ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПОМИ ПРЕПРИНТ — 4/2020

УСРЕДНЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ МАКСВЕЛЛА В СЛУЧАЕ ПОСТОЯННОЙ МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

М. А. Дородный, Т. А. Суслина

Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., д. 7/9,
Санкт-Петербург, 199034, Россия

e-mail: mdorodni@yandex.ru
e-mail: t.suslina@spbu.ru

6 августа 2020 г.

АННОТАЦИЯ

В $L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ рассматривается самосопряженный оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, порожденный дифференциальным выражением $\mu_0^{-1/2} \operatorname{rot} \eta(\mathbf{x}/\varepsilon)^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} - \mu_0^{1/2} \nabla \nu(\mathbf{x}/\varepsilon) \operatorname{div} \mu_0^{1/2}$, где μ_0 — положительная матрица, матрица-функция $\eta(\mathbf{x})$ и вещественная функция $\nu(\mathbf{x})$ периодичны относительно некоторой решетки, положительно определены и ограничены. Изучается поведение оператор-функций $\cos(\tau\mathcal{L}_\varepsilon^{1/2})$ и $\mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_\varepsilon^{1/2})$ при $\tau \in \mathbb{R}$ и малом ε. Показано, что эти операторы сходятся к соответствующим оператор-функциям от оператора $\mathcal{L}^0$ по норме операторов, действующих из пространства Соболева H^s (с подходящим s) в L_2. Здесь $\mathcal{L}^0$ — эффективный оператор с постоянными коэффициентами. Для оператора $\mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_\varepsilon^{1/2})$ получена аппроксимация при учете корректора по $(H^s \to H^1)$-норме. Установлены оценки погрешности; исследован вопрос о точности результатов в отношении типа операторной нормы и зависимости оценок от τ. Результаты применяются к вопросу об усреднении задачи Коши для нестационарной системы Максвелла в случае, когда магнитная проницаемость равна μ_0, а диэлектрическая проницаемость задается матрицей $\eta(\mathbf{x}/\varepsilon)$.

Ключевые слова: периодические дифференциальные операторы, усреднение, операторные оценки погрешности, нестационарная система Максвелла.

Исследование выполнено при поддержке РНФ (проект 17-11-01069).

Введение

0.1. **Операторные оценки погрешности.** Работа относится к теории усреднения периодических дифференциальных операторов (ДО). В первую очередь упомянем книги [BeLP, BaPa, ZhKO].

В работах М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной [BSu1, BSu2, BSu3] был развит теоретико-операторный (спектральный) подход к задачам теории усреднения. В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ изучался широкий класс матричных сильно эллиптических ДО второго порядка вида

$$\mathcal{A}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}/\varepsilon) b(\mathbf{D}), \quad \varepsilon > 0, \tag{0.1}$$

где $g(\mathbf{x})$ — ограниченная и положительно определенная $(m \times m)$-матрица-функция, периодическая относительно некоторой решетки $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$, а $b(\mathbf{D}) = \sum_{l=1}^d b_l D_l$ — ДО первого порядка. Здесь b_l — постоянные $(m\times n)$-матрицы. Предполагается, что $m \geqslant n$ и символ $b(\boldsymbol{\xi})$ — матрица максимального ранга.

В [BSu1] было показано, что резольвента $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ сходится по операторной норме в L_2 к резольвенте эффективного оператора $\mathcal{A}^0$, причем

$$\bigl\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1}\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.2}$$

Эффективный оператор имеет вид $\mathcal{A}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$, где g^0 — постоянная положительная матрица, называемая *эффективной*. В [Su1] аналогичный результат был получен для параболической полугруппы:

$$\bigl\|e^{-\tau\mathcal{A}_\varepsilon} - e^{-\tau\mathcal{A}^0}\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(\tau)\varepsilon, \quad \tau > 0. \tag{0.3}$$

Оценки (0.2), (0.3) точны по порядку. Подобные неравенства называют *операторными оценками погрешности* в теории усреднения.

Другой подход к операторным оценкам погрешности (метод сдвига) был развит В. В. Жиковым и С. Е. Пастуховой. В [Zh2, ZhPas1, ZhPas2] оценки вида (0.2), (0.3) были получены для операторов акустики и упругости. Относительно дальнейших результатов см. обзор [ZhPas3].

Операторные оценки погрешности для нестационарных уравнений типа Шрёдингера и гиперболического типа изучались в [BSu5] и в недавних работах [Su3, Su4, M1, M2, DSu1, DSu2, D, DSu4]. В операторных терминах речь идет о поведении оператор-функций $e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}$, $\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$, $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$, $\tau \in \mathbb{R}$. Выяснилось, что характер результатов отличается от случая эллиптических и параболических уравнений: приходится менять тип операторной нормы.

Остановимся на гиперболических результатах. В [BSu5] доказана оценка точного порядка

$$\bigl\|\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})\bigr\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon. \tag{0.4}$$

Аналогичный результат для оператора $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$ вместе с аппроксимацией по энергетической норме установлен в [M1, M2]:

$$\bigl\|\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - (\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})\bigr\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon, \tag{0.5}$$

$$\bigl\|\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - (\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2}) - \varepsilon K(\varepsilon;\tau)\bigr\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon. \tag{0.6}$$

Здесь $K(\varepsilon;\tau)$ — соответствующий корректор.

В [DSu1, DSu2, DSu4] было показано, что в общем случае результаты (0.4)–(0.6) точны как относительно типа операторной нормы, так и относительно зависимости оценок от τ (нельзя заменить $(1+|\tau|)$ в оценках на $(1+|\tau|)^\alpha$ при $\alpha < 1$). С другой стороны, при дополнительных предположениях результаты допускают следующее усиление:

$$\left\|\cos(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2})\right\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon, \tag{0.7}$$

$$\left\|\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - (\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2})\right\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon, \tag{0.8}$$

$$\left\|\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - (\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2}) - \varepsilon K(\varepsilon;\tau)\right\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon. \tag{0.9}$$

Дополнительные предположения формулируются в терминах спектральных характеристик оператора $\mathcal{A} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$ на краю спектра. Аналогичные результаты для экспоненты $e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}$ были предварительно получены в [Su3, Su4, D].

0.2. **Основные результаты.** В настоящей статье мы применяем результаты работ [BSu5, M1, M2, DSu2, DSu4] к *модельному оператору электродинамики*, действующему в $L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ и заданному выражением

$$\mathcal{L}_\varepsilon = \mu_0^{-1/2}\operatorname{rot}\eta(\mathbf{x}/\varepsilon)^{-1}\operatorname{rot}\mu_0^{-1/2} - \mu_0^{1/2}\nabla\nu(\mathbf{x}/\varepsilon)\operatorname{div}\mu_0^{1/2}, \quad \varepsilon > 0. \tag{0.10}$$

Здесь μ_0 — постоянная положительная матрица, матрица $\eta(\mathbf{x})$ и функция $\nu(\mathbf{x})$ периодичны, ограничены и положительно определены. Оператор (0.10) представляет собой частный случай оператора (0.1) при $m = 4$, $n = 3$. Специфика в том, что оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$ распадается в ортогональном разложении пространства $L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ на соленоидальное и градиентное подпространства (разложение Вейля). Нас в основном интересует соленоидальная часть $\mathcal{L}_{J,\varepsilon}$ оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$. Для $\mathcal{L}_{J,\varepsilon}$ мы получаем оценки вида (0.4)–(0.6). Показываем, что в случае общего положения эти результаты нельзя усилить. С другой стороны, при некоторых дополнительных предположениях мы получаем оценки вида (0.7)–(0.9). Обсуждаются примеры той и другой ситуации.

Результаты применяются к вопросу об усреднении задачи Коши для нестационарной системы Максвелла в случае, когда магнитная проницаемость равна μ_0, а диэлектрическая проницаемость задается матрицей $\eta(\mathbf{x}/\varepsilon)$.

Некоторые частичные результаты в этом направлении были получены в предшествующей статье авторов [DSu3] (в случае $\mu_0 = \mathbf{1}$).

Метод основан на масштабном преобразовании, теории Флоке-Блоха и аналитической теории возмущений. Важную роль играют спектральные характеристики оператора $\mathcal{L}$ (заданного выражением (0.10) при $\varepsilon = 1$) на краю спектра. Мы опираемся также на работы [Su2, BSu4, Su5] об усреднении стационарной периодической системы Максвелла.

0.3. **План статьи.** В §1 введен оператор $\mathcal{L}$, действующий в $L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$; описано его распадение в разложении Вейля; описано разложение этого оператора в прямой интеграл по операторам $\mathcal{L}(\mathbf{k})$, действующим в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^3)$ (где Ω — ячейка решетки Γ) и зависящим от параметра $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ (квазиимпульса). В §2 введены эффективные характеристики оператора $\mathcal{L}$. В §3 получены основные результаты работы об усреднении операторов $\mathcal{L}_\varepsilon$ и $\mathcal{L}_{J,\varepsilon}$. В §4 мы применяем результаты к вопросу об усреднении решений задачи Коши для нестационарной системы Максвелла.

0.4. **Обозначения.** Пусть $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Через $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{H}}$ и $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$ обозначаются соответственно скалярное произведение и норма в $\mathfrak{H}$, символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*}$ означает норму линейного непрерывного оператора, действующего из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}_*$.

Скалярное произведение и норма в $\mathbb{C}^n$ обозначены через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $|\cdot|$ соответственно, $\mathbf{1}_n$ — единичная $(n\times n)$-матрица. Если a — матрица размера $n\times n$, то $|a|$ означает норму матрицы a как оператора в $\mathbb{C}^n$. Используются обозначения $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $iD_j = \partial/\partial x_j$, $j = 1,2,3$, $\mathbf{D} = -i\nabla = (D_1, D_2, D_3)$.

Класс L_2 вектор-функций в области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ со значениями в $\mathbb{C}^n$ обозначаем через $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Классы Соболева $\mathbb{C}^n$-значных функций в области $\mathcal{O}$ обозначены через $H^s(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$.

При $n = 1$ пишем просто $L_2(\mathcal{O})$, $H^s(\mathcal{O})$, но иногда мы применяем такие упрощенные обозначения и для пространств вектор-функций и матричнозначных функций.

0.5. **Благодарности.** М. А. Дородный является победителем конкурса “Молодая математика России” и выражает благодарность жюри и спонсорам.

§ 1. Модельный оператор второго порядка

1.1. **Решетки. Преобразование Гельфанда.** Пусть Γ — решетка в $\mathbb{R}^3$, порожденная базисом $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$:

$$\Gamma = \Big\{ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \mathbf{a} = \sum_{j=1}^{3} q_j \mathbf{a}_j,\ q_j \in \mathbb{Z} \Big\}.$$

Пусть Ω — элементарная ячейка решетки Γ:

$$\Omega = \Big\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ :\, \mathbf{x} = \sum_{j=1}^{3} \xi_j \mathbf{a}_j,\ 0 < \xi_j < 1 \Big\}.$$

Базис $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \in \mathbb{R}^3$, двойственный к $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, определяется из соотношений $\langle \mathbf{b}_j, \mathbf{a}_i \rangle = 2\pi \delta_{ji}$. Этот базис порождает решетку $\widetilde{\Gamma}$, двойственную к Γ. Через $\widetilde{\Omega}$ обозначим центральную зону Бриллюена решетки $\widetilde{\Gamma}$:

$$\widetilde{\Omega} = \big\{ \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 :\ |\mathbf{k}| < |\mathbf{k} - \mathbf{b}|,\ 0 \neq \mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma} \big\}.$$

Пусть r_0 — радиус шара, вписанного в $\operatorname{clos} \widetilde{\Omega}$, т. е. $2r_0 = \min_{0 \neq \mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma}} |\mathbf{b}|$.

Для Γ-периодических измеримых матриц-функций систематически используем обозначения $f^\varepsilon(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$;

$$\overline{f} := |\Omega|^{-1} \int_\Omega f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \quad \underline{f} := \Big(|\Omega|^{-1} \int_\Omega f(\mathbf{x})^{-1}\, d\mathbf{x} \Big)^{-1}.$$

Здесь при определении $\overline{f}$ предполагается, что $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$, а при определении $\underline{f}$ считается, что матрица $f(\mathbf{x})$ квадратная и неособая, причем $f^{-1} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$.

Через $\widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$ обозначается подпространство тех функций из $H^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$, Γ-периодическое продолжение которых на $\mathbb{R}^3$ принадлежит $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^n)$.

Введём *преобразование Гельфанда* $\mathcal{U}$. Первоначально $\mathcal{U}$ определяется на функциях из класса Шварца следующей формулой:

$$(\mathcal{U}\mathbf{f})(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = \widetilde{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) := |\widetilde{\Omega}|^{-1/2} \sum_{\mathbf{a} \in \Gamma} e^{-i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} + \mathbf{a} \rangle} \mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{a}), \quad \mathbf{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3),\ \mathbf{x} \in \Omega,\ \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega},$$

а затем продолжается до унитарного отображения

$$\mathcal{U} : L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3) \to \int_{\widetilde{\Omega}} \oplus L_2(\Omega; \mathbb{C}^3)\, d\mathbf{k} =: \mathcal{K}.$$

Включение $\mathbf{f} \in H^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ равносильно тому, что $\widetilde{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, \cdot) \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^3)$ при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и

$$\int_{\widetilde{\Omega}} \int_\Omega \Big(|(\mathbf{D} + \mathbf{k}) \widetilde{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, \mathbf{x})|^2 + |\widetilde{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, \mathbf{x})|^2 \Big)\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{k} < \infty.$$

Оператор умножения на ограниченную периодическую матрицу-функцию в $L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ под действием преобразования $\mathcal{U}$ переходит в умножение на ту же функцию в слоях прямого интеграла $\mathcal{K}$. Действие дифференциального оператора $b(\mathbf{D})$ первого порядка на $\mathbf{f} \in H^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ переходит в послойное действие оператора $b(\mathbf{D} + \mathbf{k})$ на $\widetilde{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, \cdot) \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^3)$.

1.2. **Оператор $\mathcal{L}$.** Пусть μ_0 — симметричная положительная (3×3)-матрица с вещественными элементами. Пусть в $\mathbb{R}^3$ заданы симметричная (3×3)-матрица-функция $\eta(\mathbf{x})$ с вещественными элементами и вещественная функция $\nu(\mathbf{x})$, причем они периодичны относительно решетки Γ и

$$\eta(\mathbf{x}) > 0; \quad \eta, \eta^{-1} \in L_\infty; \tag{1.1}$$

$$\nu(\mathbf{x}) > 0; \quad \nu, \nu^{-1} \in L_\infty. \tag{1.2}$$

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ рассмотрим оператор $\mathcal{L}$, формально заданный дифференциальным выражением

$$\mathcal{L} = \mu_0^{-1/2} \operatorname{rot} \eta(\mathbf{x})^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} - \mu_0^{1/2} \nabla \nu(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mu_0^{1/2}. \tag{1.3}$$

Оператор (1.3) представляется в виде $\mathcal{L} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$, где

$$b(\mathbf{D}) = \begin{pmatrix} -i \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \\ -i \operatorname{div} \mu_0^{1/2} \end{pmatrix}, \quad g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \eta(\mathbf{x})^{-1} & 0 \\ 0 & \nu(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Символ $b(\boldsymbol{\xi})$ оператора $b(\mathbf{D})$ имеет вид

$$b(\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} r(\boldsymbol{\xi}) \mu_0^{-1/2} \\ \boldsymbol{\xi}^t \mu_0^{1/2} \end{pmatrix}, \quad r(\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}^t = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Выполнено условие

$$\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi}) = 3, \quad 0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3.$$

Это условие равносильно оценкам

$$\alpha_0 \mathbf{1}_3 \leqslant b(\boldsymbol{\xi})^* b(\boldsymbol{\xi}) \leqslant \alpha_1 \mathbf{1}_3, \quad |\boldsymbol{\xi}| = 1, \tag{1.5}$$

с положительными постоянными α_0, α_1. Легко убедиться в справедливости оценок (1.5) с постоянными

$$\alpha_0 = \min\{|\mu_0|^{-1}; |\mu_0^{-1}|^{-1}\}, \quad \alpha_1 = |\mu_0| + |\mu_0^{-1}|.$$

Из (1.1), (1.2) следует, что матрица $g(\mathbf{x})$ положительно определена и ограничена. Очевидно,

$$\|g\|_{L_\infty} = \max\{\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}, \|\nu\|_{L_\infty}\}, \quad \|g^{-1}\|_{L_\infty} = \max\{\|\eta\|_{L_\infty}, \|\nu^{-1}\|_{L_\infty}\}.$$

Точное определение оператора $\mathcal{L}$ даётся через квадратичную форму

$$\begin{aligned} \mathfrak{l}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] &:= \int_{\mathbb{R}^3} \langle g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{u}, b(\mathbf{D}) \mathbf{u} \rangle \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left(\left\langle \eta(\mathbf{x})^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \mathbf{u}, \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \mathbf{u} \right\rangle + \nu(\mathbf{x}) \left| \operatorname{div} \mu_0^{1/2} \mathbf{u} \right|^2 \right) d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3). \end{aligned}$$

При наших предположениях справедливы двусторонние оценки

$$\begin{gathered} c_0 \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathfrak{l}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leqslant c_1 \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3)}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3), \\ c_0 = \alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}, \quad c_1 = \alpha_1 \|g\|_{L_\infty}. \end{gathered} \tag{1.6}$$

Таким образом, форма $\mathfrak{l}[\mathbf{u}, \mathbf{u}]$ замкнута и неотрицательна. Порожденный ею самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ мы и обозначаем через $\mathcal{L}$.

Таким образом, оператор $\mathcal{L}$ является частным случаем оператора $\mathcal{A}$ (см. введение). К нему применимы общие результаты, полученные в предшествующих работах для класса операторов $\mathcal{A}$.

1.3. **Разложение Вейля. Распадение оператора $\mathcal{L}$.** В пространстве $L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ введём "потенциальное" подпространство

$$G(\mu_0) := \Big\{\mathbf{u} = \mu_0^{1/2}\nabla\phi\colon\ \phi \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3),\ \nabla\phi \in L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)\Big\}.$$

"Соленоидальное" подпространство $J(\mu_0)$ определяется как ортогональное дополнение к $G(\mu_0)$. То есть, имеет место разложение Вейля

$$L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3) = J(\mu_0) \oplus G(\mu_0). \tag{1.7}$$

Подпространство $J(\mu_0)$ состоит из тех вектор-функций $\mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$, для которых выполнено $\operatorname{div}\mu_0^{1/2}\mathbf{u} = 0$ (в смысле распределений). Через $\mathcal{P}(\mu_0)$ обозначим ортопроектор на $J(\mu_0)$.

