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}_*$ обозначается через

$\mathcal{B}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_*)$; при $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_*$ пишем просто $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$. Если X — линейный оператор из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}_*$, то $\operatorname{Dom} X$ — его область определения, $\operatorname{Ker} X$ — его ядро. Для замкнутого линейного оператора A в $\mathfrak{H}$ через $\sigma(A)$ обозначим его спектр, а через $\varrho(A)$ — его резольвентное множество.

Если $\mathfrak{N}$ — подпространство в $\mathfrak{H}$, то символ $\mathfrak{N}^\perp$ означает его ортогональное дополнение. Если P — ортопроектор пространства $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}$, то $P^\perp = I - P$ — ортопроектор на $\mathfrak{N}^\perp$.

0.6. **Благодарности.** Авторы признательны А. И. Назарову за полезные обсуждения.

§ 1. Некоторые следствия аналитической теории возмущений для полиномиальных неотрицательных пучков

1.1. **Полиномиальные неотрицательные пучки.** Пусть $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Задано семейство операторов (полиномиальный пучок)

$$X(t) = \sum_{j=0}^{p} X_j t^j, \quad t \in \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{N}, \quad p \geqslant 2.$$

Операторы $X(t)$, X_j действуют из пространства $\mathfrak{H}$ в пространство $\mathfrak{H}_*$. Предполагается, что оператор X_0 плотно определен и замкнут, оператор X_p определен на всем $\mathfrak{H}$ и ограничен. Дополнительно подчиним операторы X_j, $j = 0, \dots, p$, следующим условиям.

Условие 1.1. *Для любых $j = 0, \dots, p$, $t \in \mathbb{R}$, справедливы соотношения*

$$\operatorname{Dom} X(t) = \operatorname{Dom} X_0 \subset \operatorname{Dom} X_j \subset \operatorname{Dom} X_p = \mathfrak{H}.$$

Условие 1.2. *Для любых $j = 0, \dots, p-1$, $u \in \operatorname{Dom} X_0$ выполнено*

$$\|X_j u\|_{\mathfrak{H}_*} \leqslant C_0 \|X_0 u\|_{\mathfrak{H}_*}, \tag{1.1}$$

где постоянная $C_0 \geqslant 1$ не зависит от j и u.

При сделанных предположениях оператор $X(t)$ заведомо замкнут, если выполнено неравенство $|t| \leqslant (2(p-1)C_0)^{-1}$. Из условия (1.1) вытекают включения

$$\operatorname{Ker} X_0 \subset \operatorname{Ker} X_j, \quad j = 1, \dots, p-1. \tag{1.2}$$

Основным объектом исследования для нас является семейство неотрицательных самосопряженных операторов в $\mathfrak{H}$ (полиномиальный неотрицательный пучок)

$$A(t) = X(t)^* X(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad |t| \leqslant (2(p-1)C_0)^{-1}.$$

Обозначим $A(0) = X_0^* X_0 =: A_0$ и положим $\mathfrak{N} := \operatorname{Ker} A_0 = \operatorname{Ker} X_0$. Через P обозначим ортопроектор пространства $\mathfrak{H}$ на подпространство $\mathfrak{N}$.

Условие 1.3. *Предполагается, что точка $\lambda_0 = 0$ — изолированная точка спектра оператора A_0, при этом $n := \dim \mathfrak{N} < \infty$.*

Обозначим через d^0 расстояние от точки $\lambda_0 = 0$ до $\sigma(A_0) \setminus \{\lambda_0\}$. Через $F(t,h)$ обозначим спектральный проектор оператора $A(t)$, отвечающий отрезку $[0,h]$. Зафиксируем положительное число $\delta \leqslant \min\{d^0/36, 1/4\}$ и выберем число $t^0 > 0$, удовлетворяющее условию

$$t^0 \leqslant \delta^{1/2} C_1^{-1}, \text{ где } C_1 = \max\{(p-1)C_0, \|X_p\|\}. \tag{1.3}$$

Отметим, что $t^0 \leqslant 1/2$. Оператор $X(t)$ автоматически замкнут при $|t| \leqslant t^0$, поскольку $t^0 \leqslant (2(p-1)C_0)^{-1}$. В работе [Ve, предложение 3.10] показано, что при $|t| \leqslant t^0$ выполнено

$$F(t,\delta) = F(t, 3\delta), \quad \operatorname{rank} F(t,\delta) = n. \tag{1.4}$$

Это означает, что при $|t| \leqslant t^0$ на промежутке $[0,\delta]$ оператор $A(t)$ имеет ровно n собственных значений (с учетом кратностей), а промежуток $(\delta, 3\delta)$ свободен от спектра. Для удобства будем использовать сокращенное обозначение $F(t) := F(t,\delta)$. Через $\mathbf{D}_\delta$ обозначим гильбертово пространство $\operatorname{Dom} X_0$ с (гильбертовой) нормой $\|\cdot\|_\delta^2 := \|X_0 \cdot\|_{\mathfrak{H}_*}^2 + \delta \|\cdot\|_{\mathfrak{H}}^2$.

1.2. **Аналитические ветви собственных значений и собственных векторов оператора $A(t)$ в окрестности нуля.** Согласно аналитической теории возмущений (см. [K], а также [Ve] и [KuSu]) при $|t| \leqslant t^0$ существуют вещественно-аналитические функции $\lambda_j(t)$ (ветви собственных значений) и вещественно-аналитические $\mathfrak{H}$-значные функции $\varphi_j(t)$ (ветви собственных векторов) такие, что

$$A(t)\varphi_j(t) = \lambda_j(t)\varphi_j(t), \quad j = 1, \dots, n, \quad |t| \leqslant t^0, \tag{1.5}$$

и набор $\{\varphi_j(t)\}_{j=1}^n$ образует ортонормированный базис в подпространстве $F(t)\mathfrak{H}$ при $|t| \leqslant t^0$. Для достаточно малого $t_* \in (0, t^0]$ имеют место абсолютно сходящиеся степенные разложения

$$\lambda_j(t) = \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_j^{(s)} t^s, \quad j = 1, \dots, n, \quad |t| \leqslant t_*; \tag{1.6}$$

$$\varphi_j(t) = \sum_{s=0}^{\infty} \varphi_j^{(s)} t^s, \quad j = 1, \dots, n, \quad |t| \leqslant t_*. \tag{1.7}$$

Последний ряд сходится по норме в $\mathfrak{H}$. Следующее утверждение уточняет свойства рядов (1.6) и (1.7). Частично оно было установлено в работе [Ve].

Предложение 1.4. *Пусть выполнены условия* 1.1, 1.2 *и* 1.3, *и* $t_* \in (0, t^0]$ *достаточно мало. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $\varphi_j^{(s)} \in \operatorname{Dom} X_0$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, \dots, n$; *ряд* (1.7) *абсолютно сходится в* $\mathbf{D}_\delta$ *при* $|t| \leqslant t_*$.
2) $\lambda_j^{(s)} = 0$, $s = 0, \dots, 2p-1$; $\lambda_j^{(2p)} \geqslant 0$, $j = 1, \dots, n$.
3) $\varphi_j^{(s)} \in \mathfrak{N}$, $s = 0, \dots, p-1$, $j = 1, \dots, n$.

Доказательство. 1) Для доказательства первого утверждения проверим тождество

$$\begin{gathered}(A(t) + \delta I)u = (A_0 + \delta I)^{1/2}(I + \mathcal{U}(t))(A_0 + \delta I)^{1/2}u, \quad u \in \operatorname{Dom} A(t), \quad |t| \leqslant t^0, \\ \mathcal{U}(t) = \sum_{l=1}^{2p} \mathcal{U}_l t^l, \quad \mathcal{U}_l \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}), \quad l = 1, \dots, 2p.\end{gathered} \tag{1.8}$$

Обозначим через $Y(t)$ разность $X(t) - X_0 = \sum\limits_{l=1}^{p} X_l t^l$, $|t| \leqslant t^0$, определенную на $\operatorname{Dom} X_0$; через R_0 обозначим оператор $(A_0 + \delta I)^{-1}$. Определим оператор-функцию

$$\mathcal{U}(t) := (X_0 R_0^{1/2})^*(Y(t)R_0^{1/2}) + (Y(t)R_0^{1/2})^*(X_0 R_0^{1/2}) + (Y(t)R_0^{1/2})^*(Y(t)R_0^{1/2}).$$

Нетрудно видеть, что при всех $u \in \operatorname{Dom} A(t)$, $v \in \operatorname{Dom} X_0$ справедливы соотношения

$$\begin{gathered}((A(t) + \delta I)u, v) = (X(t)u, X(t)v) + \delta(u, v) = \\ = ((A_0 + \delta I)^{1/2}u, (A_0 + \delta I)^{1/2}v) + (X_0 u, Y(t)v) + (Y(t)u, X_0 v) + (Y(t)u, Y(t)v) = \\ = ((I + \mathcal{U}(t))(A_0 + \delta I)^{1/2}u, (A_0 + \delta I)^{1/2}v), \quad |t| \leqslant t^0,\end{gathered}$$

эквивалентные равенству (1.8). Далее, при малых t норма $\mathcal{U}(t)$ мала, оператор $(I + \mathcal{U}(t))$ обратим, а потому при всех $j = 1, \dots, n$ и малых t

$$\begin{gathered}\varphi_j(t) = (\lambda_j(t) + \delta)(A(t) + \delta I)^{-1}\varphi_j(t) = \\ = (A_0 + \delta I)^{-1/2}(I + \mathcal{U}(t))^{-1}(A_0 + \delta I)^{-1/2}(\lambda_j(t) + \delta)\varphi_j(t).\end{gathered} \tag{1.9}$$

Поскольку $\mathfrak{H}$-значная функция $(I + \mathcal{U}(t))^{-1}(A_0 + \delta I)^{-1/2}(\lambda_j(t) + \delta)\varphi_j(t)$ разлагается в окрестности нуля в абсолютно сходящийся ряд, из (1.9) следует, что коэффициенты ряда (1.7) принадлежат $\operatorname{Dom} X_0$, и ряд (1.7) абсолютно сходится в $\mathbf{D}_\delta$.

2) Поскольку ряд (1.7) абсолютно сходится в $\mathbf{D}_\delta$, ряды (1.6) и (1.7) можно подставить в тождество

$$(X(t)\varphi_j(t), X(t)\zeta)_{\mathfrak{H}_*} = \lambda_j(t)(\varphi_j(t), \zeta)_{\mathfrak{H}}, \quad \zeta \in \operatorname{Dom} X_0, \quad |t| \leqslant t_*; \quad j = 1, \dots, n.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получаем

$$\sum_{a+b+c=m} (X_a \varphi_j^{(b)}, X_c \zeta)_{\mathfrak{H}_*} = \sum_{d+e=m} \lambda_j^{(d)} (\varphi_j^{(e)}, \zeta)_{\mathfrak{H}}, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \quad \zeta \in \operatorname{Dom} X_0; \quad j = 1, \dots, n. \tag{1.10}$$

Здесь и далее мы для удобства будем придерживаться соглашения

$$X(t) = \sum_{s=0}^{\infty} X_s t^s, \quad X_s = 0 \ \text{ при } \ s \geqslant p+1.$$

Поскольку $\{\varphi_j(t)\}_{j=1}^n$ — ортонормированный базис в подпространстве $F(t)\mathfrak{H}$, векторы $\varphi_j^{(0)} = \varphi_j(0)$, $j = 1, \dots, n$, составляют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}$. При $m \leqslant p-1$, подставляя $\zeta = \varphi_j^{(0)}$ в (1.10), с учетом (1.2) получаем

$$\sum_{d+e=m} \lambda_j^{(d)} (\varphi_j^{(e)}, \varphi_j^{(0)})_{\mathfrak{H}} = 0, \quad 0 \leqslant m \leqslant p-1; \quad j = 1, \dots, n,$$

откуда (последовательно) вытекают соотношения

$$\lambda_j^{(0)} = \dots = \lambda_j^{(p-1)} = 0, \quad j = 1, \dots, n. \tag{1.11}$$

Учитывая (1.11), перепишем (1.10) при $m \leqslant p-1$ в виде

$$\sum_{a+b+c=m} (X_a \varphi_j^{(b)}, X_c \zeta)_{\mathfrak{H}_*} = 0, \quad 0 \leqslant m \leqslant p-1, \quad \zeta \in \operatorname{Dom} X_0; \quad j = 1, \dots, n. \tag{1.12}$$

Из (1.12) (последовательно) следуют включения

$$\varphi_j^{(m)} \in \mathfrak{N}, \quad m = 0, \dots, p-1; \quad j = 1, \dots, n. \tag{1.13}$$

Наконец, с учетом (1.11) и (1.13), из (1.10) при $m = p, \dots, 2p-1$ вытекают (по индукции) равенства

$$\lambda_j^{(m)} = 0, \quad m = p, \dots, 2p-1; \quad j = 1, \dots, n.$$

Неравенство $\lambda_j^{(2p)} \geqslant 0$ теперь следует из неотрицательности оператора $A(t)$. $\square$

1.3. **Разложение в степенной ряд оператор-функций $F(t)$ и $A(t)F(t)$ в окрестности нуля.** С учетом (1.4) и (1.5), получаем

$$F(t) = \sum_{j=1}^{n} (\cdot, \varphi_j(t))_{\mathfrak{H}} \varphi_j(t), \quad |t| \leqslant t^0; \tag{1.14}$$

$$A(t)F(t) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t) (\cdot, \varphi_j(t))_{\mathfrak{H}} \varphi_j(t), \quad |t| \leqslant t^0. \tag{1.15}$$

Подставляя в (1.14) и (1.15) разложения (1.6), (1.7) и учитывая предложение 1.4, получаем

$$F(t) = \sum_{s=0}^{\infty} F_s t^s, \quad |t| \leqslant t_*; \tag{1.16}$$

$$A(t)F(t) = \sum_{s=2p}^{\infty} G_s t^s, \quad |t| \leqslant t_*. \tag{1.17}$$

Здесь ряды (1.16), (1.17) абсолютно сходятся по норме в $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$; кроме того, $\operatorname{Ran} F_s \subset \operatorname{Dom} X_0$, $s \in \mathbb{Z}_+$, и ряд (1.16) абсолютно сходится по норме в $\mathcal{B}(\mathfrak{H}, \mathbf{D}_\delta)$. Следующее утверждение уточняет свойства коэффициентов ряда (1.16).

Предложение 1.5. *Пусть выполнены условия* 1.1, 1.2 *и* 1.3. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

$$F_0 = P, \quad F_s = F_s^*, \quad s \in \mathbb{Z}_+; \tag{1.18}$$

$$F_s = 0, \quad s = 1, \dots, p-1; \tag{1.19}$$

$$F_s = PF_sP^\perp + P^\perp F_s P, \quad s = p, \dots, 2p-1; \tag{1.20}$$

$$F_s = PF_sP^\perp + P^\perp F_s P - \sum_{k=p}^{s-p} PF_kP^\perp F_{s-k}P + \sum_{k=p}^{s-p} P^\perp F_k PF_{s-k}P^\perp, \quad s = 2p, \dots, 3p-1. \tag{1.21}$$

Доказательство. Свойства (1.18) вытекают из равенства $F(0) = P$ и самосопряженности $F(t)$, $t \in (-t^0, t^0)$. Из (1.7) и (1.14) следует, что

$$F_s = \sum_{j=1}^{n}\sum_{a=0}^{s}(\cdot, \varphi_j^{(a)})\varphi_j^{(s-a)}, \quad s \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.22}$$

В силу равенства $F(t) = F(t)^2$, $|t| \leqslant t^0$, справедливо соотношение

$$F_s = \sum_{a=0}^{s} F_a F_{s-a}, \quad s \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.23}$$

При $s = 1$ равенство (1.23) принимает вид $F_1 = PF_1 + F_1P$, что приводит к соотношениям

$$P^\perp F_1 P^\perp = 0, \quad PF_1P = 2PF_1P \;\Rightarrow\; PF_1P = 0.$$

Следовательно, $F_1 = PF_1P^\perp + P^\perp F_1 P$. Вместе с включениями $\varphi_j^{(0)}, \varphi_j^{(1)} \in \mathfrak{N}$, $j = 1, \dots, n$, и равенством

$$F_1 = \sum_{j=1}^{n}(\cdot, \varphi_j^{(0)})\varphi_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{n}(\cdot, \varphi_j^{(1)})\varphi_j^{(0)}$$

это показывает, что $F_1 = 0$. Далее (последовательно) из (1.23) с учетом (1.13) получаем $F_s = 0$, $s = 1, \dots, p-1$, что доказывает (1.19).

