

ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

**В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов,
Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин**

**Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук**

**Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16
октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых
коммуникаций**

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны: (812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

<http://www.pdmi.ras.ru/preprint/>

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ЛЕРНЕЙСКИЕ УЗЛЫ И ВЛОЖЕННЫЕ ПЕРЕСТРОЙКИ

Ю. С. Белоусов¹, М. В. Карев², А. В. Малютин^{2,3},
А. Ю. Миллер^{4,5}, Е. А. Фоминых^{2,4}

¹Национальный исследовательский
университет «Высшая школа экономики»,
ул. Усачева, д. 6, 119048, Москва, Россия

²Санкт-Петербургское отделение
математического института им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27, 191023, Санкт-Петербург, Россия

³Санкт-Петербургский государственный университет,
Математико-механический факультет,
Университетский пр., д. 28, 198504,
Старый Петергоф, Санкт-Петербург, Россия

⁴Санкт-Петербургский государственный университет,
Факультет математики и компьютерных наук,
14-я линия Васильевского острова, д. 29,
199178, Санкт-Петербург, Россия

⁵Международный математический
институт им. Леонарда Эйлера,
Песочная набережная, д. 10,
197022, Санкт-Петербург, Россия

bus99@yandex.ru, max.karev@gmail.com, malyutin@pdmi.ras.ru,
miller.m2@mail.ru, efominykh@gmail.com

АННОТАЦИЯ

Развивается направление теории узлов, связанное с гипотезой об аддитивности числа перекрестков узла при связном суммировании. Доказываются ряд утверждений, являющихся ослаблениями этой гипотезы. Значительная часть этих утверждений формулируется в терминах графа вложенных перестроек узлов и зацеплений.

Ключевые слова: узел, зацепление, тэнгл, ленточная перестройка, гиперболический, метрика, число перекрестков, адекватный, полуадекватный, многочлен Кауфмана.

Работа поддержана грантом No. 18-1-6-32-2 Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС». Четвертый автор благодарит за поддержку Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение No. 075-15-2019-1620.

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St. Petersburg Department
of Steklov Institute of Mathematics

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В. М. Бабич, Н. А. Вавилов, А. М. Вершик, М. А. Всемиров,
А. И. Генералов, И. А. Ибрагимов, Л. Ю. Колотилина,
Б. Б. Лурье, Ю. В. Матиясевич, Н. Ю. Нецветаев,
С. И. Репин, Г. А. Серегин

1 Введение и формулировка результатов работы

Настоящая работа относится к классической теории узлов и развивает одно из направлений, берущих начало в следующей хорошо известной гипотезе об аддитивности числа перекрестков узла при связном суммировании.

Гипотеза 1. *Если узел K является связной суммой узлов K_1 и K_2 , то число перекрестков $\text{cr}(K)$ равно сумме $\text{cr}(K_1) + \text{cr}(K_2)$.*

Эта гипотеза остается открытой уже более ста лет; известен ряд ее существенных ослаблений, также остающихся открытыми. Разнообразные родственные гипотезы, вариации и ослабления гипотезы 1 образуют обширную сеть со сложной структурой импликаций. В настоящей работе мы изучаем один из участков этой сети.

Сформулируем цепочку гипотез и определений, ведущих к интересующему нас участку. Одним из наиболее естественных ослаблений гипотезы 1 является следующая

Гипотеза 2. *Число перекрестков составного узла не меньше числа перекрестков каждого из его слагаемых.*

Гипотеза 2 интерпретируется как гипотеза о зависимости между двумя естественными частичными порядками на множестве узлов (зацеплений): „быть слагаемым“ и „иметь меньшее число перекрестков“.

Определение (химеры и кохимеры). Если узел K является слагаемым в составном узле N с $\text{cr}(N) < \text{cr}(K)$, мы называем узел K *химерой*, а узел N — *кохимерой, сопутствующей* узлу K . Зацепление, содержащее сопутствующую узлу K кохимеру в качестве компоненты, также будем называть *кохимерой, сопутствующей* узлу K .

Гипотеза 2 (очевидно) эквивалентна следующей гипотезе.

Гипотеза 2'. *Множества химер и кохимер пусты.*

Один из вариантов дальнейших ослаблений гипотезы 2 дает следующая концепция λ -регулярных узлов.

Определение (λ -регулярные узлы). Пусть λ — (положительное) вещественное число. Узел K называется λ -регулярным, если для всякого узла N , содержащего K в качестве слагаемого, выполняется неравенство

$$\text{cr}(N) \geq \lambda \cdot \text{cr}(K).$$

В такой терминологии химеры — это в точности узлы, не являющиеся 1-регулярными. Поэтому гипотезу 2 можно переформулировать как гипотезу о том, что все узлы 1-регулярны. Понятие λ -регулярности дает континуальную цепочку „вложенных“ (т. е. все более и более слабых) гипотез о λ -регулярности всех узлов для все меньших и меньших λ . В силу определенных соображений отдельный интерес представляет следующая гипотеза.

Гипотеза 3. Все узлы $\frac{2}{3}$ -регулярны.

Насколько известно авторам, к настоящему моменту для всей совокупности узлов доказана лишь $\frac{1}{152}$ -регулярность (прямо следует из результатов работы [52]).

К интересующему нас участку сети ослаблений гипотезы 1 мы относим, в частности, гипотезы о λ -регулярности узлов тех или иных классов. К настоящему моменту 1-регулярность доказана для альтернированных, торических и некоторых других специфических классов узлов (подробнее см. [61] и приведенную там литературу, включая [29, 23]). Кроме того, из развитой в работах [12, 58, 75, 76, 47, 74] техники и доказанных там свойств многочлена Кауфмана выводится 1-регулярность так называемых *адекватных* и $\frac{1}{2}$ -регулярность *полуадекватных* узлов.¹ Однако, насколько нам известно, в явном виде в литературе такой вывод не описан. В настоящей работе мы восполняем этот пробел и приводим соответствующие доказательства.

Теорема 1. Каждый адекватный узел 1-регулярен.

Теорема 2. Каждый полуадекватный узел $\frac{1}{2}$ -регулярен.

Лернейские узлы

Перейдем к рассмотрению следующего центрального объекта настоящей работы — лернейским узлам и их подвидам (образующим некоторый подкласс в классе химер).² Далее мы будем опираться на стандартное понятие *разрешения перекрестка* в диаграмме узла или зацепления, определяемое как локальное преобразование вида $\times \rightarrow \smile$ (или $\times \rightarrow \frown$).

Определение (упрощения узла). Узел или зацепление L назовем *упрощением* узла K , если L получается из K разрешением перекрестка в минимальной диаграмме узла K .

Определение (лернейские узлы). Нетривиальный узел K называется *лернейским*, если хотя бы одно из его упрощений содержит K в качестве слагаемого.

Определение (вполне лернейские узлы). Нетривиальный узел K называется *вполне лернейским*, если каждое из его упрощений содержит K в качестве слагаемого.

¹Адекватные и полуадекватные узлы вводятся в работах [58, 76] как обобщения альтернированных; эти классы сравнительно широки; см. определения в §2.

²Выбор термина „лернейские“ обусловлен тем, что лернейский узел в определенном смысле „усложняется“ при попытке „упростить“ его путем разрешения (разрубания) перекрестка диаграммы; ср. со свойствами Лернейской гидры в древнегреческой мифологии (см., напр., „Геракл“ Эврипида): „Стоило Гераклу срубить одну голову [Лернейской гидры], как на ее месте сразу же выросло еще две или три“.

Вообще говоря, в рамках древнегреческой мифологии Лернейская гидра и Химера — сестры, но в нашем случае это не вносит путаницы.

Лернейские и вполне лернейские узлы были введены в работе [61] при анализе гипотезы о превалировании гиперболических узлов.³ В [61] доказывается, в частности, что предположение о превалировании гиперболических узлов влечет непустоту множества вполне лернейских узлов. Условие, определяющее вполне лернейские узлы, представляется настолько абсурдным, что доказательство гипотезы о пустоте их множества рассматривалось в качестве наиболее перспективного пути к опровержению вышеупомянутой гипотезы о превалировании гиперболических узлов. В ходе дальнейших исследований лернейских узлов и их вариаций гипотезу о превалировании гиперболических узлов, действительно, удалось опровергнуть (см. [9]), однако вопрос о существовании вполне лернейских и лернейских узлов остается к настоящему моменту открытым. Продолжая развивать эту линию рассуждений, в настоящей работе мы вводим класс новолернейских узлов.

Определение (квазиупрощения зацеплений). Зацепление M назовем *квазиупрощением* зацепления L , если M получается из L разрешением перекрестка в некоторой (не обязательно минимальной) диаграмме зацепления L .⁴

Определение (новолернейские узлы). Нетривиальный узел K будем называть *новолернейским*, если каждое его квазиупрощение L обладает хотя бы одним из следующих свойств (т.е. L не проще, чем K , хотя бы в одном из следующих смыслов):

- (i) $\text{cr}(L) \geq \text{cr}(K)$,
- (ii) L содержит K в качестве слагаемого.

Класс новолернейских узлов входит в множество вполне лернейских, продолжая цепочку

ХИМЕРЫ \supseteq ЛЕРНЕЙСКИЕ \supseteq ВПОЛНЕ
ЛЕРНЕЙСКИЕ \supseteq НОВОЛЕРНЕЙСКИЕ.

Эти включения очевидны. Действительно: химеры — это в точности те узлы, у которых имеются сопутствующие им кохимеры, лернейские — это те узлы, у которых сопутствующие кохимеры имеются среди упрощений, вполне лернейские — те, у которых все упрощения являются сопутствующими кохимерами, новолернейские — те, у которых сопутствующими кохимерами являются все зацепления в некотором классе, включающем все упрощения.

³Эта гипотеза утверждает, что доля гиперболических узлов среди простых узлов с n и менее перекрестками стремится к единице при росте n .

⁴Нетрудно заметить, что бинарное отношение „ A является квазиупрощением B “ симметрично и рефлексивно.

Отметим, что класс новолернейских узлов уже не связан с гипотезой о превалировании гиперболических узлов, — этот класс представляет интерес как производящий впечатление еще более абсурдного, чем класс химер и класс лернейских узлов, гипотетическая пустота которого, тем не менее, не вытекает напрямую из известных (по крайней мере, из проверенных авторами) соображений и конструкций. Продолжить описанную последовательность вложенных подклассов химер можно, например, рассматривая дальнейшие усиления требований на размер множества сопутствующих кохимер — путем обобщения преобразования „разрешение перекрестка“ — и/или переходя от однократного преобразования к многократному. По мотивам последней из упомянутых возможностей введем следующее понятие.

Определение (уровни новолернейских узлов). Пусть K — узел, d — натуральное число. Узел или зацепление L назовем d -кратным квазиупрощением узла K , если L получается из K разрешением d перекрестков в некоторой (не обязательно минимальной) диаграмме узла K .⁵ Будем говорить, что новолернейский узел K имеет уровень d , если каждое из его d -кратных квазиупрощений L обладает хотя бы одним из (приведенных в определении новолернейских узлов) свойств (i) и (ii), а среди $(d + 1)$ -кратных квазиупрощений узла K найдется зацепление, ни одним из этих свойств не обладающее.

