

## **ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН**

### **ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР**

**С.В. Кисляков**

### **РЕДКОЛЛЕГИЯ**

**В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов,  
Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин**

**Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Санкт-Петербургское отделение Математического института  
им. В. А. Стеклова Российской академии наук**

**Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16  
октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых  
коммуникаций**

**Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27**

**телефоны: (812)312-40-58; (812) 571-57-54**

**e-mail: [admin@pdmi.ras.ru](mailto:admin@pdmi.ras.ru)**

**<http://www.pdmi.ras.ru/preprint/>**

**Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н**

ПРЕПРИНТ ПОМИ 06/2020

## КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД ДЛЯ ЗАДАЧИ ЛЭМБА

**В. Б. Филиппов**

Санкт-Петербургское отделение  
математического института им. В. А. Стеклова РАН,  
наб. р. Фонтанки, д. 27, 191023, Санкт-Петербург, Россия  
filippov@pdmi.ras.ru

### АННОТАЦИЯ

В работе рассматривается применение метода, получившего название Комбинированного метода, для нахождения компактного представления для асимптотики решения задачи Лэмба, эффективного, как для численного счета, так и для дальнейших обобщений.

**Ключевые слова:** задача Лэмба, точечный источник, волны Рэлея, головные волны, комбинированный метод.

ПРЕПРИНТЫ  
Санкт-Петербургского отделения  
Математического института им. В. А. Стеклова  
Российской академии наук

PREPRINTS  
of the St. Petersburg Department  
of Steklov Institute of Mathematics

---

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В. М. Бабич, Н. А. Вавилов, А. М. Вершик, М. А. Всемиров,  
А. И. Генералов, И. А. Ибрагимов, Л. Ю. Колотилина,  
Ю. В. Матиясевич, Н. Ю. Нецветаев,  
С. И. Репин, Г. А. Серегин

## 1 Введение

Проблема разработки методов для расчета волнового поля упругих волн, возбужденных точечными источниками различного типа, можно считать классической задачей теории упругости. основополагающие результаты были получены в начале 20-го века (см. [1]). В дальнейшем были разработаны различные численные и аналитические методы (см., например, [2]). Однако многие вопросы по обоснованию эффективности методов и их корректности остаются открытыми. Такое состояние вопроса связано с определенной сложностью картины лучей и соответственно сложностью математических моделей, применяемых для её описания. В основном, методы вычислений связаны с представлением решения в виде разложения по некоторым ортогональным системам функций. Но такие разложения, как правило, имеют плохую сходимость и поэтому эффективность подобных методов вызывает много вопросов. В конце 70-х годов автором был предложен метод, получивший название Комбинированного метода, позволивший получить достаточно простое представление для асимптотики решения ряда волноводных задач. Применение метода иллюстрировалось на ряде скалярных задач. В настоящей работе показывается каким образом применение Комбинированного метода позволяет получить достаточно простое представление для асимптотики решения задачи, возбуждения упругих волн точечным источником, помещенным на границу тела (задачи Лэмба).

## 2 Постановка задачи

Пусть имеется упругое изотропное полупространство, неоднородное по одной координате, перпендикулярной к границе (координата  $z$ ). Предполагается, что скорость продольных ( $c_1(z) = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ ) и поперечных ( $c_2(z) = \sqrt{\mu/\rho}$ ) волн растет с глубиной.

Пусть на поверхности имеется точечный источник

$$\sigma_{zz} = \delta(x)\delta(y) \exp(i\omega t) = \frac{1}{\pi r} \delta(r) \exp(i\omega t)$$

Введем цилиндрическую систему координат  $(r, \varphi, z)$

Поскольку свойства среды и источник не зависят от угловой координаты  $\varphi$ , естественно предположить, что решение также не будет зависеть от этой координаты.