Теперь при $s = p, \dots, 2p-1$ равенство (1.23) принимает вид $F_s = PF_s + F_sP$, откуда, как и выше, вытекает (1.20).

Наконец, при $s = 2p, \dots, 3p-1$ с учетом (1.19) равенство (1.23) можно переписать в виде

$$F_s = PF_s + \sum_{k=p}^{s-p} F_k F_{s-k} + F_s P. \tag{1.24}$$

Из (1.24) следует, что

$$PF_sP = 2PF_sP + \sum_{k=p}^{s-p} PF_kF_{s-k}P, \tag{1.25}$$

$$P^\perp F_s P^\perp = \sum_{k=p}^{s-p} P^\perp F_k F_{s-k} P^\perp. \tag{1.26}$$

Из (1.25) и (1.20) вытекает равенство $PF_sP = -\sum_{k=p}^{s-p} PF_kP^\perp F_{s-k}P$, что вместе с (1.26) и (1.20) приводит к (1.21). □

§ 2. Вычисление первых коэффициентов рядов (1.16), (1.17)

Основная цель настоящего параграфа — вычисление коэффициентов F_s, $s = p, \dots, 3p-1$, ряда (1.16) и коэффициентов G_s, $s = 2p, \dots, 4p-1$, ряда (1.17) в удобных для приложений терминах.

2.1. **Разрешающие операторы для вспомогательных задач.** Мы вычислим коэффициенты F_s, $s = p, \dots, 3p-1$, и G_s, $s = 2p, \dots, 4p-1$, в терминах разрешающих операторов некоторых вспомогательных задач. Именно, пусть $\mathcal{D} = \operatorname{Dom} X_0 \cap \mathfrak{N}^\perp$, и пусть $u \in \mathfrak{H}_*$. При каждом $i = 0, 1, \dots, p$ найдем $v_i \in \mathcal{D}$, удовлетворяющий условию

$$(X_0 v_i, X_0 \zeta)_{\mathfrak{H}_*} = (u, X_i \zeta)_{\mathfrak{H}_*} \quad \text{при всех} \quad \zeta \in \mathcal{D}. \tag{2.1}$$

Очевидно, $\mathcal{D}$ со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{D}} := (X_0 \cdot, X_0 \cdot)_{\mathfrak{H}_*}$ является гильбертовым пространством; соответствующую норму на $\mathcal{D}$ обозначим $\|\cdot\|_{\mathcal{D}}$. Справедливы оценки

$$36\delta \|f\|^2_{\mathfrak{H}} \leqslant d^0 \|f\|^2_{\mathfrak{H}} \leqslant \|f\|^2_{\mathcal{D}}, \quad f \in \mathcal{D}; \tag{2.2}$$

$$\|f\|^2_{\mathcal{D}} \leqslant \|f\|^2_{\delta} \leqslant \frac{37}{36} \|f\|^2_{\mathcal{D}}, \quad f \in \mathcal{D}.$$

Таким образом, нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{D}}$ и $\|\cdot\|_{\delta}$ эквивалентны на $\mathcal{D}$.

Далее, при $i = 0, 1, \dots, p$ функционал $l_u^{(i)}(\cdot) := (u, X_i \cdot)_{\mathfrak{H}_*}$, $u \in \mathfrak{H}_*$, антилинеен и непрерывен на $\mathcal{D}$. При этом $\|l_u^{(i)}\| \leqslant C_2 \|u\|_{\mathfrak{H}_*}$, $i = 0, 1, \dots, p$, где

$$C_2 := \max\{C_0, 6^{-1}\delta^{-1/2}\|X_p\|\}. \tag{2.3}$$

Согласно теореме Рисса, при каждом $i = 0, 1, \dots, p$ найдется единственный элемент $v_i \in \mathcal{D}$ такой, что при всех $\zeta \in \mathcal{D}$ справедливо равенство $l_u^{(i)}(\zeta) = (v_i, \zeta)_{\mathcal{D}}$, эквивалентное (2.1). При этом $\|v_i\|_{\mathcal{D}} \leqslant C_2 \|u\|_{\mathfrak{H}_*}$. Нетрудно видеть, что зависимость $u \mapsto v_i$ линейна. Мы доказали следующее утверждение.

Предложение 2.1. *При каждом $i = 0, 1, \dots, p$ и $u \in \mathfrak{H}_*$ задача* (2.1) *имеет единственное решение $v_i \in \mathcal{D}$. Оператор $M_i : u \mapsto v_i$ является линейным ограниченным оператором из $\mathfrak{H}_*$ в $\mathcal{D}$, причем справедливы оценки*

$$\|M_i\|_{\mathfrak{H}_* \to \mathcal{D}} \leqslant C_2, \quad \|M_i\|_{\mathfrak{H}_* \to \mathfrak{H}} \leqslant 6^{-1}\delta^{-1/2} C_2, \quad i = 0, 1, \dots, p. \tag{2.4}$$

Уточним некоторые свойства операторов M_i.

Предложение 2.2. *Справедливо равенство*

$$M_i = (A_0^\perp)^{-1/2} P^\perp (X_i (A_0^\perp)^{-1/2} P^\perp)^*, \quad i = 0, 1, \dots, p; \tag{2.5}$$

здесь $A_0^\perp$ — часть оператора A_0, действующая в пространстве $\mathfrak{N}^\perp$, сопряжение понимается, как сопряжение ограниченного оператора из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}_*$.

Доказательство. При всех $u \in \mathfrak{H}_*$, $\zeta \in \mathcal{D}$ справедливо соотношение

$$\begin{gathered}((A_0^\perp)^{-1/2} P^\perp (X_i (A_0^\perp)^{-1/2} P^\perp)^* u, \zeta)_{\mathcal{D}} = \\ = (X_0 (A_0^\perp)^{-1/2} P^\perp (X_i (A_0^\perp)^{-1/2} P^\perp)^* u, X_0 \zeta)_{\mathfrak{H}_*} = \\ = ((A_0^\perp)^{1/2} (A_0^\perp)^{-1/2} P^\perp (X_i (A_0^\perp)^{-1/2} P^\perp)^* u, (A_0^\perp)^{1/2} \zeta)_{\mathfrak{H}} = \\ = ((X_i (A_0^\perp)^{-1/2} P^\perp)^* u, (A_0^\perp)^{1/2} \zeta)_{\mathfrak{H}} = \\ = (u, X_i \zeta)_{\mathfrak{H}_*},\end{gathered}$$

которое и доказывает (2.5). □

Предложение 2.3. *Для всякого набора $\{u_k\}_{k=0}^p \subset \mathfrak{H}_*$ существует единственный элемент $v \in \mathcal{D}$ такой, что при всех $\zeta \in \operatorname{Dom} X_0$ справедливо равенство*

$$(X_0 v, X_0 \zeta)_{\mathfrak{H}_*} = \sum_{k=0}^{p-1} (u_k, X_k \zeta)_{\mathfrak{H}_*} + (u_p, X_p P^\perp \zeta)_{\mathfrak{H}_*}. \tag{2.6}$$

При этом $v = \sum\limits_{k=0}^{p} M_k u_k$.

Доказательство. Правая часть равенства (2.6) задает антилинейный непрерывный функционал на $\mathcal{D}$. Следовательно, равенство (2.6), выполненное при всех $\zeta \in \mathcal{D}$, определяет единственный элемент $v \in \mathcal{D}$. Далее, если (2.6) верно при всех $\zeta \in \mathcal{D}$, то (2.6) справедливо и при всех $\zeta \in \operatorname{Dom} X_0$, поскольку при $\zeta \in \mathfrak{N}$ левая и правая часть (2.6) обращается в ноль.

Прямой проверкой нетрудно убедиться, что элемент $v = \sum\limits_{k=0}^{p} M_k u_k$ удовлетворяет равенству (2.6) при всех $\zeta \in \mathcal{D}$. □

Ниже договоримся считать, что $M_k = 0$ при $k \geqslant p+1$.

2.2. **Вычисление операторов F_s.** Из предложения 1.5 следует, что при нахождении коэффициентов F_s, $s = p, \dots, 3p-1$, можно ограничиться вычислением произведений $P^{\perp} F_s P$, $s = p, \dots, 3p-1$. Учитывая (1.22), начнем с вычисления векторов $P^{\perp}\varphi_j^{(m)}$, $m = p, \dots, 3p-1$, $j = 1, \dots, n$. Принимая во внимание равенства (см. (1.2) и предложение 1.4)

$$X_a \varphi_j^{(b)} = 0, \quad a, b = 0, \dots, p-1; \quad \lambda_j^{(d)} = 0, \quad d = 0, \dots, 2p-1, \tag{2.7}$$

соотношение (1.10) при $m = p, \dots, 2p-1$ можно переписать в виде

$$(X_0 \varphi_j^{(m)}, X_0 \zeta)_{\mathfrak{H}_*} = -\sum_{c=0}^{p-1} \sum_{b=0}^{\min\{m-1, m-c\}} (X_{m-c-b} \varphi_j^{(b)}, X_c \zeta)_{\mathfrak{H}_*}, \quad j = 1, \dots, n. \tag{2.8}$$

Сравнивая (2.6) и (2.8), получаем равенство

$$P^{\perp} \varphi_j^{(m)} = -\sum_{c=0}^{p-1} M_c \sum_{b=0}^{\min\{m-1, m-c\}} X_{m-c-b} \varphi_j^{(b)}, \quad j = 1, \dots, n. \tag{2.9}$$

Меняя в (2.9) порядок суммирования и учитывая (2.7), приходим к соотношениям

$$P^{\perp} \varphi_j^{(p)} = -M_0 X_p \varphi_j^{(0)}, \quad j = 1, \dots, n; \tag{2.10}$$

$$P^{\perp} \varphi_j^{(m)} = -\sum_{b=0}^{m-p} M_{m-p-b} X_p \varphi_j^{(b)} - \sum_{b=p}^{m-1} \sum_{c=0}^{m-b} M_c X_{m-b-c} P^{\perp} \varphi_j^{(b)},$$
$$m = p+1, \dots, 2p-1, \quad j = 1, \dots, n. \tag{2.11}$$

Аналогично, при $m = 2p, \dots, 3p-1$ и $\zeta \in \operatorname{Dom} X_0$ соотношение (1.10) принимает вид

$$\sum_{a+b+c=m} (X_a \varphi_j^{(b)}, X_c \zeta)_{\mathfrak{H}_*} = \sum_{\begin{cases} d+e=m \\ d \geqslant 2p \end{cases}} \lambda_j^{(d)} (\varphi_j^{(e)}, \zeta)_{\mathfrak{H}}. \tag{2.12}$$

Учтем, что в сумме справа заведомо $e \leqslant p-1$, а потому $\varphi_j^{(e)} \in \mathfrak{N}$. Поэтому при $\zeta \in \mathcal{D}$ правая часть в (2.12) обращается в ноль. Следовательно,

$$(X_0 \varphi_j^{(m)}, X_0 \zeta)_{\mathfrak{H}_*} = -\sum_{c=0}^{p} \sum_{b=0}^{\min\{m-1, m-c\}} (X_{m-c-b} \varphi_j^{(b)}, X_c \zeta)_{\mathfrak{H}_*}, \quad \zeta \in \mathcal{D}. \tag{2.13}$$

Сравнивая (2.6) и (2.13), получаем

$$P^{\perp} \varphi_j^{(m)} = -\sum_{c=0}^{p} M_c \sum_{b=m-c-p}^{\min\{m-c, m-1\}} X_{m-b-c} \varphi_j^{(b)}. \tag{2.14}$$

Как и выше, меняя в (2.14) порядок суммирования и учитывая (2.7) и равенство $M_c = 0$, $c \geqslant p+1$, имеем

$$P^{\perp}\varphi_j^{(m)} = -\sum_{b=m-2p}^{p-1} M_{m-p-b}X_p\varphi_j^{(b)} - \sum_{b=p}^{m-1}\sum_{c=0}^{m-b} M_c X_{m-b-c}P^{\perp}\varphi_j^{(b)} - \sum_{b=p}^{m-p} M_{m-b-p}X_p P\varphi_j^{(b)}. \quad (2.15)$$

Введем обозначения

$$\mathscr{A}(r) := -M_r X_p, \quad r \geqslant 0; \quad (2.16)$$

$$\mathscr{B}(r) = -\sum_{c=0}^{r} M_c X_{r-c}\big|_{\mathcal{D}}, \quad r \geqslant 1. \quad (2.17)$$

Отметим включения $\mathscr{A}(r) \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}, \mathcal{D})$, $r = 0, \dots, p$, $\mathscr{B}(r) \in \mathcal{B}(\mathcal{D})$, $r = 1, \dots, p$, и оценки, вытекающие из (2.4) с учетом (1.1) и (2.3):

$$\|\mathscr{A}(r)\|_{\mathfrak{H}\to\mathcal{D}} \leqslant C_2\|X_p\|, \quad r \geqslant 0;$$

$$\|\mathscr{B}(r)\|_{\mathcal{D}\to\mathcal{D}} \leqslant (r+1)C_2^2, \quad r \geqslant 1. \quad (2.18)$$

Перепишем (2.10), (2.11) и (2.15) в терминах операторов (2.16), (2.17):

$$P^{\perp}\varphi_j^{(p)} = \mathscr{A}(0)\varphi_j^{(0)}, \quad (2.19)$$

$$P^{\perp}\varphi_j^{(m)} - \sum_{b=p}^{m-1}\mathscr{B}(m-b)P^{\perp}\varphi_j^{(b)} = \sum_{b=0}^{m-p}\mathscr{A}(m-p-b)\varphi_j^{(b)}, \quad m = p+1, \dots, 2p-1, \quad (2.20)$$

$$P^{\perp}\varphi_j^{(m)} - \sum_{b=p}^{m-1}\mathscr{B}(m-b)P^{\perp}\varphi_j^{(b)} = \\ = \sum_{b=m-2p}^{p-1}\mathscr{A}(m-p-b)\varphi_j^{(b)} + \sum_{b=p}^{m-p}\mathscr{A}(m-p-b)P\varphi_j^{(b)}, \quad m = 2p, \dots, 3p-1. \quad (2.21)$$

Равенства (2.19), (2.20) и (2.21) можно записать в виде

$$\mathscr{B}\mathbf{x} = \mathscr{A}\mathbf{f} + \mathscr{Q}\mathbf{g}. \quad (2.22)$$

Здесь мы использовали следующие обозначения:

$$\mathbf{x} = (P^{\perp}\varphi_j^{(p)}, \dots, P^{\perp}\varphi_j^{(3p-1)})^t, \quad \mathbf{f} = (\varphi_j^{(0)}, \dots, \varphi_j^{(p-1)})^t, \quad \mathbf{g} = (P\varphi_j^{(p)}, \dots, P\varphi_j^{(2p-1)})^t,$$

$$\mathscr{B} := \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\mathscr{B}(1) & I & 0 & \dots & 0 \\ -\mathscr{B}(2) & -\mathscr{B}(1) & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathscr{B}(2p-1) & -\mathscr{B}(2p-2) & -\mathscr{B}(2p-3) & \dots & I \end{pmatrix},$$

$$\mathscr{A} := \begin{pmatrix} \mathscr{A}(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathscr{A}(1) & \mathscr{A}(0) & 0 & \dots & 0 \\ \mathscr{A}(2) & \mathscr{A}(1) & \mathscr{A}(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathscr{A}(p-1) & \mathscr{A}(p-2) & \mathscr{A}(p-3) & \dots & \mathscr{A}(0) \\ \mathscr{A}(p) & \mathscr{A}(p-1) & \mathscr{A}(p-2) & \dots & \mathscr{A}(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathscr{A}(2p-1) & \mathscr{A}(2p-2) & \mathscr{A}(2p-3) & \dots & \mathscr{A}(p) \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

$$\mathscr{Q} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathscr{A}(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathscr{A}(1) & \mathscr{A}(0) & 0 & \dots & 0 \\ \mathscr{A}(2) & \mathscr{A}(1) & \mathscr{A}(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathscr{A}(p-1) & \mathscr{A}(p-2) & \mathscr{A}(p-3) & \dots & \mathscr{A}(0) \end{pmatrix}. \tag{2.24}$$

В матрице $\mathscr{Q}$ первые p строк предполагаются нулевыми.