Поскольку тривиальный узел является, очевидно, $(\text{cr}(K) - 2)$ -кратным квазиупрощением узла K , уровень произвольного новолернейского узла K не превышает числа $\text{cr}(K) - 2$.

Связь между уровнями новолернейских узлов и их λ -регулярностью иллюстрируется следующей теоремой.

Теорема 3. 1. В классе 1-регулярных узлов нет новолернейских узлов.

2. В классе $\frac{2}{3}$ -регулярных узлов нет новолернейских узлов уровня 3 и выше.

3. В классе $\frac{1}{2}$ -регулярных узлов нет новолернейских узлов уровня 6 и выше.

Следствие 1. В классе полуадекватных узлов нет новолернейских узлов уровня 6 и выше.

Первое утверждение теоремы 3 является переформулировкой обсуждавшихся выше наблюдений о том, что все новолернейские узлы являются лернейскими, а все лернейские узлы являются химерами. Доказательство второго и третьего утверждений теоремы 3 опирается на новую комбинаторно-геометрическую технику и в настоящей работе не приводится. Мы предполагаем, что развитие этой техники позволит экстраполировать утвержде-

⁵Добавление к диаграмме петли (преобразование Райдемайстера первого типа) показывает, что каждое d -кратное квазиупрощение узла K является и его $(d + 1)$ -кратным квазиупрощением.

ния теоремы 3 на случаи λ -регулярных узлов с $\lambda < 1/2$ и вывести из вышеупомянутого факта о $\frac{1}{152}$ -регулярности произвольного узла доказательство следующей гипотезы.

Гипотеза 4. *Множество новолернейских узлов уровня 1000 и выше пусто.*

Приведем определение еще одного подвида лернейских узлов. Вопрос о пустоте этого подвида послужил одной из отправных точек для настоящего исследования.

Определение (ультралернейские узлы). Назовем нетривиальный узел K *ультралернейским*, если каждое его квазиупрощение содержит K в качестве слагаемого.

Доказательство утверждения о пустоте множества ультралернейских узлов мы расцениваем как центральный результат настоящей работы.

Теорема 4. *Множество ультралернейских узлов пусто.*

Теорема 4 прямо следует из приведенных ниже теорем 5–10, каждая из которых дает специфическое уточнение теоремы 4.

Теорема 5. *Если узел K нетривиален, то в некоторой его диаграмме найдется перекресток, одно из разрешений которого дает диаграмму двухкомпонентного зацепления, не содержащего K в качестве слагаемого, а второе разрешение — диаграмму узла, не совпадающего с K и не содержащего K в качестве слагаемого.*

Вложенные перестройки

Новолернейские и ультралернейские узлы удобно обсуждать в терминах *вложенных перестроек* (называемых также *ленточными перестройками*) узлов и зацеплений. Это понятие определяется следующим образом.

Определение (вложенные перестройки зацеплений). Пусть L — зацепление в \mathbb{R}^3 , I — отрезок $[0, 1]$, а $b: I \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ — вложение, такое что

$$b(I \times I) \cap L = b(I \times \partial I).$$

Говорят, что зацепление

$$M = (L \setminus b(I \times \partial I)) \cup b(\partial I \times I)$$

является результатом *вложенной* (или *ленточной*) *перестройки* зацепления L вдоль *ленты* $b(I \times I)$. (См. рис. 1.)

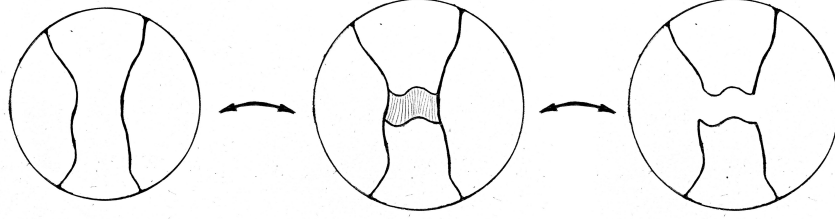


Рис. 1

Определение (граф и метрика вложенных перестроек). *Графом вложенных перестроек узлов и зацеплений* называется простой граф, вершины которого суть рассматриваемые с точностью до объемлемой изотопии ручные неориентированные зацепления в \mathbb{R}^3 , и две вершины соединены ребром, если и только если отвечающие им зацепления связаны вложенной перестройкой. Отвечающую этому графу метрику на множестве зацеплений, расстояние в которой определяется как длина кратчайшего пути между вершинами графа, называют *метрикой вложенных перестроек*.

Для целого неотрицательного r и зацепления L через $B_r(L)$ будем обозначать шар радиуса r с центром в L , т.е. множество тех зацеплений, которые получаются из L цепочкой из не более чем r вложенных перестроек. Сферу $B_r(L) \setminus B_{r-1}(L)$ обозначим через $S_r(L)$.

В качестве основополагающих работ, положивших начало систематическому изучению вложенных перестроек узлов и зацеплений, мы рассматриваем, в первую очередь, [56] и [32] (в [32] вложенная перестройка рассматривается как частный случай $H(n)$ -преобразования при $n = 2$). Различные свойства вложенных перестроек и сопутствующие конструкции интенсивно изучаются в последнее десятилетие. Так, в работах [40, 42, 43, 45] изучается связь вложенных перестроек с полиномиальными инвариантами, в [13, 39, 41, 46, 77] изучается метрика вложенных перестроек, в [1, 2, 6, 7, 44, 62] — инвариант расстояния (в метрике вложенных перестроек) до тривиального узла, в [59, 63] — связь вложенных перестроек с линзовыми пространствами, вложенные перестройки расслоенных узлов изучаются в [14], косметические перестройки — в [33], графы и комплексы, ассоциированные с вложенными перестройками — в [35, 79, 80], а приложения в биологии — в [34] и [64].

Как видно из определений, зацепление Y получается из зацепления X разрешением перекрестка некоторой диаграммы зацепления X тогда и только тогда, когда Y получается из X посредством вложенной перестройки. Это позволяет взглянуть на введенные выше классы узлов с точки зрения перестроек:

- множество d -кратных квазиупрощений произвольного узла K совпадает с шаром $B_d(K)$,

- нетривиальный узел K является новолернейским если и только если среди смежных с K вершин (т. е. в сфере $S_1(K)$) не найдется зацепления с меньшим числом перекрестков и не содержащего K в качестве слагаемого,
- нетривиальный узел K является ультралернейским если и только если каждое зацепление из сферы $S_1(K)$ содержит K в качестве слагаемого.

Таким образом, задачи о ново- и ультралернейских узлах сводятся к изучению окрестностей вершин в графе вложенных перестроек. Сложность описания объектов подобного класса хорошо известна (см., например, результат [67, 68, 78] о простоте узлов с единичным числом развязывания — в аналогичных терминах его можно интерпретировать как теорему об отсутствии составных узлов в единичной окрестности тривиального узла в графе переклещений перекрестков⁶).

Нижеследующие теоремы 6–10 описывают свойства сфер $S_1(K)$. Формулировки теорем используют стандартные понятия теории узлов и зацеплений, определения которых при необходимости несложно найти в литературе (см., например, [66, 3, 57, 15]). Кроме того, определения наименее известных из задействованных понятий даны перед формулировками.

Замечание 1. Несложно заметить, что для любого узла K сфера $S_1(K)$ содержит связные суммы узла K с каждым узлом и с каждым зацеплением, входящим в сферу $S_1(U)$ тривиального узла U . При этом ясно, что сфера $S_1(U)$ содержит все двухниточные обмотки⁷ произвольных узлов. Поскольку мы отталкиваемся от задачи о ново- и ультралернейских узлах, далее мы концентрируем внимание на тех элементах из $S_1(K)$, которые не содержат узел K в качестве слагаемого.

Определение (неориентируемый род узла). *Неориентируемым родом* тривиального узла K в \mathbb{R}^3 называется наименьший род по всем вложенным компактным связным неориентируемым поверхностям $F \subset \mathbb{R}^3$ с краем $\partial F = K$ (иначе говоря, это наименьшее число лент Мебиуса, из которых можно склеить такую поверхность). Неориентируемый род тривиального узла по определению полагается равным нулю.

Теорема 6. *Если узел K нетривиален, то множество $S_1(K)$ содержит:*

- (1a) *узел меньшего, чем у K , неориентируемого рода;*
- (1b) *узел с не бóльшим, чем у K , числом мостов;*

⁶В этом графе вершины, отвечающие зацеплениям L и M , соединены ребром, если и только если у L найдется диаграмма с перекрестком, замена в котором прохода на переход дает диаграмму зацепления M .

⁷Двухниточными обмотками называют двухкомпонентные зацепления рода 0 и узлы неориентируемого рода 1, т. е. нетривиальные узлы, каждый из которых ограничивает вложенную в \mathbb{R}^3 ленту Мебиуса; см. также определения (p, q) -обмоток и неориентируемого рода ниже.

- (1c) узел с не бóльшим, чем у K , дуговым индексом;
- (1d) узел с не бóльшим, чем у K , индексом косы;
- (2a) двухкомпонентное зацепление меньшего, чем у K , рода;
- (2b) двухкомпонентное зацепление с не бóльшим, чем у K , числом мостов;
- (2c) двухкомпонентное зацепление с не бóльшим, чем у K , дуговым индексом;
- (2d) двухкомпонентное зацепление с не бóльшим, чем у K , индексом косы.

Ни один из этих (возможно, совпадающих) узлов и ни одно из этих (возможно, совпадающих) зацеплений не содержит K в качестве слагаемого.

Из пункта (1b) теоремы 6 в силу известных свойств числа мостов [70, 71] вытекает следующее усиление теоремы 4.

Следствие 2. Если узел K нетривиален, то множество $S_1(K)$ содержит узел, не являющийся сателлитом узла K .

Теорема 7. Пусть K , K_1 и K_2 — узлы, а k — неотрицательное целое число. Тогда множество $S_1(K)$ содержит двухкомпонентное зацепление L , компоненты которого суть узлы K_1 и K_2 , а коэффициент зацепления между ними равен k . (Если ни один из узлов K_1 и K_2 не совпадает с K и не содержит K в качестве слагаемого, то и L не содержит K в качестве слагаемого.)

Определение (обмотки узлов). Нетривиальный узел Z называют *обмоткой* узла K , если Z объемлемо изотопен узлу на крае трубчатой окрестности узла K , но не объемлемо изотопен узлу K .

Определение (наклоны кривых). На краевом торе ∂V любого вложенного в \mathbb{R}^3 полнотория V имеется два выделенных изотопических класса простых нестягиваемых (на ∂V) замкнутых кривых — класс меридианов и класс параллелей. Фиксируем какие-нибудь меридиан m и параллель ℓ и ориентируем их произвольным образом. Тогда любой простой нестягиваемой (на ∂V) замкнутой ориентированной кривой γ на ∂V можно сопоставить так называемый *наклон* — элемент p/q множества $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, где целые p и q таковы, что для гомологических классов $[\gamma]$, $[m]$ и $[\ell]$ кривой γ , меридиана m и параллели ℓ , соответственно, выполнено равенство

$$[\gamma] = p[\ell] + q[m].$$

Заметим, что ориентация кривой на ее наклон не влияет, а при замене ориентации на параллели или меридиане наклон меняет знак, сохраняя абсолютное значение. Это означает, что абсолютное значение наклона определено и для неориентированных кривых на ∂V .

