ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПРЕПРИНТ ПОМИ 03/2020

Пучки гомотопий спектра $MGL_\bullet$ и кобордизм-фрейм-соответствия

А.Е. Цыбышев

Международный математический институт им. Л. Эйлера, наб. р. Фонтанки 27, Санкт-Петербург, 191023;
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А.Стеклова Российской академии наук, 191023, наб. р. Фонтанки 27, Санкт-Петербург, Россия

emperortsy@gmail.com

Аннотация

В статье А. Цыбышева "Кобордизм-фрейм-соответствия и K-теория Милнора"для поля k характеристики 0 и целого неотрицательного m определен комплекс $C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}^{cob}(pt, \mathbb{G}_m{}^{\wedge m})$, и построен изоморфизм $H^0\big(C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}^{cob}(pt, \mathbb{G}_m{}^{\wedge m})\big) \to K_M^m(k)$. В настоящей работе доказывается, что приведенная группа когомологий комплекса в действительности вычисляет значение стабильного мотивного пучка гомотопий на точке $\pi_{m,m}(MGL_\bullet)(pt)$ спектра $MGL_\bullet$. Тем самым, продолжается параллель с вычислением А.Нешитова в его статье "Фрейм-соответствия и K-теория Милнора-Витта которое, в действительности, вычисляет стабильные мотивные гомотопические группы $\pi_{m,m}(\Sigma^\infty S^0)(pt)$.

Ключевые слова— Спектр алгебраических кобордизмов, фрейм-соответствия, пучки гомотопий, многообразия Грассмана

Работа выполнена при поддержке гранта в форме субсидии по СОГЛАШЕНИЮ о предоставлении гранта в форме субсидий из федерального бюджета на осуществление государственной поддержки создания и развития научных центров мирового уровня, включая международные математические центры и научные центры мирового уровня, выполняющие исследования и разработки по приоритетам научно- технологического развития от «8» ноября 2019 г. № 075-15-2019-1620

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В.А.Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
Of the St.Petersburg Department
of Steklov Institute of Mathematics

1 Основные обозначения, определения объектов и их свойства

Зафиксируем базовое поле k характеристики 0.

Цель настоящей работы — привести доказательство следующей Теоремы, основанное на вычислении, приведенном в [cob-Fr].

Теорема 1.1. *(Теорема 2.4)* $\pi_{n,n}(MGL^{sym}_{\bullet})(pt) = K^M_n(k)$ *— K-группа Милнора.*

T обозначает пунктированный пучок Нисневича $\mathbb{A}^1/G_m$ на k-гладких схемах Sm/k.

Грассманиан $Gr_{n,N}$, определен как схема, представляющая функтор ($X \mapsto$ {Множество классов изоморфизма всевозможных эпиморфизмов $\mathcal{O}_X^N \twoheadrightarrow \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ — локально свобоный $\mathcal{O}_X$модуль ранга n}).

$\tau_{n,N}$ — тавтологическое расслоение над $Gr_{n,N}$.

Замечание 1.2. *Имеется естественная по X биекция $Hom(X, \tau_{n,N}) =$ {Множество пар из эпиморфизма и сечения $\big(\mathcal{O}_X^N N \twoheadrightarrow \mathcal{E}, s \in \mathcal{E}(X)\big)$, где $\mathcal{E}$ — некоторый локально свободный $\mathcal{O}_X$-модуль ранга n}.*

Для k-гладкой схемы X и пучка Нисневича Y $\mathcal{F}r^{cob}_{n,N}(X,Y)$ — множества, определенные в [cob-Fr, Определение 2.6] как $Fr^{cob}_{n,N}(X,Y)$. $\mathcal{F}r^{cob}(X,Y)$ определены там же в [cob-Fr, Определение 2.9] как $Fr^{cob}(X,Y)$. В случае, когда $Y = spc(Y') = Hom(-,Y')$ — представленный пучок, используются обозначения $Fr^{cob}_{n,N}(X,Y')$ и $Fr^{cob}(X,Y')$.

Начнем с определений основных объектов.