Предложение 2.4. *Если $\mathscr{B}(r) \in \mathcal{B}(\mathcal{D})$, $r \geqslant 1$, то оператор $\mathscr{B} : \mathcal{D}^{2p} \to \mathcal{D}^{2p}$ ограничен и ограниченно обратим. Здесь $\mathcal{D}^{2p} = \mathcal{D} \times \mathcal{D} \times \dots \times \mathcal{D}$ — прямое произведение $2p$ экземпляров пространства $\mathcal{D}$. При этом справедливо равенство*

$$\mathscr{B}^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathscr{C}(1) & I & 0 & \dots & 0 \\ \mathscr{C}(2) & \mathscr{C}(1) & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathscr{C}(2p-1) & \mathscr{C}(2p-2) & \mathscr{C}(2p-3) & \dots & I \end{pmatrix}; \tag{2.25}$$

операторы $\mathscr{C}(r)$, $r = 1, \dots, 2p-1$, имеют вид

$$\begin{gathered} \mathscr{C}(r) := \sum_{|J|=r} \mathscr{B}_J, \quad \text{где} \quad J = (j_1, \dots, j_s) \in \mathbb{N}^s, \quad |J| = j_1 + \dots + j_s, \\ \mathscr{B}_J := \mathscr{B}(j_1) \cdot \ldots \cdot \mathscr{B}(j_s), \quad s = 1, \dots, r. \end{gathered} \tag{2.26}$$

Справедливы включение $\mathscr{C}(r) \in \mathcal{B}(\mathcal{D})$, $r = 1, \dots, 2p-1$, и оценка

$$\|\mathscr{C}(r)\|_{\mathcal{D}\to\mathcal{D}} \leqslant C(p) C_2^{2(2p-1)}, \quad r = 1, \dots, 2p-1. \tag{2.27}$$

Доказательство. Соотношения (2.25), (2.26) проверяются по индукции; оценка (2.27) вытекает из (2.18). □

Из (2.23), (2.24) и (2.25) вытекает следующее утверждение.

Предложение 2.5. *Пусть заданы семейства операторов $\mathscr{A}(r) \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}, \mathcal{D})$, $r = 0, \dots, 2p-1$, $\mathscr{C}(r) \in \mathcal{B}(\mathcal{D}, \mathcal{D})$, $r = 1, \dots, 2p-1$. Пусть операторы $\mathscr{A}$, $\mathscr{Q}$ и $\mathscr{B}^{-1}$ имеют вид (2.23), (2.24) и (2.25). Тогда справедливы равенства*

$$\mathscr{B}^{-1}\mathscr{A} = \begin{pmatrix} \mathscr{D}(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathscr{D}(1) & \mathscr{D}(0) & 0 & \dots & 0 \\ \mathscr{D}(2) & \mathscr{D}(1) & \mathscr{D}(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathscr{D}(p-1) & \mathscr{D}(p-2) & \mathscr{D}(p-3) & \dots & \mathscr{D}(0) \\ \mathscr{D}(p) & \mathscr{D}(p-1) & \mathscr{D}(p-2) & \dots & \mathscr{D}(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathscr{D}(2p-1) & \mathscr{D}(2p-2) & \mathscr{D}(2p-3) & \dots & \mathscr{D}(p) \end{pmatrix}.$$

$$\mathscr{B}^{-1}\mathscr{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathscr{D}(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathscr{D}(1) & \mathscr{D}(0) & 0 & \dots & 0 \\ \mathscr{D}(2) & \mathscr{D}(1) & \mathscr{D}(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathscr{D}(p-1) & \mathscr{D}(p-2) & \mathscr{D}(p-3) & \dots & \mathscr{D}(0) \end{pmatrix}.$$

Здесь операторы $\mathscr{D}(r) \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}, \mathcal{D})$, $r = 0, \dots, 2p-1$, имеют вид

$$\mathscr{D}(0) = \mathscr{A}(0), \quad \mathscr{D}(r) = \sum_{k=0}^{r} \mathscr{C}(r-k)\mathscr{A}(k), \quad r = 1, \dots, 2p-1, \quad (\textit{считая } \ \mathscr{C}(0) = I). \tag{2.28}$$

Из (2.22) и предложений 2.4, 2.5 вытекает следующее утверждение.

Предложение 2.6. *Справедливы соотношения*

$$P^{\perp}\varphi_j^{(m)} = \sum_{s=0}^{m-p} \mathscr{D}(m-p-s)P\varphi_j^{(s)}, \quad m = p, \dots, 3p-1. \tag{2.29}$$

Теорема 2.7. *Пусть выполнены условия* 1.1, 1.2 *и* 1.3. *Тогда справедливы равенства*

$$P^{\perp}F_kP = P^{\perp}\mathscr{D}(k-p)P, \quad k = p, \dots, 3p-1. \tag{2.30}$$

Здесь операторы $\mathscr{D}(r) \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}, \mathcal{D})$, $r = 0, \dots, 2p-1$, определены равенствами (2.16), (2.17), (2.26) *и* (2.28).

Доказательство. Из (1.22) с учетом (1.13) вытекает соотношение

$$P^{\perp}F_k = \sum_{j=1}^{n}\sum_{a=0}^{k}(\cdot, \varphi_j^{(k-a)})P^{\perp}\varphi_j^{(a)} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{a=p}^{k}(\cdot, \varphi_j^{(k-a)})P^{\perp}\varphi_j^{(a)}, \quad k = p, \dots, 3p-1. \tag{2.31}$$

Подставляя (2.29) в (2.31), получаем

$$P^{\perp}F_k = \sum_{a=p}^{k}\sum_{s=0}^{a-p}\mathscr{D}(a-p-s)P\sum_{j=1}^{n}(\cdot, \varphi_j^{(k-a)})\varphi_j^{(s)}, \quad k = p, \dots, 3p-1. \tag{2.32}$$

Обозначая в (2.32) величину $a-p-s$ через l, перепишем (2.32) в виде

$$P^{\perp}F_k = \sum_{a=p}^{k}\sum_{l=0}^{a-p}\mathscr{D}(l)P\sum_{j=1}^{n}(\cdot, \varphi_j^{(k-a)})\varphi_j^{(a-p-l)}, \quad k = p, \dots, 3p-1. \tag{2.33}$$

Меняя в (2.33) порядок суммирования, получаем

$$P^{\perp}F_k = \sum_{l=0}^{k-p}\mathscr{D}(l)P\sum_{a=l+p}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\cdot, \varphi_j^{(k-a)})\varphi_j^{(a-p-l)}, \quad k = p, \dots, 3p-1. \tag{2.34}$$

Обозначая в (2.34) величину $a-p-l$ через b и учитывая (1.22), приходим к соотношениям

$$P^{\perp}F_k = \sum_{l=0}^{k-p}\mathscr{D}(l)P\sum_{b=0}^{k-p-l}\sum_{j=1}^{n}(\cdot, \varphi_j^{(k-p-l-b)})\varphi_j^{(b)} = \sum_{l=0}^{k-p}\mathscr{D}(l)PF_{k-p-l}, \quad k = p, \dots, 3p-1;$$

$$P^{\perp}F_kP = \sum_{l=0}^{k-p}\mathscr{D}(l)PF_{k-p-l}P, \quad k = p, \dots, 3p-1. \tag{2.35}$$

В силу (1.19) и (1.20) выполнены равенства $PF_sP = 0$ при $s = 1, \dots, 2p-1$. Поэтому в (2.35) остается только одно слагаемое: $P^{\perp}F_kP = \mathscr{D}(k-p)P$, что доказывает (2.30). $\square$

Следствие 2.8. *Пусть выполнены условия* 1.1, 1.2 *и* 1.3. *Тогда справедливы равенства*

$$F_0 = P, \quad F_k = 0, \quad k = 1, \dots, p-1,$$

$$F_k = P^{\perp}\mathscr{D}(k-p)P + \big(P^{\perp}\mathscr{D}(k-p)P\big)^*, \quad k = p, \dots, 2p-1,$$

$$F_k = P^{\perp}\mathscr{D}(k-p)P + \big(P^{\perp}\mathscr{D}(k-p)P\big)^* - \sum_{s=p}^{k-p}\big(P^{\perp}\mathscr{D}(s-p)P\big)^*P^{\perp}\mathscr{D}(k-s-p)P+ \tag{2.36}$$

$$+\sum_{s=p}^{k-p} P^{\perp}\mathscr{D}(s-p)P\big(P^{\perp}\mathscr{D}(k-s-p)P\big)^*, \quad k = 2p, \dots, 3p-1.$$

Здесь операторы $\mathscr{D}(r) \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}, \mathcal{D})$, $r = 0, \dots, 2p-1$, *определены равенствами* (2.16), (2.17), (2.26) *и* (2.28); *под сопряжением понимается сопряжение ограниченного оператора из* $\mathfrak{H}$ *в* $\mathfrak{H}$.

Доказательство. Следствие 2.8 вытекает из теоремы 2.7 и предложения 1.5. $\square$

2.3. **Вычисление операторов G_s.** Ряд (1.16) абсолютно сходится по норме в $\mathcal{B}(\mathfrak{H}, \mathbf{D}_\delta)$ при малых t, а потому ряд

$$X(t)F(t) = \sum_{q=0}^{\infty} H_q t^q \tag{2.37}$$

при малых t абсолютно сходится по норме в $\mathcal{B}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_*)$. Из соотношений (1.2), (1.18), (1.19) вытекают равенства

$$H_q = 0, \;\; q = 0, \dots, p-1; \;\; H_p = X_pP + X_0F_p; \;\; H_q = \sum_{r=0}^{q-p} X_rF_{q-r}, \;\; q = p+1, \dots, 3p-1. \tag{2.38}$$

Наконец, из равенства $A(t)F(t) = (X(t)F(t))^*(X(t)F(t))$ и из (2.37), (2.38) вытекает представление для коэффициентов ряда (1.17).

Предложение 2.9. *Пусть выполнены условия* 1.1, 1.2 *и* 1.3. *Тогда справедливы равенства*

$$G_s = \sum_{q=p}^{s-p} H_q^* H_{s-q}, \quad s = 2p, \dots, 4p-1. \tag{2.39}$$

Здесь операторы H_q, $q = p, \dots, 3p-1$, *определены в* (2.38).

Замечание 2.10. 1°. *Согласно* (2.36), (2.38) *и* (2.39) *выполнено*

$$G_s = PG_sP, \quad s = 2p, \dots, 3p-1, \tag{2.40}$$

т. е., операторы $G_{2p}, \dots, G_{3p-1}$ *нетривиально действуют только в подпространстве* $\mathfrak{N}$. *Это свойство можно вывести и из степенных разложений* (*см.* (1.15), (1.17) *и предложение* 1.4).

2°. *Согласно* (2.16), (2.28), (2.36), (2.38) *выполнено* $H_p = X_pP - X_0M_0X_pP$. *С учетом определения оператора* M_0 *отсюда следует, что* $X_0^*H_p = 0$. *Следовательно, при вычислении оператора*

$$H_q^*H_p = \left(\sum_{r=0}^{q-p} X_rF_{q-r}\right)^* H_p, \quad q = p+1, \dots, 3p-1,$$

можно отбросить слагаемое с $r = 0$.

3°. *Рассмотрим оператор* $G_{2p} = H_p^*H_p$ *и обозначим* $S := G_{2p}|_{\mathfrak{N}}$. *Оператор* S *является самосопряженным оператором в* n-*мерном пространстве* $\mathfrak{N}$ *и называется спектральным* *ростком операторного семейства* $A(t)$ *при* $t=0$. (*См.* [Ve, §3], [KuSu, §1].) *Из* (1.15) *и* (1.17) *с учетом предложения* 1.4 *видно, что в терминах коэффициентов степенных разложений* (1.6), (1.7) *оператор* G_{2p} *имеет вид*

$$G_{2p}=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{(2p)}(\cdot,\varphi_j^{(0)})_{\mathfrak{H}}\varphi_j^{(0)}.$$

Отсюда следует, что коэффициенты $\lambda_j^{(2p)}$ *и* $\varphi_j^{(0)}$ *являются собственными значениями и собственными векторами спектрального ростка*:

$$S\varphi_j^{(0)}=\lambda_j^{(2p)}\varphi_j^{(0)},\quad j=1,\dots,n.$$

Ранее это было выяснено в [Ve] *и* [KuSu].

§ 3. Аппроксимация оператор-функций $F(t)$ и $A(t)F(t)$

3.1. **Пороговые аппроксимации.** Здесь речь пойдет об аппроксимациях оператор-функций $F(t)$ и $A(t)F(t)$ частичными суммами рядов (1.16) и (1.17). В [Ve] и [KuSu] были установлены старшие члены таких аппроксимаций. *Ниже через* $C(p)$ *обозначаются различные константы, зависящие только от* p.

Теорема 3.1. [Ve, KuSu] *Пусть справедливы условия* 1.1, 1.2, 1.3. *Тогда при* $|t|\leqslant t^0$ *справедливы оценки*

$$\|F(t)-P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}\leqslant\delta^{-1/2}\|F(t)-P\|_{\mathfrak{H}\to\mathbf{D}_\delta}\leqslant C(p)C_T|t|;\tag{3.1}$$

$$\left\|A(t)F(t)-G_{2p}t^{2p}\right\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}\leqslant C(p)C_T^{2p+1}|t|^{2p+1}.\tag{3.2}$$

Здесь постоянная C_T *определена ниже в* (3.9).

Следующий результат уточняет аппроксимации из теоремы 3.1.

Теорема 3.2. *Пусть справедливы условия* 1.1, 1.2, 1.3. *Тогда при* $|t|\leqslant t^0$ *справедливы оценки*

$$\|F(t)-P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}\leqslant\delta^{-1/2}\,\|F(t)-P\|_{\mathfrak{H}\to\mathbf{D}_\delta}\leqslant C(p)C_T^p|t|^p;\tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\Big\|F(t)-\Big(P+\sum_{l=p}^{N}F_lt^l\Big)\Big\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}&\leqslant\delta^{-1/2}\Big\|F(t)-\Big(P+\sum_{l=p}^{N}F_lt^l\Big)\Big\|_{\mathfrak{H}\to\mathbf{D}_\delta}\\&\leqslant C(p)C_T^{N+1}|t|^{N+1},\quad N=p,\dots,2p-1;\end{aligned}\tag{3.4}$$

$$\Big\|A(t)F(t)-\sum_{l=2p}^{N}G_lt^l\Big\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}\leqslant C(p)C_T^{N+1}|t|^{N+1},\quad N=2p,\dots,4p-1.\tag{3.5}$$

Постоянная C_T *определена ниже в* (3.9). *Операторы* F_l, $l=p,\dots,2p-1$, *и* G_l, $l=2p,\dots,4p-1$, *подчинены оценкам*

$$\|F_l\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}\leqslant\delta^{-1/2}\|F_l\|_{\mathfrak{H}\to\mathbf{D}_\delta}\leqslant C(p)C_T^l,\quad l=p,\dots,2p-1;\tag{3.6}$$

$$\|G_l\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}\leqslant C(p)C_T^l,\quad l=2p,\dots,4p-1.\tag{3.7}$$

Ниже мы приведем доказательство теоремы 3.2. Мы заимствуем необходимый материал из работы [KuSu] (см. также [BSu1]).