Определение ((p, q) -обмотки). Обмотки узла K с абсолютным значением наклона p/q , где p и q — взаимно простые положительные целые числа, будем называть (p, q) -обмотками узла K .⁸ (p, q) -Обмотки нетривиальных узлов иногда называют p -ниточными обмотками.

Теорема 8. Для произвольного узла K множество $S_1(K)$ содержит все те обмотки узла K , у которых абсолютное значение наклона лежит в множестве $\left\{ \frac{3+2i}{|2+(3+2i)j|} \mid i, j \in \mathbb{Z}; i \geq 0 \right\}$. В частности, $S_1(K)$ содержит все узлы, являющиеся трехниточными обмотками узла K .

Определение (брунновы зацепления). Нетривиальное неоднocomпонентное зацепление называется *брунновым*, если все его собственные подзацепления тривиальны.

Теорема 9. Если узел K нетривиален, то множество $S_1(K)$ содержит:

- (1) простой узел P , являющийся трехниточной обмоткой узла K , с

$$\text{cr}(P) \leq 9 \text{cr}(K) + 2;$$

- (2) брунново (u , следовательно, простое) двухкомпонентное зацепление L с

$$\text{cr}(L) \leq 4\sqrt[4]{6}^{\text{cr}(K)} + 2.$$

Введем следующее обозначение. Для зацепления L будем обозначать через $C_1(L)$ количество узлов (с учетом кратности) в разложении зацепления L на простые составляющие.

Теорема 10. Если узел K прост, то множество $S_1(K)$ содержит простое двухкомпонентное зацепление L с $\text{cr}(L) \leq \text{cr}(K) + 1$. Более общо, если узел K нетривиален, то множество $S_1(K)$ содержит нерасщепимое двухкомпонентное зацепление L с $\text{cr}(L) \leq \text{cr}(K) + 1$ и $C_1(L) < C_1(K)$.

Замечание 2. Теоремы 5–10 в определенном смысле очерчивают контуры возможных границ класса лернейских узлов, доказывая пустоту обширного набора их подвидов. При этом совокупность указанных теорем не дает пустоты класса новолернейских узлов, но каждая из этих теорем (более того, каждый из их пунктов) является усилением или уточнением теоремы 4 о пустоте класса ультралернейских узлов, поскольку гарантирует для нетривиального узла K наличие в множестве $S_1(K)$ узлов или зацеплений с различными специфическими свойствами, указывающими на то, что эти узлы и зацепления не содержат K в качестве слагаемого. Теоремы 9 и 10 уточняют теорему 4 в разрезе числа перекрестков, показывая, насколько близко в подмножестве тех зацеплений из $S_1(K)$, которые не содержат узел K в качестве слагаемого, мы можем подойти к условию $\text{cr}(L) < \text{cr}(K)$ из определения новолернейских узлов. Так, утверждение теоремы 10 означает, что

⁸ (p, q) -Обмотка тривиального узла, т.е. торический узел типа (p, q) , является и (q, p) -обмоткой тривиального узла.

среди квазиупрощений узла K имеется двухкомпонентное зацепление с не более чем $\text{st}(K) + 1$ перекрестками, для которого K не является слагаемым, а для доказательства пустоты множества новолернейских узлов достаточно доказать, что среди квазиупрощений произвольного нетривиального узла K имеется зацепление с не более чем $\text{st}(K) - 1$ перекрестком, для которого K не является слагаемым.

Замечание 3. В теорему 6 включены только инварианты (род и неориентируемый род, число мостов, дуговой индекс и индекс косы), различающие тривиальный узел и имеющие контролируемое поведение по отношению к связному суммированию. В результате, каждый из пунктов теоремы 6 влечет теорему 4.

Замечание 4. Теорема 8 допускает обобщение, показывающее, что множество $S_1(K)$ содержит богатое семейство сателлитов узла K , не обязательно являющихся его обмотками. Такие сателлиты получаются при перестройках вдоль лент, располагающихся в трубчатой окрестности узла.

Замечание 5. Развитие идеи из доказательства теоремы 8 позволяет обобщить эту теорему до теоремы, описывающей примеры обмоток узла K , содержащихся в шарах $B_r(K)$ при $r > 1$.

Замечание 6. Препятствием к расширению теоремы 10 со случая двухкомпонентных зацеплений на случай узлов служит теоретическая возможность совпадения узлов, конструируемых представленным в доказательстве теоремы 10 методом, с исходным узлом.

Замечание 7. Узлы и зацепления из $S_1(K)$, возникающие в теоремах 5–10 и не содержащие K в качестве слагаемого, либо заведомо являются сателлитами узла K (теорема 8), либо их статус по отношению к классификации Терстона не ясен. Это подводит к следующей задаче.

Задача 1. Показать, что у каждого нетривиального узла K в $S_1(K)$ имеются гиперболические узлы.

Дополнительные следствия о графе вложенных перестроек

Из теорем 6–10 и их доказательств вытекает ряд следствий о свойствах подмножеств в графе вложенных перестроек, уже в меньшей степени относящихся к (ново)лернейским узлам и гипотезе об аддитивности, но представляющих определенный самостоятельный интерес. Приведем два таких следствия. Для их формулировки нам потребуется несколько определений.

Определение (связные подмножества). Подмножество в множестве узлов и зацеплений назовем *связным* (по отношению к вложенным перестройкам), если отвечающий этому подмножеству индуцированный подграф⁹ в графе вложенных перестроек связан.

⁹Подграф Γ' графа Γ называется *индуцированным*, если Γ' образован некоторым подмножеством вершин графа Γ и всеми теми ребрами графа Γ , которые соединяют вершины из этого подмножества.

Теорема 11. Следующие множества связаны по отношению к вложенным перестройкам:

- (1) множество всех узлов,
- (2) множество нетривиальных узлов,
- (3) любое коконечное подмножество в множестве всех узлов,
- (4) множество составных узлов,
- (5) множество альтернированных узлов,
- (6) множество торических узлов (включая тривиальный узел),
- (7) множество итерированных торических узлов (включая тривиальный узел),
- (8) множество всех узлов, содержащих произвольный заданный узел в качестве слагаемого (включая заданный узел).

Определение (слабо монотонные функции). Вещественнозначную функцию f на множестве узлов (соотв., зацеплений) назовем *слабо монотонной* (по отношению к вложенным перестройкам), если для каждого $C \in \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}(-\infty, C]$ в множестве всех узлов (соотв., зацеплений) связан.

Разрешая перекрестки в минимальных диаграммах, мы видим, что число перекрестков слабо монотонно и на множестве узлов, и на множестве всех зацеплений. Вместе с тем, верификация монотонности такого инварианта, как количество компонент узла (зацепления) при разложении на простые слагаемые, представляется сложной задачей.

Гипотеза 5. Множества простых и гиперболических узлов связаны (по отношению к вложенным перестройкам).

В параллели с теоремой 6 мы доказываем следующую теорему.

Теорема 12. 1. Неориентируемый род слабо монотонен на множестве узлов.

2. Число мостов и дуговой индекс слабо монотонны и на множестве узлов, и на множестве зацеплений.

3. Индекс косы и род слабо монотонны на множестве зацеплений.

Структура работы

В §2 приводятся сведения об адекватных и полумонотонных узлах, вводится понятие виртуальной высоты зацепления и доказываются теоремы 1 и 2.

В §3 доказываются теоремы 5, 6 и 12.

В §4 доказывается теорема 7.

В §5 доказываются теоремы 8 и 11.

В §6 изучаются меандрические и полумеандрические диаграммы узлов и доказываются теорема 9.

В §7 вводится и изучается понятие декомпозиционно существенных перекрестков в диаграммах узлов и доказываются теорема 10.

Благодарности

Авторы благодарны С. С. Подкорытову за полезные замечания.

2 $(\frac{1}{2})$ -Регулярность (полу)адекватных узлов: доказательство теорем 1 и 2

(Полу)адекватные зацепления

В диаграммах зацеплений разрешения перекрестков видов $\times \rightarrow \rangle$ и $\times \rightarrow \asymp$ называют *A-* и *B-разрешениями* соответственно. Диаграмма D зацепления L называется *A-адекватной*, если диаграмма, полученная из D посредством A-разрешения всех ее перекрестков, состоит из большего количества окружностей, чем каждая из диаграмм, полученных из D посредством B-разрешения какого-то одного из ее перекрестков и A-разрешения остальных перекрестков. Поменяв в этом определении символы „A“ и „B“ местами, получаем определение *B-адекватной* диаграммы. Диаграмма, являющаяся одновременно и A-адекватной, и B-адекватной, называется *адекватной*. Зацепление называется *адекватным*, если у него имеется адекватная диаграмма и — *полуадекватным*, если у него имеются A-адекватные или B-адекватные диаграммы.

Концепция адекватных диаграмм и зацеплений была введена в [58]. Эти диаграммы и зацепления включают и обобщают альтернированные. В частности, адекватные диаграммы минимальны (см. [76]). Свойства (полу)адекватных зацеплений изучались, в частности, в работах [5, 26, 27, 36, 37, 38, 48, 53, 54, 55, 65, 72, 73, 74]. Класс полуадекватных зацеплений сравнительно широк и включает, среди прочего, все положительные и отрицательные зацепления и замыкания Александра всех положительных и отрицательных кос (очевидно) и всех кос индекса 3 (см. [73]), полуальтернированные и монтесиносовские зацепления (см. [58, 73, 74]), все узлы с числом перекрестков¹⁰ не выше 10 (см. [74, Inadequate examples], ср. [76, стр. 290]), а также плоские обмотки всех указанных классов (см. [58]); подробнее см., например, раздел „Which links are semi-adequate?“ в [26] и приведенную там литературу.

¹⁰Все узлы с числом перекрестков не выше 7 являются альтернированными.

Многочлен Кауфмана

Теоремы 1 и 2 (о регулярности адекватных и $\frac{1}{2}$ -регулярности полуадекватных узлов) выводятся из известных свойств *многочлена Кауфмана* и упрощающего его *многочлена Брандта–Ликориша–Миллета–Хо*, доказанных в работах [12, 58, 75, 76, 47, 74]. Многочлен Кауфмана $F_L(a, z)$ — это многочлен Лорана от двух переменных, инвариант объемлемых изотопий ориентированных зацеплений (в случае узлов ориентация роли не играет). Обычно этот многочлен определяется через многочлен $\Lambda_D(a, z)$ — инвариант *регулярных изотопий* неориентированных диаграмм (также лежащий в $\mathbb{Z}[a^\pm, z^\pm]$). Инвариант $\Lambda_D(a, z)$ однозначно задается следующим набором свойств (подробнее см. [47, Definition 2.2]):

- Многочлен $\Lambda_D(a, z)$ инвариантен по отношению к регулярным изотопиям диаграммы D , т. е. по отношению к преобразованиям Райдемайстера второго и третьего типов;
- Для каждой четверки диаграмм, совпадающих вне небольших участков, вид которых изображен значками в скобках, выполняется следующее тождество¹¹:

$$\Lambda[\times] + \Lambda[\times] = z\Lambda[\cap] + z\Lambda[\cup];$$

- Для пар диаграмм выполняются следующие тождества:

$$\Lambda[\infty] = a\Lambda[\cap],$$

$$\Lambda[\infty] = a^{-1}\Lambda[\cap];$$

- Многочлен $\Lambda_D(a, z)$ равен 1 на диаграмме $D = \bigcirc$.