Замечание 1.1. *Легко видеть* (*см., например,* [BSu1, гл. 7, п. 2.4])*, что при $s > 0$ оператор $\mathcal{P}(\mu_0)$, суженный на $H^s(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$, является ортопроектором пространства $H^s(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ на подпространство $J^s(\mu_0) := J(\mu_0) \cap H^s(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$. Оператор $I - \mathcal{P}(\mu_0)$, суженный на $H^s(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$, является ортопроектором пространства $H^s(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ на подпространство $G^s(\mu_0) := G(\mu_0) \cap H^s(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$.*

Разложение (1.7) приводит оператор (1.3): $\mathcal{L} = \mathcal{L}_J \oplus \mathcal{L}_G$. Действующая в "соленоидальном" подпространстве $J(\mu_0)$ часть $\mathcal{L}_J$ формально задаётся дифференциальным выражением $\mu_0^{-1/2}\operatorname{rot}\eta(\mathbf{x})^{-1}\operatorname{rot}\mu_0^{-1/2}$, а части $\mathcal{L}_G$, действующей в "потенциальном" подпространстве $G(\mu_0)$, отвечает выражение $-\mu_0^{1/2}\nabla\nu(\mathbf{x})\operatorname{div}\mu_0^{1/2}$.

1.4. **Операторы $\mathcal{L}(\mathbf{k})$.** В пространстве $L_2(\Omega;\mathbb{C}^3)$ рассмотрим оператор $\mathcal{L}(\mathbf{k})$, зависящий от параметра $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ (квазиимпульса) и заданный формально выражением

$$\mathcal{L}(\mathbf{k}) = \mu_0^{-1/2}\operatorname{rot}_{\mathbf{k}}\eta(\mathbf{x})^{-1}\operatorname{rot}_{\mathbf{k}}\mu_0^{-1/2} - \mu_0^{1/2}\nabla_{\mathbf{k}}\nu(\mathbf{x})\operatorname{div}_{\mathbf{k}}\mu_0^{1/2}$$

при периодических граничных условиях. Здесь

$$\nabla_{\mathbf{k}}\phi := \nabla\phi + i\mathbf{k}\phi, \quad \operatorname{div}_{\mathbf{k}}\mathbf{f} := \operatorname{div}\mathbf{f} + i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{f}, \quad \operatorname{rot}_{\mathbf{k}}\mathbf{f} := \operatorname{rot}\mathbf{f} + i\,\mathbf{k}\times\mathbf{f}$$

($\mathbf{k}\cdot\mathbf{f}$ — скалярное, а $\mathbf{k}\times\mathbf{f}$ — векторное произведение векторов). Строго говоря, $\mathcal{L}(\mathbf{k})$ есть самосопряженный оператор в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^3)$, порожденный замкнутой неотрицательной квадратичной формой

$$\begin{aligned}\mathfrak{l}(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}] = &\int_\Omega \Big\langle \eta(\mathbf{x})^{-1}\operatorname{rot}_{\mathbf{k}}\mu_0^{-1/2}\mathbf{u}, \operatorname{rot}_{\mathbf{k}}\mu_0^{-1/2}\mathbf{u}\Big\rangle\, d\mathbf{x}\\ &+ \int_\Omega \nu(\mathbf{x})|\operatorname{div}_{\mathbf{k}}\mu_0^{1/2}\mathbf{u}|^2\, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^3).\end{aligned}$$

Используя разложение функции $\mathbf{u}$ в ряд Фурье, легко проверить, что

$$c_0\|(\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \mathfrak{l}(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant c_1\|(\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad \mathbf{u} \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^3), \tag{1.8}$$

где постоянные c_0, c_1 — те же, что в (1.6).

Используя нижнюю оценку (1.8), нетрудно показать, что

$$\mathcal{L}(\mathbf{k}) \geqslant c_0|\mathbf{k}|^2 I, \quad \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}. \tag{1.9}$$

1.5. **Распадение операторов $\mathcal{L}(\mathbf{k})$.** В пространстве $L_2(\Omega;\mathbb{C}^3)$ выделим "потенциальное" подпространство (зависящее от параметра $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$)

$$G(\mathbf{k};\mu_0) := \{\mathbf{u} = \mu_0^{1/2}\nabla_{\mathbf{k}}\phi\colon\ \phi \in \widetilde{H}^1(\Omega)\}.$$

"Соленоидальное" подпространство $J(\mathbf{k};\mu_0)$ определяется как ортогональное дополнение к $G(\mathbf{k};\mu_0)$:

$$L_2(\Omega;\mathbb{C}^3) = J(\mathbf{k};\mu_0) \oplus G(\mathbf{k};\mu_0). \tag{1.10}$$

Подпространство $J(\mathbf{k};\mu_0)$ состоит из тех вектор-функций $\mathbf{u} \in L_2(\Omega;\mathbb{C}^3)$, для которых выполнено $\operatorname{div}_{\mathbf{k}} \mu_0^{1/2} \check{\mathbf{u}} = 0$ (в смысле распределений), где $\check{\mathbf{u}}$ — Γ-периодическое продолжение функции $\mathbf{u}$ на $\mathbb{R}^3$. Через $\mathcal{P}(\mathbf{k};\mu_0)$ обозначим ортопроектор на $J(\mathbf{k};\mu_0)$.

Разложение (1.10) приводит оператор $\mathcal{L}(\mathbf{k})$. Действующая в "соленоидальном" подпространстве $J(\mathbf{k};\mu_0)$ часть $\mathcal{L}_J(\mathbf{k})$ формально задаётся выражением $\mu_0^{-1/2} \operatorname{rot}_{\mathbf{k}} \eta(\mathbf{x})^{-1} \operatorname{rot}_{\mathbf{k}} \mu_0^{-1/2}$ (при периодических граничных условиях), а части $\mathcal{L}_G(\mathbf{k})$, действующей в "потенциальном" подпространстве $G(\mathbf{k};\mu_0)$, отвечает выражение $-\mu_0^{1/2} \nabla_{\mathbf{k}} \nu(\mathbf{x}) \operatorname{div}_{\mathbf{k}} \mu_0^{1/2}$.

1.6. **Разложение оператора $\mathcal{L}$ в прямой интеграл.** Под действием преобразования Гельфанда $\mathcal{U}$ оператор $\mathcal{L}$ раскладывается в прямой интеграл по операторам $\mathcal{L}(\mathbf{k})$:

$$\mathcal{U}\mathcal{L}\mathcal{U}^{-1} = \int_{\widetilde{\Omega}} \oplus \mathcal{L}(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}.$$

Подробнее, имеется ввиду следующее. Пусть $\mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$. Тогда

$$\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\cdot) \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^3) \qquad \text{при п.в. } \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}, \tag{1.11}$$

$$\mathfrak{l}[\mathbf{v},\mathbf{v}] = \int_{\widetilde{\Omega}} \mathfrak{l}(\mathbf{k})[\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\cdot), \widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\cdot)]\, d\mathbf{k}. \tag{1.12}$$

Обратно, если для $\widetilde{\mathbf{v}} \in \mathcal{K}$ выполнено (1.11) и интеграл в (1.12) конечен, тогда $\mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ и выполнено (1.12).

Проследим за распадением операторов при разложении в прямой интеграл. При преобразовании Гельфанда ортопроектор $\mathcal{P}(\mu_0)$ раскладывается в прямой интеграл по ортопроекторам $\mathcal{P}(\mathbf{k};\mu_0)$; см. [Su2]. Поэтому оператор $\mathcal{L}\mathcal{P}(\mu_0) = \mathcal{L}_J \oplus \mathbf{0}_{G(\mu_0)}$ разложится по операторам $\mathcal{L}(\mathbf{k})\mathcal{P}(\mathbf{k};\mu_0) = \mathcal{L}_J(\mathbf{k}) \oplus \mathbf{0}_{G(\mathbf{k};\mu_0)}$:

$$\mathcal{U}\mathcal{L}\mathcal{P}(\mu_0)\mathcal{U}^{-1} = \int_{\widetilde{\Omega}} \oplus \mathcal{L}(\mathbf{k})\mathcal{P}(\mathbf{k};\mu_0)\, d\mathbf{k}.$$

§ 2. Эффективные характеристики

2.1. **Аналитические ветви собственных значений и собственных элементов.** Следуя [BSu1], положим

$$\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}, \quad t = |\mathbf{k}|, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^2,$$

и обозначим $\mathcal{L}(\mathbf{k}) = \mathcal{L}(t\boldsymbol{\theta}) =: L(t;\boldsymbol{\theta})$. Операторное семейство $L(t;\boldsymbol{\theta})$ аналитически зависит от одномерного параметра t и имеет дискретный спектр (поскольку $\mathcal{L}(\mathbf{k})$ является эллиптическим оператором в ограниченной области). Применима аналитическая теория возмущений (см. [K]). При $t = 0$ "невозмущенный" оператор $\mathcal{L}(0)$ имеет изолированное трехкратное собственное значение $\lambda_0 = 0$. Соответствующее собственное подпространство состоит из постоянных вектор-функций:

$$\mathfrak{N} := \operatorname{Ker} \mathcal{L}(0) = \left\{ \mathbf{u} \in L_2(\Omega;\mathbb{C}^3) \colon \ \mathbf{u} = \mathbf{c} \in \mathbb{C}^3 \right\}. \tag{2.1}$$

Через P обозначим ортопроектор пространства $L_2(\Omega;\mathbb{C}^3)$ на подпространство $\mathfrak{N}$:

$$P\mathbf{u} = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Положим

$$\delta := \frac{r_0^2}{4} \alpha_0 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1}, \quad t^0 := \frac{r_0}{2} \alpha_0^{1/2} \alpha_1^{-1/2} \|g\|_{L_\infty}^{-1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1/2}.$$

Как показано в [BSu1], при $t \leqslant t^0$ оператор $L(t;\boldsymbol{\theta})$ имеет ровно три собственных значения (с учетом кратностей) $\lambda_l(t;\boldsymbol{\theta})$, $l = 1,2,3$, принадлежащих промежутку $[0,\delta]$, а интервал $(\delta, 3\delta)$ свободен от спектра. Через $\mathfrak{F}(\mathbf{k}) = \mathfrak{F}(t;\boldsymbol{\theta})$ обозначим собственное подпространство оператора $L(t;\boldsymbol{\theta})$, отвечающее промежутку $[0,\delta]$.

Согласно аналитической теории возмущений при $t \leqslant t^0$ собственные значения $\lambda_l(t;\boldsymbol{\theta})$, $l = 1,2,3$, можно занумеровать так, чтобы они являлись вещественно-аналитическими функциями от t (при каждом фиксированном $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^2$) и соответствующие им ортонормированные в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^3)$ собственные элементы $\boldsymbol{\varphi}_l(t;\boldsymbol{\theta})$, $l = 1,2,3$, были вещественно аналитичны по t. Таким образом,

$$L(t;\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\varphi}_l(t;\boldsymbol{\theta}) = \lambda_l(t;\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\varphi}_l(t;\boldsymbol{\theta}), \quad l = 1,2,3, \quad 0 \leqslant t \leqslant t^0,$$

причем набор $\boldsymbol{\varphi}_l(t;\boldsymbol{\theta})$, $l = 1,2,3$, является ортонормированным базисом в подпространстве $\mathfrak{F}(t;\boldsymbol{\theta})$. Для достаточно малого $0 < t_* = t_*(\boldsymbol{\theta}) \leqslant t^0$ при $t \leqslant t_*(\boldsymbol{\theta})$ справедливы сходящиеся степенные разложения

$$\lambda_l(t;\boldsymbol{\theta}) = \gamma_l(\boldsymbol{\theta})t^2 + \mu_l(\boldsymbol{\theta})t^3 + \dots, \qquad l = 1,2,3, \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{\varphi}_l(t;\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}) + t\boldsymbol{\psi}_l(\boldsymbol{\theta}) + \dots, \qquad l = 1,2,3. \tag{2.3}$$

Векторы $\boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = 1,2,3$, образуют ортонормированный базис в подпространстве $\mathfrak{N}$. В силу (1.9) выполнено $\gamma_l(\boldsymbol{\theta}) \geqslant c_0 > 0$; коэффициенты $\mu_l(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}$ в общем случае могут быть ненулевыми. Коэффициенты степенных разложений (2.2), (2.3) называют *пороговыми характеристиками* оператора $\mathcal{L}$ на краю спектра.

2.2. **Спектральный росток. Эффективная матрица.** Ключевым является понятие *спектрального ростка* $S(\boldsymbol{\theta})$ оператора $L(t;\boldsymbol{\theta})$; см. [BSu1]. Дадим спектральное определение ростка: *$S(\boldsymbol{\theta})$ — это самосопряженный оператор в пространстве $\mathfrak{N}$ такой, что числа $\gamma_l(\boldsymbol{\theta})$ и элементы $\boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{\theta})$ являются его собственными значениями и собственными элементами*:

$$S(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}) = \gamma_l(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}), \quad l = 1,2,3.$$

В [BSu1] найдено следующее инвариантное представление для ростка:

$$S(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta}), \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^2, \tag{2.4}$$

где $b(\boldsymbol{\theta})$ — символ оператора $b(\mathbf{D})$, а g^0 — так называемая эффективная матрица. Постоянная положительная (4×4)-матрица g^0 определяется по следующему правилу. Пусть $\Lambda \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ — (3×4)-матрица-функция, являющаяся Γ-периодическим решением задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_4) = 0, \quad \int_\Omega \Lambda(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{2.5}$$

Эффективная матрица g^0 определена в терминах матрицы $\Lambda(\mathbf{x})$:

$$\widetilde{g}(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_4), \tag{2.6}$$

$$g^0 = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \widetilde{g}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}. \tag{2.7}$$

Выясняется, что матрица g^0 положительно определена.

Приведем результаты вычислений эффективных характеристик для оператора $L(t;\boldsymbol{\theta})$; см. [BSu4] или [Su5].

Сначала введем η^0 — эффективную матрицу для скалярного эллиптического оператора $-\operatorname{div}\eta(\mathbf{x})\nabla = \mathbf{D}^*\eta(\mathbf{x})\mathbf{D}$. Напомним правило вычисления матрицы η^0. Пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — стандартные орты в $\mathbb{R}^3$. Пусть $\Phi_j(\mathbf{x})$ — Γ-периодическое решение задачи

$$\operatorname{div}\eta(\mathbf{x})(\nabla\Phi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j) = 0, \quad \int_\Omega \Phi_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{2.8}$$

Рассмотрим матрицу $\Sigma_\circ(\mathbf{x})$ со столбцами $\nabla\Phi_j(\mathbf{x})$, $j = 1,2,3$. Положим

$$\widetilde{\eta}(\mathbf{x}) := \eta(\mathbf{x})(\Sigma_\circ(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_3).$$

Тогда

$$\eta^0 = |\Omega|^{-1}\int_\Omega \widetilde{\eta}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Замечание 2.1. *Отметим следующие свойства матрицы* η^0 :
1°. *Выполнены оценки* $\underline{\eta} \leqslant \eta^0 \leqslant \overline{\eta}$ *(известные как вилка Фойгта–Рейсса). Из них вытекает, что* $|\eta^0| \leqslant \|\eta\|_{L_\infty}$, $|(\eta^0)^{-1}| \leqslant \|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$.
2°. *Равенство* $\eta^0 = \overline{\eta}$ *равносильно тому, что столбцы* $\boldsymbol{\eta}_j(\mathbf{x})$, $j = 1,2,3$, *матрицы* $\eta(\mathbf{x})$ *соленоидальны*: $\operatorname{div} \boldsymbol{\eta}_j(\mathbf{x}) = 0$. *В этом случае решение задачи* (2.8) *тривиально*: $\Phi_j(\mathbf{x}) = 0$, $j = 1,2,3$.
3°. *Равенство* $\eta^0 = \underline{\eta}$ *равносильно тому, что столбцы* $\mathbf{l}_j(\mathbf{x})$, $j = 1,2,3$, *матрицы* $\eta(\mathbf{x})^{-1}$ *потенциальны*: $\mathbf{l}_j(\mathbf{x}) = \nabla\phi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{l}_j^0$ *для некоторых* $\phi_j \in \widetilde{H}^1(\Omega)$, $\mathbf{l}_j^0 \in \mathbb{R}^3$. *В этом случае* $\widetilde{\eta}(\mathbf{x}) = \eta^0 = \underline{\eta}$.

Положим $\mathbf{c}_j = (\eta^0)^{-1}\mathbf{e}_j$, $j = 1,2,3$. Пусть $\widetilde{\Phi}_j(\mathbf{x})$ — Г-периодическое решение задачи

$$\operatorname{div} \eta(\mathbf{x})(\nabla\widetilde{\Phi}_j(\mathbf{x}) + \mathbf{c}_j) = 0, \quad \int_\Omega \widetilde{\Phi}_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{2.9}$$

Пусть $\mathbf{p}_j \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^3)$ (где $j = 1,2,3$) — Г-периодическое решение задачи

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\mu_0^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{p}_j(\mathbf{x})) &= \eta(\mathbf{x})(\nabla\widetilde{\Phi}_j(\mathbf{x}) + \mathbf{c}_j) - \mathbf{e}_j, \\ \operatorname{div}\mathbf{p}_j(\mathbf{x}) = 0, \quad &\int_\Omega \mathbf{p}_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \end{aligned}$$

Пусть $\rho \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ — Г-периодическое решение задачи

$$-\operatorname{div}(\mu_0\nabla\rho(\mathbf{x})) = 1 - \underline{\nu}\,\nu(\mathbf{x})^{-1}, \quad \int_\Omega \rho(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0.$$

Тогда (3×4)-матрица $\Lambda(\mathbf{x})$ представляется в виде

$$\Lambda(\mathbf{x}) = i\begin{pmatrix} \mu_0^{-1/2}\Psi(\mathbf{x}) & \mu_0^{1/2}\nabla\rho(\mathbf{x}) \end{pmatrix},$$

где $\Psi(\mathbf{x})$ — (3×3)-матрица со столбцами $\operatorname{rot}\mathbf{p}_j(\mathbf{x})$, $j = 1,2,3$.

Далее, матрица $\widetilde{g}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_4)$ имеет вид

$$\widetilde{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} (\eta^0)^{-1} + \Sigma(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \underline{\nu} \end{pmatrix},$$

где $\Sigma(\mathbf{x})$ — матрица со столбцами $\nabla\widetilde{\Phi}_j(\mathbf{x})$, $j = 1,2,3$. Отметим, что $\Sigma(\mathbf{x}) = \Sigma_\circ(\mathbf{x})(\eta^0)^{-1}$.