3.2. **Вспомогательный материал.** Обозначим через $R(t,z)$ резольвенту $(A(t)-zI)^{-1}$, $z\in\varrho(A(t))$, $|t|\leqslant t^0$; определим оператор

$$\Omega(t,z):=I+(z+\delta)R(t,z)=(A(t)+\delta I)R(t,z),\quad z\in\varrho(A(t)),\quad |t|\leqslant t^0.$$

Резольвенту $R(0,z)=(A_0-zI)^{-1}$ обозначим через $R_0(z)$, оператор $\Omega(0,z)$ — через $\Omega_0(z)$. Как и выше, через $\mathbf{D}_\delta$ обозначим гильбертово пространство $\operatorname{Dom}X_0$ с (гильбертовой) нормой $\|\cdot\|^2_\delta:=\|X_0\cdot\|^2_{\mathfrak{H}_*}+\delta\|\cdot\|^2_{\mathfrak{H}}$. Соответствующее скалярное произведение обозначим через $(\cdot,\cdot)_\delta$. Рассмотрим следующую квадратичную форму в пространстве $\mathbf{D}_\delta$:

$$\mathfrak{t}[u,u]=\|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*}-\|X_0u\|^2_{\mathfrak{H}_*},\quad u\in\mathbf{D}_\delta.$$

Форма $\mathfrak{t}[\cdot,\cdot]$ ограничена в пространстве $\mathbf{D}_\delta$; ей отвечает ограниченный оператор $T(t)\in\mathcal{B}(\mathbf{D}_\delta)$. Как показано в [Ve] и [KuSu], оператор $T(t)$ имеет вид

$$T(t)=\sum_{j=1}^{2p}t^jT^{(j)},\tag{3.8}$$

где операторы $T^{(j)}$, $j=1,\dots,2p$, ограничены в $\mathbf{D}_\delta$ и удовлетворяют оценке

$$\|T^{(j)}\|_{\mathbf{D}_\delta\to\mathbf{D}_\delta}\leqslant C_T:=pC_0^2+\|X_p\|^2\delta^{-1},\tag{3.9}$$

где C_0 определено в условии 1.2. Нетрудно видеть (см. [KuSu]), что справедлив следующий вариант резольвентного тождества

$$R(t,z)=R_0(z)-\Omega_0(z)T(t)R(t,z),\quad z\in\varrho(A(t))\cap\varrho(A_0),\quad |t|\leqslant t^0.\tag{3.10}$$

Введем контур $\Gamma_\delta\subset\mathbb{C}$, эквидистантно охватывающий отрезок вещественной оси $[0,\delta]$ на расстоянии δ. Приведем несколько оценок (см. [KuSu]):

$$\|u\|_{\mathfrak{H}}\leqslant\delta^{-1/2}\|u\|_{\mathbf{D}_\delta},\quad u\in\operatorname{Dom}X_0;\tag{3.11}$$

$$\|R_0(z)\|_{\mathfrak{H}\to\mathbf{D}_\delta}\leqslant 4\delta^{-1/2},\quad z\in\Gamma_\delta;\tag{3.12}$$

$$\|\Omega_0(z)\|_{\mathbf{D}_\delta\to\mathbf{D}_\delta}\leqslant 13,\quad z\in\Gamma_\delta;\tag{3.13}$$

$$\|R(t,z)\|_{\mathfrak{H}\to\mathbf{D}_\delta}\leqslant(2\sqrt{3}+3)\delta^{-1/2},\quad z\in\Gamma_\delta,\quad |t|\leqslant t^0.\tag{3.14}$$

Первые три неравенства элементарны, последнее доказано в [KuSu, лемма 3.3].

3.3. **Доказательство теоремы 3.2.** Итерируя (3.10), получаем представление

$$\begin{gathered}R(t,z)=\sum_{k=0}^{N}(-1)^k(\Omega_0(z)T(t))^kR_0(z)+(-1)^{N+1}(\Omega_0(z)T(t))^{N+1}R(t,z),\\ z\in\varrho(A(t))\cap\varrho(A_0),\quad |t|\leqslant t^0,\quad N\in\mathbb{N}.\end{gathered}\tag{3.15}$$

В силу (3.8) справедливо равенство

$$(\Omega_0(z)T(t))^k=\sum_{\gamma_1=1}^{2p}\dots\sum_{\gamma_k=1}^{2p}t^{\gamma_1+\dots+\gamma_k}(\Omega_0(z)T^{(\gamma_1)})\cdot\ldots\cdot(\Omega_0(z)T^{(\gamma_k)}),\ z\in\varrho(A_0),\ |t|\leqslant t^0.\tag{3.16}$$

Для краткости обозначим $\mathbb{N}_{2p}:=\{1,\dots,2p\}$;

$$(\Omega_0(z)T)^{(\gamma)}:=(\Omega_0(z)T^{(\gamma_1)})\cdot\ldots\cdot(\Omega_0(z)T^{(\gamma_k)}),\quad \gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_k)\in(\mathbb{N}_{2p})^k,\quad z\in\varrho(A_0).\tag{3.17}$$

С учетом (3.16) и (3.17) представление (3.15) принимает вид

$$\begin{aligned} R(t,z) = R_0(z) + \sum_{k=1}^{N}(-1)^k \sum_{\gamma\in(\mathbb{N}_{2p})^k} t^{|\gamma|}(\Omega_0(z)T)^{(\gamma)}R_0(z) \\ + (-1)^{N+1} \sum_{\gamma\in(\mathbb{N}_{2p})^{N+1}} t^{|\gamma|}(\Omega_0(z)T)^{(\gamma)}R(t,z), \\ z\in\varrho(A(t))\cap\varrho(A_0), \quad |t|\leqslant t^0, \quad N\in\mathbb{N}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Учитывая неравенство

$$k\leqslant|\gamma|\leqslant 2pk, \quad \gamma\in(\mathbb{N}_{2p})^k, \quad k\in\mathbb{N},$$

перегруппируем слагаемые в (3.18) следующим образом:

$$\begin{aligned} R(t,z) = R_0(z) + \sum_{l=1}^{N} t^l \sum_{k=1}^{l}(-1)^k \sum_{\gamma\in(\mathbb{N}_{2p})^k:|\gamma|=l} (\Omega_0(z)T)^{(\gamma)}R_0(z) \\ + \sum_{l=N+1}^{2pN} t^l \sum_{k=1}^{N}(-1)^k \sum_{\gamma\in(\mathbb{N}_{2p})^k:|\gamma|=l} (\Omega_0(z)T)^{(\gamma)}R_0(z) \\ + (-1)^{N+1} \sum_{l=N+1}^{2p(N+1)} t^l \sum_{\gamma\in(\mathbb{N}_{2p})^{N+1}:|\gamma|=l} (\Omega_0(z)T)^{(\gamma)}R(t,z), \\ z\in\varrho(A(t))\cap\varrho(A_0), \quad |t|\leqslant t^0, \quad N\in\mathbb{N}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Подставим равенство (3.19) при $N=p-1,p,\dots,2p-1$ в соотношение

$$F(t) = \frac{-1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\delta} R(t,z)\,dz.$$

Подставим равенство (3.19) при $N=2p,2p+1,\dots,4p-1$ в соотношение

$$A(t)F(t) = \frac{-1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\delta} R(t,z)z\,dz.$$

Учитывая (1.16)–(1.19), получаем

$$F(t) = P + F_*^{(p-1)}(t), \quad |t|\leqslant t^0; \tag{3.20}$$

$$F(t) = P + \sum_{l=p}^{N} F_l t^l + F_*^{(N)}(t), \quad N=p,\dots,2p-1, \quad |t|\leqslant t^0; \tag{3.21}$$

$$A(t)F(t) = \sum_{l=2p}^{N} G_l t^l + G_*^{(N)}(t), \quad N=2p,\dots,4p-1, \quad |t|\leqslant t^0, \tag{3.22}$$

где

$$\begin{aligned} F_*^{(N)}(t) = \sum_{l=N+1}^{2pN} t^l \sum_{k=1}^{N}(-1)^k \sum_{\gamma\in(\mathbb{N}_{2p})^k:|\gamma|=l} \frac{-1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\delta}(\Omega_0(z)T)^{(\gamma)}R_0(z)\,dz + \\ + (-1)^{N+1} \sum_{l=N+1}^{2p(N+1)} t^l \sum_{\gamma\in(\mathbb{N}_{2p})^{N+1}:|\gamma|=l} \frac{-1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\delta}(\Omega_0(z)T)^{(\gamma)}R(t,z)\,dz, \\ N=p-1,\dots,2p-1, \quad |t|\leqslant t^0; \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$G_*^{(N)}(t) = \sum_{l=N+1}^{2pN} t^l \sum_{k=1}^{N} (-1)^k \sum_{\gamma \in (\mathbb{N}_{2p})^k : |\gamma| = l} \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\delta} (\Omega_0(z) T)^{(\gamma)} R_0(z) z \, dz +$$
$$+ (-1)^{N+1} \sum_{l=N+1}^{2p(N+1)} t^l \sum_{\gamma \in (\mathbb{N}_{2p})^{N+1} : |\gamma| = l} \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\delta} (\Omega_0(z) T)^{(\gamma)} R(t,z) z \, dz,$$
$$N = 2p, \dots, 4p-1, \quad |t| \leqslant t^0. \quad (3.24)$$

Для операторов F_l, $l = p, \dots, 2p-1$, и G_l, $l = 2p, \dots, 4p-1$, справедливы представления

$$F_l = \sum_{k=1}^{l} (-1)^k \sum_{\gamma \in (\mathbb{N}_{2p})^k : |\gamma| = l} \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\delta} (\Omega_0(z) T)^{(\gamma)} R_0(z) \, dz, \quad l = p, \dots, 2p-1, \quad (3.25)$$

$$G_l = \sum_{k=1}^{l} (-1)^k \sum_{\gamma \in (\mathbb{N}_{2p})^k : |\gamma| = l} \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\delta} (\Omega_0(z) T)^{(\gamma)} R_0(z) z \, dz, \quad l = 2p, \dots, 4p-1. \quad (3.26)$$

Учтем, что длина контура Γ_δ равна $2(1+\pi)\delta$, а $|z| \leqslant 2\delta$ при $z \in \Gamma_\delta$. Учтем также, что $\delta \leqslant 1/4$, $t^0 \leqslant 1/2$ и $C_T \geqslant 1$. Тогда из равенств (3.21)–(3.24) и оценок (3.9), (3.11)–(3.14) легко следуют требуемые неравенства (3.3)–(3.5). Аналогичным образом из представлений (3.25) и (3.26) выводятся оценки (3.6) и (3.7). $\square$

§ 4. Аппроксимация резольвенты оператора $A(t)$

4.1. **Предварительные замечания.** Мы продолжаем изучать операторное семейство $A(t)$ в предположениях пункта 1.1. Наложим дополнительное условие на оператор $A(t)$; ср. [Ve], [KuSu].

Условие 4.1. *При $|t| \leqslant t^0$ справедливо неравенство*

$$A(t) \geqslant c_* t^{2p} I. \quad (4.1)$$

Всюду ниже предполагаются выполненными условия 1.1, 1.2, 1.3 *и* 4.1.

Условие 4.1 равносильно тому, что

$$\lambda_j(t) \geqslant c_* t^{2p}, \quad j = 1, \dots, n, \quad |t| \leqslant t^0.$$

С учетом (1.14)–(1.17) это приводит к неравенствам

$$A(t) F(t) \geqslant c_* t^{2p} F(t), \quad |t| \leqslant t^0, \quad (4.2)$$
$$G_{2p} \geqslant c_* P. \quad (4.3)$$

Из (4.1) и (4.2) вытекают оценки

$$\|(A(t) + \varepsilon^{2p} I)^{-1}\| \leqslant (c_* t^{2p} + \varepsilon^{2p})^{-1}, \quad |t| \leqslant t^0, \quad \varepsilon > 0,$$
$$\|(A(t)F(t) + \varepsilon^{2p} I)^{-1} F(t)\| \leqslant (c_* t^{2p} + \varepsilon^{2p})^{-1}, \quad |t| \leqslant t^0, \quad \varepsilon > 0. \quad (4.4)$$

Здесь и далее мы опускаем индекс в обозначении операторной нормы в $\mathfrak{H}$. Наконец, оценка (4.3) вместе с соображением, что оператор G_{2p} самосопряжен и нетривиально действует только в подпространстве $\mathfrak{N}$ (см. замечание 2.10), приводят к неравенству

$$\|(t^{2p} G_{2p} + \varepsilon^{2p} I)^{-1} P\| \leqslant (c_* t^{2p} + \varepsilon^{2p})^{-1}, \quad |t| \leqslant t^0, \quad \varepsilon > 0. \quad (4.5)$$

Кроме того, из (1.4) вытекает очевидная оценка

$$\|(A(t) + \varepsilon^{2p} I)^{-1} - (A(t)F(t) + \varepsilon^{2p} I)^{-1} F(t)\| \leqslant (3\delta)^{-1}, \quad |t| \leqslant t^0, \quad \varepsilon > 0. \quad (4.6)$$

Обозначим для краткости:

$$\hat{R}(t,\varepsilon) := (A(t)F(t) + \varepsilon^{2p} I)^{-1} F(t), \quad |t| \leqslant t^0, \quad \varepsilon > 0; \quad (4.7)$$
$$\hat{R}_0(t,\varepsilon) := (t^{2p} G_{2p} + \varepsilon^{2p} I)^{-1} P, \quad |t| \leqslant t^0, \quad \varepsilon > 0. \quad (4.8)$$

Нам понадобится также следующее неравенство, очевидным образом вытекающее из (4.6):

$$\|(A(t)+\varepsilon^{2p}I)^{-1}-\hat{R}(t,\varepsilon)\| \leqslant (3\delta)^{-(J+1)/2p}\varepsilon^{-(2p-J-1)}, \quad |t|\leqslant t^0,\ \varepsilon>0; \quad J=0,1,\dots,2p-1. \tag{4.9}$$

Из резольвентного тождества вытекает следующее утверждение.

Предложение 4.2. *При* $|t|\leqslant t^0$ *и* $\varepsilon>0$ *для оператора* (4.7) *справедливо соотношение*

$$\hat{R}(t,\varepsilon)=F(t)\hat{R}_0(t,\varepsilon)+\hat{R}(t,\varepsilon)\Phi(t,\varepsilon), \tag{4.10}$$

где

$$\Phi(t,\varepsilon)=F(t)-P+(t^{2p}G_{2p}-A(t)F(t))\hat{R}_0(t,\varepsilon). \tag{4.11}$$

Доказательство. Поскольку оператор $\hat{R}(t,\varepsilon)$ коммутирует с проектором $F(t)$, то

$$\hat{R}(t,\varepsilon)=F(t)\hat{R}(t,\varepsilon)P+\hat{R}(t,\varepsilon)(F(t)-P), \quad |t|\leqslant t^0, \quad \varepsilon>0. \tag{4.12}$$

В силу резольвентного тождества имеем

$$\begin{aligned} F(t)(\hat{R}(t,\varepsilon)-\hat{R}_0(t,\varepsilon))P &= F(t)((A(t)F(t)+\varepsilon^{2p}I)^{-1}-(t^{2p}G_{2p}+\varepsilon^{2p}I)^{-1})P = \\ &= F(t)(A(t)F(t)+\varepsilon^{2p}I)^{-1}(t^{2p}G_{2p}-A(t)F(t))(t^{2p}G_{2p}+\varepsilon^{2p}I)^{-1}P, \quad |t|\leqslant t^0, \quad \varepsilon>0. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Теперь (4.10) вытекает из (4.12), (4.13). □

Получим оценку для нормы оператора (4.11).