Многочлен Кауфмана $F_L(a, z)$ зацепления L , представленного ориентированной диаграммой D , определяется как

$$F_L(a, z) := a^{-w(D)} \Lambda_D(a, z),$$

где $w(D)$ — *число закрученности (writhe)* диаграммы D .

Определение закрученности и некоторые другие детали приведенных определений нам не понадобятся, поскольку мы выводим теоремы 1 и 2 непосредственно из доказанных в работах [47, 12, 75, 76, 74] свойств многочленов.

Виртуальная высота зацеплений

Вывод теорем 1 и 2 из свойств многочлена Кауфмана удобно структурировать, введя новый вспомогательный инвариант (один из многих возможных инвариантов, возникающих как характеристики конфигураций ненулевых коэффициентов многочлена на решетке индексов $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$).

¹¹В следующих формулах через $\Lambda[x]$ обозначен многочлен $\Lambda_D(a, z)$ диаграммы D с участком x .

Определение (виртуальная высота). Для нетривиального многочлена Лорана $P = \sum_{r,s \in \mathbb{Z}} u_{rs} a^r z^s$ определим *виртуальную максимальную z -степень* \hbar_z как

$$\hbar_z(P) := \frac{\max\{r + s \mid u_{rs} \neq 0\} + \max\{-r + s \mid u_{rs} \neq 0\}}{2}.$$

Виртуальной высотой (ориентированного) зацепления L будем называть виртуальную максимальную z -степень его многочлена Кауфмана $F_L(a, z)$. Поскольку многочлен Кауфмана любого зацепления нетривиален¹², виртуальная высота корректно определена для любого (ориентированного) зацепления L . Как следует из определяющей формулы, при умножении многочлена на a его виртуальная максимальная z -степень не изменяется. Таким образом, виртуальная высота зацепления инвариантна по отношению к замене ориентации компонент. *Виртуальной высотой* неориентированного зацепления будем называть виртуальную высоту отвечающих ему ориентированных зацеплений.

Замечание 8. Заметим (хотя это и не имеет значения для нижеследующего доказательства), что виртуальная высота любого зацепления является целым числом. Это видно, например, из [75, Proposition 3, assertion (ii)], где утверждается, что в многочлене $\Lambda_D(a, z) = \sum_{r,s \in \mathbb{Z}} u_{rs} a^r z^s$ диаграммы D с n перекрестками коэффициент u_{rs} не равен нулю лишь в случае, когда сумма $n + r + s$ четна.

Замечание 9. Виртуальная высота не изменяется и при переходе к зеркальному образу зацепления, поскольку многочлен Кауфмана $F_{L'}(a, z)$ зеркального образа L' (ориентированного) зацепления L совпадает с многочленом $F_L(a^{-1}, z)$.

Теперь перейдем к доказательству свойств виртуальной высоты, из которых выводятся теоремы 1 и 2.

Предложение 1. (1) *Виртуальная высота произвольного зацепления неотрицательна.*

(2) *Виртуальная высота аддитивна по отношению к связному суммированию.*

(3) *Виртуальная высота зацепления L не превосходит $\text{cr}(L)$.*

(4) *Виртуальная высота адекватного зацепления L равна $\text{cr}(L)$.*

(5) *Виртуальная высота полудекватного зацепления L составляет по меньшей мере $\frac{1}{2} \text{cr}(L)$.*

Доказательство. (1) Как известно (см., например, [47, р. 421]), многочлен $F_L(1, z)$ совпадает с многочленом Брандта–Ликориша–Миллетта–Хо $Q_L(z)$. При этом для произвольного зацепления L многочлен

¹²В этом нетрудно убедиться, заметив, что в силу приведенных выше определяющих соотношений для любого зацепления L выполняется равенство $F_L(1, 1) = 1$.

$Q_L(z) - 1$ делится на $2(z - 1)$ (см. [12, Property 2]), так что коэффициент при z^0 у $Q_L(z)$ нечетен (см. [12, Corollary (ii)]). Значит, при некотором $r \in \mathbb{Z}$ коэффициент при $a^r z^0$ у многочлена $F_L(a, z)$ не равен нулю, что в силу определения виртуальной высоты влечет требуемое.

- (2) Многочлен Кауфмана мультипликативен по отношению к связному суммированию (см., например, лемму 2.8 в [47]) и, как отмечено выше, у любого зацепления нетривиален. Отсюда, поскольку кольца целочисленных полиномов Лорана являются областями целостности, следует, что корректно определен и также мультипликативен по отношению к связному суммированию и *северо-восточный край* многочлена Кауфмана, определяемый для зацепления с многочленом Кауфмана $\sum_{r,s \in \mathbb{Z}} u_{rs} a^r z^s$ как многочлен

$$\sum_{\{(r', s') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid r' + s' = \max\{r + s \mid u_{rs} \neq 0\}\}} u_{r's'} a^{r'} z^{s'}.$$

Это означает, в частности, что корректно определен и аддитивен по отношению к связному суммированию целозначный инвариант ориентированных зацеплений, определяемый по многочлену Кауфмана $F_L(a, z) = \sum_{r,s \in \mathbb{Z}} u_{rs} a^r z^s$ формулой $\max\{r + s \mid u_{rs} \neq 0\}$. В силу аналогичного соображения, корректно определен и аддитивен по отношению к связному суммированию и инвариант, определяемый формулой $\max\{-r + s \mid u_{rs} \neq 0\}$. Отсюда вытекает и искомая аддитивность виртуальной высоты, определяемой как полусумма указанных аддитивных инвариантов.

- (3) Для произвольной диаграммы D с n перекрестками произвольного зацепления L многочлен $\Lambda_D(a, z) = u_{rs} a^r z^s$ обладает следующим свойством (см. [75], теорема 4):

$$|r| + s \leq n \text{ для всех } r \text{ и } s \text{ с } u_{rs} \neq 0.$$

Отсюда следует требуемое, поскольку $F_L(a, z) = a^{-w(D)} \Lambda_D(a, z)$.

- (4) Если диаграмма D с n перекрестками A -адекватна и $\Lambda_D(a, z) = u_{rs} a^r z^s$, то найдутся такие r и s , что $u_{rs} \neq 0$ и $r + s = n$, а если диаграмма D B -адекватна, то найдутся такие r и s , что $u_{rs} \neq 0$ и $-r + s = n$ (см. [76]). Отсюда, поскольку $F_L(a, z) = a^{-w(D)} \Lambda_D(a, z)$, вытекает требуемое.
- (5) Если представляющая зацепление L диаграмма D с n перекрестками полуадекватна, то для многочлена Кауфмана $F_L(a, z) = u_{rs} a^r z^s$ найдутся такие $r, s \in \mathbb{Z}$, что $u_{rs} \neq 0$ и $s \geq n/2$ (следствие [74, Proposition 3.1]). Из неравенства $n \geq \text{cr}(L)$ вытекает требуемое. \square

Доказательство теорем 1 и 2. Пусть зацепление L виртуальной высоты $\hbar(L)$ содержит узел K виртуальной высоты $\hbar(K)$ в качестве связного слагаемого. Тогда, если K адекватен, то в силу предложения 1 получаем (над

знаками неравенств указаны порядковые номера подтверждающих утверждений предложения 1)

$$\text{cr}(L) \stackrel{(3)}{\geq} h(L) \stackrel{(1),(2)}{\geq} h(K) \stackrel{(4)}{=} \text{cr}(K),$$

а если K — полуадекватен, то

$$\text{cr}(L) \stackrel{(3)}{\geq} h(L) \stackrel{(1),(2)}{\geq} h(K) \stackrel{(5)}{\geq} \frac{1}{2} \text{cr}(K).$$

Это доказывает теоремы 1 и 2. \square

3 Доказательство теорем 5, 6 и 12

Доказательство теоремы 5 и пп. (1b) и (2b) теоремы 6.

Пусть K — нетривиальный узел, $b(K)$ — его число мостов, а $\text{cb}(K)$ — минимум числа перекрестков по представляющим узел K диаграммам с $b(K)$ мостами.¹³ Пусть D — представляющая узел K диаграмма с $b(K)$ мостами и $\text{cb}(K)$ перекрестками. Выберем в диаграмме D перекресток x , в котором завершается проходом мост B . Из предположений о минимальности вытекает, что в диаграмме D мосты не образуют петель, так что мост, проходящий над перекрестком x , не совпадает с мостом B . Следовательно, и у узла K' , и у двухкомпонентного зацепления L , полученных из диаграммы D разрешением в перекрестке x , число мостов не превышает $b(K)$. При этом условие о минимуме ($\text{cb}(K)$) перекрестков в диаграмме D гарантирует, что $K' \neq K$. Таким образом, и узел K' , и зацепление L лежат в множестве $S_1(K)$, что доказывает пункты (1b) и (2b) теоремы 6. Поскольку число мостов при связном суммировании узла с зацеплением, не являющимся тривиальным узлом, увеличивается ([70, 71]), отсюда следует и теорема 5. \square

Замечание 10. Аналогичным образом теорема 5 выводится и из конструкции приведенного ниже доказательства для пунктов (1c) и (2c) теоремы 6.

Доказательство п. (1a) теоремы 6. Пусть K — произвольный нетривиальный узел в \mathbb{R}^3 , а k — его неориентируемый род. (Поскольку узел K нетривиален, $k \geq 1$.) По определению неориентируемого рода узла, в \mathbb{R}^3 найдется вложенная компактная связная неориентируемая поверхность F рода k с краем $\partial F = K$. Как известно, для каждого натурального k связная компактная неориентируемая поверхность рода k с непустым связным краем единственна с точностью до гомеоморфизма и получается приклеиванием k дезориентирующих лент к краю диска. Представим поверхность F

¹³Напомним, что *мостом* на диаграмме зацепления называется такая ее дуга, которая проходит хотя бы через один перекресток, в каждом встречающемся перекрестке проходит сверху и не может быть продолжена до большей дуги с этими свойствами. Кроме того, мостами считаются простые замкнутые кривые без перекрестков.