Следующее определение могло быть, но не было дано в [cob-Fr]

Определение 1.3. *(Аналогично [GP, Определение 5.2])*

кобордизм-фрейм-мотив *$\mathcal{M}^{cob}_{fr}(\mathcal{G})$ пунктированного пучка Нисневича $\mathcal{G}$ — это S^1-спектр Сегала*

$$(C_*\mathcal{F}r^{cob}(-,\mathcal{G}), C_*\mathcal{F}r^{cob}(-,\mathcal{G}\wedge S^1),_* \mathcal{F}r^{cob}(-,\mathcal{G}\wedge S^2),\dots),$$

получаемый из Γ-пространства $K \mapsto C_{\mathcal{F}}r^c ob(-,\mathcal{G}_+ \wedge K)$ при помощи процедуры, описанной в [Seg, Определение 1.3 и рассуждения сразу после] как $A \mapsto$ $\mathbf{B}A$.

В случае, если $\mathcal{G} = spc(Y) = Hom(-,Y)$ — пучок, представленный Y, $\mathcal{M}^{cob}_{fr}(\mathcal{G})$ обозначается также как $M^{cob}_{fr}(Y)$.

Лемма 1.4. *(Аналог части [GNP, Теорема 1.2])*

Для любого целого $m \geq 0$, для любого $U \in Sm/k$ имеем

$$\pi_*(\mathbb{Z}M_{fr}^{cob}(X \wedge T^{\wedge m})(U)) = H_*(\mathbb{Z}\mathrm{F}^{cob}(\Delta^\bullet \times U, X_+ \wedge T^m)) = H_*(C_*\mathbb{Z}\,\mathrm{F}^{cob}(U, X_+ \wedge T^m)).$$

Доказательство. Получается дословным переносом [GP, Приложение B] на случай кобордизм-фрейм-соответствий. □

Определение 1.5. ***Обыкновенный спектр кобордизмов*** $E = MGL_\bullet$ *— T-спектр из пунктированных пучков Нисневича, задаваемый следующими данными:*

$E_n = MGL_n$ — копредел пространств Тома $Th(\tau_{n,N})$ при $N \to \infty$. Пространство Тома $Th(\tau_{n,N})$ — фактор-пучок Нисневича $\tau_{n,N}/\tau_{n,N} - 0$ по дополнению к нулевому сечению. Морфизмы стабилизации по N, относительно которых берется копредел, получаются факторизацией из морфизмов схем $\tau_{n,N} \to \tau_{n,N+1}$, заданных на представленных функторах сопоставлениями

$$\big(\mathcal{O}^N \twoheadrightarrow \mathcal{E}, s \in \mathcal{E}(X)\big) \to \big(\mathcal{O}^{N+1} = \mathcal{O}^N \oplus \mathcal{O} \xrightarrow{pr_1} \mathcal{O}^N \twoheadrightarrow \mathcal{E}, s \in \mathcal{E}(X)).$$

Морфизмы стабилизации по n $MGL_n \wedge T \to MGL_{n+1}$ получаются факторизацией из морфизмов схем, заданных на представленных функторах сопоставлениями

$$\big(\mathcal{O}_X^N \twoheadrightarrow \mathcal{E}, s \in \mathcal{E}(X), t \in \mathcal{O}_X(X)\big) \mapsto \big(\mathcal{O}_X^{1+N} = \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X^N \twoheadrightarrow \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{E}, (t,s) \in (\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{E})(X)\big).$$

Данная форма задает морфизмы стабилизации на конечных членах копредела. Из-за того, что координаты наращиваются с разных сторон, данное отображение стабилизации согласовано с отображением стабилизации по N, и задает морфизм на предельных членах.

Замечание 1.6. *Несложно проверить, благодаря тому, что копредел является направленным, что для Нетеровой схемы X, $MGL_n(X) = colim_{N \to \infty} Th(\tau_{n,N})(X)$. (Нетривиальна только сюръективность стрелки справа-налево, а она следует из возможности выбора конечного подпокрытия).*

Определение 1.7. ***Симметрический спектр кобордизмов*** $E^{sym} = MGL_\bullet^{sym}$ *— симметрический T-спектр из пунктированных пучков Нисневича, задаваемый следующими данными:*