Отсюда согласно (2.7) получаем

$$g^0 = \begin{pmatrix} (\eta^0)^{-1} & 0 \\ 0 & \underline{\nu} \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

В соответствии с (2.4), (2.10) можно записать росток $S(\boldsymbol{\theta})$ в виде

$$S(\boldsymbol{\theta}) = \mu_0^{-1/2} r(\boldsymbol{\theta})^t (\eta^0)^{-1} r(\boldsymbol{\theta}) \mu_0^{-1/2} + \underline{\nu}\,\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^t\mu_0^{1/2}, \tag{2.11}$$

где символ $r(\boldsymbol{\theta})$ определен в (1.4).

2.3. **Разложение спектрального ростка.** Рассмотрим ортогональное разложение трёхмерного пространства (2.1), зависящее от параметра $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^2$:

$$\mathfrak{N} = J^0_{\boldsymbol{\theta}} \oplus G^0_{\boldsymbol{\theta}}, \tag{2.12}$$

где

$$\begin{aligned} J^0_{\boldsymbol{\theta}} &= \{\mu_0^{1/2}\mathbf{c} \in \mathbb{C}^3 \colon \langle \mu_0\mathbf{c}, \boldsymbol{\theta}\rangle = 0\}, \\ G^0_{\boldsymbol{\theta}} &= \{\mathbf{c} = \alpha\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\theta} \colon \alpha \in \mathbb{C}\}. \end{aligned}$$

Очевидно, разложение (2.12) приводит оператор $S(\boldsymbol{\theta})$. При этом $S_J(\boldsymbol{\theta})$ (часть $S(\boldsymbol{\theta})$ в $J^0_{\boldsymbol{\theta}}$) отвечает первому слагаемому в (2.11), а $S_G(\boldsymbol{\theta})$ (часть $S(\boldsymbol{\theta})$ в $G^0_{\boldsymbol{\theta}}$) — второму слагаемому. В подпространстве $G^0_{\boldsymbol{\theta}}$ оператор $S(\boldsymbol{\theta})$ имеет единственное собственное значение

$$\gamma_3(\boldsymbol{\theta}) = \underline{\nu}\langle \mu_0\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}\rangle. \tag{2.13}$$

Соответствующий нормированный собственный вектор есть

$$\boldsymbol{\omega}_3(\boldsymbol{\theta}) = |\Omega|^{-1/2}\langle \mu_0\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}\rangle^{-1/2}\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\theta}. \tag{2.14}$$

В подпространстве $J^0_{\boldsymbol{\theta}}$ — два собственных значения $\gamma_1(\boldsymbol{\theta})$, $\gamma_2(\boldsymbol{\theta})$, отвечающих алгебраической задаче

$$r(\boldsymbol{\theta})^t(\eta^0)^{-1}r(\boldsymbol{\theta})\mathbf{c} = \gamma\mu_0\mathbf{c}, \quad \mu_0\mathbf{c} \perp \boldsymbol{\theta}. \tag{2.15}$$

Нам понадобятся следующие простые оценки

$$\begin{aligned} &\gamma_j(\boldsymbol{\theta}) \leqslant |\mu_0^{-1}||(\eta^0)^{-1}| \leqslant |\mu_0^{-1}|\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^2, \quad j = 1, 2;\\ &\gamma_3(\boldsymbol{\theta}) \geqslant \underline{\nu}|\mu_0^{-1}|^{-1}, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^2. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Замечание 2.2. *Как отмечено в* [Su2, замечание 4.5], *всегда можно так выбрать аналитические ветви собственных значений и собственных векторов оператора* $L(t;\boldsymbol{\theta})$, $t \in [0, t^0]$, *что один из собственных векторов* (*будем считать, что это* $\boldsymbol{\varphi}_3(t;\boldsymbol{\theta})$) *принадлежит "градиентному" подпространству* $G(t\boldsymbol{\theta};\mu_0)$ *при* $t \neq 0$, *а тогда* (*автоматически*) *два оставшихся собственных вектора* $\boldsymbol{\varphi}_1(t;\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\varphi}_2(t;\boldsymbol{\theta})$ *принадлежат "соленоидальному" подпространству* $J(t\boldsymbol{\theta};\mu_0)$. *При этом коэффициент* $\gamma_3(\boldsymbol{\theta})$ *в разложении* (2.2) *для* $\lambda_3(t;\boldsymbol{\theta})$ *есть собственное значение части ростка* $S(\boldsymbol{\theta})$ *в подпространстве* $G^0_{\boldsymbol{\theta}}$. *"Зародыш"* $\boldsymbol{\omega}_3(\boldsymbol{\theta})$ *в разложении* (2.3) *для* $\boldsymbol{\varphi}_3(t;\boldsymbol{\theta})$ *задается формулой* (2.14). *Коэффициенты* $\gamma_1(\boldsymbol{\theta})$, $\gamma_2(\boldsymbol{\theta})$ *в разложениях* (2.2) *для* $\lambda_1(t;\boldsymbol{\theta})$, $\lambda_2(t;\boldsymbol{\theta})$ *являются собственными значениями части ростка* $S(\boldsymbol{\theta})$ *в подпространстве* $J^0_{\boldsymbol{\theta}}$ *и отвечают алгебраической задаче* (2.15). *"Зародыши"* $\boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\theta})$ *в разложениях* (2.3) *для* $\boldsymbol{\varphi}_1(t;\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\varphi}_2(t;\boldsymbol{\theta})$ *принадлежат* $J^0_{\boldsymbol{\theta}}$ *и являются собственными векторами задачи* (2.15). *Если* $\gamma_1(\boldsymbol{\theta}) \neq \gamma_2(\boldsymbol{\theta})$, *то* $\boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\theta})$ *определены однозначно* (*с точностью до фазовых множителей*). *При* $t = 0$ *все три собственных вектора принадлежат "соленоидальному" подпространству* $J(0;\mu_0)$: $\boldsymbol{\varphi}_l(0;\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}) \in \mathfrak{N}$, $l = 1, 2, 3$. *Отметим также, что в случае* $\gamma_1(\boldsymbol{\theta}) = \gamma_2(\boldsymbol{\theta})$ *знания ростка* $S(\boldsymbol{\theta})$ *недостаточно для определения "зародышей"* $\boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\theta})$.

2.4. **Оператор $N(\boldsymbol{\theta})$.** Нам понадобится также оператор $N(\boldsymbol{\theta})$, действующий в пространстве $\mathfrak{N}$ и определенный в терминах коэффициентов степенных разложений (2.2), (2.3) следующим образом:

$$\begin{aligned} N(\boldsymbol{\theta}) &= N_0(\boldsymbol{\theta}) + N_*(\boldsymbol{\theta}),\\ N_0(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{l=1}^{3} \mu_l(\boldsymbol{\theta})(\cdot, \boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)}\boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}),\\ N_*(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{l=1}^{3} \gamma_l(\boldsymbol{\theta})\left((\cdot, P\boldsymbol{\psi}_l(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)}\boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}) + (\cdot, \boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)}P\boldsymbol{\psi}_l(\boldsymbol{\theta})\right). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Подробнее см. [BSu2].

Замечание 2.3. *В базисе* $\{\boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{\theta})\}_{l=1}^3$ *оператор* $N_0(\boldsymbol{\theta})$ *диагонален, а* $N_*(\boldsymbol{\theta})$ *имеет нулевую диагональ. Выполнены соотношения:*

$$(N(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)} = (N_0(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)} = \mu_l(\boldsymbol{\theta}), \quad l = 1, 2, 3, \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned} (N(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\omega}_j(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)} &= (N_*(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\omega}_j(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)}\\ &= (\gamma_l(\boldsymbol{\theta}) - \gamma_j(\boldsymbol{\theta}))(P\boldsymbol{\psi}_l(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\omega}_j(\boldsymbol{\theta})), \quad l \neq j. \end{aligned}$$

В [BSu2, §4] получено следующее инвариантное представление для оператора $N(\boldsymbol{\theta})$:

$$N(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* M(\boldsymbol{\theta}) b(\boldsymbol{\theta}),$$

где $M(\boldsymbol{\theta})$ — (4×4)-матрица, заданная соотношением

$$M(\boldsymbol{\theta}) = |\Omega|^{-1} \int_\Omega (\Lambda(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta})^* \widetilde{g}(\mathbf{x}) + \widetilde{g}(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta}) \Lambda(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}.$$

Здесь $\Lambda(\mathbf{x})$ — Г-периодическое решение задачи (2.5), а $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ — матрица-функция (2.6). Для оператора $L(t;\boldsymbol{\theta})$ оператор $N(\boldsymbol{\theta})$ вычислен в [BSu2, п. 14.3] (в случае $\mu_0 = \mathbf{1}$). Перенося вычисление на случай постоянной матрицы μ_0, несложно получить представление

$$N(\boldsymbol{\theta}) = -i f(\boldsymbol{\theta}) \mu_0^{-1/2} r(\boldsymbol{\theta}) \mu_0^{-1/2}, \tag{2.19}$$

где матрица $r(\boldsymbol{\theta})$ определена в (1.4), а

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\theta}) :=& (\rho_{12}(\boldsymbol{\theta}) - \rho_{21}(\boldsymbol{\theta}))\theta_3 + (\rho_{31}(\boldsymbol{\theta}) - \rho_{13}(\boldsymbol{\theta}))\theta_2 + (\rho_{23}(\boldsymbol{\theta}) - \rho_{32}(\boldsymbol{\theta}))\theta_1, \\ \rho_{jk}(\boldsymbol{\theta}) :=& |\Omega|^{-1} \int_\Omega \widetilde{\Phi}_j(\mathbf{x}) \langle \eta(\mathbf{x})(\nabla \widetilde{\Phi}_k(\mathbf{x}) + \mathbf{c}_k), \boldsymbol{\theta} \rangle \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Очевидно, оператор $N(\boldsymbol{\theta})$ приводится разложением (2.12). Часть $N(\boldsymbol{\theta})$, отвечающая подпространству $G^0_{\boldsymbol{\theta}}$, равна нулю.

Замечание 2.4. *Поскольку* $\boldsymbol{\omega}_3(\boldsymbol{\theta}) = \alpha \mu_0^{1/2} \boldsymbol{\theta}$ *(см.* (2.14)*), то с учетом* (2.19) *и очевидного равенства* $r(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\theta} = 0$ *выполнено*

$$(N(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\omega}_3(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\omega}_j(\boldsymbol{\theta})) = (N(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\omega}_j(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\omega}_3(\boldsymbol{\theta})) = 0, \quad j = 1,2,3, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^2.$$

Отсюда следует (см. (2.18)*), что коэффициент* $\mu_3(\boldsymbol{\theta})$ *в разложении* (2.2) *собственного значения* $\lambda_3(t;\boldsymbol{\theta})$*, отвечающего "потенциальному" подпространству* $G(t\boldsymbol{\theta};\mu_0)$*, равен нулю:*

$$\mu_3(\boldsymbol{\theta}) = 0, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^2.$$

Замечание 2.5. 1°. *Предположим, что* $\eta^0 = \overline{\eta}$ *(см. замечание* 2.1(2°)*). Тогда столбцы матрицы* $\eta(\mathbf{x})$ *соленоидальны, а потому периодические решения* $\widetilde{\Phi}_j(\mathbf{x})$ $(j = 1,2,3)$ *задач* (2.9) *равны нулю. В этом случае* $N(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^2$*. В частности, это равенство выполнено, если матрица* $\eta(\mathbf{x})$ *постоянна.*
2°. *Предположим, что* $\eta^0 = \underline{\eta}$ *(см. замечание* 2.1(3°)*). Тогда вектор-функции* $\eta(\mathbf{x})(\nabla \widetilde{\Phi}_k(\mathbf{x}) + \mathbf{c}_k)$ $(k = 1,2,3)$ *постоянны. Следовательно, в силу* (2.19), (2.20) *выполнено* $N(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^2$.

Замечание 2.6. 1°. *Как отмечено в* [BSu2, предложение 4.2]*, если элементы матриц* $b(\boldsymbol{\theta})$ *и* $g(\mathbf{x})$ *вещественные (что выполнено для оператора* $\mathcal{L}$*) и векторы* $\boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = 1,2,3$*, можно выбрать вещественными (в данной точке* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^2$*), то* $N_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$*. Указанные условия заведомо выполнены, если* $\gamma_1(\boldsymbol{\theta}) \neq \gamma_2(\boldsymbol{\theta})$*, поскольку вектор* $\boldsymbol{\omega}_3(\boldsymbol{\theta})$ *— вещественный (см.* (2.14)*), а собственные векторы задачи* (2.15) *в данном случае определены однозначно (с точностью до фазовых множителей) и их можно выбрать вещественными. В такой точке* $\boldsymbol{\theta}$ *выполнено* $N(\boldsymbol{\theta}) = N_*(\boldsymbol{\theta})$ *и* $\mu_l(\boldsymbol{\theta}) = 0$, $l = 1,2,3$.
2°. *Если в какой-либо точке* $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^2$ *выполняется равенство* $\gamma_1(\boldsymbol{\theta}_0) = \gamma_2(\boldsymbol{\theta}_0)$*, то с учетом замечаний* 2.3 *и* 2.4 *справедливы соотношения* $N_*(\boldsymbol{\theta}_0) = 0$ *и* $N(\boldsymbol{\theta}_0) = N_0(\boldsymbol{\theta}_0)$*. При этом числа* $\mu_1(\boldsymbol{\theta}_0)$, $\mu_2(\boldsymbol{\theta}_0)$ *суть собственные значения оператора* (2.19) *в подпространстве* $J^0_{\boldsymbol{\theta}_0}$*, они задаются выражениями*

$$\mu_{1,2}(\boldsymbol{\theta}_0) = \pm f(\boldsymbol{\theta}_0) \frac{\langle \mu_0 \boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}_0 \rangle^{1/2}}{(\det \mu_0)^{1/2}}.$$

Если $f(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ *(а тогда и* $\mu_{1,2}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$*), то векторы* $\boldsymbol{\omega}_{1,2}(\boldsymbol{\theta}_0)$ *определяются однозначно (с точностью до фазовых множителей) и совпадают с собственными векторами матрицы* $\mu_0^{-1/2} r(\boldsymbol{\theta}_0) \mu_0^{-1/2}$*, отвечающими собственным значениям* $\pm i \frac{\langle \mu_0 \boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}_0 \rangle^{1/2}}{(\det \mu_0)^{1/2}}$.

2.5. **Эффективный оператор.** Положим
$$S(\mathbf{k}) := t^2 S(\boldsymbol{\theta}) = b(\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3. \tag{2.21}$$
Выражение (2.21) является символом ДО
$$\mathcal{L}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) = \mu_0^{-1/2} \operatorname{rot} (\eta^0)^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} - \mu_0^{1/2} \nabla \underline{\nu} \operatorname{div} \mu_0^{1/2}, \tag{2.22}$$
действующего в $L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ на области определения $H^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ и называемого *эффективным оператором* для оператора $\mathcal{L}$.

§ 3. Усреднение оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$

3.1. **Оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$.** *Наш основной объект* — оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$, действующий в $L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ и формально заданный выражением
$$\mathcal{L}_\varepsilon = \mu_0^{-1/2} \operatorname{rot} (\eta^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} - \mu_0^{1/2} \nabla \nu^\varepsilon(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mu_0^{1/2} = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}). \tag{3.1}$$
Строгое определение дается через соответствующую квадратичную форму (ср. п. 1.2). Коэффициенты оператора (3.1) быстро осциллируют при $\varepsilon \to 0$. Мы получаем аппроксимации операторов $\cos(\tau \mathcal{L}_\varepsilon^{1/2})$ и $\mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_\varepsilon^{1/2})$ при малом ε.

Как и оператор $\mathcal{L}$, оператор (3.1) распадается в разложении Вейля (1.7). Его части в соленоидальном и градиентном подпространствах обозначим через $\mathcal{L}_{J,\varepsilon}$ и $\mathcal{L}_{G,\varepsilon}$ соответственно.

Ниже нам понадобится следующее простое утверждение, вытекающее из одновременного распадения операторов $\mathcal{L}_\varepsilon$ и $\mathcal{L}^0$ в разложении Вейля (1.7) и из замечания 1.1.

Лемма 3.1. *Пусть $\mathcal{L}_\varepsilon$ — оператор* (3.1), *а $\mathcal{L}^0$ — эффективный оператор* (2.22). *Пусть $\mathcal{L}_{J,\varepsilon}$, $\mathcal{L}_{G,\varepsilon}$ — части оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$ в подпространствах $J(\mu_0)$ и $G(\mu_0)$, соответственно. Пусть $\mathcal{L}_J^0$, $\mathcal{L}_G^0$ — части оператора $\mathcal{L}^0$ в подпространствах $J(\mu_0)$ и $G(\mu_0)$, соответственно.*
1°. *Оценка вида*
$$\left\| \cos(\tau \mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau (\mathcal{L}^0)^{1/2}) \right\|_{H^s(\mathbb{R}^3) \to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}(\tau) \varepsilon^\sigma$$
при некоторых $s \geqslant 0$ и $\sigma \geqslant 0$ равносильна паре неравенств
$$\left\| \cos(\tau \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - \cos(\tau (\mathcal{L}_J^0)^{1/2}) \right\|_{J^s \to J} \leqslant \mathcal{C}(\tau) \varepsilon^\sigma,$$
$$\left\| \cos(\tau \mathcal{L}_{G,\varepsilon}^{1/2}) - \cos(\tau (\mathcal{L}_G^0)^{1/2}) \right\|_{G^s \to G} \leqslant \mathcal{C}(\tau) \varepsilon^\sigma.$$
Мы для краткости обозначаем $J := J(\mu_0)$, $G := G(\mu_0)$, $J^s := J^s(\mu_0)$, $G^s := G^s(\mu_0)$.
2°. *Оценка вида*
$$\left\| \mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - (\mathcal{L}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{L}^0)^{1/2}) \right\|_{H^s(\mathbb{R}^3) \to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}(\tau) \varepsilon^\sigma$$
при некоторых $s \geqslant 0$ и $\sigma \geqslant 0$ равносильна паре неравенств
$$\left\| \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - (\mathcal{L}_J^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{L}_J^0)^{1/2}) \right\|_{J^s \to J} \leqslant \mathcal{C}(\tau) \varepsilon^\sigma,$$
$$\left\| \mathcal{L}_{G,\varepsilon}^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_{G,\varepsilon}^{1/2}) - (\mathcal{L}_G^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{L}_G^0)^{1/2}) \right\|_{G^s \to G} \leqslant \mathcal{C}(\tau) \varepsilon^\sigma.$$
3°. *Оценка вида*
$$\left\| \mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) D_j - (\mathcal{L}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{L}^0)^{1/2}) D_j \right\|_{H^s(\mathbb{R}^3) \to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}(\tau) \varepsilon^\sigma$$
при некоторых $s \geqslant 0$ и $\sigma \geqslant 0$ равносильна паре неравенств
$$\left\| \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) D_j - (\mathcal{L}_J^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{L}_J^0)^{1/2}) D_j \right\|_{J^s \to J} \leqslant \mathcal{C}(\tau) \varepsilon^\sigma,$$
$$\left\| \mathcal{L}_{G,\varepsilon}^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_{G,\varepsilon}^{1/2}) D_j - (\mathcal{L}_G^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{L}_G^0)^{1/2}) D_j \right\|_{G^s \to G} \leqslant \mathcal{C}(\tau) \varepsilon^\sigma.$$
Здесь $j = 1, 2, 3$.