в таком виде (диск и ленты) и рассмотрим вложенную перестройку узла K по одной из этих лент. Получающийся в результате узел K' является краем вложенной поверхности, являющейся объединением диска с $k - 1$ дезориентирующей лентой, так что его неориентируемый род не превышает $k - 1$. Остается заметить, что узел K' лежит в множестве $S_1(K)$. \square

Доказательство п. (2а) теоремы 6. Пусть K — произвольный нетривиальный узел в \mathbb{R}^3 , а g — его род. Согласно определению рода узла, в \mathbb{R}^3 найдется вложенная связная компактная ориентируемая поверхность F рода g с краем $\partial F = K$. Поскольку узел K нетривиален, род g положителен, так что поверхность F содержит ленту, перестройка по которой не разбивает поверхность F и переводит узел K в двухкомпонентное зацепление L , ограничивающее поверхность рода $g - 1$. Таким образом, зацепление L лежит в множестве $S_1(K)$, а его род не превышает $g - 1$. \square

Доказательство пп. (1с) и (2с) теоремы 6. Будем говорить, что дуги на двух страницах книжного представления узла или зацепления *скрещиваются*, если концевые точки этих дуг перемежаются, т. е. расположены на переплете (оси представления) в порядке $1 - 2 - 1 - 2$, а не $1 - 1 - 2 - 2$ или $1 - 2 - 2 - 1$. Возьмем для заданного нетривиального узла K книжное представление \mathcal{B} с наименьшим числом скрещивающихся пар дуг среди представлений узла K с наименьшим числом страниц.¹⁴ Заметим, что книжное представление без скрещивающихся дуг имеется лишь у тривиального узла (поскольку все дуги такого представления объемлемой изотопией переводятся в одну полуплоскость) и что в случае, когда дуги на двух смежных страницах представления не скрещиваются, их можно „поменять местами“ (переведя объемлемой изотопией одну из этих дуг на страницу второй дуги, а вторую — на страницу первой, и не перемещая остальную часть узла). Отсюда следует, что в представлении \mathcal{B} имеются скрещивающиеся дуги и что мы можем, не умаляя общности, полагать, что некоторая пара скрещивающихся дуг (скажем, дуги A и B) располагается на смежных страницах. Представив себе „совмещение“ этих смежных страниц и разрешение образующегося при этом у дуг A и B перекрестка, мы убеждаемся, что имеется пара вложенных перестроек, каждая из которых переводит дуги A и B в две нескрещивающиеся дуги (скажем, C и D) с той же четверкой концевых точек, что у дуг A и B , и расположенные на тех же двух страницах, так что получившееся книжное представление у одной из этих двух перестроек отвечает некоторому узлу K' , а у второй — двухкомпонентному зацеплению L . Дуговой индекс у узла K' , и у зацепления L не превышает дугового индекса исходного узла K , причем $K' \neq K$, поскольку число скрещивающихся пар дуг в получившемся книжном представлении для узла K' как минимум на единицу меньше, чем число скрещивающихся пар дуг в представлении \mathcal{B} . (Действительно: всякая дуга, скрещивающаяся с каждой

¹⁴ Минимальность числа скрещивающихся пар нужна для пункта (1с), в случае с двухкомпонентными зацеплениями — пункт (2с) — число скрещивающихся пар можно не принимать во внимание.

из дуг C и D , должна скрещиваться и с каждой из дуг A и B , а всякая дуга, скрещивающаяся только с одной из дуг C и D , скрещивается и с одной из дуг A и B .) Это рассуждение завершает доказательство. \square

Доказательство п. (1d) теоремы 6. Для произвольного $n \geq 2$ обозначим через ex гомоморфизм из группы кос B_n в \mathbb{Z} , определенный условием $\text{ex}(\sigma_1) = 1$, где σ_1 — стандартная Артиновская образующая (см., например, [3, 18], [60, §1.3]). Число $\text{ex}(\beta)$ называют *экспоненциальной суммой* или *алгебраическим числом перекрестков* косы β (см. [24]).

Заметим, что для всякого $n \geq 2$ и для всякой косы $\beta \in B_n$ вложенная перестройка переводит зацепление, являющееся замыканием Александера [4] косы β , в зацепление, являющееся замыканием Александера косы $\beta\sigma_1^4$. Это видно из рис. 2.

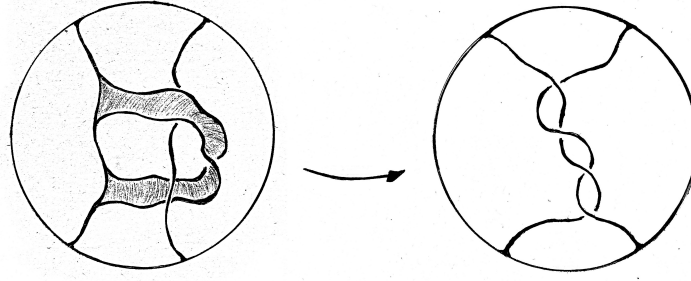


Рис. 2

Для заданного нетривиального узла K выберем косу β наименьшего индекса среди кос, замыкание Александера которых дает узел K . Тогда узел K' , представленный косой $\beta\sigma_1^4$, не совпадает с узлом K , так как в силу доказанной в [24] гипотезы Джонса значение экспоненциальной суммы косы минимального индекса, представляющей узел, является инвариантом (рассматриваемого с точностью до объемлемой изотопии, но не с точностью до отражения) неориентированного узла (см. [24]). Таким образом, узел K' лежит в множестве $S_1(K)$ и имеет не больший, чем у узла K , индекс косы. \square

Доказательство п. (2d) теоремы 6. Для проверки достаточно соответствующим образом разрешить любой перекресток в проекции любой косы минимального индекса, представляющей заданный узел. \square

Доказательство завершающего утверждения теоремы 6. Неориентируемый род узла при связном суммировании с любым узлом и род узла при связном суммировании с любым зацеплением — не уменьшаются, а число мостов, дуговой индекс и индекс косы при связном суммировании с зацеплением, не являющимся тривиальным узлом, —

увеличиваются. Перечисленные свойства доказываются, например, в работах [16, 57, 70, 71, 17, 11]. Утверждение следует. \square

Доказательство п. (1) теоремы 12. Утверждение прямо следует из пункта (1a) теоремы 6, в силу которого в графе вложенных перестроек узел неориентируемого рода k соединен с тривиальным узлом путем длины, не большей k , проходящим только через узлы, неориентируемый род которых не превосходит k . \square

Доказательство п. (2) теоремы 12. Рассмотрим на множестве зацеплений следующий *вторичный* инвариант sb : наименьшее количество перекрестков среди всех диаграмм с наименьшим числом мостов, представляющих данное зацепление. Рассуждение из доказательства пунктов (1b) и (2b) теоремы 6 показывает, что в графе вложенных перестроек любое нетривиальное зацепление L смежно либо с зацеплением с меньшим числом мостов, либо с зацеплением с тем же числом мостов, но с меньшим значением инварианта sb . Отсюда по индукции вытекает, что существует путь, ведущий от зацепления L к тривиальному зацеплению и проходящий только через зацепления с не бóльшим, чем у L , числом мостов. Переводя перестройками тривиальное зацепление в тривиальный узел, мы получаем, что в графе вложенных перестроек для произвольного зацепления M с числом мостов b найдется путь, ведущий от зацепления M к тривиальному узлу и проходящий только через зацепления, число мостов у которых не превосходит b . Это показывает, что число мостов слабо монотонно на множестве зацеплений.

Рассматривая в вышеуказанной конструкции для диаграмм узлов то из двух разрешений перекрестка (в котором начинается мост), которое дает узел, а не двухкомпонентное зацепление, мы видим, что число мостов слабо монотонно и на множестве узлов.

Доказательство для дугового индекса аналогично приведенному доказательству для числа мостов; в качестве вторичного инварианта здесь рассматривается наименьшее число скрещивающихся пар дуг в книжных представлениях с наименьшее числом страниц (определение скрещивающихся дуг дано в доказательстве пунктов (1c) и (2c) теоремы 6). \square

Доказательство п. (3) теоремы 12. Пусть L — зацепление, не являющееся тривиальным узлом, а b — индекс косы этого зацепления. Тогда найдется представляющая зацепление L плоская диаграмма β , имеющая вид замкнутой косы с b нитями. Разрешая один за другим все перекрестки в диаграмме β так, чтобы получающиеся диаграммы сохраняли вид замкнутой косы, мы получаем путь в графе вложенных перестроек, ведущий от зацепления L к тривиальному b -компонентному зацеплению и проходящий только через зацепления, индекс косы которых не превышает b . Завершение доказательства для индекса косы повторяет рассуждение из приведенного выше доказательства для числа мостов.

Пусть L — зацепление (в \mathbb{R}^3) рода g , не являющееся тривиальным узлом. Согласно определению рода, в \mathbb{R}^3 найдется вложенная (связная компактная ориентируемая) поверхность F рода g с краем $\partial F = L$. Нетрудно заметить,

что, если $g > 0$, то поверхность F содержит ленту, вложенная перестройка вдоль которой дает зацепление, род которого не превышает $g - 1$, а число компонент на единицу превышает число компонент в зацеплении L ; а если зацепление L не является узлом, то поверхность F содержит ленту, вложенная перестройка вдоль которой дает зацепление, род которого не превышает g , а число компонент на единицу меньше, чем число компонент в зацеплении L . Отсюда следует, что для произвольного зацепления L рода g в графе вложенных перестроек найдется путь, ведущий от зацепления L к тривиальному узлу и проходящий только через зацепления, род которых не превосходит g . Это доказывает слабую монотонность рода на множестве зацеплений. \square

Замечание 11. Методы, используемые в доказательстве теоремы 12, не дают доказательства слабой монотонности индекса косы на множестве узлов. (Авторам не известно, является ли индекс косы слабо монотонным на множестве узлов.) В частности, использование экспоненциальной суммы (из доказательства п. (1d) теоремы 6) в качестве вторичного инварианта — по аналогии с подходом из доказательства п. (2) теоремы 12 — не дает доказательства слабой монотонности индекса косы на множестве узлов, поскольку минимизация параметров, связанных с экспоненциальной суммой, не ведет к получению узла с меньшим индексом косы.

4 Доказательство теоремы 7

Приведем доказательство теоремы 7, основанное на результатах из [50], относящихся к теории пространственных графов. Напомним, что (топологическими) *графами* называют одномерные клеточные комплексы. Нульмерные клетки топологических графов называют *вершинами*, а одномерные — *ребрами*. *Тета-графом* (а также *θ -графом*) называется топологический граф с двумя вершинами и тремя ребрами I_0, I_1, I_2 , ни одно из которых не является петлей. В [50] доказано, что для любой тройки узлов K_0, K_1, K_2 найдется такое вложение θ -графа $f: \theta \rightarrow \mathbb{R}^3$, что образы $f(I_1 \cup I_2)$, $f(I_0 \cup I_2)$ и $f(I_0 \cup I_1)$ являются реализациями узлов K_0, K_1 и K_2 соответственно. Отсюда вытекает справедливость основного утверждения теоремы 7. Действительно, если образы $f(I_1 \cup I_2)$, $f(I_0 \cup I_2)$ и $f(I_0 \cup I_1)$ являются реализациями узлов $K_0 := K, K_1$ и K_2 соответственно, то перестройка узла $K_0 = f(I_1 \cup I_2)$ по подходящим образом расположенной и соответствующее количество раз перекрученной „тонкой“ ленте, протянутой вдоль дуги $f(I_0)$, дает двухкомпонентное зацепление L , компоненты которого суть узлы K_1 и K_2 , а коэффициент зацепления между ними равен k . Дополнительное утверждение теоремы вытекает из теорем [69, 30, 31] о единственности разложения узлов и зацеплений на простые составляющие в силу того факта, что у зацепления, содержащего узел K_0 в качестве слагаемого, хотя бы одна из компонент также должна содержать узел K_0 в качестве слагаемого.