Предложение 4.3. *При* $|t|\leqslant t^0$ *и* $\varepsilon>0$ *оператор* $\Phi(t,\varepsilon)$*, определенный равенством* (4.11), *удовлетворяет оценке*

$$\|\Phi(t,\varepsilon)\|\leqslant C_3|t|, \quad C_3=C(p)(1+c_*^{-1})C_T^{2p+1}. \tag{4.14}$$

Доказательство. В силу (3.1), (3.2), (4.5) и (4.11) при $|t|\leqslant t^0$ и $\varepsilon>0$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|\Phi(t,\varepsilon)\| &\leqslant \|F(t)-P\|+\|t^{2p}G_{2p}-A(t)F(t)\|\|\hat{R}_0(t,\varepsilon)\| \\ &\leqslant C(p)C_T|t|+C(p)C_T^{2p+1}|t|^{2p+1}(c_*t^{2p}+\varepsilon^{2p})^{-1}. \end{aligned}$$

Остается оценить выражение $|t|^{2p+1}(c_*t^{2p}+\varepsilon^{2p})^{-1}$ через $c_*^{-1}|t|$ и учесть, что $C_T\geqslant 1$. □

Предложение 4.4. *При* $|t|\leqslant t^0$ *и* $\varepsilon>0$ *справедливы равенства*

$$\hat{R}(t,\varepsilon)=F(t)\hat{R}_0(t,\varepsilon)\sum_{k=0}^{J}\Phi^k(t,\varepsilon)+\hat{R}(t,\varepsilon)\Phi^{J+1}(t,\varepsilon), \quad J=0,1,\dots,2p-1, \tag{4.15}$$

и оценки

$$\begin{gathered} \|\hat{R}(t,\varepsilon)\Phi^{J+1}(t,\varepsilon)\|\leqslant C_4^{(J)}\varepsilon^{-(2p-J-1)}, \quad J=0,1,\dots,2p-1, \\ C_4^{(J)}=C_3^{J+1}c_*^{-(J+1)/2p}=C(p)c_*^{-(J+1)/2p}(1+c_*^{-1})^{J+1}C_T^{(2p+1)(J+1)}. \end{gathered} \tag{4.16}$$

Доказательство. Соотношение (4.15) получается, если проитерировать равенство (4.10) $J+1$ раз. Из оценок (4.4) и (4.14) следуют неравенства

$$\begin{aligned} &\|\hat{R}(t,\varepsilon)\Phi^{J+1}(t,\varepsilon)\|\leqslant\|\hat{R}(t,\varepsilon)\|\|\Phi(t,\varepsilon)\|^{J+1} \\ &\leqslant C_3^{J+1}|t|^{J+1}(c_*t^{2p}+\varepsilon^{2p})^{-1}\leqslant C_3^{J+1}c_*^{-(J+1)/2p}\varepsilon^{-(2p-J-1)}, \quad J=0,1,\dots,2p-1. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает (4.16). □

В силу равенств (4.11), (3.20)–(3.22) при $|t| \leqslant t^0$ и $\varepsilon > 0$ для оператор-функции $\Phi(t,\varepsilon)$ справедливы представления

$$\Phi(t,\varepsilon) = \Phi_0^{(N)}(t,\varepsilon) + \Phi_*^{(N)}(t,\varepsilon), \quad N = 2p+1,\dots,4p-1, \tag{4.17}$$

$$\Phi_0^{(N)}(t,\varepsilon) := -\sum_{l=2p+1}^{N} t^l G_l \hat{R}_0(t,\varepsilon), \quad N = 2p+1,\dots,3p-1, \tag{4.18}$$

$$\Phi_0^{(N)}(t,\varepsilon) := \sum_{l=p}^{N-2p} F_l t^l - \sum_{l=2p+1}^{N} t^l G_l \hat{R}_0(t,\varepsilon), \quad N = 3p,\dots,4p-1, \tag{4.19}$$

$$\Phi_*^{(N)}(t,\varepsilon) := F_*^{(p-1)}(t) - G_*^{(N)}(t)\hat{R}_0(t,\varepsilon), \quad N = 2p+1,\dots,3p-1, \tag{4.20}$$

$$\Phi_*^{(N)}(t,\varepsilon) := F_*^{(N-2p)}(t) - G_*^{(N)}(t)\hat{R}_0(t,\varepsilon), \quad N = 3p,\dots,4p-1. \tag{4.21}$$

Предложение 4.5. *При $|t| \leqslant t^0$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки*

$$\|\Phi_0^{(N)}(t,\varepsilon)\| \leqslant C_5^{(N)}|t|, \quad N = 2p+1,\dots,4p-1; \quad C_5^{(N)} = C(p)(1+c_*^{-1})C_T^N; \tag{4.22}$$

$$\|\Phi_*^{(N)}(t,\varepsilon)\| \leqslant C_6^{(N)}|t|^{N+1-2p}, \quad N = 2p+1,\dots,4p-1; \quad C_6^{(N)} = C(p)(1+c_*^{-1})C_T^{N+1}. \tag{4.23}$$

Доказательство. Из (4.18), (4.19) и неравенств (3.6), (3.7), (4.5) с учетом того, что $t^0 \leqslant 1/2$ и $C_T \geqslant 1$, следует, что оператор $\Phi_0^{(N)}(t,\varepsilon)$ удовлетворяет оценке

$$\|\Phi_0^{(N)}(t,\varepsilon)\| \leqslant C(p)\left(\delta_N C_T^{N-2p}|t|^p + C_T^N|t|^{2p+1}(c_* t^{2p} + \varepsilon^{2p})^{-1}\right), \quad |t| \leqslant t^0, \quad \varepsilon > 0. \tag{4.24}$$

Здесь $\delta_N = 0$ при $N = 2p+1,\dots,3p-1$ и $\delta_N = 1$ при $N = 3p,\dots,4p-1$. Если в правой части (4.24) оценить $|t|^{2p+1}(c_* t^{2p} + \varepsilon^{2p})^{-1}$ через $|t|c_*^{-1}$, а $|t|^p$ оценить через $|t|$, то придем к (4.22).

Аналогичным образом оценка (4.23) выводится из (4.20), (4.21), (3.20)–(3.22) и неравенств (3.3)–(3.5) и (4.5). $\square$

Из соотношений (4.17)–(4.23) нетрудно вывести следующее утверждение.

Предложение 4.6. *При каждом $J = 1,\dots,2p-1$ и $k = 1,\dots,J$ справедливы соотношения*

$$\begin{gathered} F(t)\hat{R}_0(t,\varepsilon)\Phi^k(t,\varepsilon) = F(t)\hat{R}_0(t,\varepsilon)\left(\Phi_0^{(2p+1+J-k)}(t,\varepsilon)\right)^k + Z_k^{(J)}(t,\varepsilon), \\ \|Z_k^{(J)}(t,\varepsilon)\| \leqslant C_7(J,k)\varepsilon^{-(2p-J-1)}, \quad C_7(J,k) = C(p)c_*^{-(J+1)/2p}(1+c_*^{-1})^k C_T^{k(2p+2+J-k)}, \end{gathered} \tag{4.25}$$

где $|t| \leqslant t^0$ и $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Фиксируем $J \in \{1,\dots,2p-1\}$ и $k \in \{1,\dots,J\}$. Для удобства обозначим $\Phi_0^{(2p+1+J-k)}(t,\varepsilon) =: U_1(t,\varepsilon)$, $\Phi_*^{(2p+1+J-k)}(t,\varepsilon) =: U_2(t,\varepsilon)$. В силу (4.17) справедливо равенство

$$\Phi^k(t,\varepsilon) = \sum_{\gamma_1=1}^{2}\dots\sum_{\gamma_k=1}^{2} U_{\gamma_1}(t,\varepsilon)\cdot\ldots\cdot U_{\gamma_k}(t,\varepsilon). \tag{4.26}$$

Для краткости обозначим $\mathbb{N}_2 := \{1,2\}$,

$$U_\gamma(t,\varepsilon) := U_{\gamma_1}(t,\varepsilon)\cdot\ldots\cdot U_{\gamma_k}(t,\varepsilon), \quad \gamma = (\gamma_1,\dots,\gamma_k) \in (\mathbb{N}_2)^k. \tag{4.27}$$

С учетом (4.26), (4.27) при $|t| \leqslant t^0$, $\varepsilon > 0$ оператор $F(t)\hat{R}_0(t,\varepsilon)\Phi^k(t,\varepsilon)$ принимает вид

$$\begin{aligned} F(t)\hat{R}_0(t,\varepsilon)\Phi^k(t,\varepsilon) &= F(t)\hat{R}_0(t,\varepsilon)\sum_{\gamma\in(\mathbb{N}_2)^k} U_\gamma(t,\varepsilon) \\ &= F(t)\hat{R}_0(t,\varepsilon)U_1^k(t,\varepsilon) + F(t)\hat{R}_0(t,\varepsilon)\sum_{\substack{\gamma\in(\mathbb{N}_2)^k:\\ \gamma\neq(1,\dots,1)}} U_\gamma(t,\varepsilon). \end{aligned} \tag{4.28}$$

Далее, из (4.5), (4.8), (4.22), (4.23) и (4.27) следует, что при $\gamma \in (\mathbb{N}_2)^k$, $\gamma \neq (1,\dots,1)$, справедливы оценки

$$\begin{aligned}\left\|F(t)\hat{R}_0(t,\varepsilon)U_\gamma(t,\varepsilon)\right\| &\leqslant \Big(C(p)(1+c_*^{-1})C_T^{2p+2+J-k}\Big)^k |t|^{J+1}(c_* t^{2p}+\varepsilon^{2p})^{-1}\\ &\leqslant \Big(C(p)(1+c_*^{-1})C_T^{2p+2+J-k}\Big)^k c_*^{-(J+1)/2p}\varepsilon^{-(2p-J-1)}, \quad |t|\leqslant t^0, \quad \varepsilon>0.\end{aligned} \tag{4.29}$$

Теперь из (4.28) и (4.29) вытекает (4.25). □

Предложения 4.4 и 4.6 немедленно приводят к следующему утверждению.

Предложение 4.7. *При каждом $J = 1,\dots,2p-1$ и при $|t|\leqslant t^0$, $\varepsilon > 0$ справедливо представление*

$$\hat{R}(t,\varepsilon) = F(t)\hat{R}_0(t,\varepsilon) + F(t)\hat{R}_0(t,\varepsilon)\sum_{k=1}^{J}\Big(\Phi_0^{(2p+1+J-k)}(t,\varepsilon)\Big)^k + Z_*^{(J)}(t,\varepsilon), \tag{4.30}$$

причем последнее слагаемое в (4.30) удовлетворяет оценке

$$\|Z_*^{(J)}(t,\varepsilon)\| \leqslant C_8(J)\varepsilon^{-(2p-J-1)}, \quad C_8(J) = C(p)c_*^{-(J+1)/2p}(1+c_*^{-1})^{J+1}C_T^{(p+1+J/2)^2}. \tag{4.31}$$

Подытожим результаты.

Предложение 4.8. *При $|t|\leqslant t^0$, $\varepsilon>0$ справедливы представления*

$$\hat{R}(t,\varepsilon) = \hat{R}_0(t,\varepsilon) + Z_{**}^{(0)}(t,\varepsilon), \tag{4.32}$$

$$\hat{R}(t,\varepsilon) = \hat{R}_0(t,\varepsilon) + \hat{R}_0(t,\varepsilon)\sum_{k=1}^{J}\Big(\Phi_0^{(2p+1+J-k)}(t,\varepsilon)\Big)^k + Z_{**}^{(J)}(t,\varepsilon), \quad J=1,\dots,p-1, \tag{4.33}$$

$$\hat{R}(t,\varepsilon) = (P+t^pF_p)\,\hat{R}_0(t,\varepsilon) + \hat{R}_0(t,\varepsilon)\sum_{k=1}^{p}\Big(\Phi_0^{(3p+1-k)}(t,\varepsilon)\Big)^k + Z_{**}^{(p)}(t,\varepsilon), \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned}\hat{R}(t,\varepsilon) = \Big(P+\sum_{l=p}^{J}t^lF_l\Big)\hat{R}_0(t,\varepsilon) + \Big(P+\sum_{l=p}^{J-1}t^lF_l\Big)\hat{R}_0(t,\varepsilon)\sum_{k=1}^{J}\Big(\Phi_0^{(2p+1+J-k)}(t,\varepsilon)\Big)^k\\ + Z_{**}^{(J)}(t,\varepsilon), \quad J=p+1,\dots,2p-1.\end{aligned} \tag{4.35}$$

Остаточные члены $Z_{**}^{(J)}(t,\varepsilon)$ удовлетворяют оценкам

$$\|Z_{**}^{(J)}(t,\varepsilon)\| \leqslant C_9(J)\varepsilon^{-(2p-J-1)}, \quad J=0,1,\dots,2p-1, \tag{4.36}$$

где

$$\begin{aligned}&C_9(0) = C(p)c_*^{-1/2p}(1+c_*^{-1})C_T^{2p+1};\\ &C_9(J) = C(p)c_*^{-(J+1)/2p}(1+c_*^{-1})^{J+1}C_T^{(p+1+J/2)^2}, \quad J=1,\dots,2p-1.\end{aligned}$$

Доказательство. Равенство (4.32) с $Z_{**}^{(0)}(t,\varepsilon) = (F(t)-P)\hat{R}_0(t,\varepsilon) + \hat{R}(t,\varepsilon)\Phi(t,\varepsilon)$ вытекает из (4.10). В силу (3.3), (4.4), (4.5) и (4.14) при $|t|\leqslant t^0$, $\varepsilon>0$ справедлива оценка

$$\|Z_{**}^{(0)}(t,\varepsilon)\| \leqslant C(p)\left(C_T^p|t|^p + (1+c_*^{-1})C_T^{2p+1}|t|\right)(c_*t^{2p}+\varepsilon^{2p})^{-1} \leqslant C_9(0)\varepsilon^{-(2p-1)}.$$

При $J=1,\dots,p-1$ представление (4.33) с

$$Z_{**}^{(J)}(t,\varepsilon) = (F(t)-P)\hat{R}_0(t,\varepsilon) + (F(t)-P)\hat{R}_0(t,\varepsilon)\sum_{k=1}^{J}\Big(\Phi_0^{(2p+1+J-k)}(t,\varepsilon)\Big)^k + Z_*^{(J)}(t,\varepsilon)$$

следует из (4.30). В этом случае оценка (4.36) выводится из (3.3), (4.5), (4.22) и (4.31).

Аналогично, при $J=p$ из (4.30) получаем равенство (4.34) с

$$Z_{**}^{(p)}(t,\varepsilon)=(F(t)-P-t^pF_p)\hat{R}_0(t,\varepsilon)+(F(t)-P)\hat{R}_0(t,\varepsilon)\sum_{k=1}^{p}\Big(\Phi_0^{(3p+1-k)}(t,\varepsilon)\Big)^k+Z_*^{(p)}(t,\varepsilon).$$

Оценка (4.36) при $J=p$ следует из (3.3), (3.4), (4.5), (4.22) и (4.31).

Наконец, в случае $J=p+1,\dots,2p-1$ равенство (4.30) влечет представление (4.35) при

$$Z_{**}^{(J)}(t,\varepsilon)=F_*^{(J)}(t)\hat{R}_0(t,\varepsilon)+F_*^{(J-1)}(t)\hat{R}_0(t,\varepsilon)\sum_{k=1}^{J}\Big(\Phi_0^{(2p+1+J-k)}(t,\varepsilon)\Big)^k+Z_*^{(J)}(t,\varepsilon).$$

Тогда оценка (4.36) получается в силу (3.4), (4.5), (4.22) и (4.31). □

Предложение 4.8 дает искомые аппроксимации для $\hat{R}(t,\varepsilon)$. Ниже мы упростим эти аппроксимации, перенося часть членов в остаток.