3.2. **Аппроксимация оператор-функций от $\mathcal{L}_\varepsilon$ в старшем порядке.** Для удобства дальнейших ссылок назовем *данными задачи* следующий набор величин

$$|\mu_0|,\ |\mu_0^{-1}|,\ \|\eta\|_{L_\infty},\ \|\eta^{-1}\|_{L_\infty},\ \|\nu\|_{L_\infty},\ \|\nu^{-1}\|_{L_\infty};\quad \text{параметры решетки } \Gamma. \tag{3.2}$$

Следующая теорема вытекает из общих результатов для класса операторов $\mathcal{A}_\varepsilon$.

Теорема 3.2. *Пусть $\mathcal{L}_\varepsilon$ — оператор* (3.1)*, а $\mathcal{L}^0$ — эффективный оператор* (2.22)*. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ выполнены оценки*

$$\big\|\cos(\tau\mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau(\mathcal{L}^0)^{1/2})\big\|_{H^2(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_1(1+|\tau|)\varepsilon, \tag{3.3}$$

$$\big\|\mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - (\mathcal{L}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}^0)^{1/2})\big\|_{H^1(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_2(1+|\tau|)\varepsilon. \tag{3.4}$$

Постоянные C_1, C_2 зависят только от данных задачи (3.2).

Оценка (3.3) получена в [BSu5, теорема 13.1], а оценка (3.4) установлена в [M2, теорема 9.1] (см. также [M1]).

С помощью интерполяции из теоремы 3.2 вытекает следующий результат (см. [BSu5, теорема 13.2] и [DSu4, следствие 15.3]).

Теорема 3.3. *Пусть $\mathcal{L}_\varepsilon$ — оператор* (3.1)*, а $\mathcal{L}^0$ — эффективный оператор* (2.22)*. Тогда при $0 \leqslant s \leqslant 2$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ выполнены оценки*

$$\big\|\cos(\tau\mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau(\mathcal{L}^0)^{1/2})\big\|_{H^s(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}_1(s)(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2},$$

$$\big\|\mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_\varepsilon^{1/2})D_j - (\mathcal{L}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}^0)^{1/2})D_j\big\|_{H^s(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}_2(s)(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2},$$

$j = 1,2,3$. *Постоянные $\mathcal{C}_1(s)$, $\mathcal{C}_2(s)$ зависят от данных задачи* (3.2) *и от s.*

Как выяснено в работах [DSu1, DSu2, DSu4], при дополнительных предположениях результаты теорем 3.2 и 3.3 допускают усиление.

Условие 3.4. *Пусть оператор $N(\boldsymbol{\theta})$ определён в* (2.19), (2.20)*. Предположим, что $N(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^2$, что равносильно условию $f(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$.*

Следующий результат прямо вытекает из [DSu4, теорема 15.2].

Теорема 3.5. *Пусть $\mathcal{L}_\varepsilon$ — оператор* (3.1)*, а $\mathcal{L}^0$ — эффективный оператор* (2.22)*. Пусть выполнено условие* 3.4*. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ выполнены оценки*

$$\big\|\cos(\tau\mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau(\mathcal{L}^0)^{1/2})\big\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_3(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon, \tag{3.5}$$

$$\big\|\mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - (\mathcal{L}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}^0)^{1/2})\big\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_4(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon. \tag{3.6}$$

Постоянные C_3, C_4 зависят только от данных задачи (3.2).

С помощью интерполяции из теоремы 3.5 вытекает следующий результат (см. [DSu4, следствие 15.4]).

Теорема 3.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.5*. Тогда при $0 \leqslant s \leqslant 3/2$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ выполнены оценки*

$$\big\|\cos(\tau\mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau(\mathcal{L}^0)^{1/2})\big\|_{H^s(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}_3(s)(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3}, \tag{3.7}$$

$$\big\|\mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_\varepsilon^{1/2})D_j - (\mathcal{L}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}^0)^{1/2})D_j\big\|_{H^s(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}_4(s)(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3}, \tag{3.8}$$

$j = 1,2,3$. *Постоянные $\mathcal{C}_3(s)$, $\mathcal{C}_4(s)$ зависят от данных задачи* (3.2) *и от s.*

Учтем, что операторы $\mathcal{L}_{J,\varepsilon}$, $\mathcal{L}_J^0$ зависят от коэффициента $\eta(\mathbf{x})$, но не от $\nu(\mathbf{x})$. Напротив, $\mathcal{L}_{G,\varepsilon}$, $\mathcal{L}_G^0$ зависят от коэффициента $\nu(\mathbf{x})$, но не от $\eta(\mathbf{x})$. Рассмотрим оператор $\check{\mathcal{L}}_\varepsilon$ с прежними коэффициентами $\nu(\mathbf{x})$, μ_0 и с постоянным $\check{\eta}(\mathbf{x})$ (для простоты считаем $\check{\eta} = \mathbf{1}_3$). В силу замечания 2.5($1^\circ$) для такого оператора выполнено условие 3.4, а потому применимы теоремы 3.5, 3.6. Следовательно, для него справедливы оценки вида (3.5)–(3.8). Применяя лемму 3.1, приходим к следующему утверждению.

Следствие 3.7. *Пусть* $\mathcal{L}_\varepsilon$ *— оператор* (3.1), *а* $\mathcal{L}^0$ *— эффективный оператор* (2.22). *Пусть* $\mathcal{L}_{G,\varepsilon}$ *и* $\mathcal{L}_G^0$ *— части операторов* $\mathcal{L}_\varepsilon$ *и* $\mathcal{L}^0$, *соответственно, в подпространстве* $G(\mu_0)$. *Тогда при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполнены оценки*

$$\left\|\cos(\tau\mathcal{L}_{G,\varepsilon}^{1/2}) - \cos(\tau(\mathcal{L}_G^0)^{1/2})\right\|_{G^{3/2}\to G} \leqslant \check{C}_3(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon,$$

$$\left\|\mathcal{L}_{G,\varepsilon}^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_{G,\varepsilon}^{1/2}) - (\mathcal{L}_G^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}_G^0)^{1/2})\right\|_{G^{1/2}\to G} \leqslant \check{C}_4(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon.$$

При $0 \leqslant s \leqslant 3/2$, $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполнены оценки*

$$\left\|\cos(\tau\mathcal{L}_{G,\varepsilon}^{1/2}) - \cos(\tau(\mathcal{L}_G^0)^{1/2})\right\|_{G^s\to G} \leqslant \check{C}_3(s)(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3},$$

$$\left\|\mathcal{L}_{G,\varepsilon}^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_{G,\varepsilon}^{1/2})D_j - (\mathcal{L}_G^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}_G^0)^{1/2})D_j\right\|_{G^s\to G} \leqslant \check{C}_4(s)(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3}, \quad j = 1,2,3.$$

Постоянные $\check{C}_3$, $\check{C}_4$ *контролируются в терминах* $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\nu\|_{L_\infty}$, $\|\nu^{-1}\|_{L_\infty}$, *и параметров решетки* Γ. *Постоянные* $\check{C}_3(s)$, $\check{C}_4(s)$ *зависят от тех же параметров и от* s.

Теперь мы отказываемся от условия $N(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$, а взамен предположим, что $N_0(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$. При этом, однако, приходится делать дополнительное предположение о спектре ростка $S(\boldsymbol{\theta})$.

Условие 3.8. 1°. *Оператор* $N_0(\boldsymbol{\theta})$ *равен нулю*: $N_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *для любого* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^2$. *Это равносильно тому, что* $\mu_1(\boldsymbol{\theta}) = \mu_2(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *для всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^2$. 2°. *Ветви собственных значений* $\gamma_1(\boldsymbol{\theta})$ *и* $\gamma_2(\boldsymbol{\theta})$ *задачи* (2.15) *либо не пересекаются, либо тождественно совпадают.*

Отметим, что допустимо пересечение ветви $\gamma_3(\boldsymbol{\theta}) = \underline{\nu}\langle\mu_0\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}\rangle$ (см. (2.13)) с ветвями $\gamma_1(\boldsymbol{\theta})$ и $\gamma_2(\boldsymbol{\theta})$. Считая условие 3.8 выполненным, в случае, когда ветви $\gamma_1(\boldsymbol{\theta})$ и $\gamma_2(\boldsymbol{\theta})$ не пересекаются, обозначим

$$c^\circ := \min_{\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^2} |\gamma_1(\boldsymbol{\theta}) - \gamma_2(\boldsymbol{\theta})|.$$

В силу замечания 2.6, если ветви $\gamma_1(\boldsymbol{\theta})$ и $\gamma_2(\boldsymbol{\theta})$ не пересекаются, то $N_0(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$ и условие 3.8 выполнено автоматически.

Следующий результат выводится из [DSu4, теорема 15.2].

Теорема 3.9. *Пусть* $\mathcal{L}_\varepsilon$ *— оператор* (3.1), *а* $\mathcal{L}^0$ *— эффективный оператор* (2.22). *Пусть выполнено условие* 3.8. *Тогда при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедливы оценки*

$$\left\|\cos(\tau\mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau(\mathcal{L}^0)^{1/2})\right\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_5(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon, \tag{3.9}$$

$$\left\|\mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - (\mathcal{L}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}^0)^{1/2})\right\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_6(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon. \tag{3.10}$$

Постоянные C_5, C_6 *зависят от данных задачи* (3.2), *а также от параметра* c°.

Доказательство. В силу леммы 3.1 искомые оценки (3.9), (3.10) равносильны таким же оценкам для соленоидальной и градиентной частей оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$. Согласно следствию 3.7 для градиентной части нужные неравенства выполнены всегда. Поэтому дело сводится к доказательству следующих оценок:

$$\left\|\cos(\tau\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - \cos(\tau(\mathcal{L}_J^0)^{1/2})\right\|_{J^{3/2}\to J} \leqslant C_5(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon, \tag{3.11}$$

$$\left\|\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - (\mathcal{L}_J^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}_J^0)^{1/2})\right\|_{J^{1/2}\to J} \leqslant C_6(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon. \tag{3.12}$$

Рассмотрим оператор $\widehat{\mathcal{L}}_\varepsilon$ с исходными коэффициентами μ_0, $\eta(\mathbf{x})$ и с постоянным коэффициентом $\widehat{\nu} = 2|\mu_0^{-1}|^2\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$. С учетом оценок (2.16) такой выбор коэффициента $\widehat{\nu}$ обеспечивает непересечение ветви $\widehat{\gamma}_3(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{\nu}\langle\mu_0\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}\rangle$ с $\gamma_1(\boldsymbol{\theta})$ и $\gamma_2(\boldsymbol{\theta})$. Вместе с условием 3.8 это гарантирует выполнение условия 9.7 из [DSu4] (состоящего в том, что $N_0(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$ и кратность спектра ростка $S(\boldsymbol{\theta})$ не зависит от $\boldsymbol{\theta}$). Тогда к оператору $\widehat{\mathcal{L}}_\varepsilon$ применима теорема 15.2 из [DSu4], в силу которой для $\widehat{\mathcal{L}}_\varepsilon$ справедливы оценки вида (3.9), (3.10). Применяя теперь лемму 3.1 и учитывая совпадение соленоидальных частей операторов $\mathcal{L}_\varepsilon$ и $\widehat{\mathcal{L}}_\varepsilon$, заключаем, что справедливы требуемые оценки (3.11), (3.12). □

С помощью интерполяции получается следующий результат (он выводится из [DSu4, следствие 15.4] по аналогии с доказательством теоремы 3.9).

Теорема 3.10. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.9. *Тогда при* $0 \leqslant s \leqslant 3/2$, $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполнены оценки*

$$\left\| \cos(\tau \mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau (\mathcal{L}^0)^{1/2}) \right\|_{H^s(\mathbb{R}^3) \to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}_5(s)(1+|\tau|)^{s/3} \varepsilon^{2s/3},$$

$$\left\| \mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) D_j - (\mathcal{L}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{L}^0)^{1/2}) D_j \right\|_{H^s(\mathbb{R}^3) \to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}_6(s)(1+|\tau|)^{s/3} \varepsilon^{2s/3},$$

$j = 1, 2, 3$. *Постоянные* $\mathcal{C}_5(s)$, $\mathcal{C}_6(s)$ *зависят от данных задачи* (3.2), *от* s *и от параметра* c°.

3.3. **Аппроксимация оператора** $\mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_\varepsilon^{1/2})$ **в энергетической норме.** Аппроксимация оператор-функции $\mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_\varepsilon^{1/2})$ в "энергетической" норме (то есть, норме операторов, действующих из H^s в H^1) следует из результатов работы [M2], где рассматривался общий класс операторов $\mathcal{A}_\varepsilon$. В этой аппроксимации необходимо учитывать корректор. В общем случае корректор содержит вспомогательный сглаживающий оператор. Однако, при дополнительном предположении, что решение $\Lambda(\mathbf{x})$ задачи (2.5) является мультипликатором из H^2 в H^1, можно избавиться от сглаживателя. В размерности $d \leqslant 4$ это условие выполнено автоматически. Нас интересует также аппроксимация так называемого "потока" — оператора $g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_\varepsilon^{1/2})$ — по $(H^s \to L_2)$-норме. Из [M2, теорема 9.8] вытекает следующий результат.

Теорема 3.11. *Пусть* $\mathcal{L}_\varepsilon$ *— оператор* (3.1), *а* $\mathcal{L}^0$ *— эффективный оператор* (2.22). *Тогда при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедливы оценки*

$$\left\| \mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - \big(I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\big) (\mathcal{L}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{L}^0)^{1/2}) \right\|_{H^2(\mathbb{R}^3) \to H^1(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_7(1+|\tau|)\varepsilon,$$

$$\left\| g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) (\mathcal{L}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{L}^0)^{1/2}) \right\|_{H^2(\mathbb{R}^3) \to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_8(1+|\tau|)\varepsilon.$$

Постоянные C_7, C_8 *зависят только от данных задачи* (3.2).

Имеем:

$$\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) = \mu_0^{-1/2} \Psi^\varepsilon \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} + \mu_0^{1/2} (\nabla \rho)^\varepsilon \operatorname{div} \mu_0^{1/2}.$$

Очевидно, первое слагаемое обращается в ноль на $G(\mu_0)$, а второе обращается в ноль на $J(\mu_0)$. Далее,

$$g^\varepsilon b(\mathbf{D}) = -i \begin{pmatrix} (\eta^\varepsilon)^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \\ \nu^\varepsilon \operatorname{div} \mu_0^{1/2} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) = -i \begin{pmatrix} \big((\eta^0)^{-1} + \Sigma^\varepsilon\big) \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \\ \underline{\nu} \operatorname{div} \mu_0^{1/2} \end{pmatrix}.$$

С учетом этих соотношений легко проверить справедливость следующего аналога леммы 3.1.

Лемма 3.12. 1°. *Оценка вида*

$$\left\| \mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - \big(I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\big) (\mathcal{L}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{L}^0)^{1/2}) \right\|_{H^s(\mathbb{R}^3) \to H^1(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}(\tau) \varepsilon^\sigma$$

при некоторых $s \geqslant 0$ *и* $\sigma \geqslant 0$ *равносильна паре неравенств*

$$\left\| \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - \big(I + \varepsilon \mu_0^{-1/2} \Psi^\varepsilon \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2}\big) (\mathcal{L}_J^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{L}_J^0)^{1/2}) \right\|_{J^s \to H^1} \leqslant \mathcal{C}(\tau) \varepsilon^\sigma,$$

$$\left\| \mathcal{L}_{G,\varepsilon}^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_{G,\varepsilon}^{1/2}) - \big(I + \varepsilon \mu_0^{1/2} (\nabla \rho)^\varepsilon \operatorname{div} \mu_0^{1/2}\big) (\mathcal{L}_G^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{L}_G^0)^{1/2}) \right\|_{G^s \to H^1} \leqslant \mathcal{C}(\tau) \varepsilon^\sigma.$$

2°. *Оценка вида*

$$\left\| g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) (\mathcal{L}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{L}^0)^{1/2}) \right\|_{H^s(\mathbb{R}^3) \to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}(\tau) \varepsilon^\sigma$$

при некоторых $s \geqslant 0$ и $\sigma \geqslant 0$ равносильна паре неравенств

$$\begin{aligned}&\big\|(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2}\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - \big((\eta^0)^{-1}+\Sigma^\varepsilon\big)\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2}(\mathcal{L}_J^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}_J^0)^{1/2})\big\|_{J^s\to L_2}\\ &\qquad\leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon^\sigma,\\ &\big\|\nu^\varepsilon\mathrm{div}\,\mu_0^{1/2}\mathcal{L}_{G,\varepsilon}^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_{G,\varepsilon}^{1/2}) - \underline{\nu}\,\mathrm{div}\,\mu_0^{1/2}(\mathcal{L}_G^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}_G^0)^{1/2})\big\|_{G^s\to L_2}\leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon^\sigma.\end{aligned}$$

Далее, при дополнительных предположениях (например, при условии 3.4) результаты теоремы 3.11 допускают усиление; см. [DSu4]. Теперь для устранения сглаживателя в корректоре достаточно, чтобы решение $\Lambda(\mathbf{x})$ задачи (2.5) было мультипликатором из $H^{3/2}$ в H^1. В размерности $d \leqslant 3$ это условие выполнено автоматически (см. [DSu4, предложение 14.25]). Из [DSu4, теорема 15.36] вытекает следующий результат.

Теорема 3.13. *Пусть $\mathcal{L}_\varepsilon$ — оператор* (3.1)*, а $\mathcal{L}^0$ — эффективный оператор* (2.22)*. Пусть выполнено условие* 3.4*. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$ справедливы оценки*

$$\big\|\mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - \big(I+\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\big)(\mathcal{L}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}^0)^{1/2})\big\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^3)\to H^1(\mathbb{R}^3)}\leqslant C_9(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon,$$

$$\big\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{L}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}^0)^{1/2})\big\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)}\leqslant C_{10}(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon.$$

Постоянные C_9, C_{10} зависят только от данных задачи (3.2)*.*

По аналогии с доказательством следствия 3.7 из теоремы 3.13 и леммы 3.12 выводим следствие.