5 Доказательство теорем 8 и 11

Доказательство теоремы 8. Пусть K — это узел в \mathbb{R}^3 , V — его трубчатая окрестность, а T — лежащая на торе ∂V обмотка узла K , абсолютное значение наклона которой равно $(3 + 2i)/2$ для некоторого $i \in \mathbb{Z}$, $i \geq 0$. Зафиксируем на торе ∂V такие меридиан m и параллель ℓ , что m пересекает T ровно в $3 + 2i$ точках, ℓ пересекает T ровно в двух точках и ℓ пересекает m ровно в одной точке, причем $\ell \cap m \cap T = \emptyset$. Параллель ℓ делится точками пересечения с обмоткой T на две дуги. Обозначим через J ту из этих дуг, которая не пересекает m . Пусть $b: I \times I \rightarrow \partial V$ — такое вложение квадрата, что $b(\{1/2\} \times I) = J$ и

$$b(I \times \{0\}) \cup b(I \times \{1\}) = b(I \times I) \cap T.$$

Перестройка обмотки T вдоль ленты $b(I \times I)$ дает кривую T' , не пересекающуюся с ℓ и пересекающуюся с m только в тех же $3 + 2i$ точках, что и T . Поскольку $3 + 2i$ — нечетно, это означает, что кривая T' нестягиваема на ∂V и изотопна параллели ℓ , которая, в свою очередь, изотопна узлу K . Таким образом, узел T лежит в множестве $S_1(K)$.

Пусть теперь Z — это какая-нибудь лежащая на торе ∂V обмотка узла K , абсолютное значение наклона которой равно $\frac{3+2i}{|2+(3+2i)j|}$ для некоторых $i, j \in \mathbb{Z}$, $i \geq 0$. Ясно, что на торе ∂V найдется такая обмотка S узла K , что ее абсолютное значение наклона равно $(3 + 2i)/2$, а $|j|$ -кратное скручивание Дена тора ∂V по меридиану m переводит обмотку S в обмотку S_D , изотопную обмотке Z . Заметим, что параллель ℓ при таком скручивании переходит в кривую ℓ_D , тоже изотопную узлу K . Не умаляя общности можно считать, что лента $b(I \times I)$ не пересекается с окрестностью меридиана m , в которой проводится скручивание, а значит, вдоль этой ленты можно перестроить и обмотку S_D . Легко заметить, что результатом такой перестройки будет кривая ℓ_D , изотопная узлу K . Следовательно, узел S_D лежит в множестве $S_1(K)$, а так как обмотка S_D изотопна обмотке Z , то и Z лежит в $S_1(K)$. Тем самым мы показали, что множество $S_1(K)$ содержит все те обмотки узла K , у которых абсолютное значение наклона лежит в множестве $\left\{ \frac{3+2i}{|2+(3+2i)j|} \mid i, j \in \mathbb{Z}; i \geq 0 \right\}$. Теорема доказана. \square

Доказательство п. (1) теоремы 11. Связность множества узлов сразу следует, например, из того факта, что у любого нетривиального узла K в множестве $S_1(K)$ имеется узел с меньшим числом перекрестков. \square

Доказательство п. (8) теоремы 11. Пусть узел Z в \mathbb{R}^3 является связной суммой узлов Q и K_0 . Это значит, что в \mathbb{R}^3 найдется такой замкнутый шар B , что пара $(B, B \cap Z)$ — однопунктный тэнгл, заузленный в узел Q . Тогда при факторизации по шару B узел Z переходит в узел K_0 . Из связности графа вложенных перестроек следует, что для узла K_0 найдется набор лент, перестройки по которым переводят его в тривиальный. При этом можно подобрать ленты таким образом, чтобы ни одна из них не содержала точку,

отвечающую шару B . Отсюда следует, что для узла Z найдется набор лент, не пересекающих B , последовательные перестройки по которым переведут узел Z в узел Q . Кроме того, из теоремы Шуберта [69] о единственности разложения узла на простые составляющие следует, что каждый узел, отвечающий вершине из пути от Z до Q , либо объемлемо изотопен узлу Q , либо содержит Q в качестве слагаемого. Отсюда очевидным образом следует требуемое. \square

Доказательство п. (3) теоремы 11. Пусть X — произвольное конечное множество узлов. Заметим, что множество $S_1(U)$, где U — тривиальный узел, бесконечно (к примеру, потому что в $S_1(U)$ входят все двухниточные обмотки всех нетривиальных узлов, см. также [79]). Следовательно, в $S_1(U)$ найдется такой узел Q , что множество $[Q]$, состоящее из узла Q и всех узлов, содержащих Q в качестве слагаемого, не пересекает множества X . В силу доказанного выше п. (8) $[Q]$ связно. Кроме того, пользуясь техникой из доказательства того же п. (8), несложно заметить, что (поскольку $Q \in S_1(U)$) для произвольного узла K существует вложенная перестройка, переводящая K в узел, являющийся связной суммой узлов K и Q . Отсюда следует, что любое множество узлов, содержащее $[Q]$, связно. В частности, связно и дополнение $\mathcal{K} \setminus X$, где \mathcal{K} — множество всех узлов. Это доказывает искомое утверждение. \square

Доказательство п. (2) теоремы 11. Прямо следует из доказанного выше пункта (3). \square

Доказательство п. (4) теоремы 11. В силу доказанного выше пункта (8) для любого узла K множество $[K]$ (состоящее из узла K и всех узлов, содержащих K в качестве слагаемого) связно. Отсюда следует требуемое, поскольку для любых двух (в интересующем нас в настоящий момент случае — составных) узлов A и B множества $[A]$ и $[B]$ пересекаются. \square

Доказательство п. (5) теоремы 11. Ясно, что разрешение перекрестка в альтернированной диаграмме всегда дает альтернированную диаграмму с меньшим числом перекрестков. Отсюда очевидным образом следует требуемое. \square

Доказательство п. (6) теоремы 11. Пусть V — незаузленный полноторий в \mathbb{R}^3 , а T — произвольный узел, лежащий на ∂V . Минимальное количество точек пересечения простой замкнутой кривой на ∂V с меридианом, взятое по всем меридианам на ∂V , будем называть *индексом* кривой. Пусть $p := p(T)$ — индекс узла T . Если $p \leq 1$, то узел T тривиален. В случае, если $p \geq 2$, зафиксируем на ∂V меридиан m , пересекающий T ровно в p точках. Обозначим через J любую из дуг, на которые точки пересечения узла T с меридианом m делят m . Пусть $b: I \times I \rightarrow \partial V$ такое вложение квадрата, что $b(\{1/2\} \times I) = J$ и

$$b(I \times \{0\}) \cup b(I \times \{1\}) = b(I \times I) \cap T.$$

Обозначим через T_1 зацепление, полученное при перестройке узла T вдоль ленты $b(I \times I)$. Из предположения о минимальности числа точек в множестве $t \cap T$ следует, что T_1 есть узел, а не двухкомпонентное зацепление. Заметим, что узел T_1 пересекает меридиан t ровно в $p - 2$ точках, так что T_1 имеет меньший индекс, чем T .

Из проведенного рассуждения следует, что для нетривиального торического узла T типа (p, q) , где $p \geq 2$, найдется вложенная перестройка, переводящая его либо в тривиальный узел, либо в торический узел типа (p_1, q_1) с $p_1 < p$. Отсюда индукцией по p получаем требуемое. \square

Доказательство п. (7) теоремы 11. Тривиальный узел будем называть *итерированным торическим узлом степени 0*. При $n \geq 1$ назовем узел K *итерированным торическим узлом степени n* , если K является обмоткой некоторого итерированного торического узла степени $(n - 1)$.

Пусть T — произвольный итерированный торический узел степени $n \geq 1$. Тогда узел T является обмоткой некоторого итерированного торического узла T_{n-1} степени $n - 1$, и можно считать, что T расположен на крае трубчатой окрестности V узла T_{n-1} . Применяя рассуждение из доказательства пункта (6) к случаю узла T и полнотория V , мы видим, что существует последовательность вложенных перестроек (с лентами, вложенными в ∂V), переводящая узел T либо в тривиальный узел, либо в узел, объемлемо изотопный узлу T_{n-1} . Отсюда индукцией по n получаем требуемое. \square

6 Доказательство теоремы 9

Доказательство п. (1) теоремы 9. Как нетрудно заметить, „утраивая“ каждую из дуг в любой минимальной диаграмме узла K , мы получаем диаграмму с $3^2 \text{cr}(K) = 9 \text{cr}(K)$ перекрестками, представляющую трехкомпонентное зацепление, каждая из трех „параллельных“ друг другу компонент которого заузлена в узел K (подробно эта конструкция описывается, например, в [58, §2]). Очевидное преобразование — с добавлением двух перекрестков — любого состоящего из трех „параллельных“ дуг участка такой диаграммы дает нам диаграмму с $9 \text{cr}(K) + 2$ перекрестками, представляющую узел, являющийся трехниточной обмоткой узла K . Остается заметить, что все узлы, являющиеся трехниточными обмотками узла K , лежат в $S_1(K)$ в силу теоремы 8. \square

Доказательство п. (2) теоремы 9. Для доказательства данного пункта мы используем технику меандрических диаграмм узлов. Диаграмма узла называется *полумеандрической*, если она составлена из двух простых (т. е. не содержащих самопересечений) гладких дуг. Если, кроме того, общие концы этих дуг лежат на границе неограниченной компоненты дополнения диаграммы, то диаграмма называется *меандрической*. Ключевой для настоящего параграфа факт — существование меандрической диаграммы у

любого узла — был независимо доказан многими авторами с использованием различных техник (см. [10], где дана подробная историческая справка по этому вопросу). Перейдем теперь к доказательству.

Пусть дан нетривиальный узел K . Возьмем какую-то его меандрическую диаграмму D . Она составлена из двух простых гладких дуг, общие концы которых (обозначим их через a и b) лежат на границе выпуклой оболочки диаграммы D (см. пример на рис. 3 (a)). Возьмем в плоскости диаграммы D топологический диск B , внутренность которого пересекает диаграмму D по двум простым дугам, содержащим точки a и b (см. рис. 3 (b)), и сделаем преобразование Райдемайстера второго типа на этих дугах, не выходя за границы диска. На получившейся диаграмме подходящее разрешение любого из двух новых перекрестков приводит к двухкомпонентному бруннову зацеплению (см. рис. 3 (d)). (На рис. 3 представлен один из двух возможных вариантов, в котором совершаемое преобразование Райдемайстера переводит образовывавшие диаграмму D простые дуги в простые. Нетрудно видеть, что справедливость утверждения сохраняется и в том случае, когда в результате совершаемого преобразования на каждой дуге добавляется по одному самопересечению.)