$E_n = MGL_n^{sym}$ — копредел пространств Тома $Th(\tau_{n,n\times N})$ при $N \to \infty$. Пространство Тома $Th(\tau_{n,N})$ — фактор-пучок Нисневича $\tau_{n,n\times N}/\tau_{n,N\times n} - 0$ по дополнению к нулевому сечению. Морфизмы стабилизации по N, относительно которых берется копредел, получаются факторизацией из морфизмов схем $\tau_{n,N\times n} \to \tau_{n,(N+1)\times n}$, заданных на представленных функторах сопоставлениями

$$\left(\mathcal{O}^{N\times n} \twoheadrightarrow \mathcal{E}, s \in \mathcal{E}(X)\right) \to \left(\mathcal{O}^{(N+1)\times n} = (\mathcal{O}^N \oplus \mathcal{O})^{\oplus n} \xrightarrow{pr_1^{\oplus n}} (\mathcal{O}^N)^{\oplus n} = \mathcal{O}^{N\times n} \twoheadrightarrow \mathcal{E}, s \in \mathcal{E}(X)\right).$$

Знаки равенства в данной формуле означают канонические изоморфизмы.

Действие симметрической группы на MGL_n^{sym} задается перестановкой слагаемых в $\mathcal{O}^{N\times n} = (\mathcal{O}^N)^{\oplus n}$.

Морфизмы стабилизации по n $MGL_n \wedge T \to MGL_{n+1}$ получаются факторизацией из морфизмов схем, заданных на представленных функторах сопоставлениями

$$\left(p : \mathcal{O}_X^{N\times n} \twoheadrightarrow \mathcal{E}, s \in \mathcal{E}(X), t \in \mathcal{O}_X(X)\right) \mapsto \left(\mathcal{O}_X^{(N+1)\times n} = \mathcal{O}_X^N \oplus \mathcal{O}_X^{N\times n} \xrightarrow{pr_1 \oplus p} \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{E}, (t,s) \in (\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{E})(X)\right)$$

Замечание 1.8. *Спектры $MGL.$ и $MGL_\bullet^{sym}$ являются спектрами Тома с константой ограничения 1 в смысле [GN, Определение 2.8]*

Лемма 1.9. *Симметрический спектр $MGL_\cdot^{sym}$ является спектром со стягиваемым действием знакопеременной группы, в смысле [GN, Определение 2.7]*

Доказательство. Пусть σ — четная перестановка на n элементах. Тогда соответствующий ей линейный оператор на $\mathcal{O}^n$ $\mathbb{A}^1$-гомотопен тождественному. Пусть $h \in GL_n(k[t])$ — некая такая гомотопия. Тогда гомотопия

$$\mathcal{O}_{X\times\mathbb{A}^1}^{N\times n} = \mathcal{O}_{X\times\mathbb{A}^1}^{n\times N} = (\mathcal{O}_{X\times\mathbb{A}^1}^n)^N \xrightarrow{h^N} (\mathcal{O}_{X\times\mathbb{A}^1}^n)^N = \mathcal{O}_{X\times\mathbb{A}^1}^{n\times N} = \mathcal{O}_{X\times\mathbb{A}^1}^{N\times n}$$

задает гомотопию между тождественным морфизмом на $\tau_{n,N\times n}(X)$ и морфизмом, индуцированным перестановкой σ. Поскольку нулевое сечение при этой гомотопии переходит в себя, она также задает гомотопию на пространстве Тома. Благодаря определению гомотопии в виде прямой суммы по N, она согласована с морфизмами стабилизации по N в определении MGL_n^{sym}, а значит, это семейство гомотопий задает гомотопию на предельном члене MGL_n^{sym}. □

Следуя [GN], введем для спектра E понятие E-фрейм-соответствий:

Определение 1.10. *(см. [GN, Определение 7.1] Для* $X \in Sm/k$ *и* T*-спектра* E*, обозначим*

$$Fr_n^E(X) := \underline{Hom}(\mathbb{P}^{\wedge n}, X_+ \wedge E_n).$$

$$Fr^E(X) := \operatorname{colim}_{n\to\infty} Fr_n^E(X).$$

Лемма 1.11. *Для* k*-гладких* X*,*Y*,* $Fr^{MGL_\bullet}(X,Y)$ *естественно изоморфно* $Fr^{cob}(X,Y)$*, где последнее понимается в смысле [cob-Fr, Определение 2.9]*