Следствие 3.14. *Пусть $\mathcal{L}_\varepsilon$ — оператор* (3.1)*, а $\mathcal{L}^0$ — эффективный оператор* (2.22)*. Пусть $\mathcal{L}_{G,\varepsilon}$ и $\mathcal{L}_G^0$ — части операторов $\mathcal{L}_\varepsilon$ и $\mathcal{L}^0$, соответственно, в подпространстве $G(\mu_0)$. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$ выполнены оценки*

$$\begin{aligned}&\big\|\mathcal{L}_{G,\varepsilon}^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_{G,\varepsilon}^{1/2}) - \big(I+\varepsilon\mu_0^{1/2}(\nabla\rho)^\varepsilon\mathrm{div}\,\mu_0^{1/2}\big)(\mathcal{L}_G^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}_G^0)^{1/2})\big\|_{G^{3/2}\to H^1}\\ &\qquad\leqslant \check{C}_9(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon,\end{aligned}\tag{3.13}$$

$$\big\|\nu^\varepsilon\mathrm{div}\,\mu_0^{1/2}\mathcal{L}_{G,\varepsilon}^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_{G,\varepsilon}^{1/2}) - \underline{\nu}\,\mathrm{div}\,\mu_0^{1/2}(\mathcal{L}_G^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}_G^0)^{1/2})\big\|_{G^{3/2}\to L_2}\leqslant \check{C}_{10}(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon.$$

Постоянные $\check{C}_9$, $\check{C}_{10}$ зависят только от $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\nu\|_{L_\infty}$, $\|\nu^{-1}\|_{L_\infty}$, и параметров решетки Γ.

Теперь из [DSu4, теорема 15.36] с учетом леммы 3.12 и следствия 3.14 вытекает следующий результат; ср. доказательство теоремы 3.9.

Теорема 3.15. *Пусть $\mathcal{L}_\varepsilon$ — оператор* (3.1)*, а $\mathcal{L}^0$ — эффективный оператор* (2.22)*. Пусть выполнено условие* 3.8*. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$ справедливы оценки*

$$\big\|\mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - \big(I+\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\big)(\mathcal{L}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}^0)^{1/2})\big\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^3)\to H^1(\mathbb{R}^3)}\leqslant C_{11}(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon,$$

$$\big\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{L}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}^0)^{1/2})\big\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)}\leqslant C_{12}(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon.$$

Постоянные C_{11}, C_{12} зависят только от данных задачи (3.2) *и c°.*

В интерполяционных результатах об аппроксимации оператора $\mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_\varepsilon^{1/2})$ в энергетической норме участвует сглаживающий оператор Π_ε, действующий в $L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^4)$ и заданный равенством

$$(\Pi_\varepsilon\mathbf{f})(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-3/2}\int\limits_{\widetilde{\Omega}/\varepsilon} e^{i\langle\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}\rangle}\widehat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi}.$$

Здесь $\widehat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\xi})$ — Фурье-образ функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Теорема 3.16. *Пусть* $\mathcal{L}_\varepsilon$ *— оператор* (3.1), *а* $\mathcal{L}^0$ *— эффективный оператор* (2.22). *Тогда при* $0 \leqslant s \leqslant 2$, $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned}\Big\|\mathbf{D}\left(\mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - \big(I+\varepsilon\Lambda^\varepsilon\Pi_\varepsilon b(\mathbf{D})\big)(\mathcal{L}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}^0)^{1/2})\right)\Big\|_{H^s(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \\ \leqslant \mathcal{C}_7(s)(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2},\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}\big\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - \big(g^0+(\widetilde{g}^\varepsilon-g^0)\Pi_\varepsilon\big)b(\mathbf{D})(\mathcal{L}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}^0)^{1/2})\big\|_{H^s(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \\ \leqslant \mathcal{C}_8(s)(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2}.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Постоянные $\mathcal{C}_7(s)$, $\mathcal{C}_8(s)$ *зависят только от данных задачи* (3.2) *и от* s.

Доказательство. Из [DSu4, следствие 15.9] прямо вытекает оценка (3.14), а также неравенство

$$\begin{aligned}\big\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - \widetilde{g}^\varepsilon\Pi_\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{L}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}^0)^{1/2})\big\|_{H^s(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \\ \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}_8(s)(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2}.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Учтем оценку

$$\big\|g^0(I-\Pi_\varepsilon)b(\mathbf{D})(\mathcal{L}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}^0)^{1/2})\big\|_{H^s(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|I-\Pi_\varepsilon\|_{H^s(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)}. \tag{3.17}$$

Имеем

$$\|(I-\Pi_\varepsilon)\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3)} = \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus(\widetilde{\Omega}/\varepsilon)} |\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})|^2\,d\boldsymbol{\xi} \leqslant r_0^{-2\sigma}\varepsilon^{2\sigma}\|\mathbf{u}\|^2_{H^\sigma(\mathbb{R}^3)},$$

а потому

$$\|I-\Pi_\varepsilon\|_{H^s(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant r_0^{-\sigma}\varepsilon^\sigma, \quad 0\leqslant\sigma\leqslant s. \tag{3.18}$$

Из (3.16), (3.17) и (3.18) (при $\sigma = s/2$) вытекает (3.15). □

Нам понадобится следующий аналог леммы 3.12.

Лемма 3.17. 1°. *Оценка вида*

$$\Big\|\mathbf{D}\left(\mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - \big(I+\varepsilon\Lambda^\varepsilon\Pi_\varepsilon b(\mathbf{D})\big)(\mathcal{L}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}^0)^{1/2})\right)\Big\|_{H^s(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon^\sigma$$

при некоторых $s\geqslant 0$ *и* $\sigma\geqslant 0$ *равносильна паре неравенств*

$$\Big\|\mathbf{D}\left(\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - \big(I+\varepsilon\mu_0^{-1/2}\Psi^\varepsilon\Pi_\varepsilon\operatorname{rot}\mu_0^{-1/2}\big)(\mathcal{L}_J^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}_J^0)^{1/2})\right)\Big\|_{J^s\to L_2} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon^\sigma,$$

$$\Big\|\mathbf{D}\left(\mathcal{L}_{G,\varepsilon}^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_{G,\varepsilon}^{1/2}) - \big(I+\varepsilon\mu_0^{1/2}(\nabla\rho)^\varepsilon\Pi_\varepsilon\operatorname{div}\mu_0^{1/2}\big)(\mathcal{L}_G^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}_G^0)^{1/2})\right)\Big\|_{G^s\to L_2} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon^\sigma.$$

2°. *Оценка вида*

$$\big\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - \big(g^0+(\widetilde{g}^\varepsilon-g^0)\Pi_\varepsilon\big)b(\mathbf{D})(\mathcal{L}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}^0)^{1/2})\big\|_{H^s(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon^\sigma$$

при некоторых $s\geqslant 0$ *и* $\sigma\geqslant 0$ *равносильна паре неравенств*

$$\begin{aligned}\big\|(\eta^\varepsilon)^{-1}\operatorname{rot}\mu_0^{-1/2}\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - \big((\eta^0)^{-1}+\Sigma^\varepsilon\Pi_\varepsilon\big)\operatorname{rot}\mu_0^{-1/2}(\mathcal{L}_J^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}_J^0)^{1/2})\big\|_{J^s\to L_2} \\ \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon^\sigma,\end{aligned}$$

$$\big\|\nu^\varepsilon\operatorname{div}\mu_0^{1/2}\mathcal{L}_{G,\varepsilon}^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_{G,\varepsilon}^{1/2}) - \underline{\nu}\operatorname{div}\mu_0^{1/2}(\mathcal{L}_G^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}_G^0)^{1/2})\big\|_{G^s\to L_2} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon^\sigma.$$

Из [DSu4, следствие 15.12] с учетом (3.17) и (3.18) (при $\sigma = 2s/3$) вытекает следующий результат.

Теорема 3.18. *Пусть $\mathcal{L}_\varepsilon$ — оператор* (3.1), *а $\mathcal{L}^0$ — эффективный оператор* (2.22). *Пусть выполнено условие* 3.4. *Тогда при $0 \leqslant s \leqslant 3/2$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки*

$$\begin{aligned}&\Big\|\mathbf{D}\Big(\mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - \big(I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon\Pi_\varepsilon b(\mathbf{D})\big)(\mathcal{L}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}^0)^{1/2})\Big)\Big\|_{H^s(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)}\\ &\qquad\leqslant \mathcal{C}_9(s)(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\big\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - \big(g^0 + (\widetilde{g}^\varepsilon - g^0)\Pi_\varepsilon\big)b(\mathbf{D})(\mathcal{L}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}^0)^{1/2})\big\|_{H^s(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)}\\ &\qquad\leqslant \mathcal{C}_{10}(s)(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3}.\end{aligned}$$

Постоянные $\mathcal{C}_9(s)$, $\mathcal{C}_{10}(s)$ зависят только от данных задачи (3.2) *и от s.*

По аналогии с доказательством следствия 3.7 из теоремы 3.18 и леммы 3.17 выводим следствие.

Следствие 3.19. *Пусть $\mathcal{L}_\varepsilon$ — оператор* (3.1), *а $\mathcal{L}^0$ — эффективный оператор* (2.22). *Пусть $\mathcal{L}_{G,\varepsilon}$ и $\mathcal{L}_G^0$ — части операторов $\mathcal{L}_\varepsilon$ и $\mathcal{L}^0$, соответственно, в подпространстве $G(\mu_0)$. Тогда при $0 \leqslant s \leqslant 3/2$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ выполнены оценки*

$$\begin{aligned}&\Big\|\mathbf{D}\Big(\mathcal{L}_{G,\varepsilon}^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_{G,\varepsilon}^{1/2}) - \big(I + \varepsilon\mu_0^{1/2}(\nabla\rho)^\varepsilon\Pi_\varepsilon \operatorname{div}\mu_0^{1/2}\big)(\mathcal{L}_G^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}_G^0)^{1/2})\Big)\Big\|_{G^s\to L_2}\\ &\qquad\leqslant \check{\mathcal{C}}_9(s)(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\big\|\nu^\varepsilon \operatorname{div}\mu_0^{1/2}\mathcal{L}_{G,\varepsilon}^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_{G,\varepsilon}^{1/2}) - \underline{\nu}\operatorname{div}\mu_0^{1/2}(\mathcal{L}_G^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}_G^0)^{1/2})\big\|_{G^s\to L_2}\\ &\qquad\leqslant \check{\mathcal{C}}_{10}(s)(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3}.\end{aligned}$$

Постоянные $\check{\mathcal{C}}_9(s)$, $\check{\mathcal{C}}_{10}(s)$ зависят только от $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\nu\|_{L_\infty}$, $\|\nu^{-1}\|_{L_\infty}$, параметров решетки Γ и от s.

Теперь из [DSu4, следствие 15.12] с учетом леммы 3.17 и следствия 3.19 вытекает следующий результат; ср. доказательство теоремы 3.9.

Теорема 3.20. *Пусть $\mathcal{L}_\varepsilon$ — оператор* (3.1), *а $\mathcal{L}^0$ — эффективный оператор* (2.22). *Пусть выполнено условие* 3.8. *Тогда при $0 \leqslant s \leqslant 3/2$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки*

$$\begin{aligned}&\Big\|\mathbf{D}\Big(\mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - (I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon\Pi_\varepsilon)b(\mathbf{D})(\mathcal{L}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}^0)^{1/2})\Big)\Big\|_{H^s(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)}\\ &\qquad\leqslant \mathcal{C}_{11}(s)(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\big\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - \big(g^0 + (\widetilde{g}^\varepsilon - g^0)\Pi_\varepsilon\big)b(\mathbf{D})(\mathcal{L}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}^0)^{1/2})\big\|_{H^s(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)}\\ &\qquad\leqslant \mathcal{C}_{12}(s)(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3}.\end{aligned}$$

Постоянные $\mathcal{C}_{11}(s)$, $\mathcal{C}_{12}(s)$ зависят только от данных задачи (3.2), *от s и от c°.*

3.4. **Аппроксимации оператор-функций от $\mathcal{L}_{J,\varepsilon}$.** Учитывая лемму 3.1 и применяя теоремы 3.2, 3.3, 3.5, 3.6, 3.9, 3.10 к оператору $\widehat{\mathcal{L}}_\varepsilon$ с исходными коэффициентами $\mu_0, \eta(\mathbf{x})$ и с постоянным коэффициентом $\widehat{\nu} = 2|\mu_0^{-1}|^2\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, получаем следующий (объединенный) результат.

Теорема 3.21. *Пусть $\mathcal{L}_{J,\varepsilon}$ — часть оператора* (3.1) *в соленоидальном подпространстве $J(\mu_0)$ и $\mathcal{L}_J^0$ — часть эффективного оператора* (2.22) *в подпространстве $J(\mu_0)$.*
1°. *При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ выполнены оценки*

$$\big\|\cos(\tau\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - \cos(\tau(\mathcal{L}_J^0)^{1/2})\big\|_{J^2\to J} \leqslant \widehat{C}_1(1+|\tau|)\varepsilon, \tag{3.19}$$

$$\big\|\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - (\mathcal{L}_J^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}_J^0)^{1/2})\big\|_{J^1\to J} \leqslant \widehat{C}_2(1+|\tau|)\varepsilon. \tag{3.20}$$

При $0 \leqslant s \leqslant 2$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ выполнены оценки

$$\left\|\cos(\tau \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - \cos(\tau (\mathcal{L}_J^0)^{1/2})\right\|_{J^s \to J} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_1(s)(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2}, \tag{3.21}$$

$$\left\|\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) D_j - (\mathcal{L}_J^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{L}_J^0)^{1/2}) D_j\right\|_{J^s \to J} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_2(s)(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2}, \quad j = 1,2,3. \tag{3.22}$$

Постоянные $\widehat{C}_1$, $\widehat{C}_2$ контролируются в терминах норм $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$ и параметров решетки Γ. Постоянные $\widehat{\mathcal{C}}_1(s)$ и $\widehat{\mathcal{C}}_2(s)$ зависят от тех же параметров и от s.
2°. *Пусть выполнено условие 3.4 или условие 3.8. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ выполнены оценки*

$$\left\|\cos(\tau \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - \cos(\tau (\mathcal{L}_J^0)^{1/2})\right\|_{J^{3/2} \to J} \leqslant \widehat{C}_3(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon, \tag{3.23}$$

$$\left\|\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - (\mathcal{L}_J^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{L}_J^0)^{1/2})\right\|_{J^{1/2} \to J} \leqslant \widehat{C}_4(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon. \tag{3.24}$$

При $0 \leqslant s \leqslant 3/2$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ выполнены оценки

$$\left\|\cos(\tau \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - \cos(\tau (\mathcal{L}_J^0)^{1/2})\right\|_{J^s \to J} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_3(s)(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3}, \tag{3.25}$$

$$\left\|\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) D_j - (\mathcal{L}_J^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{L}_J^0)^{1/2}) D_j\right\|_{J^s \to J} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_4(s)(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3}, \quad j = 1,2,3. \tag{3.26}$$

При условии 3.4 постоянные $\widehat{C}_3$, $\widehat{C}_4$ контролируются в терминах норм $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$ и параметров решетки Γ; постоянные $\widehat{\mathcal{C}}_3(s)$ и $\widehat{\mathcal{C}}_4(s)$ зависят от тех же параметров и от s. При условии 3.8 константы зависят еще от параметра c°.

Аналогично, с помощью лемм 3.12, 3.17, применяя теоремы 3.11, 3.13, 3.15, 3.16, 3.18 и 3.20 к оператору $\widehat{\mathcal{L}}_\varepsilon$ с исходными коэффициентами $\mu_0, \eta(\mathbf{x})$ и с постоянным коэффициентом $\widehat{\nu} = 2|\mu_0^{-1}|^2\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, получаем следующий (объединенный) результат.

Теорема 3.22. *Пусть $\mathcal{L}_{J,\varepsilon}$ — часть оператора (3.1) в соленоидальном подпространстве $J(\mu_0)$ и $\mathcal{L}_J^0$ — часть эффективного оператора (2.22) в подпространстве $J(\mu_0)$.*
1°. *При $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$ выполнены оценки*

$$\begin{aligned} &\left\|\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - \left(I + \varepsilon \mu_0^{-1/2} \Psi^\varepsilon \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2}\right)(\mathcal{L}_J^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{L}_J^0)^{1/2})\right\|_{J^2 \to H^1} \\ &\qquad \leqslant \widehat{C}_7(1+|\tau|)\varepsilon, \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned} &\left\|(\eta^\varepsilon)^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - \left((\eta^0)^{-1} + \Sigma^\varepsilon\right) \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} (\mathcal{L}_J^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{L}_J^0)^{1/2})\right\|_{J^2 \to L_2} \\ &\qquad \leqslant \widehat{C}_8(1+|\tau|)\varepsilon. \end{aligned} \tag{3.28}$$

При $0 \leqslant s \leqslant 2$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ выполнены оценки

$$\begin{aligned} &\left\|\mathbf{D}\left(\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - \left(I + \varepsilon \mu_0^{-1/2} \Psi^\varepsilon \Pi_\varepsilon \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2}\right)(\mathcal{L}_J^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{L}_J^0)^{1/2})\right)\right\|_{J^s \to L_2} \\ &\qquad \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_7(s)(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2}, \end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned} &\left\|(\eta^\varepsilon)^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - \left((\eta^0)^{-1} + \Sigma^\varepsilon \Pi_\varepsilon\right) \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} (\mathcal{L}_J^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{L}_J^0)^{1/2})\right\|_{J^s \to L_2} \\ &\qquad \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_8(s)(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Постоянные $\widehat{C}_7$, $\widehat{C}_8$ контролируются в терминах норм $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$ и параметров решетки Γ. Постоянные $\widehat{\mathcal{C}}_7(s)$ и $\widehat{\mathcal{C}}_8(s)$ зависят от тех же параметров и от s.