Так как известно, что у узла K существует полумеандрическая диаграмма с не более чем $\sqrt[4]{6}^{\text{cr}(K)}$ перекрестками (см. [8]), то доказываемое утверждение вытекает из следующей леммы. \square

Лемма 1. *Если у узла имеется полумеандрическая диаграмма с n перекрестками, то найдется меандрическая диаграмма того же узла с не более чем $4n$ перекрестками.*

Доказательство леммы 1. Пусть дана полумеандрическая диаграмма D с n перекрестками, составленная из двух простых дуг γ_0 и γ_1 , общие концы которых (не являющиеся перекрестками диаграммы) мы обозначим через a и b . Не умаляя общности можно считать, что a лежит на границе неограниченной компоненты дополнения диаграммы D , кривая γ_0 является отрезком, а каждая дуга кривой γ_1 , свободная от перекрестков диаграммы, пересекает содержащую отрезок γ_0 прямую L не более чем в одной точке. Пусть $L_1 \subset L$ — луч с концом в точке a , содержащий отрезок γ_0 . Выберем на луче L_1 точку c так, что пересечение диаграммы D с лучом L_1 является подмножеством отрезка с концами в точках a и c . Обозначим через δ_0 отрезок с концами b и c . Ясно, что внутренность отрезка δ_0 пересекает кривую γ_1 не более, чем n раз. Выберем теперь на кривой γ_1 точку d такую, что дуга $\beta \subset \gamma_1$ с концами в точках b и d не содержит перекрестков диаграммы. Нетрудно заметить, что точку d можно соединить с точкой c простой кривой δ_1 , которая не пересекает кривую γ_1 и пересекает каждую свободную от перекрестков дугу кривой γ_0 не более чем в одной точке. Кроме того, заметим, что кривую δ_1 можно выбрать таким образом, чтобы она пересекала отрезок δ_0 не более чем в n точках. Теперь мы построим диаграмму D' заменой дуги β диаграммы D объединением кривых δ_0 и δ_1 (со сглаживанием в концевых точках) и расстановкой проходов/переходов так, что δ_0 проходит

сверху во всех перекрестках диаграммы, в которых она участвует, а δ_1 проходит сверху во всех перекрестках диаграммы, в которых она участвует, за исключением перекрестков с δ_0 . В результате мы получаем меандрическую диаграмму того же узла с не более чем $4n$ перекрестками. \square

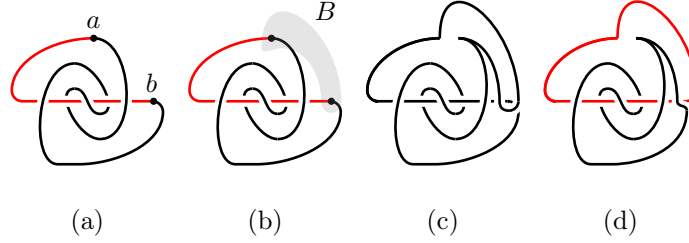


Рис. 3

7 Доказательство теоремы 10

Доказательство теоремы 10 использует следующее понятие.

Определение (декомпозиционно существенные перекрестки в диаграммах узлов). Пусть D — диаграмма нетривиального узла, x — перекресток в D . Разместим диаграмму D на расположенной в \mathbb{R}^3 плоскости \mathbb{R}^2 . Пусть Γ — отвечающий диаграмме D узел в \mathbb{R}^3 , для которого D является регулярной ортогональной проекцией. Обозначим через I_x отвечающую перекрестку x хорду узла Γ , т.е. проектирующийся в x отрезок в \mathbb{R}^3 с концами на Γ . Замкнутый шар B в \mathbb{R}^3 назовем *областью локального заузливания* для Γ , если пара $(B, B \cap \Gamma)$ является нетривиальным однониточным тэнглом. Конечный набор B_1, \dots, B_k дизъюнктивных шаров — областей локального заузливания назовем (*геометрической*) *схемой разложения узла Γ в связную сумму*, если Γ раскладывается в связную сумму узлов K_1, \dots, K_k , где K_i — узел, получающийся при факторизации тэнгла $(B_i, B_i \cap \Gamma)$ по сфере ∂B_i . Назовем перекресток x *декомпозиционно несущественным*, если существует схема разложения узла Γ в связную сумму, ни один из шаров которой не пересекает хорды I_x , и — *декомпозиционно существенным* в противном случае.

Замечание 12. Мы не требуем простоты узлов в областях локального заузливания, так что, в частности, у любого нетривиального узла имеются схемы разложения в связную сумму, образованные единственным шаром. При этом, если (в обозначениях из определения) перекресток x декомпозиционно несуществен, так что не пересекающие хорды I_x схемы разложения узла Γ в связную сумму существуют, то найдется такая схема, состоящая

из одного или двух шаров, поскольку добавлением трубчатых окрестностей участков узла мы можем слить шары схемы, пересекающие одну и ту же дугу в паре дуг $\Gamma \setminus I_x$, в единую область локального заузливания.

Замечание 13. Понятия, близкие к понятию декомпозиционно существенных перекрестков, изучаются в работах [51, 19, 20, 22, 21]. Ср. лемму 3 ниже и теорему 2.31 в [22].

Гипотеза 6. *Все перекрестки в любой минимальной диаграмме произвольного узла декомпозиционно существенны.*

Заметим, что гипотеза 6 является ослаблением гипотезы 2.

Лемма 2. *Если узел не является химерой, то все перекрестки всех его минимальных диаграмм декомпозиционно существенны.*

Доказательство. Предположим, что в минимальной диаграмме D некоторого нетривиального узла K найдется декомпозиционно несущественный перекресток x . Пусть L — двухкомпонентное зацепление с компонентами K_1 и K_2 , получающееся из диаграммы D разрешением перекрестка x . Тогда $\text{cr}(L) \leq \text{cr}(K) - 1$. Разместим диаграмму D на плоскости $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Пусть Γ и I_x — такие же, как в определении декомпозиционно существенного перекрестка. Поскольку перекресток x декомпозиционно несуществен, найдется схема \mathcal{S} разложения узла Γ в связную сумму, ни один из шаров которой не пересекает хорду I_x . Не умаляя общности мы можем считать, что эта схема \mathcal{S} состоит из одного или двух шаров — максимум по одному шару на каждую из двух дуг множества $\Gamma \setminus I_x$ (см. замечание 12). Для $i = 1, 2$ обозначим через Γ_i ту из двух дуг множества $\Gamma \setminus I_x$, которая проектируется в компоненту K_i в L , а через A_i — узел, соответствующий высекаемому схемой \mathcal{S} локальному заузливанию на дуге Γ_i . Тогда

- (i) узел K_1 содержит узел A_1 в качестве связного слагаемого,
- (ii) узел K_2 содержит узел A_2 в качестве связного слагаемого,
- (iii) узел K является связной суммой узлов A_1 и A_2 .

Таким образом, выполняются следующие неравенства:

$$\text{cr}(K_1) + \text{cr}(K_2) \leq \text{cr}(L) \leq \text{cr}(K) - 1 < \text{cr}(K) \stackrel{\text{(iii)}}{\leq} \text{cr}(A_1) + \text{cr}(A_2).$$

Следовательно, выполняется хотя бы одно из неравенств

$$\text{cr}(K_1) < \text{cr}(A_1) \quad \text{и} \quad \text{cr}(K_2) < \text{cr}(A_2),$$

а это означает, что хотя бы один из узлов A_1 и A_2 является химерой. Кроме того, из свойств (i)–(iii) вытекает, что подходящая связная сумма N узлов K_1 и K_2 содержит K в качестве слагаемого. Таким образом, поскольку

$$\text{cr}(N) \leq \text{cr}(K_1) + \text{cr}(K_2) < \text{cr}(K),$$

узел K также является химерой. □

Лемма 2 приведена в качестве пояснения и напрямую в доказательстве теоремы 10 не используется. Для доказательства теоремы нам потребуется следующая лемма (ср. с [9, Lemma 1] и [22, Theorem 2.31]):

Лемма 3. *В каждой диаграмме нетривиального узла найдется декомпозиционно существенный перекресток.*

Доказательство. Пусть D — диаграмма некоторого узла K . Разместим диаграмму D на расположенной в \mathbb{R}^3 плоскости \mathbb{R}^2 . Пусть Γ — простая замкнутая кривая в \mathbb{R}^3 , представляющая узел K и дающая диаграмму D при проекции на \mathbb{R}^2 . Мы можем не теряя общности полагать, что кривая Γ не пересекает плоскости \mathbb{R}^2 . Если x — перекресток диаграммы D , обозначим через e_x ближайшую к нему из двух проектирующихся в него точек кривой Γ . Пусть E — объединение точек e_x описанного вида по всем перекресткам x диаграммы D . Проекция связных компонент множества $\Gamma \setminus E$ на \mathbb{R}^2 будем называть *главными дугами* диаграммы D . Будем говорить, что главные дуги α и β *сходятся* в перекрестке x , если x лежит на α и является предельной точкой для β .

Теперь выберем ориентацию диаграммы D и рассмотрим соответствующее представление Виртингера фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma)$ (подробное описание можно найти, например, [15]). Пусть x — перекресток на диаграмме D , α и β — главные дуги диаграммы D , сходящиеся в этом перекрестке, a и b — образующие Виртингера, отвечающие дугам α и β соответственно, а I_x — проектирующийся в x отрезок в \mathbb{R}^3 с концами на кривой Γ . Из конструкции представления Виртингера следует, что всякая петля, представляющая элемент ab^{-1} , свободно гомотопна простой замкнутой кривой Δ , содержащейся в сколь угодно малой окрестности хорды I_x . Отметим, что всякая петля, представляющая элемент ab^{-1} (и, следовательно, петля Δ) имеет нулевой коэффициент зацепления с Γ . В случае, когда перекресток x декомпозиционно несуществен, по определению найдется схема B_1, \dots, B_k разложения узла Γ в связную сумму, области которой не пересекают хорду I_x . Заметим, что в таком случае объединение $\Gamma \cup B_1 \cup \dots \cup B_k$ объемлемо изотопно тривиальному узлу с k „бусинами“ (или „утолщениями“), т. е. дополнение

$$V := (\mathbb{R}^3 \cup \{+\infty\}) \setminus (\Gamma \cup B_1 \cup \dots \cup B_k)$$

изотопно открытому полноторию. Поскольку шары B_1, \dots, B_k не пересекают хорду I_x , выбрав петлю Δ достаточно близкой к хорде I_x , мы можем считать, что петля Δ лежит в полнотории V . Отсюда вытекает, что петля Δ стягиваема (в полнотории V и, значит, в $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$). Следовательно петли, представляющие элемент ab^{-1} , стягиваемы, так что этот элемент тривиален, т. е. $a = b$. Таким образом, виртингеровские образующие, отвечающие главным дугам, сходящимся в декомпозиционно несущественном перекрестке, представляют один и тот же элемент фундаментальной группы узла. Следовательно, если все перекрестки диаграммы узла декомпозиционно несущественны, то все виртингеровские образующие представляют

один и тот же элемент фундаментальной группы. Это возможно лишь в случае, когда фундаментальная группа узла — циклическая, что является признаком тривиальности узла (доказательство приведено, например, в [15, Proposition 3.17]). \square

Замечание 14. Чуть более тщательный анализ показывает, что в каждой диаграмме нетривиального узла найдется как минимум три декомпозиционно существенных перекрестка.