4.2. **Упрощение аппроксимации резольвенты. Случай** $J=1,\dots,p-1$**.** Начнем со случая $J=1,\dots,p-1$. Тогда в аппроксимации (4.33) участвуют операторы $\Phi_0^{(N)}(t,\varepsilon)$ при $N\leqslant 3p-1$, заданные выражением (4.18). Введем обозначение $\tilde{\mathbb{N}}_M=\{2p+1,\dots,2p+1+M\}$, $M\in\mathbb{Z}_+$. Подставляя (4.18) в (4.33), получаем

$$\hat{R}(t,\varepsilon)=\hat{R}_0+\sum_{k=1}^{J}(-1)^k\sum_{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{J-k})^k}t^{|\gamma|}\hat{R}_0G_{\gamma_1}\hat{R}_0\cdot\ldots\cdot\hat{R}_0G_{\gamma_k}\hat{R}_0+Z_{**}^{(J)}(t,\varepsilon),\ \ J=1,\dots,p-1,\tag{4.37}$$

где $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_k)$, $|\gamma|=\gamma_1+\dots+\gamma_k$. Для краткости здесь и ниже пишем $\hat{R}_0$ вместо $\hat{R}_0(t,\varepsilon)$. Во внутренней сумме в правой части (4.37) слагаемые с $|\gamma|\geqslant 2pk+J+1$ можно отнести в остаточный член, поскольку в силу (3.7) и (4.5) при $|t|\leqslant t^0$ и $\varepsilon>0$ выполнено

$$\begin{aligned}\Big\|t^{|\gamma|}\hat{R}_0G_{\gamma_1}\hat{R}_0\cdot\ldots\cdot\hat{R}_0G_{\gamma_k}\hat{R}_0\Big\|&\leqslant C(p)C_T^{|\gamma|}|t|^{|\gamma|}\left(c_*t^{2p}+\varepsilon^{2p}\right)^{-k-1}\\&\leqslant C(p)C_T^{|\gamma|}\frac{|t|^{2pk+J+1}}{(c_*t^{2p}+\varepsilon^{2p})^{k+(J+1)/2p}}\cdot|t|^{|\gamma|-2pk-J-1}\cdot\varepsilon^{-(2p-J-1)}\\&\leqslant C(p)c_*^{-k-(J+1)/2p}C_T^{|\gamma|}\varepsilon^{-(2p-J-1)}.\end{aligned}$$

Мы учли, что $t^0\leqslant 1/2$. Легко убедиться, что при $\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{J-k})^k$ выполнено $|\gamma|\leqslant(p+1+J/2)^2$. С учетом (4.36) получаем

$$\hat{R}(t,\varepsilon)=\hat{R}_0+\sum_{k=1}^{J}(-1)^k\sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{J-k})^k:\\|\gamma|\leqslant 2pk+J}}t^{|\gamma|}\hat{R}_0G_{\gamma_1}\hat{R}_0\cdot\ldots\cdot\hat{R}_0G_{\gamma_k}\hat{R}_0+Z_\circ^{(J)}(t,\varepsilon),\ J=1,\dots,p-1,\tag{4.38}$$

где при $|t|\leqslant t^0$ и $\varepsilon>0$ остаточный член подчинен оценке

$$\begin{gathered}\|Z_\circ^{(J)}(t,\varepsilon)\|\leqslant C_{10}(J)\varepsilon^{-(2p-J-1)},\quad J=1,\dots,p-1,\\C_{10}(J)=C(p)c_*^{-(J+1)/2p}(1+c_*^{-1})^{J+1}C_T^{(p+1+J/2)^2}.\end{gathered}\tag{4.39}$$

Пусть $s=1,\dots,J$. Выделим во внутренней сумме в правой части (4.38) члены одинакового порядка: если $\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{J-k})^k$ и $|\gamma|=2pk+s$, то в силу (3.7) и (4.5) при $|t|\leqslant t^0$ и $\varepsilon>0$ выполнено

$$\begin{aligned}\Big\|t^{|\gamma|}\hat{R}_0G_{\gamma_1}\hat{R}_0\cdot\ldots\cdot\hat{R}_0G_{\gamma_k}\hat{R}_0\Big\|&\leqslant C(p)C_T^{2pk+s}|t|^{2pk+s}\left(c_*t^{2p}+\varepsilon^{2p}\right)^{-k-1}\\&\leqslant C(p)c_*^{-k-s/2p}C_T^{2pk+s}\varepsilon^{-(2p-s)}.\end{aligned}$$

Поскольку $|\gamma|\geqslant 2pk+k$, то равенство $|\gamma|=2pk+s$ может выполняться лишь при $k\leqslant s$. Далее, если $\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{J-k})^k$ и хотя бы одно $\gamma_j\geqslant 2p+1+s-k+1$, то заведомо $|\gamma|\geqslant 2pk+s+1$ и равенство $|\gamma| = 2pk + s$ не может выполняться. Следовательно, мультииндексы $\gamma \in (\tilde{\mathbb{N}}_{J-k})^k$, для которых $|\gamma| = 2pk + s$, принадлежат $(\tilde{\mathbb{N}}_{s-k})^k$. Введем обозначение

$$\mathcal{K}_s(t,\varepsilon) := \sum_{k=1}^{s} (-1)^k t^{2pk+s} \sum_{\substack{\gamma \in (\tilde{\mathbb{N}}_{s-k})^k: \\ |\gamma| = 2pk+s}} \hat{R}_0 G_{\gamma_1} \hat{R}_0 \cdot \ldots \cdot \hat{R}_0 G_{\gamma_k} \hat{R}_0, \quad s = 1, \ldots, p-1. \tag{4.40}$$

Отметим, что *корректоры $\mathcal{K}_s(t,\varepsilon)$ не зависят от J, а определяются числом s.*

В итоге, из (4.38)–(4.40) вытекает следующее утверждение.

Предложение 4.9. *При каждом $J = 1, \ldots, p-1$ и при $|t| \leqslant t^0$, $\varepsilon > 0$ справедливо представление*

$$\hat{R}(t,\varepsilon) = \hat{R}_0(t,\varepsilon) + \sum_{s=1}^{J} \mathcal{K}_s(t,\varepsilon) + Z_\circ^{(J)}(t,\varepsilon).$$

Здесь корректоры $\mathcal{K}_s(t,\varepsilon)$, $s = 1, \ldots, p-1$, определены в (4.40) *и подчинены оценкам*

$$\|\mathcal{K}_s(t,\varepsilon)\| \leqslant C(p) c_*^{-s/2p} (1 + c_*^{-1})^s C_T^{(2p+1)s} \varepsilon^{-(2p-s)}, \quad s = 1, \ldots, p-1. \tag{4.41}$$

Остаточный член $Z_\circ^{(J)}(t,\varepsilon)$ удовлетворяет оценке (4.39).

4.3. **Случай $J = p$.** Рассмотрим теперь случай $J = p$ на основе представления (4.34). В сумме в правой части (4.34) при $k \geqslant 2$ участвуют операторы $\Phi_0^{(N)}(t,\varepsilon)$ с $N \leqslant 3p-1$, заданные выражением (4.18), а при $k = 1$ участвует оператор $\Phi_0^{(3p)}(t,\varepsilon)$ вида

$$\Phi_0^{(3p)}(t,\varepsilon) = F_p t^p - \sum_{l=2p+1}^{3p} t^l G_l \hat{R}_0(t,\varepsilon), \tag{4.42}$$

см. (4.19). Подставляя (4.18) и (4.42) в (4.34), получаем

$$\hat{R}(t,\varepsilon) = \hat{R}_0 + t^p F_p \hat{R}_0 + t^p \hat{R}_0 F_p + \sum_{k=1}^{p} (-1)^k \sum_{\gamma \in (\tilde{\mathbb{N}}_{p-k})^k} t^{|\gamma|} \hat{R}_0 G_{\gamma_1} \hat{R}_0 \cdot \ldots \cdot \hat{R}_0 G_{\gamma_k} \hat{R}_0 + Z_{**}^{(p)}(t,\varepsilon).$$

По аналогии с (4.38), (4.39) во внутренней сумме справа можно оставить лишь члены с $|\gamma| \leqslant 2pk + p$, а остальные члены перенести в остаток. Далее, группируя члены одного порядка, приходим к следующему утверждению.

Предложение 4.10. *При $|t| \leqslant t^0$, $\varepsilon > 0$ справедливо представление*

$$\hat{R}(t,\varepsilon) = \hat{R}_0(t,\varepsilon) + \sum_{s=1}^{p} \mathcal{K}_s(t,\varepsilon) + Z_\circ^{(p)}(t,\varepsilon).$$

Здесь корректоры $\mathcal{K}_s(t,\varepsilon)$, $s = 1, \ldots, p-1$, определены в (4.40) *и подчинены оценкам* (4.41). *Корректор $\mathcal{K}_p(t,\varepsilon)$ задан выражением*

$$\mathcal{K}_p(t,\varepsilon) = t^p (F_p \hat{R}_0 + \hat{R}_0 F_p) + \sum_{k=1}^{p} (-1)^k t^{2pk+p} \sum_{\substack{\gamma \in (\tilde{\mathbb{N}}_{p-k})^k: \\ |\gamma| = 2pk+p}} \hat{R}_0 G_{\gamma_1} \hat{R}_0 \cdot \ldots \cdot \hat{R}_0 G_{\gamma_k} \hat{R}_0 \tag{4.43}$$

и удовлетворяет оценке

$$\|\mathcal{K}_p(t,\varepsilon)\| \leqslant C(p) c_*^{-1/2} (1 + c_*^{-1})^p C_T^{(2p+1)p} \varepsilon^{-p}, \quad |t| \leqslant t^0, \ \varepsilon > 0.$$

При $|t| \leqslant t^0$ и $\varepsilon > 0$ остаточный член $Z_\circ^{(p)}(t,\varepsilon)$ удовлетворяет оценке

$$\|Z_\circ^{(p)}(t,\varepsilon)\| \leqslant C_{10}(p) \varepsilon^{-(p-1)},$$
$$C_{10}(p) = C(p) c_*^{-(p+1)/2p} (1 + c_*^{-1})^{p+1} C_T^{(3p/2+1)^2}.$$

4.4. **Случай** $J = p+1, \dots, 2p-1$. Остается рассмотреть случай, когда $J = p+1, \dots, 2p-1$, на основании представления (4.35). В последней сумме из (4.35) при $k \geqslant J-p+2$ участвуют операторы $\Phi_0^{(N)}(t,\varepsilon)$ с $N \leqslant 3p-1$, заданные выражением (4.18), а при $k \leqslant J-p+1$ участвуют операторы $\Phi_0^{(N)}(t,\varepsilon)$ с $N \geqslant 3p$ вида (4.19). Перепишем (4.35) в виде

$$\hat{R}(t,\varepsilon) = \hat{R}_0(t,\varepsilon) + \sum_{l=p}^{J} t^l F_l \hat{R}_0(t,\varepsilon) + \mathcal{I}_1^{(J)}(t,\varepsilon) + \mathcal{I}_2^{(J)}(t,\varepsilon) + Z_{**}^{(J)}(t,\varepsilon), \;\; J = p+1, \dots, 2p-1, \tag{4.44}$$

$$\mathcal{I}_1^{(J)}(t,\varepsilon) := \Big(P + \sum_{l=p}^{J-1} t^l F_l\Big)\hat{R}_0(t,\varepsilon) \sum_{k=1}^{J-p+1} \Big(\Phi_0^{(2p+1+J-k)}(t,\varepsilon)\Big)^k, \tag{4.45}$$

$$\mathcal{I}_2^{(J)}(t,\varepsilon) := \Big(P + \sum_{l=p}^{J-1} t^l F_l\Big)\hat{R}_0(t,\varepsilon) \sum_{k=J-p+2}^{J} \Big(\Phi_0^{(2p+1+J-k)}(t,\varepsilon)\Big)^k. \tag{4.46}$$

Подставляя (4.18) в (4.46), преобразуем выражение для $\mathcal{I}_2^{(J)}(t,\varepsilon)$:

$$\mathcal{I}_2^{(J)}(t,\varepsilon) = \Big(P + \sum_{l=p}^{J-1} t^l F_l\Big) \sum_{k=J-p+2}^{J} (-1)^k \sum_{\gamma \in (\tilde{\mathbb{N}}_{J-k})^k} t^{|\gamma|} \hat{R}_0 G_{\gamma_1} \hat{R}_0 \cdot \ldots \cdot \hat{R}_0 G_{\gamma_k} \hat{R}_0. \tag{4.47}$$

Пусть $p \leqslant l \leqslant J-1$, $J-p+2 \leqslant k \leqslant J$ и $\gamma \in (\tilde{\mathbb{N}}_{J-k})^k$. С учетом (3.6), (3.7) и (4.5) при $|t| \leqslant t^0$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} &\big\| t^{l+|\gamma|} F_l \hat{R}_0 G_{\gamma_1} \hat{R}_0 \cdot \ldots \cdot \hat{R}_0 G_{\gamma_k} \hat{R}_0 \big\| \leqslant C(p) C_T^{l+|\gamma|} |t|^{l+|\gamma|} (c_* t^{2p} + \varepsilon^{2p})^{-k-1} \\ &= C(p) C_T^{l+|\gamma|} \cdot \frac{|t|^{2pk+J+1}}{(c_* t^{2p} + \varepsilon^{2p})^{k+(J+1)/2p}} \cdot \frac{1}{(c_* t^{2p} + \varepsilon^{2p})^{1-(J+1)/2p}} \cdot |t|^{l+|\gamma|-2pk-J-1} \\ &\leqslant C(p) c_*^{-k-(J+1)/2p} C_T^{l+|\gamma|} \varepsilon^{-(2p-J-1)}. \end{aligned} \tag{4.48}$$

Мы учли, что при сделанных ограничениях на l, k и γ выполнено $l + |\gamma| - 2pk - J - 1 \geqslant 1$, а потому $|t|^{l+|\gamma|-2pk-J-1} \leqslant 1$ при $|t| \leqslant t^0$. Следовательно, выражение в скобках в (4.47) можно заменить на P в пределах допустимой погрешности (выделяя остаточный член). Кроме того, как и прежде (см. (4.38), (4.39)), во внутренней сумме в правой части (4.47) можно оставить лишь члены с $|\gamma| \leqslant 2pk + J$, перенося оставшиеся члены в остаток. В итоге приходим к представлению

$$\mathcal{I}_2^{(J)}(t,\varepsilon) = \sum_{k=J-p+2}^{J} (-1)^k \sum_{\substack{\gamma \in (\tilde{\mathbb{N}}_{J-k})^k: \\ |\gamma| \leqslant 2pk+J}} t^{|\gamma|} \hat{R}_0 G_{\gamma_1} \hat{R}_0 \cdot \ldots \cdot \hat{R}_0 G_{\gamma_k} \hat{R}_0 + Z_\dagger^{(J)}(t,\varepsilon), \;\; J = p+1, \dots, 2p-1, \tag{4.49}$$

причем при $|t| \leqslant t^0$, $\varepsilon > 0$ остаточный член удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned} &\|Z_\dagger^{(J)}(t,\varepsilon)\| \leqslant C_\dagger(J) \varepsilon^{-(2p-J-1)}, \quad J = p+1, \dots, 2p-1, \\ &C_\dagger(J) = C(p) c_*^{-(J+1)/2p} (1 + c_*^{-1})^J C_T^{(p+1+J/2)^2}. \end{aligned} \tag{4.50}$$

Рассмотрим теперь оператор $\mathcal{I}_1^{(J)}(t,\varepsilon)$. При $1 \leqslant k \leqslant J-p+1$ обозначим для краткости

$$F_0^{(J-k)}(t) := \sum_{l=p}^{J-k+1} F_l t^l; \quad N^{(J-k)}(t) := -\sum_{l=2p+1}^{2p+1+J-k} G_l t^l. \tag{4.51}$$

Согласно (4.19) имеем

$$\Phi_0^{(2p+1+J-k)}(t,\varepsilon) = F_0^{(J-k)}(t) + N^{(J-k)}(t) \hat{R}_0(t,\varepsilon), \quad k = 1, \dots, J-p+1. \tag{4.52}$$

Из оценок (3.6), (3.7) и (4.5) при $|t| \leqslant t^0$, $\varepsilon > 0$ вытекают неравенства

$$\|F_0^{(J-k)}(t)\| \leqslant C(p) C_T^{J-k+1} |t|^p, \quad \|N^{(J-k)}(t)\hat{R}_0(t,\varepsilon)\| \leqslant C(p) c_*^{-1} C_T^{2p+1+J-k} |t|. \tag{4.53}$$

Подставляя (4.52) в (4.45), получаем

$$\mathcal{I}_1^{(J)}(t,\varepsilon) = \Big(P + \sum_{l=p}^{J-1} t^l F_l\Big) \hat{R}_0(t,\varepsilon) \sum_{k=1}^{J-p+1} \Big(F_0^{(J-k)}(t) + N^{(J-k)}(t)\hat{R}_0(t,\varepsilon)\Big)^k. \tag{4.54}$$

Из представления (4.54) и неравенств (3.6), (4.5), (4.53) по аналогии с доказательством предложения 4.6 выводим

$$\mathcal{I}_1^{(J)}(t,\varepsilon) = \tilde{\mathcal{I}}_1^{(J)}(t,\varepsilon) + \hat{\mathcal{I}}_1^{(J)}(t,\varepsilon) + Z_+^{(J)}(t,\varepsilon), \tag{4.55}$$

$$\tilde{\mathcal{I}}_1^{(J)}(t,\varepsilon) := \hat{R}_0(t,\varepsilon) \sum_{k=1}^{J-p+1} \Big(F_0^{(J-k)}(t) + N^{(J-k)}(t)\hat{R}_0(t,\varepsilon)\Big)^k, \tag{4.56}$$

$$\hat{\mathcal{I}}_1^{(J)}(t,\varepsilon) := \Big(\sum_{l=p}^{J-1} t^l F_l\Big) \hat{R}_0(t,\varepsilon) \sum_{k=1}^{J-p+1} \Big(N^{(J-k)}(t)\hat{R}_0(t,\varepsilon)\Big)^k, \tag{4.57}$$