2°. *Пусть выполнено условие* 3.4 *или условие* 3.8. *Тогда при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *выполнены оценки*

$$\begin{aligned} &\bigl\| \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - \bigl(I + \varepsilon \mu_0^{-1/2} \Psi^\varepsilon \mathrm{rot}\, \mu_0^{-1/2}\bigr)(\mathcal{L}_J^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{L}_J^0)^{1/2}) \bigr\|_{J^{3/2} \to H^1} \\ &\qquad \leqslant \widehat{C}_9 (1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon, \end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned} &\bigl\| (\eta^\varepsilon)^{-1} \mathrm{rot}\, \mu_0^{-1/2} \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - \bigl((\eta^0)^{-1} + \Sigma^\varepsilon\bigr) \mathrm{rot}\, \mu_0^{-1/2} (\mathcal{L}_J^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{L}_J^0)^{1/2}) \bigr\|_{J^{3/2} \to L_2} \\ &\qquad \leqslant \widehat{C}_{10} (1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.32}$$

При $0 \leqslant s \leqslant 3/2$, $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполнены оценки*

$$\begin{aligned} &\Bigl\| \mathbf{D} \Bigl(\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - \bigl(I + \varepsilon \mu_0^{-1/2} \Psi^\varepsilon \Pi_\varepsilon \mathrm{rot}\, \mu_0^{-1/2}\bigr)(\mathcal{L}_J^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{L}_J^0)^{1/2}) \Bigr) \Bigr\|_{J^s \to L_2} \\ &\qquad \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_9(s) (1 + |\tau|)^{s/3} \varepsilon^{2s/3}, \end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned} &\bigl\| (\eta^\varepsilon)^{-1} \mathrm{rot}\, \mu_0^{-1/2} \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - \bigl((\eta^0)^{-1} + \Sigma^\varepsilon \Pi_\varepsilon\bigr) \mathrm{rot}\, \mu_0^{-1/2} (\mathcal{L}_J^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{L}_J^0)^{1/2}) \bigr\|_{J^s \to L_2} \\ &\qquad \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_{10}(s) (1 + |\tau|)^{s/3} \varepsilon^{2s/3}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

При условии 3.4 *постоянные* $\widehat{C}_9$, $\widehat{C}_{10}$ *контролируются в терминах норм* $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$ *и параметров решетки* Γ; *постоянные* $\widehat{\mathcal{C}}_9(s)$ *и* $\widehat{\mathcal{C}}_{10}(s)$ *зависят от тех же параметров и от* s. *При условии* 3.8 *константы зависят еще от параметра* c°.

Замечание 3.23. *Контроль за зависимостью оценок от* τ *позволяет получать квалифицированные оценки при малом* ε *и большом* $|\tau|$, *что представляет самостоятельный интерес.*
1) *В условиях теоремы* 3.21(1°) *или теоремы* 3.22(1°) *можно рассматривать значения* $\tau = O(\varepsilon^{-\alpha})$, $0 < \alpha < 1$. *Тогда нормы в левых частях формул* (3.19), (3.20), (3.27), (3.28) *оцениваются через* $O(\varepsilon^{1-\alpha})$, *а нормы в левых частях формул* (3.21), (3.22), (3.29), (3.30) *имеют порядок* $O(\varepsilon^{s(1-\alpha)/2})$.
2) *В условиях теоремы* 3.21(2°) *или теоремы* 3.22(2°) *можно рассматривать значения* $\tau = O(\varepsilon^{-\alpha})$, $0 < \alpha < 2$. *Тогда нормы в левых частях формул* (3.23), (3.24), (3.31), (3.32) *оцениваются через* $O(\varepsilon^{1-\alpha/2})$, *а нормы в левых частях формул* (3.25), (3.26), (3.33), (3.34) *имеют порядок* $O(\varepsilon^{s(2-\alpha)/3})$.

3.5. **Подтверждение точности результатов.** Применение теоремы 13.6 из [DSu2] и теоремы 15.15 из [DSu4] приводит к следующему утверждению, подтверждающему точность теорем 3.2 и 3.11 относительно типа операторной нормы в общем случае.

Теорема 3.24. *Пусть оператор* $N_0(\boldsymbol{\theta})$ *определён в* (2.17). *Предположим, что хотя бы в одной точке* $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^2$ *имеет место* $N_0(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$. *Тогда справедливо следующее.*
1°. *Пусть* $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 \leqslant s < 2$. *Тогда не существует такой постоянной* $\mathcal{C}(\tau) > 0$, *чтобы оценка*

$$\bigl\| \cos(\tau \mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau (\mathcal{L}^0)^{1/2}) \bigr\|_{H^s(\mathbb{R}^3) \to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}(\tau) \varepsilon \tag{3.35}$$

выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.
2°. *Пусть* $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 \leqslant r < 1$. *Тогда не существует такой постоянной* $\mathcal{C}(\tau) > 0$, *чтобы оценка*

$$\bigl\| \mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - (\mathcal{L}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{L}^0)^{1/2}) \bigr\|_{H^r(\mathbb{R}^3) \to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}(\tau) \varepsilon \tag{3.36}$$

выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.
3°. *Пусть* $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 \leqslant s < 2$. *Тогда не существует такой постоянной* $\mathcal{C}(\tau) > 0$, *чтобы оценка*

$$\bigl\| \mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - \bigl(I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon \Pi_\varepsilon b(\mathbf{D})\bigr)(\mathcal{L}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{L}^0)^{1/2}) \bigr\|_{H^s(\mathbb{R}^3) \to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}(\tau) \varepsilon \tag{3.37}$$

выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

В силу замечания 2.6 условие $N_0(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ равносильно соотношениям $\gamma_1(\boldsymbol{\theta}_0) = \gamma_2(\boldsymbol{\theta}_0)$ и $f(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$, где $f(\boldsymbol{\theta})$ определено в (2.20).

Выведем из теоремы 3.24 аналогичный результат для оператора $\mathcal{L}_{J,\varepsilon}$, подтверждающий точность теорем 3.21(1°) и 3.22(1°).

Теорема 3.25. *Пусть* $\mathcal{L}_{J,\varepsilon}$ *— часть оператора* (3.1) *в соленоидальном подпространстве* $J(\mu_0)$ *и* $\mathcal{L}_J^0$ *— часть эффективного оператора* (2.22) *в подпространстве* $J(\mu_0)$. *Пусть оператор* $N_0(\boldsymbol{\theta})$ *определён в* (2.17). *Предположим, что хотя бы в одной точке* $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^2$ *имеет место* $N_0(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$.
1°. *Пусть* $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 \leqslant s < 2$. *Тогда не существует такой постоянной* $\widetilde{\mathcal{C}}(\tau) > 0$, *чтобы оценка*

$$\left\|\cos(\tau\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - \cos(\tau(\mathcal{L}_J^0)^{1/2})\right\|_{J^s\to J} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}(\tau)\varepsilon \tag{3.38}$$

выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.
2°. *Пусть* $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 \leqslant r < 1$. *Тогда не существует такой постоянной* $\widetilde{\mathcal{C}}(\tau) > 0$, *чтобы оценка*

$$\left\|\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - (\mathcal{L}_J^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}_J^0)^{1/2})\right\|_{J^r\to J} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}(\tau)\varepsilon \tag{3.39}$$

выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.
3°. *Пусть* $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 \leqslant s < 2$. *Тогда не существует такой постоянной* $\widetilde{\mathcal{C}}(\tau) > 0$, *чтобы оценка*

$$\left\|\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - \left(I + \varepsilon\mu_0^{-1/2}\Psi^\varepsilon \operatorname{rot}\mu_0^{-1/2}\right)(\mathcal{L}_J^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}_J^0)^{1/2})\right\|_{J^s\to H^1} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}(\tau)\varepsilon \tag{3.40}$$

выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Проверим утверждение 1°. Достаточно считать, что $3/2 \leqslant s < 2$. Рассуждаем от противного. Предположим, что при некоторых $3/2 \leqslant s < 2$ и $\tau \neq 0$ выполнена оценка (3.38). В силу следствия 3.7 заведомо выполнена также и оценка

$$\left\|\cos(\tau\mathcal{L}_{G,\varepsilon}^{1/2}) - \cos(\tau(\mathcal{L}_G^0)^{1/2})\right\|_{G^s\to G} \leqslant \check{\mathcal{C}}(\tau)\varepsilon. \tag{3.41}$$

Согласно лемме 3.1 из (3.38) и (3.41) вытекает неравенство (3.35) с постоянной $\mathcal{C}(\tau) = \max\{\widetilde{\mathcal{C}}(\tau), \check{\mathcal{C}}(\tau)\}$. Но это противоречит утверждению 1° теоремы 3.24.

Утверждение 2° проверяется аналогично.

Проверим утверждение 3°. Достаточно считать, что $3/2 \leqslant s < 2$. От противного, предположим, что при некоторых $3/2 \leqslant s < 2$ и $\tau \neq 0$ выполнена оценка (3.40) при достаточно малом ε. В силу следствия 3.14 выполнена оценка (3.13). С учетом леммы 3.12 отсюда следует, что выполнена оценка

$$\left\|\mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - \left(I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\right)(\mathcal{L}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}^0)^{1/2})\right\|_{H^s\to H^1} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon \tag{3.42}$$

при достаточно малом ε. Остается учесть следующую оценку, установленную в [DSu4, п. 14.7]:

$$\left\|\varepsilon\Lambda^\varepsilon(I - \Pi_\varepsilon)b(\mathbf{D})(\mathcal{L}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}^0)^{1/2})\right\|_{H^{3/2}\to H^1} \leqslant C\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1. \tag{3.43}$$

Из (3.42), (3.43) следует, что выполнена оценка (3.37) при достаточно малом ε. Это противоречит утверждению 3° теоремы 3.24. □

Применяя теорему 15.17 из [DSu4], получаем следующий результат, подтверждающий точность теорем 3.2 и 3.11 относительно зависимости оценок от τ.

Теорема 3.26. *Пусть оператор* $N_0(\boldsymbol{\theta})$ *определён в* (2.17). *Предположим, что хотя бы в одной точке* $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^2$ *имеет место* $N_0(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$. *Тогда справедливо следующее.*
1°. *Пусть* $s \geqslant 2$. *Не существует положительной функции* $\mathcal{C}(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty}\mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ *и при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$ *выполнена оценка* (3.35).

2°. *Пусть* $r \geqslant 1$. *Не существует положительной функции* $\mathcal{C}(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty}\mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ *и при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$ *выполнена оценка* (3.36).
3°. *Пусть* $s \geqslant 2$. *Не существует положительной функции* $\mathcal{C}(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty}\mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ *и при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$ *выполнена оценка* (3.37).

Отсюда следует аналогичный результат для оператора $\mathcal{L}_{J,\varepsilon}$, подтверждающий точность теорем 3.21(1°) и 3.22(1°) в отношении зависимости оценок от τ.

Теорема 3.27. *Пусть* $\mathcal{L}_{J,\varepsilon}$ — *часть оператора* (3.1) *в соленоидальном подпространстве* $J(\mu_0)$ *и* $\mathcal{L}_J^0$ — *часть эффективного оператора* (2.22) *в подпространстве* $J(\mu_0)$. *Пусть оператор* $N_0(\boldsymbol{\theta})$ *определён в* (2.17). *Предположим, что хотя бы в одной точке* $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^2$ *имеет место* $N_0(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$.
1°. *Пусть* $s \geqslant 2$. *Не существует положительной функции* $\widetilde{\mathcal{C}}(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty}\widetilde{\mathcal{C}}(\tau)/|\tau| = 0$ *и при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$ *выполнена оценка* (3.38).
2°. *Пусть* $r \geqslant 1$. *Не существует положительной функции* $\widetilde{\mathcal{C}}(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty}\widetilde{\mathcal{C}}(\tau)/|\tau| = 0$ *и при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$ *выполнена оценка* (3.39).
3°. *Пусть* $s \geqslant 2$. *Не существует положительной функции* $\widetilde{\mathcal{C}}(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty}\widetilde{\mathcal{C}}(\tau)/|\tau| = 0$ *и при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$ *выполнена оценка* (3.40).

Доказательство. Проверим утверждение 1°. Рассуждаем от противного. Предположим, что при некотором $s \geqslant 2$ существует положительная функция $\widetilde{\mathcal{C}}(\tau)$ такая, что $\lim_{\tau\to\infty}\widetilde{\mathcal{C}}(\tau)/|\tau| = 0$ и при $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнена оценка (3.38). В силу следствия 3.7 выполнена также и оценка

$$\left\|\cos(\tau\mathcal{L}_{G,\varepsilon}^{1/2}) - \cos(\tau(\mathcal{L}_G^0)^{1/2})\right\|_{G^s\to G} \leqslant \check{C}_3(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon. \tag{3.44}$$

Согласно лемме 3.1 из (3.38) и (3.44) вытекает неравенство (3.35) с функцией $\mathcal{C}(\tau) = \max\{\widetilde{\mathcal{C}}(\tau), \check{C}_3(1+|\tau|)^{1/2}\}$. Имеем $\lim_{\tau\to\infty}\mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$. Но это противоречит утверждению 1° теоремы 3.26.

Утверждение 2° проверяется аналогично.

Проверим утверждение 3°. Предположим, что при некотором $s \geqslant 2$ существует положительная функция $\widetilde{\mathcal{C}}(\tau)$ такая, что $\lim_{\tau\to\infty}\widetilde{\mathcal{C}}(\tau)/|\tau| = 0$ и при $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнена оценка (3.40). В силу следствия 3.14 выполнена оценка (3.13). С учетом леммы 3.12 отсюда следует, что выполнено (3.42) с $\mathcal{C}(\tau) = \max\{\widetilde{\mathcal{C}}(\tau), \check{C}_9(1+|\tau|)^{1/2}\}$. При этом $\lim_{\tau\to\infty}\mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$. Остается учесть (3.43). Из (3.42), (3.43) следует, что выполнена оценка (3.37). Это противоречит утверждению 3° теоремы 3.26. ☐

3.6. **Примеры.** Конкретные примеры той и другой ситуации приведены в [DSu3, §4].

1) Пусть $\Gamma = (2\pi\mathbb{Z})^3$. Считаем, что $\mu_0 = \mathbf{1}$. Пусть матрица $\eta(\mathbf{x})$ зависит только от переменной x_1 и имеет вид:

$$\eta(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \eta_1(x_1) & \eta_2(x_1) & 0 \\ \eta_2(x_1) & \eta_3(x_1) & 0 \\ 0 & 0 & \eta_4(x_1) \end{pmatrix},$$

где $\eta_j(x_1)$, $j = 1,2,3,4,$ — (2π)–периодические вещественные функции, такие что матрица-функция $\eta(\mathbf{x})$ ограничена и равномерно положительно определена. В [DSu3, п. 4.1] показано, что можно так подобрать функции $\eta_j(x_1)$, $j = 1,2,3,4$, что $\gamma_1(\boldsymbol{\theta}_0) = \gamma_2(\boldsymbol{\theta}_0)$ и $\mu_1(\boldsymbol{\theta}_0) = -\mu_2(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ в некоторых точках $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^2$. Тогда $N_0(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$. Применимы общие результаты (теоремы 3.21(1°) и 3.22(1°)), причем они точны как в отношении типа нормы, так и в отношении зависимости оценок от τ.

2) Напомним, что некоторые случаи, когда выполняется условие $N(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$, были выделены в замечании 2.5. Еще один пример, заимствованный из [Zh1], был разобран в [DSu3, п. 4.2]. Пусть $\mu_0 = \mathbf{1}$. Пусть $\Gamma = (2\pi\mathbb{Z})^3$, выберем ячейку с центром в нуле: $\Omega = (-\pi,\pi)^3$. Пусть $B_1 = \{|\mathbf{x}| \leqslant 1\}$ — единичный шар, B_ϑ — концентрический с ним

шар, причём $|B_\vartheta| = \vartheta |B_1|$, $0 < \vartheta < 1$. Пусть $\eta(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая матрица-функция, на ячейке заданная соотношениями

$$\eta(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x}) I, \qquad a(\mathbf{x}) = \begin{cases} \kappa, & \text{если } \mathbf{x} \in B_\vartheta \\ 1, & \text{если } \mathbf{x} \in B_1 \setminus B_\vartheta \\ 1 + \frac{3\vartheta(\kappa-1)}{3+(1-\vartheta)(\kappa-1)}, & \text{если } \mathbf{x} \in \Omega \setminus B_1, \end{cases}$$

где $\kappa > 0$. Как показано в [DSu3, п. 4.2], в данном примере $N(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^2$.

В случае $N(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$ общие результаты допускают усиление: применимы теоремы 3.21(2°) и 3.22(2°).

§ 4. Усреднение нестационарной системы Максвелла

4.1. **Постановка задачи.** Пусть диэлектрическая проницаемость задана быстро осциллирующей матрицей $\eta^\varepsilon(\mathbf{x})$, а магнитная проницаемость равна постоянной матрице μ_0. Предполагается, что $\eta(\mathbf{x})$ и μ_0 удовлетворяют условиям п. 1.2. Используем следующие обозначения для физических полей:

$\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)$ — напряженность электрического поля;

$\mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau) = \eta^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)$ — электрическая индукция;

$\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)$ — напряженность магнитного поля;

$\mathbf{z}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau) = \mu_0 \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)$ — магнитная индукция.

Рассмотрим следующую задачу Коши для нестационарной системы Максвелла

$$\begin{cases} \partial_\tau \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau) = (\eta^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau), \quad \operatorname{div} \eta^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \ \tau \in \mathbb{R}; \\ \partial_\tau \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau) = -\mu_0^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau), \quad \operatorname{div} \mu_0 \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \ \tau \in \mathbb{R}; \\ \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = (P_\varepsilon \mathbf{f})(\mathbf{x}), \quad \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{4.1}$$

Здесь $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ и $\operatorname{div} \mu_0 \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) = 0$ (равенство понимается в смысле распределений). Далее, $\mathbf{f} \in L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ и P_ε — ортопроектор весового пространства $L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3; \eta^\varepsilon)$ на подпространство

$$\{\mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3) : \ \operatorname{div} \eta^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Проектор P_ε действует по правилу $(P_\varepsilon \mathbf{f})(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \nabla \omega_\varepsilon(\mathbf{x})$, где ω_ε — решение уравнения $\operatorname{div} \eta^\varepsilon \nabla \omega_\varepsilon = \operatorname{div} \eta^\varepsilon \mathbf{f}$, понимаемого в обобщенном смысле: $\omega_\varepsilon \in L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$, $\nabla \omega_\varepsilon \in L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ и выполнено тождество

$$\int_{\mathbb{R}^3} \langle \eta^\varepsilon(\mathbf{x})(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \nabla \omega_\varepsilon(\mathbf{x})), \nabla \chi(\mathbf{x}) \rangle \, d\mathbf{x} = 0, \quad \chi \in L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3), \ \nabla \chi \in L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3).$$

4.2. **Усредненная система Максвелла.** Используем следующие обозначения для усредненных физических полей:

$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \tau)$ — напряженность электрического поля;

$\mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \tau) = \eta^0 \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \tau)$ — электрическая индукция;

$\mathbf{v}_0(\mathbf{x}, \tau)$ — напряженность магнитного поля;

$\mathbf{z}_0(\mathbf{x}, \tau) = \mu_0 \mathbf{v}_0(\mathbf{x}, \tau)$ — магнитная индукция.

Здесь η^0 — эффективная матрица, определенная в п. 2.2.