Вообще говоря, для указанной задачи нельзя разделить полностью продольные и поперечные волны, поскольку в неоднородной среде будут происходить обменные процессы, но вблизи от источника и границы в первом приближении это возможно. Как и в случае однородной среды, будем искать решение с помощью потенциалов, соответствующих продольным и поперечным волнам:

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi + \nabla \times \mathbf{U}_t \quad (1)$$

В нашем случае источник возбуждает волны только  $P$  и  $SV$  типа, поэтому:

$$\mathbf{U}_t = \nabla \times \mathbf{M}$$

$$\mathbf{M} = (0, 0, \psi)$$

Искомые потенциалы  $\varphi(r, z)$  и  $\psi(r, z)$  будут удовлетворять уравнениям Гельмгольца:

$$\Delta\varphi + k_1^2\varphi = 0, \Delta\psi + k_2^2\psi = 0 \quad (2)$$

где  $k_1 = \omega/c_1, k_2 = \omega/c_2$

Приведем известные формулы (см., например, [2]) для тензора деформации и напряжения, которые нам пригодятся в дальнейшем:

$$\mathbf{U} = u_r \mathbf{e}_r + u_z \mathbf{e}_z \quad (3)$$

$$u_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial z}$$

$$u_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r\frac{\partial\psi}{\partial r})}{\partial r}$$

$$u_{zz} = \lambda\Delta\varphi + 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$u_{rz} = \mu[\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}]$$

$$\sigma_{zz} = \lambda(u_{rr} + u_{zz}) + 2\mu u_{zz} \quad (4)$$

$$\sigma_{rz} = 2\mu u_{rz} \quad (5)$$

### 3 Решение в окрестности источника

Получим (следуя [2]) решение в окрестности источника, с тем чтобы в дальнейшем сшить его с решением вдали от источника. Заметим, что обычно используют решение в глобальной области в виде разложения по собственным функциям поперечной задачи, что на наш взгляд не совсем корректно, поэтому мы используем два решения: вблизи и вдали от источника. В непосредственной близости от источника, в главном приближении среду, можно считать однородной. Тогда искомые потенциалы определяются формулами:

$$\varphi = \int_0^\infty J_0(\zeta r) e^{-sz} F(\zeta) d\zeta \quad (6)$$

$$\psi = \int_0^\infty J_0(\zeta r) e^{-tz} G(\zeta) d\zeta \quad (7)$$

где  $s^2 = \zeta^2 - k_1^2$  и  $t^2 = \zeta^2 - k_2^2$ , регулярная ветвь корней выбирается из условия  $s > 0$  при  $\zeta > k_1$  и  $t > 0$  при  $\zeta > k_2$ .

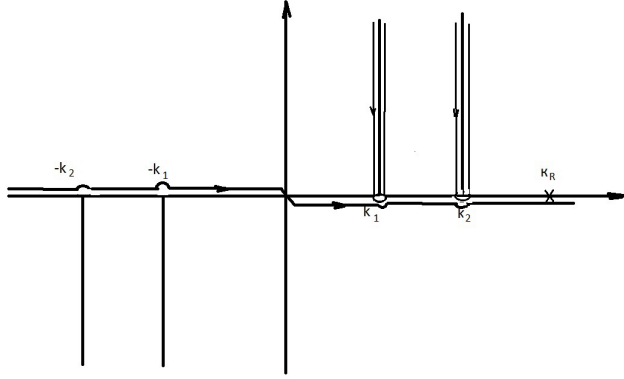


Рис. 1: Контур интегрирования и разрезы для решения в окрестности источника

В силу формул

$$J(x) = \frac{1}{2}[H_0^1(x) + H_0^2(x)]$$

$$H_0^1(-x) = -H_0^2(x)$$

интегралы в (6,7) можно преобразовать в интегралы по бесконечному промежутку, тогда формулы примут вид

$$\varphi = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^1(\zeta r) e^{-sz} F(\zeta) d\zeta \quad (8)$$

$$\psi = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^1(\zeta r) e^{-tz} G(\zeta) d\zeta \quad (9)$$

контур интегрирования и разрезы показаны на Рис.1. Имеем условие на границе (условие свободой границы):

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{\pi r} \delta(r), \sigma_{rz} = 0 \quad (10)$$

Воспользуемся известной формулой

$$\frac{1}{r} \delta(r) = \int_0^{\infty} J_0(\zeta r) \zeta d\zeta$$

При подстановки выражений (8,9) для потенциалов  $\varphi$  и  $\psi$  в (10) получим для функций  $F()$  и  $\tilde{G}()$  уравнения похожие на уравнения в двумерном случае, а именно:

$$[-\lambda\zeta^2 + (\lambda + 2\mu)s^2]F + \mu\zeta t\tilde{G} = \frac{1}{\pi}\zeta \quad (11)$$

$$2\zeta sF + (\zeta^2 + t^2)\tilde{G} = 0 \quad (12)$$

Детерминант равен:

$$\Delta = (\zeta^2 + t^2)^2 - 4\zeta^2 st \quad (13)$$

Заметим, что приравнивание нулю этого детерминанта дает известное уравнение для волн Рэлея в двумерном случае.