где остаточный член при $|t| \leqslant t^0$ и $\varepsilon > 0$ подчинен оценке

$$\|Z_+^{(J)}(t,\varepsilon)\| \leqslant C_+(J)\varepsilon^{-(2p-J-1)}, \ C_+(J) = C(p) c_*^{-(J+1)/2p} (1 + c_*^{-1})^{J-p+1} C_T^{(p+1+J/2)^2}. \tag{4.58}$$

Подставляя (4.51) в (4.57), преобразуем член $\hat{\mathcal{I}}_1^{(J)}(t,\varepsilon)$:

$$\hat{\mathcal{I}}_1^{(J)}(t,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{J-p+1} (-1)^k \sum_{l=p}^{J-1} \sum_{\gamma \in (\tilde{\mathbb{N}}_{J-k})^k} t^{l+|\gamma|} F_l \hat{R}_0 G_{\gamma_1} \hat{R}_0 \cdot \ldots \cdot \hat{R}_0 G_{\gamma_k} \hat{R}_0. \tag{4.59}$$

Аналогично (4.48), во внутренней сумме справа слагаемые с $l + |\gamma| \geqslant 2pk + J + 1$ можно отнести в остаточный член, поскольку при $|t| \leqslant t^0$ и $\varepsilon > 0$ выполнено

$$\begin{aligned} &\big\| t^{l+|\gamma|} F_l \hat{R}_0 G_{\gamma_1} \hat{R}_0 \cdot \ldots \cdot \hat{R}_0 G_{\gamma_k} \hat{R}_0 \big\| \leqslant C(p) C_T^{l+|\gamma|} |t|^{l+|\gamma|} \left(c_* t^{2p} + \varepsilon^{2p}\right)^{-k-1} \\ &\quad \leqslant C(p) c_*^{-k-(J+1)/2p} C_T^{l+|\gamma|} \varepsilon^{-(2p-J-1)}. \end{aligned} \tag{4.60}$$

При $k = J-p+1$ автоматически выполнено $l+|\gamma| \geqslant 2pk+J+1$ за счет $l \geqslant p$ и $|\gamma| \geqslant 2pk+k$. Поэтому члены с $k = J-p+1$ можно отнести в остаток. Далее, поскольку $|\gamma| \geqslant 2pk+k$, то неравенство $l + |\gamma| \leqslant 2pk + J$ может выполняться лишь при $l \leqslant J - k$. Наконец, если хотя бы одно $\gamma_j \geqslant p + 2 + J - k$, то заведомо $l + |\gamma| \geqslant 2pk + J + 1$. Следовательно, неравенство $l + |\gamma| \leqslant 2pk + J$ может выполняться лишь при $\gamma \in (\tilde{\mathbb{N}}_{J-p-k})^k$. Таким образом, из (4.59) вытекает представление

$$\hat{\mathcal{I}}_1^{(J)}(t,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{J-p} (-1)^k \sum_{l=p}^{J-k} \sum_{\substack{\gamma \in (\tilde{\mathbb{N}}_{J-p-k})^k : \\ l+|\gamma| \leqslant 2pk+J}} t^{l+|\gamma|} F_l \hat{R}_0 G_{\gamma_1} \hat{R}_0 \cdot \ldots \cdot \hat{R}_0 G_{\gamma_k} \hat{R}_0 + \hat{Z}_+^{(J)}(t,\varepsilon). \tag{4.61}$$

Остаточный член при $|t| \leqslant t^0$ и $\varepsilon > 0$ подчинен оценке

$$\|\hat{Z}_+^{(J)}(t,\varepsilon)\| \leqslant \hat{C}_+(J)\varepsilon^{-(2p-J-1)}, \ \hat{C}_+(J) = C(p) c_*^{-(J+1)/2p} (1 + c_*^{-1})^{J-p+1} C_T^{(p+1+J/2)^2}. \tag{4.62}$$

Остается рассмотреть член $\tilde{\mathcal{I}}_1^{(J)}(t,\varepsilon)$. При $1 \leqslant k \leqslant J-p+1$ представим оператор $N^{(J-k)}(t)$ в виде суммы двух слагаемых:

$$N^{(J-k)}(t) = N_0(t) + N_1^{(J-k)}(t), \quad N_0(t) := -\sum_{l=2p+1}^{3p-1} G_l t^l, \quad N_1^{(J-k)}(t) := -\sum_{l=3p}^{2p+1+J-k} G_l t^l. \tag{4.63}$$

Из оценок (3.7) и (4.5) при $|t| \leqslant t^0$, $\varepsilon > 0$ вытекают неравенства

$$\|N_0(t)\hat{R}_0(t,\varepsilon)\| \leqslant C(p)c_*^{-1}C_T^{3p-1}|t|, \quad \|N_1^{(J-k)}(t)\hat{R}_0(t,\varepsilon)\| \leqslant C(p)c_*^{-1}C_T^{2p+1+J-k}|t|^p. \tag{4.64}$$

Для удобства выделим в (4.56) слагаемое с $k = 1$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{I}}_1^{(J)}(t,\varepsilon) &= \hat{R}_0(t,\varepsilon)F_0^{(J-1)}(t) + \hat{R}_0(t,\varepsilon)N^{(J-1)}(t)\hat{R}_0(t,\varepsilon) + \mathcal{I}_3^{(J)}(t,\varepsilon), \\ \mathcal{I}_3^{(J)}(t,\varepsilon) &:= \hat{R}_0(t,\varepsilon)\sum_{k=2}^{J-p+1}\Big(F_0^{(J-k)}(t) + N_0(t)\hat{R}_0(t,\varepsilon) + N_1^{(J-k)}(t)\hat{R}_0(t,\varepsilon)\Big)^k. \end{aligned} \tag{4.65}$$

В силу (4.51) первые два слагаемых можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\hat{R}_0(t,\varepsilon)F_0^{(J-1)}(t) + \hat{R}_0(t,\varepsilon)N^{(J-1)}(t)\hat{R}_0(t,\varepsilon) \\ &= \sum_{l=p}^{J} t^l\hat{R}_0(t,\varepsilon)F_l - \sum_{l=2p+1}^{2p+J} t^l\hat{R}_0(t,\varepsilon)G_l\hat{R}_0(t,\varepsilon). \end{aligned} \tag{4.66}$$

По аналогии с доказательством предложения 4.6 с помощью оценок (4.5), (4.53) и (4.64) проверяется следующее утверждение.

Предложение 4.11. *При $|t| \leqslant t^0$, $\varepsilon > 0$ справедливо представление*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_3^{(J)}(t,\varepsilon) &= \hat{R}_0\sum_{k=2}^{J-p+1}\Big(N_0(t)\hat{R}_0\Big)^k + \\ &+ \hat{R}_0\sum_{k=2}^{J-p+1}\sum_{j=0}^{k-1}\Big(N_0(t)\hat{R}_0\Big)^j\Big(F_0^{(J-k)}(t) + N_1^{(J-k)}(t)\hat{R}_0\Big)\Big(N_0(t)\hat{R}_0\Big)^{k-1-j} + \tilde{Z}_+^{(J)}(t,\varepsilon). \end{aligned} \tag{4.67}$$

Остаточный член при $|t| \leqslant t^0$, $\varepsilon > 0$ подчинен оценке

$$\|\tilde{Z}_+^{(J)}(t,\varepsilon)\| \leqslant \tilde{C}_+(J)\varepsilon^{-(2p-J-1)}, \quad \tilde{C}_+(J) = C(p)c_*^{-(J+1)/2p}(1+c_*^{-1})^{J-p+1}C_T^{(p+1+J/2)^2}. \tag{4.68}$$

В силу (1.20), (2.40), (4.8), (4.51) и (4.63) справедливы соотношения $PF_0^{(J-k)}(t)P = 0$, $N_0(t) = PN_0(t)P$, $\hat{R}_0(t,\varepsilon) = P\hat{R}_0(t,\varepsilon)P$, с учетом которых представление (4.67) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_3^{(J)}(t,\varepsilon) &= \hat{R}_0\sum_{k=2}^{J-p+1}\Big(N_0(t)\hat{R}_0\Big)^k + \hat{R}_0\sum_{k=2}^{J-p+1}\Big(N_0(t)\hat{R}_0\Big)^{k-1}F_0^{(J-k)}(t) \\ &+ \hat{R}_0\sum_{k=2}^{J-p+1}\sum_{j=0}^{k-1}\Big(N_0(t)\hat{R}_0\Big)^j N_1^{(J-k)}(t)\hat{R}_0\Big(N_0(t)\hat{R}_0\Big)^{k-1-j} + \tilde{Z}_+^{(J)}(t,\varepsilon) \\ &=: \mathcal{I}_4^{(J)}(t,\varepsilon) + \mathcal{I}_5^{(J)}(t,\varepsilon) + \mathcal{I}_6^{(J)}(t,\varepsilon) + \tilde{Z}_+^{(J)}(t,\varepsilon). \end{aligned} \tag{4.69}$$

Здесь введены обозначения $\mathcal{I}_4^{(J)}(t,\varepsilon)$, $\mathcal{I}_5^{(J)}(t,\varepsilon)$, $\mathcal{I}_6^{(J)}(t,\varepsilon)$ для первых трех слагаемых.

Из (4.63) следует, что

$$\mathcal{I}_4^{(J)}(t,\varepsilon) = \sum_{k=2}^{J-p+1}(-1)^k\sum_{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{p-2})^k} t^{|\gamma|}\hat{R}_0G_{\gamma_1}\hat{R}_0\cdot\ldots\cdot\hat{R}_0G_{\gamma_k}\hat{R}_0.$$

По аналогии с (4.38), (4.39) во внутренней сумме справа можно оставить лишь члены с $|\gamma| \leqslant 2pk + J$, а остальные члены перенести в остаток:

$$\mathcal{I}_4^{(J)}(t,\varepsilon) = \sum_{k=2}^{J-p+1}(-1)^k\sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{p-2})^k:\\ |\gamma|\leqslant 2pk+J}} t^{|\gamma|}\hat{R}_0G_{\gamma_1}\hat{R}_0\cdot\ldots\cdot\hat{R}_0G_{\gamma_k}\hat{R}_0 + Z_\flat^{(J)}(t,\varepsilon). \tag{4.70}$$

Остаточный член при $|t| \leqslant t^0$, $\varepsilon > 0$ подчинен оценке

$$\|Z_\flat^{(J)}(t,\varepsilon)\| \leqslant C_\flat(J)\varepsilon^{-(2p-J-1)}, \quad C_\flat(J) = C(p)c_*^{-(J+1)/2p}(1+c_*^{-1})^{J-p+1}C_T^{(p+1+J/2)^2}. \quad (4.71)$$

Далее, из (4.51) и (4.63) вытекает представление для члена $\mathcal{I}_5^{(J)}(t,\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_5^{(J)}(t,\varepsilon) = &\sum_{k=2}^{J-p+1}(-1)^{k-1}\sum_{l=p}^{J-k+1}\sum_{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{p-2})^{k-1}} t^{l+|\gamma|}\hat{R}_0G_{\gamma_1}\hat{R}_0\cdot\ldots\cdot\hat{R}_0G_{\gamma_{k-1}}\hat{R}_0F_l = \\ &= \sum_{k=1}^{J-p}(-1)^k\sum_{l=p}^{J-k}\sum_{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{p-2})^{k}} t^{l+|\gamma|}\hat{R}_0G_{\gamma_1}\hat{R}_0\cdot\ldots\cdot\hat{R}_0G_{\gamma_k}\hat{R}_0F_l.\end{aligned} \quad (4.72)$$

В последнем равенстве выполнена замена значка суммирования ($k-1 \mapsto k$). Аналогично (4.60), (4.61) проверяется представление

$$\mathcal{I}_5^{(J)}(t,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{J-p}(-1)^k\sum_{l=p}^{J-k}\sum_{\substack{\gamma\,\in\,(\tilde{\mathbb{N}}_{J-p-k})^k:\\ l+|\gamma|\leqslant 2pk+J}} t^{l+|\gamma|}\hat{R}_0G_{\gamma_1}\hat{R}_0\cdot\ldots\cdot\hat{R}_0G_{\gamma_k}\hat{R}_0F_l + Z_{\flat\flat}^{(J)}(t,\varepsilon). \quad (4.73)$$

Остаточный член при $|t| \leqslant t^0$, $\varepsilon > 0$ подчинен оценке

$$\|Z_{\flat\flat}^{(J)}(t,\varepsilon)\| \leqslant C_{\flat\flat}(J)\varepsilon^{-(2p-J-1)}, \quad C_{\flat\flat}(J) = C(p)c_*^{-(J+1)/2p}(1+c_*^{-1})^{J-p}C_T^{(p+1+J/2)^2}. \quad (4.74)$$

Преобразуем теперь $\mathcal{I}_6^{(J)}(t,\varepsilon)$ с помощью (4.63):

$$\begin{aligned}&\mathcal{I}_6^{(J)}(t,\varepsilon) = \sum_{k=2}^{J-p+1}(-1)^k\sum_{i=3p}^{2p+1+J-k}\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{p-2})^{k-1}} t^{i+|\gamma|}\Xi_{i,j,\gamma}^{(k)}(t,\varepsilon),\\ &\Xi_{i,0,\gamma}^{(k)}(t,\varepsilon) := \hat{R}_0G_i\hat{R}_0G_{\gamma_1}\hat{R}_0\cdot\ldots\cdot\hat{R}_0G_{\gamma_{k-1}}\hat{R}_0,\\ &\Xi_{i,k-1,\gamma}^{(k)}(t,\varepsilon) := \hat{R}_0G_{\gamma_1}\hat{R}_0\cdot\ldots\cdot\hat{R}_0G_{\gamma_{k-1}}\hat{R}_0G_i\hat{R}_0,\\ &\Xi_{i,j,\gamma}^{(k)}(t,\varepsilon) := \hat{R}_0G_{\gamma_1}\hat{R}_0\cdot\ldots\cdot\hat{R}_0G_{\gamma_j}\hat{R}_0G_i\hat{R}_0G_{\gamma_{j+1}}\hat{R}_0\cdot\ldots\cdot\hat{R}_0G_{\gamma_{k-1}}\hat{R}_0,\\ &\qquad k\geqslant 3,\ j=1,\ldots,k-2.\end{aligned} \quad (4.75)$$

Как и прежде, слагаемые с $i+|\gamma| \geqslant 2pk+J+1$ можно отнести в остаточный член:

$$\mathcal{I}_6^{(J)}(t,\varepsilon) = \sum_{k=2}^{J-p+1}(-1)^k\sum_{i=3p}^{2p+1+J-k}\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{p-2})^{k-1}:\\ i+|\gamma|\leqslant 2pk+J}} t^{i+|\gamma|}\Xi_{i,j,\gamma}^{(k)}(t,\varepsilon) + Z_{\flat\flat\flat}^{(J)}(t,\varepsilon). \quad (4.76)$$

Остаточный член при $|t| \leqslant t^0$, $\varepsilon > 0$ подчинен оценке

$$\|Z_{\flat\flat\flat}^{(J)}(t,\varepsilon)\| \leqslant C_{\flat\flat\flat}(J)\varepsilon^{-(2p-J-1)}, \quad C_{\flat\flat\flat}(J) = C(p)c_*^{-(J+1)/2p}(1+c_*^{-1})^{J-p+1}C_T^{(p+1+J/2)^2}. \quad (4.77)$$