Усредненная задача имеет вид

$$\begin{cases} \partial_\tau \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \tau) = (\eta^0)^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{v}_0(\mathbf{x}, \tau), \quad \operatorname{div} \eta^0 \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \tau) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \ \tau \in \mathbb{R}; \\ \partial_\tau \mathbf{v}_0(\mathbf{x}, \tau) = -\mu_0^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \tau), \quad \operatorname{div} \mu_0 \mathbf{v}_0(\mathbf{x}, \tau) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \ \tau \in \mathbb{R}; \\ \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, 0) = (P_0 \mathbf{f})(\mathbf{x}), \quad \mathbf{v}_0(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{4.2}$$

Здесь P_0 — ортопроектор весового пространства $L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3; \eta^0)$ на подпространство

$$\{\mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3) : \ \operatorname{div} \eta^0 \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Проектор P_0 действует по правилу $(P_0\mathbf{f})(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \nabla\omega_0(\mathbf{x})$, где ω_0 — решение уравнения $\operatorname{div}\,\eta^0\nabla\omega_0 = \operatorname{div}\,\eta^0\mathbf{f}$, понимаемого в обобщенном смысле: $\omega_0 \in L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$, $\nabla\omega_0 \in L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ и выполнено тождество

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \langle \eta^0(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \nabla\omega_0(\mathbf{x})), \nabla\chi(\mathbf{x})\rangle\, d\mathbf{x} = 0, \quad \chi \in L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3),\ \nabla\chi \in L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3).$$

Замечание 4.1. *Поскольку* $P_\varepsilon\mathbf{f} = \mathbf{f} - \nabla\omega_\varepsilon$ *и* $P_0\mathbf{f} = \mathbf{f} - \nabla\omega_0$, *то*

$$\operatorname{rot} P_\varepsilon\mathbf{f} = \operatorname{rot} P_0\mathbf{f} = \operatorname{rot}\mathbf{f},$$

что понимается в смысле распределений.

4.3. **Сведение к уравнению второго порядка.** Из (4.1) получаем уравнение второго порядка для $\mathbf{v}_\varepsilon$:

$$\partial_\tau^2\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) = -\mu_0^{-1}\operatorname{rot}\partial_\tau\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) = -\mu_0^{-1}\operatorname{rot}(\eta^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau),$$

с начальными условиями

$$\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \partial_\tau\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = -\mu_0^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = -\mu_0^{-1}\operatorname{rot}(P_\varepsilon\mathbf{f})(\mathbf{x}) = -\mu_0^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Таким образом, магнитная напряженность $\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)$ является обобщенным решением следующей задачи Коши

$$\begin{cases} \mu_0\,\partial_\tau^2\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) = -\operatorname{rot}(\eta^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau), \quad \operatorname{div}\,\mu_0\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) = 0, \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3,\ \tau\in\mathbb{R}; \\ \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \mu_0\,\partial_\tau\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{4.3}$$

где $\boldsymbol{\psi} := -\operatorname{rot}\mathbf{f}$. Остальные поля выражаются через $\mathbf{v}_\varepsilon$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) &= \mu_0\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau), \\ \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) - \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) &= \int_0^\tau (\eta^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\widetilde{\tau})\,d\widetilde{\tau}, \\ \mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) - \mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{x},0) &= \int_0^\tau \operatorname{rot}\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\widetilde{\tau})\,d\widetilde{\tau}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Сделаем подстановку $\mu_0^{1/2}\mathbf{v}_\varepsilon = \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$. Тогда $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$ является решением задачи

$$\begin{cases} \partial_\tau^2\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) = -\mu_0^{-1/2}\operatorname{rot}(\eta^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1}\operatorname{rot}\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau), \quad \operatorname{div}\,\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) = 0, \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3,\ \tau\in\mathbb{R}; \\ \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \mu_0^{1/2}\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \partial_\tau\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Решение представляется в виде

$$\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon = \cos(\tau\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2})\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\phi} + \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2})\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\psi}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) = \mu_0^{-1/2}\cos(\tau\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2})\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\phi} + \mu_0^{-1/2}\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2})\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\psi}. \tag{4.5}$$

Аналогично, усредненная система Максвелла (4.2) приводит к следующей задаче для $\mathbf{v}_0$:

$$\begin{cases} \mu_0\,\partial_\tau^2\mathbf{v}_0(\mathbf{x},\tau) = -\operatorname{rot}(\eta^0)^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{v}_0(\mathbf{x},\tau), \quad \operatorname{div}\,\mu_0\mathbf{v}_0(\mathbf{x},\tau) = 0, \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3,\ \tau\in\mathbb{R}; \\ \mathbf{v}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \mu_0\,\partial_\tau\mathbf{v}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Остальные усредненные поля выражаются через $\mathbf{v}_0$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &\mathbf{z}_0(\mathbf{x},\tau) = \mu_0\mathbf{v}_0(\mathbf{x},\tau), \\ &\mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau) - \mathbf{u}_0(\mathbf{x},0) = \int_0^\tau (\eta^0)^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{v}_0(\mathbf{x},\widetilde{\tau})\,d\widetilde{\tau}, \\ &\mathbf{w}_0(\mathbf{x},\tau) - \mathbf{w}_0(\mathbf{x},0) = \int_0^\tau \operatorname{rot}\mathbf{v}_0(\mathbf{x},\widetilde{\tau})\,d\widetilde{\tau}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Аналогично (4.5) справедливо представление

$$\mathbf{v}_0(\cdot,\tau) = \mu_0^{-1/2}\cos(\tau(\mathcal{L}_J^0)^{1/2})\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\phi} + \mu_0^{-1/2}(\mathcal{L}_J^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}_J^0)^{1/2})\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\psi}. \tag{4.7}$$

4.4. **Результаты об усреднении системы Максвелла.** Из теоремы 3.21(1°) выводим следующий результат.

Теорема 4.2. *В условиях пунктов* 4.1, 4.2 *для магнитной напряженности* $\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)$ *и магнитной индукции* $\mathbf{z}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)$ *справедливы следующие утверждения.*
1°. *Пусть* $\boldsymbol{\phi},\mathbf{f} \in H^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ *и* $\operatorname{div}\mu_0\boldsymbol{\phi} = 0$. *Тогда при* $\tau\in\mathbb{R}$ *и* $\varepsilon>0$ *выполнены оценки*

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathfrak{C}_1(1+|\tau|)\varepsilon\left(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^2(\mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{f}\|_{H^2(\mathbb{R}^3)}\right), \tag{4.8}$$

$$\|\mathbf{z}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{z}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathfrak{C}_2(1+|\tau|)\varepsilon\left(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^2(\mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{f}\|_{H^2(\mathbb{R}^3)}\right). \tag{4.9}$$

Постоянные $\mathfrak{C}_1,\mathfrak{C}_2$ *зависят от* $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$ *и от параметров решетки* Γ.
2°. *Пусть* $\boldsymbol{\phi},\mathbf{f} \in H^s(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$, *где* $0\leqslant s\leqslant 2$, *и* $\operatorname{div}\mu_0\boldsymbol{\phi} = 0$. *Тогда при* $\tau\in\mathbb{R}$ *и* $\varepsilon>0$ *выполнены оценки*

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathfrak{C}_3(s)(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2}\left(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{f}\|_{H^s(\mathbb{R}^3)}\right), \tag{4.10}$$

$$\|\mathbf{z}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{z}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathfrak{C}_4(s)(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2}\left(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{f}\|_{H^s(\mathbb{R}^3)}\right).$$

Постоянные $\mathfrak{C}_3(s),\mathfrak{C}_4(s)$ *зависят от* $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, *от параметров решетки* Γ *и от* s.
3°. *Если* $\boldsymbol{\phi},\mathbf{f} \in L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ *и* $\operatorname{div}\mu_0\boldsymbol{\phi} = 0$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} = 0, \quad \tau\in\mathbb{R}, \tag{4.11}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\mathbf{z}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{z}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} = 0, \quad \tau\in\mathbb{R}. \tag{4.12}$$

Доказательство. Неравенство (4.8) непосредственно вытекает из (3.19), (3.20) и представлений (4.5), (4.7). Оценка (4.10) выводится аналогичным образом из (3.21), (3.22). Результаты для $\mathbf{z}_\varepsilon$ прямо следуют из результатов для $\mathbf{v}_\varepsilon$, поскольку $\mathbf{z}_\varepsilon = \mu_0\mathbf{v}_\varepsilon$ и $\mathbf{z}_0 = \mu_0\mathbf{v}_0$.

При $s=0$ оценка (4.10) дает равномерную ограниченность нормы в левой части, если $\boldsymbol{\phi},\mathbf{f}\in L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ (и $\operatorname{div}\mu_0\boldsymbol{\phi}=0$). Применяя (4.10) при $s=0$ и (4.8) и используя плотность множества H^2 в L_2, а также плотность множества $\{\mathbf{u}\in H^2 : \operatorname{div}\mu_0\mathbf{u} = 0\}$ в пространстве $\{\mathbf{u}\in L_2 : \operatorname{div}\mu_0\mathbf{u}=0\}$, на основании теоремы Банаха–Штейнгауза получаем (4.11). Соотношение (4.12) прямо следует из (4.11). $\square$

Теоремы 3.25($1^\circ,2^\circ$) и 3.27($1^\circ,2^\circ$) показывают, что в общем случае оценки (4.8), (4.9) точны как по типу нормы, так и в отношении зависимости от τ.

Однако, при дополнительных предположениях результаты пунктов $1^\circ,2^\circ$ теоремы 4.2 допускают усиление. Это вытекает из теоремы 3.21(2°).

Теорема 4.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.2. *Пусть выполнено условие* 3.4 *или условие* 3.8.
1°. *Пусть* $\boldsymbol{\phi},\mathbf{f} \in H^{3/2}(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ *и* $\operatorname{div}\mu_0\boldsymbol{\phi} = 0$. *Тогда при* $\tau\in\mathbb{R}$ *и* $\varepsilon>0$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathfrak{C}_5(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon\left(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{f}\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^3)}\right),$$

$$\|\mathbf{z}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{z}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathfrak{C}_6(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon\left(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{f}\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^3)}\right).$$

При условии 3.4 *постоянные* $\mathfrak{C}_5,\mathfrak{C}_6$ *зависят от* $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$ *и от параметров решетки* Γ. *При условии* 3.8 *эти константы зависят еще от* c°.

2°. *Пусть* $\boldsymbol{\phi}, \mathbf{f} \in H^s(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$, *где* $0 \leqslant s \leqslant 3/2$, *и* $\operatorname{div}\mu_0\boldsymbol{\phi} = 0$. *Тогда при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполнены оценки*

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathfrak{C}_7(s)(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3}\left(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{f}\|_{H^s(\mathbb{R}^3)}\right),$$
$$\|\mathbf{z}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{z}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathfrak{C}_8(s)(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3}\left(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{f}\|_{H^s(\mathbb{R}^3)}\right).$$

При условии 3.4 *постоянные* $\mathfrak{C}_7(s), \mathfrak{C}_8(s)$ *зависят от* $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, *от параметров решетки* Γ *и от* s. *При условии* 3.8 *эти константы зависят еще от* c°.

Замечание 4.4. *В случае, когда* $\boldsymbol{\phi} \neq 0$, *мы не можем из имеющихся результатов для оператора* $\mathcal{L}_{J,\varepsilon}$ *получить аппроксимацию полей* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *и* $\mathbf{w}_\varepsilon$, *поскольку они выражаются через производные от* $\mathbf{v}_\varepsilon$ *(см.* (4.4)*), а мы не располагаем аппроксимацией оператора* $\cos(\tau\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2})$ *в энергетической норме.*

В случае, когда $\boldsymbol{\phi} = 0$, можно получить аппроксимацию всех четырех полей, применяя результаты теоремы 3.22(1°).

Теорема 4.5. *В условиях пунктов* 4.1, 4.2 *предположим дополнительно, что* $\boldsymbol{\phi} = 0$.
1°. *Если* $\mathbf{f} \in H^3(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$, *то при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедливы следующие аппроксимации полей* $\mathbf{v}_\varepsilon$ *и* $\mathbf{z}_\varepsilon$ *в энергетической норме*:

$$\left\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_0(\cdot,\tau) - \varepsilon\mu_0^{-1}\Psi^\varepsilon \operatorname{rot}\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\right\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathfrak{C}_9(1+|\tau|)\varepsilon\|\mathbf{f}\|_{H^3(\mathbb{R}^3)}, \tag{4.13}$$

$$\left\|\mathbf{z}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{z}_0(\cdot,\tau) - \varepsilon\Psi^\varepsilon \operatorname{rot}\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\right\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathfrak{C}_{10}(1+|\tau|)\varepsilon\|\mathbf{f}\|_{H^3(\mathbb{R}^3)}. \tag{4.14}$$

$$\left\|(\eta^\varepsilon)^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - ((\eta^0)^{-1} + \Sigma^\varepsilon)\operatorname{rot}\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathfrak{C}_{11}(1+|\tau|)\varepsilon\|\mathbf{f}\|_{H^3(\mathbb{R}^3)}. \tag{4.15}$$

Если $\mathbf{f} \in H^3(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$, *то при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедливы следующие аппроксимации полей* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *и* $\mathbf{w}_\varepsilon$ *в* L_2:

$$\left\|\big(\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,0)\big) - \big(\mathbf{1} + \Sigma_\circ^\varepsilon\big)\big(\mathbf{u}_0(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_0(\cdot,0)\big)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathfrak{C}_{11}|\tau|(1+|\tau|)\varepsilon\|\mathbf{f}\|_{H^3(\mathbb{R}^3)}, \tag{4.16}$$

$$\left\|\big(\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,0)\big) - \widetilde{\eta}^\varepsilon(\eta^0)^{-1}\big(\mathbf{w}_0(\cdot,\tau) - \mathbf{w}_0(\cdot,0)\big)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathfrak{C}_{12}|\tau|(1+|\tau|)\varepsilon\|\mathbf{f}\|_{H^3(\mathbb{R}^3)}. \tag{4.17}$$

Постоянные $\mathfrak{C}_9, \mathfrak{C}_{10}, \mathfrak{C}_{11}, \mathfrak{C}_{12}$ *зависят от* $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$ *и от параметров решетки* Γ.
2°. *Пусть* $\mathbf{f} \in H^{1+s}(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$, *где* $0 \leqslant s \leqslant 2$. *Тогда при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполнены оценки*

$$\left\|\mathbf{D}\big(\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_0(\cdot,\tau) - \varepsilon\mu_0^{-1}\Psi^\varepsilon\Pi_\varepsilon \operatorname{rot}\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\big)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathfrak{C}_{13}(s)(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2}\|\mathbf{f}\|_{H^{1+s}(\mathbb{R}^3)},$$
$$\left\|\mathbf{D}\big(\mathbf{z}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{z}_0(\cdot,\tau) - \varepsilon\Psi^\varepsilon\Pi_\varepsilon \operatorname{rot}\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\big)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathfrak{C}_{14}(s)(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2}\|\mathbf{f}\|_{H^{1+s}(\mathbb{R}^3)}.$$
$$\left\|(\eta^\varepsilon)^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - ((\eta^0)^{-1} + \Sigma^\varepsilon\Pi_\varepsilon)\operatorname{rot}\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathfrak{C}_{15}(s)(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2}\|\mathbf{f}\|_{H^{1+s}(\mathbb{R}^3)}.$$

Если $\mathbf{f} \in H^{1+s}(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$, *где* $0 \leqslant s \leqslant 2$, *то при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполнены оценки*

$$\begin{aligned}\left\|\big(\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,0)\big) - \big(I + \Sigma_\circ^\varepsilon\Pi_\varepsilon\big)\big(\mathbf{u}_0(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_0(\cdot,0)\big)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \\ \leqslant \mathfrak{C}_{15}(s)|\tau|(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2}\|\mathbf{f}\|_{H^{1+s}(\mathbb{R}^3)},\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\left\|\big(\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,0)\big) - \big(I + (\widetilde{\eta}^\varepsilon(\eta^0)^{-1} - \mathbf{1})\Pi_\varepsilon\big)\big(\mathbf{w}_0(\cdot,\tau) - \mathbf{w}_0(\cdot,0)\big)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \\ \leqslant \mathfrak{C}_{16}(s)|\tau|(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2}\|\mathbf{f}\|_{H^{1+s}(\mathbb{R}^3)}.\end{aligned}$$

Постоянные $\mathfrak{C}_{13}(s), \mathfrak{C}_{14}(s), \mathfrak{C}_{15}(s), \mathfrak{C}_{16}(s)$ *зависят от* $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, *от параметров решетки* Γ *и от* s.

3°. *Если* $\mathbf{f} \in H^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$, *то при* $\tau \in \mathbb{R}$ *справедливы соотношения*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\bigl\|\mathbf{D}\bigl(\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_0(\cdot,\tau) - \varepsilon\mu_0^{-1}\Psi^\varepsilon\Pi_\varepsilon \mathrm{rot}\,\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\bigr)\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} = 0,$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\bigl\|\mathbf{D}\bigl(\mathbf{z}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{z}_0(\cdot,\tau) - \varepsilon\Psi^\varepsilon\Pi_\varepsilon \mathrm{rot}\,\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\bigr)\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} = 0,$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\bigl\|(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - ((\eta^0)^{-1} + \Sigma^\varepsilon\Pi_\varepsilon)\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} = 0,$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\bigl\|\bigl(\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,0)\bigr) - \bigl(I + \Sigma_\circ^\varepsilon\Pi_\varepsilon\bigr)\bigl(\mathbf{u}_0(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_0(\cdot,0)\bigr)\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} = 0,$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\bigl\|\bigl(\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,0)\bigr) - \bigl(I + (\widetilde{\eta}^\varepsilon(\eta^0)^{-1} - \mathbf{1})\Pi_\varepsilon\bigr)\bigl(\mathbf{w}_0(\cdot,\tau) - \mathbf{w}_0(\cdot,0)\bigr)\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Доказательство. Оценки (4.13) и (4.15) вытекают непосредственно из (3.27), (3.28) и представлений (4.5), (4.7) с учетом равенства $\boldsymbol{\psi} = -\mathrm{rot}\,\mathbf{f}$. Неравенство (4.14) следует из (4.13) и соотношений $\mathbf{z}_\varepsilon = \mu_0\mathbf{v}_\varepsilon$, $\mathbf{z}_0 = \mu_0\mathbf{v}_0$.

Далее, из (4.15) интегрированием по времени, учитывая (4.4) и (4.6), получаем (4.16). Мы воспользовались равенством $\Sigma(\mathbf{x})\eta^0 = \Sigma_\circ(\mathbf{x})$. Оценка (4.17) вытекает из (4.16) и соотношений $\mathbf{w}_\varepsilon = \eta^\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon$, $\mathbf{w}_0 = \eta^0\mathbf{u}_0$.

Аналогичным образом проверяется утверждение 2° на основе (3.29) и (3.30).

Утверждение 3° вытекает из утверждения 2° с помощью теоремы Банаха–Штейнгауза. $\square$

В [BSu2, лемма 8.6] было проверено, что слабый $(L_2 \to L_2)$-предел оператора $[Y^\varepsilon]\Pi_\varepsilon$ равен нулю, если $Y(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая матрица-функция с нулевым средним значением. Используя это свойство, из утверждения 3° теоремы 4.5 выводим следствие.