Доказательство. Прямая проверка по определениям. □

Следствие 1.12. *Для* k*-гладкой* X*, и симплициальной* k*-гладкой* Y_**,* $C_*Fr^{MGL_\bullet}(X,Y_*)$ *естественно изоморфно* $C_*Fr^{cob}(X,Y_*)$*,*

Доказательство. Получается из предыдущей леммы переносом добавлением C_* и переходом к диагонали. □

2 Построение изоморфизма

Лемма 2.1. *Существует естественная по* X *и* S *биекция между* $Fr^{MGL_\bullet}(X)(S)$ *и* $Fr^{MGL_\bullet^{sym}}(X)(S)$.

Доказательство. Эти множества параметризуются следующими геометрическими данными:

$Fr^{MGL_\bullet}(X)(S)$ — данными вида

- Замкнутое подмножество $Z \subset \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$, конечное над S
- Этальная окрестность W множества Z в $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$
- Счетномерный локально свободный пучок $\mathcal{O}_W$-модулей $\mathcal{F}$
- Сечение s пучка $\mathcal{F}$ на W, нулями которого является Z
- сюръекция пучков $p : \mathcal{O}_W^{\mathbb{N}} \oplus \mathcal{O}_W^{\mathbb{N}} \to \mathcal{F}$

При этом данные должны "приходить с конечного уровня то есть иметь следующий специальный вид для некоторых n, N (Здесь $\mathbb{A}^{>n}$ — подпространство, соответствующее координатам с номерами больше n):

- $Z \subset \mathbb{A}^n \subset \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$
- $W = W_0 \times \mathbb{A}^{>n}$, где W_0 — окрестность Z в $\mathbb{A}^n$
- $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{O}_W^{\mathbb{A}^{>n}}$, где $\mathcal{F}_0$ — локально свободный ранга n
- $s = (s_0, pr_2 \circ can) \in \Gamma(W, \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{O}_W^{\mathbb{A}^{>n}})$. Здесь $pr_2 \circ can : W \to \mathbb{A}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{A}^{>n}$.
- На втором слагаемом $p|_{0 \oplus \mathcal{O}_W^{\mathbb{N}_{>n}}}$ осуществляет тождественный изоморфизм со вторым слагаемым в разложении $\mathcal{F}$
- На первом слагаемом $p|_{\mathcal{O}_W^{\mathbb{N}_{>N}} \oplus 0} = 0$

Эти данные понимаются с точностью до изоморфизма и замены W на меньшую окрестность.

Замечание 2.2. *Заметим, что позволяя увеличивать N, последнее условие можно заменить на*

- *На первом слагаемом $p|_{\mathcal{O}_W^{\mathbb{N}} \oplus 0}$ ноль почти на всех координатных векторах.*

$Fr^{MGL_\bullet^{sym}}(X)(S)$ — данными вида

- Замкнутое подмножество $Z \subset \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$, конечное над S
- Этальная окрестность W множества Z в $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$
- Счетномерный локально свободный пучок $\mathcal{O}_W$-модулей $\mathcal{F}$
- Сечение s пучка $\mathcal{F}$ на W, нулями которого является Z
- сюръекция пучков $p : \mathcal{O}_W^{\mathbb{N}} \oplus \mathcal{O}_W^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \to \mathcal{F}$

При этом данные должны "приходить с конечного уровня то есть иметь следующий специальный вид для некоторого n (Здесь $\mathbb{A}^{>n}$ — подпространтво, соответствующее координатам с номерами больше n, аналогично $\mathbb{N}_{>n} = \{k \in \mathbb{N} | k > n\}$):

- $Z \subset \mathbb{A}^n \subset \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$
- $W = W_0 \times \mathbb{A}^{>n}$, где W_0 — окрестность Z в $\mathbb{A}^n$
- $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{O}_W^{\mathbb{A}^{>n}}$, где $\mathcal{F}_0$ — локально свободный ранга n
- $s = (s_0, pr_2 \circ can) \in \Gamma(W, \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{O}_W^{\mathbb{A}^{>n}})$. Здесь $pr_2 \circ can : W \to \mathbb{A}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{A}^{>n}$.