Для функций  $F()$  и  $G()$  имеем следующие выражения:

$$F(\zeta) = \frac{\zeta(\zeta^2 + t^2)}{\pi\Delta} \quad (14)$$

$$G(\zeta) = \frac{\zeta s}{\pi\Delta} \quad (15)$$

## 4 Решение вне окрестности источника

Будем считать, что мы достаточно (но не слишком далеко) удалены от источника и находимся вблизи границы (точные условия будут указаны ниже). Пусть среда такова, что скорости, как продольная, так и поперечная зависят только от координаты  $z$  и растут с глубиной:

$$c_{1,2}^2(z) = c_{1,2}^2(0)[1 + \frac{z}{l_{1,2}} + ..]$$

$$k_{1,2}^2(z) = \omega^2/c_{1,2}^2(z) = k_{1,2}(0)^2[1 - \frac{z}{l_{1,2}} + ..]$$

В главном приближении в разложении волновых чисел по  $z$  можно сохранить только линейные члены. Как и ранее будем искать потенциалы в следующем виде:

$$\varphi(r, z) = \int_{-\infty}^{\infty} H_0^1(\zeta r) \hat{\varphi}(z, \zeta) d\zeta \quad (16)$$

$$\psi(r, z) = \int_{-\infty}^{\infty} H_0^1(\zeta r) \hat{\psi}(z, \zeta) d\zeta \quad (17)$$

Из уравнений (2) будет следовать, что функции  $\varphi(\hat{z}, \zeta)$  и  $\psi(\hat{z}, \zeta)$  в главном приближении будут удовлетворять уравнению Эйри:

$$\hat{\varphi}(z, \zeta) = v(\nu_1)A(\zeta)$$

$$\hat{\psi}(z, \zeta) = v(\nu_2)B(\zeta)$$

$$\begin{aligned}
\nu_{1,2} &= z\beta_{1,2} + \alpha_{1,2} \\
\beta &= (kl)^{\frac{2}{3}}l^{-1} \\
\alpha_1 &= \frac{s^2}{k_1^2}(k_1l_1)^{\frac{2}{3}} \\
\alpha_2 &= \frac{t^2}{k_2^2}(k_2l_2)^{\frac{2}{3}}
\end{aligned} \tag{18}$$

По предположению, мы достаточно далеко удалены от источника, в этом случае можно показать, что существенной областью интегрирования является область, в которой выполняется условие  $|\zeta|r \gg 1$ . Тогда функцию  $H_0^1()$  в интегралах (16,17) можно заменить на её асимптотику

$$H_0^1(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp(i(x - \frac{\pi}{4})) \tag{19}$$

Вне источника имеем условие свободной границы

$$\sigma_{zz} = 0, \sigma_{rz} = 0$$

Воспользуемся выражениями (4,5), при этом учтем, что в главном приближении согласно (19) имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial r} &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp(i\frac{\pi}{4}) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\zeta r) \zeta \hat{\varphi}(z, \zeta) d\zeta \\
\frac{\partial \psi}{\partial r} &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp(i\frac{\pi}{4}) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\zeta r) \zeta \hat{\psi}(z, \zeta) d\zeta
\end{aligned}$$

Тогда для функций  $A()$  и  $\tilde{B}() = \zeta B()$  получим следующую систему уравнений:

$$[-\lambda\zeta^2 + (\lambda + 2\mu)s^2]v_1A + 2\mu\zeta\beta_2v_2'\tilde{B} = 0 \tag{20}$$

$$2\zeta\beta_1v_1'A - (t^2 + \zeta^2)v_2\tilde{B} = 0 \tag{21}$$

где

$$v_{1,2} = v(\alpha_{1,2}), v'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}v(\alpha)$$

Детерминант системы равен:

$$D = (t^2 + \zeta^2)^2 v_1 v_2 - 4\zeta^2 \beta_1 \beta_2 v_1' v_2' \tag{22}$$

Подынтегральное выражение в (16) будет иметь бесконечный набор полюсов .



Была составлена программа для вычислений корней уравнения  $D = 0$ . Оказалось, что уравнение имеет конечное число вещественных корней (порядка  $(k_2 l_2)^{\frac{2}{3}}$ , заполняющих промежуток от 0 до  $k_2$ , изолированный корень, близкий к корню Рэлея для однородного полупространства с показателями среды на поверхности и бесконечное множество корней, заполняющих мнимую ось.