Следствие 4.6. *Если* $\boldsymbol{\phi} = 0$ *и* $\mathbf{f} \in H^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$, *то при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon \to 0$

$$\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) \to \mathbf{v}_0(\cdot,\tau) \text{ слабо в } H^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3);$$
$$\mathbf{z}_\varepsilon(\cdot,\tau) \to \mathbf{z}_0(\cdot,\tau) \text{ слабо в } H^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3);$$
$$(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) \to (\eta^0)^{-1}\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_0(\cdot,\tau) \text{ слабо в } L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3);$$
$$\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,0) \to \mathbf{u}_0(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_0(\cdot,0) \text{ слабо в } L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3);$$
$$\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,0) \to \mathbf{w}_0(\cdot,\tau) - \mathbf{w}_0(\cdot,0) \text{ слабо в } L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3).$$

Теоремы 3.25(3°) и 3.27(3°) показывают, что в общем случае оценки (4.13), (4.14) точны как по типу нормы, так и в отношении зависимости от τ. Однако, при дополнительных предположениях утверждения 1° и 2° теоремы 4.5 допускают усиление. Следующий результат выводится из теоремы 3.22(2°).

Теорема 4.7. *В условиях пунктов* 4.1, 4.2 *предположим дополнительно, что* $\boldsymbol{\phi} = 0$. *Пусть выполнено условие* 3.4 *или условие* 3.8.
1°. *Если* $\mathbf{f} \in H^{5/2}(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$, *то при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедливы следующие аппроксимации полей* $\mathbf{v}_\varepsilon$ *и* $\mathbf{z}_\varepsilon$ *в энергетической норме*:

$$\bigl\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_0(\cdot,\tau) - \varepsilon\mu_0^{-1}\Psi^\varepsilon \mathrm{rot}\,\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\bigr\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathfrak{C}_{17}(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon\|\mathbf{f}\|_{H^{5/2}(\mathbb{R}^3)},$$
$$\bigl\|\mathbf{z}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{z}_0(\cdot,\tau) - \varepsilon\Psi^\varepsilon \mathrm{rot}\,\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\bigr\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathfrak{C}_{18}(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon\|\mathbf{f}\|_{H^{5/2}(\mathbb{R}^3)}.$$
$$\bigl\|(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - ((\eta^0)^{-1} + \Sigma^\varepsilon)\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathfrak{C}_{19}(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon\|\mathbf{f}\|_{H^{5/2}(\mathbb{R}^3)}.$$

Если $\mathbf{f} \in H^{5/2}(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$, *то при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедливы следующие аппроксимации полей* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *и* $\mathbf{w}_\varepsilon$ *в* L_2:

$$\bigl\|\bigl(\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,0)\bigr) - \bigl(\mathbf{1} + \Sigma_\circ^\varepsilon\bigr)\bigl(\mathbf{u}_0(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_0(\cdot,0)\bigr)\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathfrak{C}_{19}|\tau|(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon\|\mathbf{f}\|_{H^{5/2}(\mathbb{R}^3)},$$
$$\bigl\|\bigl(\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,0)\bigr) - \widetilde{\eta}^\varepsilon(\eta^0)^{-1}\bigl(\mathbf{w}_0(\cdot,\tau) - \mathbf{w}_0(\cdot,0)\bigr)\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathfrak{C}_{20}|\tau|(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon\|\mathbf{f}\|_{H^{5/2}(\mathbb{R}^3)}.$$

При условии 3.4 *постоянные* $\mathfrak{C}_{17}, \mathfrak{C}_{18}, \mathfrak{C}_{19}, \mathfrak{C}_{20}$ *зависят от* $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$ *и от параметров решетки* Γ. *При условии* 3.8 *эти константы зависят еще от* c°.
2°. *Пусть* $\mathbf{f} \in H^{1+s}(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$, *где* $0 \leqslant s \leqslant 3/2$. *Тогда при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполнены оценки*

$$\big\|\mathbf{D}\big(\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_0(\cdot,\tau) - \varepsilon\mu_0^{-1}\Psi^\varepsilon\Pi_\varepsilon \mathrm{rot}\,\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\big)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathfrak{C}_{21}(s)(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3}\|\mathbf{f}\|_{H^{1+s}(\mathbb{R}^3)},$$

$$\big\|\mathbf{D}\big(\mathbf{z}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{z}_0(\cdot,\tau) - \varepsilon\Psi^\varepsilon\Pi_\varepsilon \mathrm{rot}\,\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\big)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathfrak{C}_{22}(s)(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3}\|\mathbf{f}\|_{H^{1+s}(\mathbb{R}^3)}.$$

$$\big\|(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - ((\eta^0)^{-1} + \Sigma^\varepsilon\Pi_\varepsilon)\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathfrak{C}_{23}(s)(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3}\|\mathbf{f}\|_{H^{1+s}(\mathbb{R}^3)}.$$

Если $\mathbf{f} \in H^{1+s}(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$, *где* $0 \leqslant s \leqslant 3/2$, *то при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполнены оценки*

$$\begin{aligned}
&\big\|\big(\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,0)\big) - \big(I + \Sigma_\circ^\varepsilon\Pi_\varepsilon\big)\big(\mathbf{u}_0(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_0(\cdot,0)\big)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \\
&\qquad\qquad \leqslant \mathfrak{C}_{23}(s)|\tau|(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3}\|\mathbf{f}\|_{H^{1+s}(\mathbb{R}^3)}, \\
&\big\|\big(\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,0)\big) - \big(I + (\widetilde{\eta}^\varepsilon(\eta^0)^{-1} - \mathbf{1})\Pi_\varepsilon\big)\big(\mathbf{w}_0(\cdot,\tau) - \mathbf{w}_0(\cdot,0)\big)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \\
&\qquad\qquad \leqslant \mathfrak{C}_{24}(s)|\tau|(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3}\|\mathbf{f}\|_{H^{1+s}(\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}$$

При условии 3.4 *постоянные* $\mathfrak{C}_{21}(s), \mathfrak{C}_{22}(s), \mathfrak{C}_{23}(s), \mathfrak{C}_{24}(s)$ *зависят от* $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, *от параметров решетки* Γ *и от* s. *При условии* 3.8 *эти константы зависят еще от* c°.

Замечание 4.8. 1°. *В оценках из теорем* 4.2, 4.3, 4.5, 4.7 *можно заменить норму* $\|\mathbf{f}\|_{H^s}$ *на* $\|\mathrm{rot}\,\mathbf{f}\|_{H^{s-1}}$, *поскольку эти теоремы выводятся из результатов для задачи* (4.3) *с начальным данным* $\boldsymbol{\psi} = -\mathrm{rot}\,\mathbf{f}$.

2°. *Контроль за зависимостью оценок от* τ *позволяет получать квалифицированные оценки при малом* ε *и большом* τ. *В условиях теоремы* 4.2(1°) *выполнено*

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2} &= O(\varepsilon^{1-\alpha}), \\
\|\mathbf{z}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{z}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2} &= O(\varepsilon^{1-\alpha}), \\
\text{при } \tau = O(\varepsilon^{-\alpha}),\ 0 &< \alpha < 1.
\end{aligned}$$

В условиях теоремы 4.2(2°) *выполнено*

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2} &= O(\varepsilon^{(1-\alpha)s/2}), \\
\|\mathbf{z}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{z}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2} &= O(\varepsilon^{(1-\alpha)s/2}), \\
\text{при } \tau = O(\varepsilon^{-\alpha}),\ 0 &< \alpha < 1.
\end{aligned}$$

В условиях теоремы 4.3(1°) *выполнено*

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2} &= O(\varepsilon^{1-\alpha/2}), \\
\|\mathbf{z}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{z}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2} &= O(\varepsilon^{1-\alpha/2}), \\
\text{при } \tau = O(\varepsilon^{-\alpha}),\ 0 &< \alpha < 2.
\end{aligned}$$

В условиях теоремы 4.3(2°) *выполнено*

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2} &= O(\varepsilon^{(2-\alpha)s/3}), \\
\|\mathbf{z}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{z}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2} &= O(\varepsilon^{(2-\alpha)s/3}), \\
\text{при } \tau = O(\varepsilon^{-\alpha}),\ 0 &< \alpha < 2.
\end{aligned}$$

В условиях теоремы 4.5(1°) *для* $\mathbf{v}_\varepsilon$, $\mathbf{z}_\varepsilon$ *выполнено*

$$\begin{aligned}
&\big\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)-\varepsilon\mu_0^{-1}\Psi^\varepsilon\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\big\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}=O(\varepsilon^{1-\alpha}),\\
&\big\|\mathbf{z}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{z}_0(\cdot,\tau)-\varepsilon\Psi^\varepsilon\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\big\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}=O(\varepsilon^{1-\alpha}),\\
&\|(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau)-((\eta^0)^{-1}+\Sigma^\varepsilon)\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}=O(\varepsilon^{1-\alpha}),\\
&\qquad \text{при } \tau=O(\varepsilon^{-\alpha}),\ 0<\alpha<1.
\end{aligned}$$

В условиях теоремы 4.5(1°) *для* $\mathbf{u}_\varepsilon$, $\mathbf{w}_\varepsilon$ *выполнено*

$$\begin{aligned}
&\big\|\big(\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,0)\big)-\big(\mathbf{1}+\Sigma_\circ^\varepsilon\big)\big(\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)-\mathbf{u}_0(\cdot,0)\big)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}=O(\varepsilon^{1-2\alpha}),\\
&\big\|\big(\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,0)\big)-\widetilde{\eta}^\varepsilon(\eta^0)^{-1}\big(\mathbf{w}_0(\cdot,\tau)-\mathbf{w}_0(\cdot,0)\big)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}=O(\varepsilon^{1-2\alpha}),\\
&\qquad \text{при } \tau=O(\varepsilon^{-\alpha}),\ 0<\alpha<1/2.
\end{aligned}$$

В условиях теоремы 4.5(2°) *для* $\mathbf{v}_\varepsilon$, $\mathbf{z}_\varepsilon$ *выполнено*

$$\begin{aligned}
&\big\|\mathbf{D}\big(\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)-\varepsilon\mu_0^{-1}\Psi^\varepsilon\Pi_\varepsilon\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\big)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}=O(\varepsilon^{(1-\alpha)s/2}),\\
&\big\|\mathbf{D}\big(\mathbf{z}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{z}_0(\cdot,\tau)-\varepsilon\Psi^\varepsilon\Pi_\varepsilon\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\big)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}=O(\varepsilon^{(1-\alpha)s/2}),\\
&\big\|(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau)-((\eta^0)^{-1}+\Sigma^\varepsilon\Pi_\varepsilon)\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}=O(\varepsilon^{(1-\alpha)s/2}),\\
&\qquad \text{при } \tau=O(\varepsilon^{-\alpha}),\ 0<\alpha<1.
\end{aligned}$$

В условиях теоремы 4.5(2°) *для* $\mathbf{u}_\varepsilon$, $\mathbf{w}_\varepsilon$ *выполнено*

$$\begin{aligned}
&\big\|\big(\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,0)\big)-\big(\mathbf{1}+\Sigma_\circ^\varepsilon\big)\big(\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)-\mathbf{u}_0(\cdot,0)\big)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}=O(\varepsilon^{(1-\alpha)s/2-\alpha}),\\
&\big\|\big(\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,0)\big)-\widetilde{\eta}^\varepsilon(\eta^0)^{-1}\big(\mathbf{w}_0(\cdot,\tau)-\mathbf{w}_0(\cdot,0)\big)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}=O(\varepsilon^{(1-\alpha)s/2-\alpha}),\\
&\qquad \text{при } \tau=O(\varepsilon^{-\alpha}),\ 0<\alpha<\frac{s}{s+2}.
\end{aligned}$$

В условиях теоремы 4.7(1°) *для* $\mathbf{v}_\varepsilon$, $\mathbf{z}_\varepsilon$ *выполнено*

$$\begin{aligned}
&\big\|\mathbf{D}\big(\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)-\varepsilon\mu_0^{-1}\Psi^\varepsilon\Pi_\varepsilon\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\big)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}=O(\varepsilon^{1-\alpha/2}),\\
&\big\|\mathbf{D}\big(\mathbf{z}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{z}_0(\cdot,\tau)-\varepsilon\Psi^\varepsilon\Pi_\varepsilon\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\big)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}=O(\varepsilon^{1-\alpha/2}),\\
&\big\|(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau)-((\eta^0)^{-1}+\Sigma^\varepsilon\Pi_\varepsilon)\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}=O(\varepsilon^{1-\alpha/2}),\\
&\qquad \text{при } \tau=O(\varepsilon^{-\alpha}),\ 0<\alpha<2.
\end{aligned}$$

В условиях теоремы 4.7(1°) *для* $\mathbf{u}_\varepsilon$, $\mathbf{w}_\varepsilon$ *выполнено*

$$\begin{aligned}
&\big\|\big(\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,0)\big)-\big(\mathbf{1}+\Sigma_\circ^\varepsilon\big)\big(\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)-\mathbf{u}_0(\cdot,0)\big)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}=O(\varepsilon^{1-3\alpha/2}),\\
&\big\|\big(\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,0)\big)-\widetilde{\eta}^\varepsilon(\eta^0)^{-1}\big(\mathbf{w}_0(\cdot,\tau)-\mathbf{w}_0(\cdot,0)\big)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}=O(\varepsilon^{1-3\alpha/2}),\\
&\qquad \text{при } \tau=O(\varepsilon^{-\alpha}),\ 0<\alpha<2/3.
\end{aligned}$$

В условиях теоремы 4.7(2°) *для* $\mathbf{v}_\varepsilon$, $\mathbf{z}_\varepsilon$ *выполнено*

$$\begin{aligned}
&\big\|\mathbf{D}\big(\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)-\varepsilon\mu_0^{-1}\Psi^\varepsilon\Pi_\varepsilon\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\big)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}=O(\varepsilon^{(2-\alpha)s/3}),\\
&\big\|\mathbf{D}\big(\mathbf{z}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{z}_0(\cdot,\tau)-\varepsilon\Psi^\varepsilon\Pi_\varepsilon\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\big)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}=O(\varepsilon^{(2-\alpha)s/3}),\\
&\big\|(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau)-((\eta^0)^{-1}+\Sigma^\varepsilon\Pi_\varepsilon)\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}=O(\varepsilon^{(2-\alpha)s/3}),\\
&\qquad \text{при } \tau=O(\varepsilon^{-\alpha}),\ 0<\alpha<2.
\end{aligned}$$

В условиях теоремы 4.5(2°) *для* $\mathbf{u}_\varepsilon$, $\mathbf{w}_\varepsilon$ *выполнено*

$$\big\|\big(\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,0)\big)-\big(\mathbf{1}+\Sigma_\circ^\varepsilon\big)\big(\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)-\mathbf{u}_0(\cdot,0)\big)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}=O(\varepsilon^{(2-\alpha)s/3-\alpha}),$$
$$\big\|\big(\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,0)\big)-\widetilde{\eta}^\varepsilon(\eta^0)^{-1}\big(\mathbf{w}_0(\cdot,\tau)-\mathbf{w}_0(\cdot,0)\big)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}=O(\varepsilon^{(2-\alpha)s/3-\alpha}),$$
$$\textit{при } \tau=O(\varepsilon^{-\alpha}),\ 0<\alpha<\frac{2s}{s+3}.$$

Список литературы

[BaPa] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.

[BeLP] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolau G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.

[BSu1] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), вып. 5, 1–108.

[BSu2] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), вып. 6, 1–104.

[BSu3] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$*, Алгебра и анализ **18** (2006), вып. 6, 1–130.

[BSu4] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение стационарной периодической системы Максвелла в случае постоянной магнитной проницаемости*, Функц. анализ и его прил. **41** (2007), вып. 2, 3–23.

[BSu5] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности при усреднении нестационарных периодических уравнений*, Алгебра и анализ **20** (2008), вып. 6, 30–107.

[D] Dorodnyi M. A., *Operator error estimates for homogenization of the nonstationary Schrödinger type equations: sharpness of the results*, Appl. Anal., to appear. Available from arXiv:2005.06516.

[DSu1] Дородный М. А., Суслина Т. А., *Усреднение гиперболических уравнений*, Функц. анализ и его прил. **50** (2016), вып. 4, 91–96.

[DSu2] Dorodnyi M. A., Suslina T. A., *Homogenization of hyperbolic equations with periodic coefficients*, J. Diff. Equ. **264** (2018), no. 12, 7463–7522.

[DSu3] Дородный М. А., Суслина Т. А., *Усреднение нестационарного модельного уравнения электродинамики*, Матем. заметки **102** (2017), вып. 5, 700–720.

[DSu4] Дородный М. А., Суслина Т. А., *Усреднение гиперболических уравнений с периодическими коэффициентами в $\mathbb{R}^d$: точность результатов*, Алгебра и анализ **32** (2020), вып. 4.

[Zh1] Жиков В. В., *Об оценках для усреднённой матрицы и усредненного тензора*, Успехи матем. наук **46** (1991), вып. 3(279), 49–109.

[Zh2] Жиков В. В., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Докл. РАН **403** (2005), вып. 3, 305–308.

[ZhKO] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1993.

[ZhPas1] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys. **12** (2005), no. 4, 515–524.

[ZhPas2] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients*, Russ. J. Math. Phys. **13** (2006), no. 2, 224–237.

[ZhPas3] Жиков В. В., Пастухова С. Е., *Операторные оценки в теории усреднения*, Успехи матем. наук **71** (2016), вып. 3, 27–122.

[K] Като Т., *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

[M1] Мешкова Ю. М., *Об усреднении периодических гиперболических систем*, Матем. заметки **105** (2019), вып. 6, 937–942.

[M2] Meshkova Yu. M., *On operator error estimates for homogenization of hyperbolic systems with periodic coefficients*, J. Spectr. Theory (to appear). Available from arXiv:1705.02531v4.

[Su1] Суслина Т. А., *Об усреднении периодических параболических систем*, Функц. анализ и его прил. **38** (2004), вып. 4, 86–90.

[Su2] Суслина Т. А., *Усреднение стационарной периодической системы Максвелла*, Алгебра и анализ **16** (2004), вып. 5, 162–244.

[Su3] Суслина Т. А., *Усреднение уравнений типа Шрёдингера*, Функц. анализ и его прил. **50** (2016), вып. 3, 90–96.

[Su4] Suslina T. A., *Spectral approach to homogenization of nonstationary Schrödinger-type equations*, J. Math. Anal. Appl. **446** (2017), no. 2, 1466–1523.

[Su5] Суслина Т. А., *Усреднение стационарной периодической системы Максвелла в ограниченной области в случае постоянной магнитной проницаемости*, Алгебра и анализ **30** (2018), вып. 3, 169–209.