- На втором слагаемом $p|_{0\oplus\mathcal{O}_W^{\mathbb{N}_{>n}}}$ осуществляет тождественный изоморфизм со вторым слагаемым в разложении $\mathcal{F}$

- На первом слагаемом $p|_{(\mathcal{O}_W^{\mathbb{N}_{>n}\times\mathbb{N}}+\mathcal{O}_W^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}_{>N}})\oplus 0} = 0$

Эти данные понимаются с точностью до изоморфизма и замены W на меньшую окрестность.

Замечание 2.3. *Заметим, что позволяя увеличивать n и N, последнее условие можно заменить на*

- *На первом слагаемом $p|_{\mathcal{O}_W^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\oplus 0}$ ноль почти на всех координатных векторах.*

Легко видеть, что с учетом замечаний, эти геометрические описания превращаются друг в друга при помощи любой биекции $\mathbb{N} \simeq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ (Но одной и той же для всех X и S). □

Пользуясь приведенными построениями, можно доказать следующее.

Теорема 2.4. *$\pi_{n,n}(MGL_\bullet^{sym})(pt) = K_n^M(k)$ — K-группа Милнора.*

Доказательство. Поскольку спектр $MGL_\bullet^{sym}$ является симметрическим T-спектром Тома с константой ограничения 1 и со стягиваемым действием знакопеременной группы (См. Замечание 1.8 и Лемма 1.9), к нему применима [GN, Теорема 9.13(1)].

Следовательно, группы $\pi_{n,n}(MGL_\bullet^{sym})(pt)$ можно получить как $\pi_0(M_{MGL_\bullet^{sym}}(\mathbb{G}_m^{\wedge n})_f)(pt)$. Поскольку значения вычислены на точке, локальная фибрантная замена не меняет значений симплициальных пучков. Тем самым, необходимо вычислить

$$\pi_0(M_{MGL_\bullet^{sym}}(\mathbb{G}_m^{\wedge n}))(pt).$$

Из Леммы 2.1 следует, что это естественно изоморфно

$$\pi_0(M_{MGL_\bullet}(\mathbb{G}_m^{\wedge n}))(pt).$$

Из Следствия 1.12, это естественно изоморфно

$$\pi_0(M_{fr}^{cob}(pt, \mathbb{G}_m^n))$$

Далее, поскольку этот спектр (-1)-связен, то его нулевые гомотопические группы совпадают с нулевыми группами гомологий

$$H_0(M_{fr}^{cob}(pt, \mathbb{G}_m^n))$$

.

Из [Sch, Определение II.6.24, конец стр. 280], это изоморфно

$$\pi_0(\mathbb{Z}M_{fr}^{cob}(pt, \mathbb{G}_m^{\wedge n}))$$

По Лемме 1.4,

$$H_0(C_*\mathbb{Z}F^{cob}(pt, \mathbb{G}_m^{\wedge n}))$$

Но в [cob-Fr, Теорема 2.19] построен изоморфизм этих групп с K-группами Милнора $K_n^M(k)$.

Тем самым, построена цепочка изоморфизмов, соединяющая $\pi_{n,n}(MGL_\bullet)(pt)$ с $K_n^M(k)$. $\square$

Список литературы

[GN] Garkusha, Neshitov "Fibrant resolutions for motivic Thom spectra"arXiv:1804.07621 [math.AG].

[GP] Garkusha, Panin "Framed motives of algebraic varieties (after V. Voevodsky)"J. Amer. Math. Soc., to appear. DOI: 10.1090/jams/958 arXiv:1409.4372 [math.KT]

[GNP] Garkusha, Neshitov, Panin "Framed motives of relative motivic spheres"arXiv:1604.02732 [math.KT]

[Seg] G. Segal, "Categories and cohomology theories Topology 13 (1974), 293-312.

[Sch] S. Schwede, An untitled book project about symmetric spectra, available at www.math.uni- bonn.de/people/schwede/SymSpec-v3.pdf (version April 2012).

[cob-Fr] A. Цыбышев, "Кобордизм-фрейм-соответствия и K-теория Милнора Алгебра и анализ, 32:1 (2020), 244–264

[Nes] *A. Neshitov*,2016, FRAMED CORRESPONDENCES AND THE MILNOR–WITT K -THEORY. Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu, 1-30. doi:10.1017/S1474748016000190