Функции  $A(\zeta)$  и  $B(\zeta)$  пока не определены, они находятся из условия перехода выражений (16,17,18) в выражения для потенциалов, которые имеют место для соответствующей однородной среды при  $kl \rightarrow \infty$  (а также вблизи источника в главном приближении в нашем случае).

Нетрудно показать, что это произойдет, если взять функции  $A()$  и  $B()$  равными

$$A(\zeta) = \frac{(t^2 + \zeta^2)\zeta v_2}{\pi D} \quad (23)$$

$$B(\zeta) = \frac{s\zeta v_1}{\pi D} \quad (24)$$

## 5 Представление решения в дальней зоне с помощью Комбинированного метода

Решение вблизи границы вне окрестности источника (но не слишком далеко) определяются формулами (16,17,18,23,24). Рассмотрим потенциал  $\varphi(r, z)$ . Ради простоты, будем считать, что  $z = 0$ . Прodeформируем исходный контур интегрирования в (16), как показано на Рис.2. Тогда выражение для потенциала  $\varphi(r, 0)$  примет следующий вид

$$\varphi(r, 0) = \varphi^R(r, 0) + \varphi^S(r, 0) + \varphi^H(r, 0) + \varphi^N(r, 0)$$

где  $\varphi^R$  вычет в изолированном полюсе, близком к полюсу соответствующему волне Рэлея для однородного полупространства, интерференционная волна  $\varphi^S$

$$\varphi^S = \sum_{k=1}^K \text{Res}_{\zeta=\zeta_k} \varphi(\zeta)$$

представляет собой пучок поверхностных волн, распространяющихся с фазовыми скоростями большими, чем скорость поперечной волны и меньшими, чем скорость продольной волна на поверхности, функция

$$\varphi^H = \sum_{k=1}^N \text{Res}_{\zeta=\zeta_k} \varphi(\zeta)$$

определяет конечное число мод, соответствующим головным волнам типа шепчущей галереи. Выражение

$$\varphi^N = \frac{1}{2} \int_{L_N} H_0^1(\zeta r) \varphi(z, \zeta) d\zeta$$

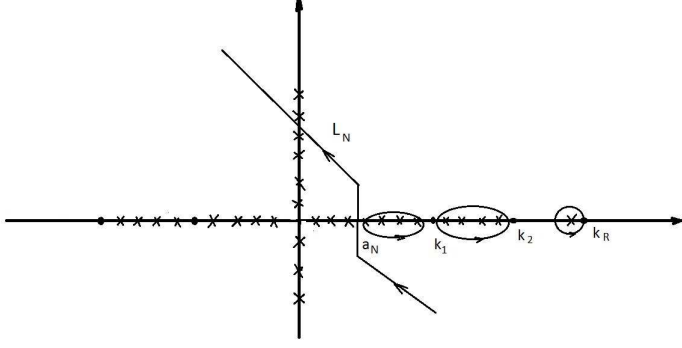


Рис. 2: Контур интегрирования для Комбинированного метода

требует дальнейших преобразований. Аналогичные формулы имеют место и для потенциала  $\psi()$ .

Воспользуемся тождеством:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v(t)} &= 2i[w_1(t) - w_2(t)]^{-1} = \\ &= -\frac{2i}{w_2(t)} \sum_{m=0}^{M-1} \left\{ \frac{w_1(t)}{w_2(t)} \right\}^m + \frac{1}{v(t)} \left\{ \frac{w_1(t)}{w_2(t)} \right\}^M \end{aligned} \quad (25)$$

Рассмотрим интеграл  $\varphi^N$

$$\begin{aligned} \varphi^N(r, 0) &= \frac{1}{2} \int_{L_N} H_0^1(\zeta r) \hat{\varphi}(z, \zeta) d\zeta \\ \hat{\varphi}(z, \zeta) &= \frac{1}{D} v(\alpha_1) A(\zeta) \end{aligned} \quad (26)$$

Будем считать, что точка  $a_N$  достаточно удалена от точки  $k_1$ , так что выполняется условие  $|\alpha_1| \gg 1$ .

Заметим, что в рассматриваемой области выполняются условия

$$|\alpha_1| \gg 1, |\alpha_2| \gg 1, \operatorname{Re} \alpha_1 < 0, \operatorname{Re} \alpha_2 < 0$$

т.е. функции Эйри можно заменить на их асимптотики.