Комбинируя (4.44), (4.49), (4.55), (4.61), (4.65), (4.66), (4.69), (4.70), (4.73), (4.76), приходим к представлению

$$
\begin{aligned}
\hat{R}(t,\varepsilon) = \hat{R}_0 + \sum_{l=p}^{J} t^l \left(F_l\hat{R}_0 + \hat{R}_0 F_l\right) - \sum_{l=2p+1}^{2p+J} t^l \hat{R}_0 G_l \hat{R}_0 + \\
+ \sum_{k=2}^{J-p+1} (-1)^k \sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{p-2})^k:\\ |\gamma|\leqslant 2pk+J}} t^{|\gamma|} \hat{R}_0 G_{\gamma_1}\hat{R}_0 \cdot \ldots \cdot \hat{R}_0 G_{\gamma_k}\hat{R}_0 + \\
+ \sum_{k=J-p+2}^{J} (-1)^k \sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{J-k})^k:\\ |\gamma|\leqslant 2pk+J}} t^{|\gamma|} \hat{R}_0 G_{\gamma_1}\hat{R}_0 \cdot \ldots \cdot \hat{R}_0 G_{\gamma_k}\hat{R}_0 + \\
+ \sum_{k=1}^{J-p} (-1)^k \sum_{l=p}^{J-k} \sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{J-p-k})^k:\\ l+|\gamma|\leqslant 2pk+J}} t^{l+|\gamma|} F_l \hat{R}_0 G_{\gamma_1}\hat{R}_0 \cdot \ldots \cdot \hat{R}_0 G_{\gamma_k}\hat{R}_0 + \\
+ \sum_{k=1}^{J-p} (-1)^k \sum_{l=p}^{J-k} \sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{J-p-k})^k:\\ l+|\gamma|\leqslant 2pk+J}} t^{l+|\gamma|} \hat{R}_0 G_{\gamma_1}\hat{R}_0 \cdot \ldots \cdot \hat{R}_0 G_{\gamma_k}\hat{R}_0 F_l + \\
+ \sum_{k=2}^{J-p+1} (-1)^k \sum_{i=3p}^{2p+1+J-k} \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{p-2})^{k-1}:\\ i+|\gamma|\leqslant 2pk+J}} t^{i+|\gamma|} \Xi^{(k)}_{i,j,\gamma}(t,\varepsilon) + Z^{(J)}_{\circ}(t,\varepsilon).
\end{aligned}
\tag{4.78}
$$

Здесь

$$
Z^{(J)}_{\circ}(t,\varepsilon) = Z^{(J)}_{**} + Z^{(J)}_{\dagger} + Z^{(J)}_{+} + \hat{Z}^{(J)}_{+} + \tilde{Z}^{(J)}_{+} + Z^{(J)}_{\flat} + Z^{(J)}_{\flat\flat} + Z^{(J)}_{\flat\flat\flat}.
$$

В силу (4.36), (4.50), (4.58), (4.62), (4.68), (4.71), (4.74), (4.77) при $|t| \leqslant t^0$, $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$
\begin{aligned}
&\|Z^{(J)}_{\circ}(t,\varepsilon)\| \leqslant C_{10}(J)\varepsilon^{-(2p-J-1)}, \quad J = p+1,\ldots,2p-1,\\
&C_{10}(J) = C(p) c_*^{-(J+1)/2p} (1 + c_*^{-1})^{J+1} C_T^{(p+1+J/2)^2}.
\end{aligned}
\tag{4.79}
$$

Выделим в (4.78) члены одного порядка $O(\varepsilon^{-(2p-s)})$, $s = 1,\ldots,J$. При $s = 1,\ldots,p$ получатся прежние корректоры $\mathcal{K}_s(t,\varepsilon)$, определенные в (4.40), (4.43). При $s = p+1,\ldots,J$

определим корректоры

$$\mathcal{K}_s(t,\varepsilon) = t^s\left(F_s\hat{R}_0 + \hat{R}_0 F_s\right) - t^{2p+s}\hat{R}_0 G_{2p+s}\hat{R}_0 + \mathcal{K}'_s(t,\varepsilon) + \mathcal{K}''_s(t,\varepsilon) + \mathcal{K}'''_s(t,\varepsilon), \tag{4.80}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}'_s(t,\varepsilon) := \sum_{k=2}^{J-p+1}(-1)^k t^{2pk+s} \sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{p-2})^k:\\ |\gamma|=2pk+s}} \hat{R}_0 G_{\gamma_1}\hat{R}_0\cdot\ldots\cdot\hat{R}_0 G_{\gamma_k}\hat{R}_0 + \\ + \sum_{k=J-p+2}^{J}(-1)^k t^{2pk+s} \sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{J-k})^k:\\ |\gamma|=2pk+s}} \hat{R}_0 G_{\gamma_1}\hat{R}_0\cdot\ldots\cdot\hat{R}_0 G_{\gamma_k}\hat{R}_0,\end{aligned} \tag{4.81}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}''_s(t,\varepsilon) := \sum_{k=1}^{J-p}(-1)^k t^{2pk+s}\sum_{l=p}^{J-k} \sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{J-p-k})^k:\\ l+|\gamma|=2pk+s}} F_l\hat{R}_0 G_{\gamma_1}\hat{R}_0\cdot\ldots\cdot\hat{R}_0 G_{\gamma_k}\hat{R}_0 + \\ + \sum_{k=1}^{J-p}(-1)^k t^{2pk+s}\sum_{l=p}^{J-k} \sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{J-p-k})^k:\\ l+|\gamma|=2pk+s}} \hat{R}_0 G_{\gamma_1}\hat{R}_0\cdot\ldots\cdot\hat{R}_0 G_{\gamma_k}\hat{R}_0 F_l,\end{aligned} \tag{4.82}$$

$$\mathcal{K}'''_s(t,\varepsilon) := \sum_{k=2}^{J-p+1}(-1)^k t^{2pk+s}\sum_{i=3p}^{2p+1+J-k}\sum_{j=0}^{k-1} \sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{p-2})^{k-1}:\\ i+|\gamma|=2pk+s}} \Xi^{(k)}_{i,j,\gamma}(t,\varepsilon). \tag{4.83}$$

Здесь операторы $\Xi^{(k)}_{i,j,\gamma}(t,\varepsilon)$ определены в (4.75). Убедимся, что корректоры $\mathcal{K}'_s(t,\varepsilon), \mathcal{K}''_s(t,\varepsilon), \mathcal{K}'''_s(t,\varepsilon)$ не зависят от J, а зависят лишь от s.

В (4.81), поскольку $|\gamma| \geqslant 2pk + k$, то равенство $|\gamma| = 2pk + s$ может выполняться лишь при $k \leqslant s$. Далее, если хотя бы одно $\gamma_j \geqslant 2p + 1 + s - k + 1$, то заведомо $|\gamma| \geqslant 2pk + s + 1$ и равенство $|\gamma| = 2pk + s$ не может выполняться. Поэтому при условии $|\gamma| = 2pk + s$ имеем $\gamma \in (\tilde{\mathbb{N}}_{s-k})^k$. Наконец, при $k \geqslant s - p + 2$ условие $\gamma \in (\tilde{\mathbb{N}}_{p-2})^k$, $|\gamma| = 2pk + s$, равносильно условию $\gamma \in (\tilde{\mathbb{N}}_{s-k})^k$, $|\gamma| = 2pk + s$. Таким образом, корректор $\mathcal{K}'_s(t,\varepsilon)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{K}'_s(t,\varepsilon) = \sum_{k=2}^{s-p+1}(-1)^k t^{2pk+s} \sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{p-2})^k:\\ |\gamma|=2pk+s}} \hat{R}_0 G_{\gamma_1}\hat{R}_0\cdot\ldots\cdot\hat{R}_0 G_{\gamma_k}\hat{R}_0 + \\ + \sum_{k=s-p+2}^{s}(-1)^k t^{2pk+s} \sum_{\substack{\gamma\in(\tilde{\mathbb{N}}_{s-k})^k:\\ |\gamma|=2pk+s}} \hat{R}_0 G_{\gamma_1}\hat{R}_0\cdot\ldots\cdot\hat{R}_0 G_{\gamma_k}\hat{R}_0.\end{aligned} \tag{4.84}$$

Далее, в (4.82), поскольку $l + |\gamma| \geqslant p + 2pk + k$, то равенство $l + |\gamma| = 2pk + s$ может выполняться лишь при $k \leqslant s - p$. Далее, в силу $l + 2pk + k \leqslant l + |\gamma| = 2pk + s$ выполняется ограничение $l \leqslant s - k$. Наконец, если хотя бы одно $\gamma_j \geqslant 2p + 1 + s - p - k + 1$, то заведомо $l + |\gamma| \geqslant 2pk + s + 1$. Следовательно, равенство $l + |\gamma| = 2pk + s$ возможно лишь при условии

$\gamma \in (\tilde{\mathbb{N}}_{s-p-k})^k$. Таким образом, корректор $\mathcal{K}''_s(t,\varepsilon)$ принимает вид

$$\mathcal{K}''_s(t,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{s-p} (-1)^k t^{2pk+s} \sum_{l=p}^{s-k} \sum_{\substack{\gamma \in (\tilde{\mathbb{N}}_{s-p-k})^k: \\ l+|\gamma| = 2pk+s}} F_l \hat{R}_0 G_{\gamma_1} \hat{R}_0 \cdot \ldots \cdot \hat{R}_0 G_{\gamma_k} \hat{R}_0 + \\ + \sum_{k=1}^{s-p} (-1)^k t^{2pk+s} \sum_{l=p}^{s-k} \sum_{\substack{\gamma \in (\tilde{\mathbb{N}}_{s-p-k})^k: \\ l+|\gamma| = 2pk+s}} \hat{R}_0 G_{\gamma_1} \hat{R}_0 \cdot \ldots \cdot \hat{R}_0 G_{\gamma_k} \hat{R}_0 F_l. \tag{4.85}$$

Наконец, в (4.83), поскольку $i+|\gamma| \geqslant 3p+(2p+1)(k-1)$, то равенство $i+|\gamma| = 2pk+s$ может выполняться лишь при $k \leqslant s-p+1$. Далее, в силу $i+(2p+1)(k-1) \leqslant i+|\gamma| = 2pk+s$ выполнено ограничение $i \leqslant 2p+1+s-k$. Следовательно,

$$\mathcal{K}'''_s(t,\varepsilon) := \sum_{k=2}^{s-p+1} (-1)^k t^{2pk+s} \sum_{i=3p}^{2p+1+s-k} \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{\substack{\gamma \in (\tilde{\mathbb{N}}_{p-2})^{k-1}: \\ i+|\gamma| = 2pk+s}} \Xi^{(k)}_{i,j,\gamma}(t,\varepsilon). \tag{4.86}$$

Полученные представления (4.84)–(4.86) показывают, что корректоры $\mathcal{K}'_s(t,\varepsilon)$, $\mathcal{K}''_s(t,\varepsilon)$, $\mathcal{K}'''_s(t,\varepsilon)$ определяются числом s и не зависят от J.

Подытожим результаты.

Предложение 4.12. *При каждом $J = p+1,\ldots,2p-1$ и при $|t| \leqslant t^0$, $\varepsilon > 0$ справедливы представления*

$$\hat{R}(t,\varepsilon) = \hat{R}_0(t,\varepsilon) + \sum_{s=1}^{J} \mathcal{K}_s(t,\varepsilon) + Z^{(J)}_\circ(t,\varepsilon). \tag{4.87}$$

Корректоры $\mathcal{K}_s(t,\varepsilon)$ при $s = 1,\ldots,p$ определены в (4.40) *и* (4.43), *а при $s = p+1,\ldots,2p-1$ корректоры $\mathcal{K}_s(t,\varepsilon)$ определены согласно* (4.80), (4.84)–(4.86). *Выполнены оценки*

$$\|\mathcal{K}_s(t,\varepsilon)\| \leqslant C(p) c_*^{-s/2p} (1+c_*^{-1})^s C_T^{(2p+1)s} \varepsilon^{-(2p-s)}, \quad s = 1,\ldots,2p-1. \tag{4.88}$$

Остаточный член $Z^{(J)}_\circ(t,\varepsilon)$ удовлетворяет оценке (4.79).

4.5. **Итоговый результат.** Комбинируя соотношения (4.32), (4.36), предложения 4.9, 4.10, 4.12 и учитывая (4.9), мы приходим к следующему итоговому результату.

Теорема 4.13. *Пусть операторный пучок $A(t)$ определен в пункте* 1.1, *причем выполнены условия* 1.1, 1.2, 1.3 *и* 4.1. *Тогда при $|t| \leqslant t^0$ и $\varepsilon > 0$ справедливы представления*

$$(A(t)+\varepsilon^{2p}I)^{-1} = \hat{R}_0(t,\varepsilon) + Z^{(0)}(t,\varepsilon), \\ (A(t)+\varepsilon^{2p}I)^{-1} = \hat{R}_0(t,\varepsilon) + \sum_{s=1}^{J} \mathcal{K}_s(t,\varepsilon) + Z^{(J)}(t,\varepsilon), \quad J = 1,\ldots,2p-1. \tag{4.89}$$

Оператор $\hat{R}_0(t,\varepsilon)$ определен в (4.8). *Корректоры $\mathcal{K}_s(t,\varepsilon)$ при $s = 1,\ldots,p$, определены в* (4.40) *и* (4.43), *а при $s = p+1,\ldots,2p-1$ корректоры $\mathcal{K}_s(t,\varepsilon)$ определены согласно* (4.80), (4.84)–(4.86). *Выполнены оценки* (4.88). *Остаточные члены подчинены оценкам*

$$\|Z^{(J)}(t,\varepsilon)\| \leqslant C^{(J)} \varepsilon^{-(2p-J-1)}, \quad |t| \leqslant t^0,\ \varepsilon > 0, \quad J = 0,1,\ldots,2p-1,$$
$$C^{(0)} = (3\delta)^{-1/2p} + C(p) c_*^{-1/2p} (1+c_*^{-1}) C_T^{2p+1},$$
$$C^{(J)} = (3\delta)^{-(J+1)/2p} + C(p) c_*^{-(J+1)/2p} (1+c_*^{-1})^{J+1} C_T^{(p+1+J/2)^2}, \quad J = 1,\ldots,2p-1.$$

Число t^0 подчинено условию (1.3), *постоянная C_T определена в* (3.9), *c_* — постоянная из условия* 4.1, *$C(p)$ — некоторая постоянная, зависящая только от p.*

Замечание 4.14. 1°. *Отметим, что аппроксимации резольвенты из теоремы 4.13 имеют самосопряженный вид, поскольку* $\hat{R}_0(t,\varepsilon)^* = \hat{R}_0(t,\varepsilon)$ *и* $\mathcal{K}_s(t,\varepsilon)^* = \mathcal{K}_s(t,\varepsilon)$, $s = 1,\dots,2p-1$.
2°. *При* $J = 2p-1$ *аппроксимация* (4.89) *наиболее точная, погрешность имеет порядок* $O(1)$. *Это предельная точность, которую можно получить с помощью аналитической теории возмущений вблизи края спектра. Действительно, мы опирались на то, что* $\|(A(t)+\varepsilon^{2p}I)^{-1}F(t)^\perp\| = O(1)$, *а потому достаточно приблизить оператор* $\hat{R}(t,\varepsilon) = (A(t)+\varepsilon^{2p}I)^{-1}F(t)$.

Список литературы

[BSu1] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), вып. 5, 1–108.

[BSu2] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Пороговые аппроксимации резольвенты факторизованного самосопряженного семейства с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), вып. 5, 69–90.

[BSu3] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), вып. 6, 1–104.

[BSu4] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева* $H^1(\mathbb{R}^d)$, Алгебра и анализ **18** (2006), вып. 6, 1–130.

[Ve] Вениаминов Н. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов высокого порядка*, Алгебра и анализ **22** (2010), вып. 5, 69–103.

[K] Като Т., *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

[KuSu] Кукушкин А. А., Суслина Т. А., *Усреднение эллиптических операторов высокого порядка с периодическими коэффициентами*, Алгебра и анализ, **28** (2016), вып. 1, 89–149.

[SlSu1] Слоущ В. А., Суслина Т. А., *Усреднение эллиптического оператора четвертого порядка с периодическими коэффициентами при учете корректоров*, Функц. анализ и его прил. **54** (2020), вып. 3, 94–99.

[SlSu2] Слоущ В. А., Суслина Т. А., *Усреднение эллиптического оператора четвертого порядка с периодическими коэффициентами*, Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2020, Симферополь, Полипринт, 2020, стр. 186–188.