Для функции  $D(\zeta)$  в (26) воспользуемся тождеством (25), тогда для

интеграла (26) получим следующее выражение:

$$\varphi^N = \sum_{m=0}^{M-1} I_m + R_{MN} \quad (27)$$

где

$$I_m = \int_{L_N} e^{i\Phi_m(\zeta)} \Omega(\zeta, m) d\zeta$$

$$R_{MN} = \int_{L_N} \frac{1}{D} e^{i\tilde{\Phi}_M(\zeta)} \tilde{\Omega}(\zeta, M) d\zeta$$

Быстроменяющиеся члены собраны в "фазу"  $\Phi_m(\zeta)$ , функция  $\Omega(\zeta, m)$  является медленноменяющейся.

$$\Phi_m(\zeta) = \zeta r - (2m + 1) \frac{2}{3} (-\alpha_1)^{\frac{3}{2}}$$

Интегралы в (27) могут быть вычислены методом стационарной фазы, в результате, как это было показано в [4] для скалярной задачи, мы получим, что они представляют собой геометрико-оптические решения, соответствующие волнам, испытавшим  $m$  отражений от границы (в нашем случае это головные волны). Остаток (функция  $R_{MN}$ ) имеет порядок последней отщепленной нормальной моды. Количество отщепленных мод (число  $N$ ) зависит от расстояния до источника и определяется условием применимости асимптотических методов. Как и в [4], можно показать, что стационарная точка  $\zeta = \zeta_m^*$  определяется уравнением

$$\frac{\zeta}{k} \sqrt{1 - \left(\frac{\zeta}{k}\right)^2} = \frac{kr}{kl(2m + 1)}$$

где  $k = k_1, l = l_1$ .

Стационарная точка  $\zeta_m^*$  имеет физический смысл  $\zeta_m^* = k_1 \cos(\theta)$ , где  $\theta$  угол выхода луча из источника, испытавшего  $m$  отражений от границы и попадающего в точку наблюдения. Количество отщепленных геометрико-оптических волн определяется условием

$$M \ll \frac{(kr)^{\frac{3}{2}}}{kl}$$

которое следует из условия применимости метода стационарной фазы. Количество выделенных нормальных мод определяется условием

$$\zeta_{N+1} < \zeta_M^* < \zeta_N$$

где  $\zeta_N$  есть  $N$ -ый корень уравнения  $D = 0$  при  $\zeta < k_1$ .

Таким образом поле упругих волн вдали от источника в окрестности границы может быть представлено в следующем виде:

$$\mathbf{u}(r, z) = \mathbf{u}^R + \mathbf{u}^s + \sum_{n=1}^N \mathbf{u}_n^h + \sum_{m=0}^{M-1} \mathbf{u}_m^g + \mathbf{u}_{MN} \quad (28)$$

где  $\mathbf{u}^R$  - волна Рэлея,  $\mathbf{u}^s$  - интерференционная поверхностная волна продольно-поперечного типа (распространяется со скоростью, заключенной между скоростью продольных и скоростью поперечных волн на границе),  $\mathbf{u}_n^h$  - нормальная мода типа шепчущей галереи,  $\mathbf{u}_m^g$  - геометро-оптическая головная волна, испытавшая  $m$  отражений от границы,  $\mathbf{u}_{MN}$  - остаток (имеет порядок последней отщепленной моды)

## 6 Заключение

Представление (28) для поля упругих волн, возбуждаемых точечным источником, помещенным на границе, ввиду своей простоты, позволяет строить эффективные численные методы, а также позволяет проводить качественный анализ решения, поскольку все члены разложения (28) имеют естественный физический смысл. Предлагаемый метод допускает обобщения на более общие случаи. Он легко переносится на случай среды, имеющей слабую неоднородность в горизонтальном направлении, а также на случай иных типов источников упругих колебаний.

## 7 Литература

1. Н. Lamb, *On waves in an elastic plate*. Proc. Roy.Soc.A. 1917, 93, 114.
2. К. Аки, П. Ричардс, *Количественная сейсмология*. Теория и методы, М. Мир, 1983г., 1т., 520с.
3. Л. М. Бреховских, *Волны в слоистых средах*. М. Наука, 1973г. 343с.
4. В. Б. Филиппов, *Дифракция на искривленной полуплоскости*. Зап. научн. семин. ЛОМИ, 42, вып.6, 245-249