Доказательство теоремы 10. Пусть D — минимальная диаграмма нетривиального узла K . В силу леммы 3, в диаграмме D найдется хотя бы один декомпозиционно существенный перекресток (скажем, перекресток x). С точностью до поворота и перехода к зеркальному отражению мы можем считать, что разрешение перекрестка x , дающее диаграмму двухкомпонентного зацепления, имеет вид $\times \rightarrow \asymp$. Обозначим зацепления, диаграммы которых получаются из диаграммы D преобразованиями

$$\times \rightarrow \asymp \quad \text{и} \quad \times \rightarrow \nasymp$$

в перекрестке x , через L_0 и L_2 соответственно. Тогда зацепление L_2 также двухкомпонентно. Заметим, что при этом выполняются следующие неравенства:

$$\text{cr}(L_0) \leq \text{cr}(K) - 1, \quad \text{cr}(L_2) \leq \text{cr}(K) + 1.$$

Поскольку обратный к $\times \rightarrow \nasymp$ переход $\nasymp \rightarrow \times$ есть разрешение перекрестка, оба зацепления L_0 и L_2 лежат в множестве $S_1(K)$. Вследствие этого для завершения доказательства достаточно показать, что хотя бы одно из зацеплений L_0 и L_2 нерасщепимо и имеет меньше, чем узел K , однокомпонентных слагаемых в разложении на простые составляющие.

Чтобы убедиться в этом, сконструируем реализации узла K и зацеплений L_0 и L_2 в \mathbb{R}^3 , поместив в \mathbb{R}^3 плоскость \mathbb{R}^2 с диаграммой D и взяв в \mathbb{R}^3 замкнутую кривую Γ , ортогональная проекция которой на \mathbb{R}^2 дает диаграмму D (как в конструкции из определения декомпозиционно существенных перекрестков). Мы можем считать, что кривая Γ совпадает с диаграммой D всюду, кроме небольших дуг, отвечающих проходам в перекрестках диаграммы D . Тогда проектирующаяся в перекресток x хорда $I_x \subset \mathbb{R}^3$ с концами на кривой Γ „сравнительно мала“ и лежит в некотором евклидовом шаре $X \subset \mathbb{R}^3$ с центром в перекрестке x . Из конструкции ясно, что параметры могут быть подобраны таким образом, чтобы пара $(X, X \cap \Gamma)$ являлась тривиальным двухниточным тэнглом, проекция дуг которого на \mathbb{R}^2 имеет вид \times . Тогда, заменяя в Γ образованное парой дуг множество $X \cap \Gamma$ на дуги с той же четверкой концевых точек, проекции которых на \mathbb{R}^2 имеют вид \asymp и \nasymp , мы получаем реализации зацеплений L_0 и L_2 соответственно.

Преобразование зацепления $L \subset \mathbb{R}^3$, заменяющее тот или иной тривиальный двухниточный тэнгл $(B, B \cap L)$ с шаром $B \subset \mathbb{R}^3$ на другой тривиальный двухниточный тэнгл, называют *заменой рациональных тэнглов*. Таким образом, узел K и зацепления L_0 и L_2 получаются друг из друга

заменами рационального тэнгла. На уровне двулистных разветвленных накрытий замене рациональных тэнглов отвечает перестройка Дена: мы вырезаем из многообразия полноторий и вклеиваем его назад по некоторому автоморфизму граничного тора. Перестройка характеризуется изотопическим классом (на торе) кривой, в которую переходит при переклейке меридиан полнотория. Минимальное геометрическое число пересечений между меридианом исходного полнотория и кривыми из изотопического класса его образа (меридиана переклеенного полнотория) условимся называть *характеристикой* перестройки Дена (и индуцирующей ее замены рационального тэнгла). Непосредственно в терминах тэнглов характеристика описывается, например, в [25]. Несложное стандартное вычисление показывает, что характеристика замены рационального тэнгла, отвечающего преобразованию $\asymp \rightarrow \mathcal{A}$ на уровне диаграмм и обеспечивающего переход $L_0 \rightarrow L_2$, равна 2 (см., например, [25] или [28]).

Мы используем это в конце доказательства, а теперь обратимся к тэнглу $(Y, Y \cap \Gamma)$, где $Y = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \setminus \text{int}(X)$. Следующий шаг доказательства состоит в построении такого набора дизъюнктивных не пересекающихся шара X областей локального заузливания для узла Γ , чтобы факторизацией по этим областям получить из тэнгла $(Y, Y \cap \Gamma)$ локально тривиальный тэнгл. (Напомним, что тэнгл (B, t) называется *локально тривиальным* или тэнглом *без локальных заузливаний*, если не существует шара $Z \subset B$ такого, что пара $(Z, Z \cap t)$ является нетривиальным однопоточным тэнглом; см., например, [49]. Нерасщепимые локально тривиальные тэнглы называются *простыми*. Расщепимый двухпоточный тэнгл без локальных заузливаний тривиален.)

Заметим, что если в $\mathbb{R}^3 \setminus X$ задан некоторый конечный (возможно, пустой) набор E дизъюнктивных областей локального заузливания для узла Γ , а тэнгл, получаемый в результате факторизации тэнгла $(Y, Y \cap \Gamma)$ по шарам этого набора, обладает локальными заузливаниями, то, как нетрудно видеть, шар, содержащий такое локальное заузливание, может быть выбран содержащимся в $\mathbb{R}^3 \setminus X$ (нужно вывести за пределы шара точку $\{\infty\}$ и отделить его от сферы $\partial X = \partial Y$) и не содержащим точек, в которые сжались шары набора E (при необходимости эти точки очевидным образом выводятся за пределы шара подходящей изотопией). Следовательно, набор E может быть пополнен дополнительной областью нетривиального локального заузливания. Поскольку все узлы, отвечающие дизъюнктивным областям локального заузливания, входят в узел K в качестве (дизъюнктивных) слагаемых, отсюда следует, что среди наборов дизъюнктивных невырожденных не пересекающихся шара X областей локального заузливания для узла Γ найдется максимальный (непополняемый) набор E' , факторизация по шарам которого переводит тэнгл $(Y, Y \cap \Gamma)$ в локально тривиальный тэнгл $(Y', Y' \cap \Gamma')$.

Поскольку перекресток x предполагается декомпозиционно существенным, а шары из набора E' не пересекают шара X и содержащейся в нем хорды I_x , набор E' не может являться схемой разложения узла Γ в связную сумму. Это означает, в частности, что суммарное количество простых узлов в разложении локальных заузливаний, отвечающих набору E' , на простые

составляющие, меньше, чем количество простых узлов в разложении узла K .

Обозначим через K' , Λ'_0 и Λ'_2 зацепления, получающиеся из зацеплений Γ , Λ_0 и Λ_2 , соответственно, факторизацией по шарам из набора E' . Тогда зацепления Λ'_0 и Λ'_2 связаны (как и зацепления Λ_0 и Λ_2) заменой рациональных тэнглов $(X, X \cap \Lambda_0) \rightarrow (X, X \cap \Lambda_2)$ характеристики 2. При этом дополняющий тэнгл $(Y', Y' \cap \Lambda'_0) = (Y', Y' \cap \Lambda'_2) = (Y', Y' \cap \Gamma')$ локально тривиален.

Ситуация распадается на два случая:

- (p) тэнгл $(Y', Y' \cap \Gamma')$ прост,
- (t) тэнгл $(Y', Y' \cap \Gamma')$ тривиален.

В случае (p) хотя бы одно из зацеплений Λ'_0 и Λ'_2 просто в силу следствия 1 работы [25]. Если же тэнгл $(Y', Y' \cap \Gamma')$ тривиален, то зацепления Λ'_0 и Λ'_2 относятся к классу так называемых рациональных (двухмостовых) зацеплений и, очевидно, отличаются коэффициентом зацепления между компонентами. Следовательно, в этом случае хотя бы одно из зацеплений Λ'_0 и Λ'_2 нетривиально и, значит, будучи двухмостовым, тоже просто. Итак, мы пришли к выводу, что хотя бы одно из зацеплений Λ'_0 и Λ'_2 (скажем, зацепление Λ'_i) нерасщепимо и просто. В таком случае при разложении зацепления Λ_i на простые составляющие мы получаем зацепление Λ'_i и — в качестве однокомпонентных составляющих — тот же набор узлов, (с возможными повторениями), что и при разложении на простые составляющие локальных заузливаний, отвечающих набору E' . Таким образом, количество однокомпонентных слагаемых в разложении зацепления Λ_i на простые составляющие меньше, чем у K . \square

Список литературы

- [1] Abe T., Hanaki R., Higa R., *The unknotting number and band-unknotting number of a knot*, Osaka J. Math. **49** (2012), № 2, 523–550.
- [2] Abe T., Kanenobu T., *Unoriented band surgery on knots and links*, Kobe J. Math. **31** (2014), № 1-2, 21–44.
- [3] Adams C. C., *The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*, W. H. Freeman and Company, New York, 1994.
- [4] Alexander J. W., *A lemma on systems of knotted curves*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **9** (1923), № 3, 93–95.
- [5] Bae Y., *Polynomial invariants of a link with local symmetry*, Topology Appl. **201** (2016), 350–357.
- [6] Bao Y., *$H(2)$ -unknotting operation related to 2-bridge links*, Topology Appl. **159** (2012), № 8, 2158–2167.

- [7] Bao Y., *A note on knots with $H(2)$ -unknotting number one*, Osaka J. Math. **51** (2014), № 3, 585–596.
- [8] Belousov Yu. S., *Semimeander crossing number of knots and related invariants*, Zap. Nauhn. Semin. POMI **476** (2018), 20–33.
- [9] Belousov Yu. S., Malyutin A. V., *Hyperbolic knots are not generic*, (2019), preprint arXiv:1908.06187.
- [10] Belousov Yu. S., Malyutin A. V., *Meander diagrams of knots and spatial graphs: Proofs of generalized Jablan–Radović conjectures*, Topology Appl. **274** (2020).
- [11] Birman J. S., Menasco W., *Studying links via closed braids IV: Composite links and split links*, Invent. Math. **102** (1990), 115–139.
- [12] Brandt R. D., Lickorish W. B. R., Millett K. C., *A polynomial invariant for unoriented knots and links*, Invent. Math. **84** (1986), № 3, 563–573.
- [13] Buck D., Ishihara K., *Coherent band pathways between knots and links*, J. Knot Theory Ramifications **24** (2015), № 2, 1550006, 21 pp.
- [14] Buck D., Ishihara K., Rathbun M., Shimokawa K., *Band surgeries and crossing changes between fibered links*, J. Lond. Math. Soc. (2) **94** (2016), № 2, 557–582.
- [15] Burde G., Zieschang H., *Knots*, Ser. de Gruyter Studies in Mathematics, vol. 5, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2003.
- [16] Clark B. E., *Crosscaps and knots*, Internat. J. Math. Math. Sci. **1** (1978), № 1, 113–123.
- [17] Cromwell P. R., *Embedding knots and links in an open book I: Basic properties*, Topology Appl. **64** (1995), № 1, 37–58.
- [18] Dehornoy P., *Braids and Self-Distributivity*, Progr. Math., 192, Birkhäuser, Basel, 2000.
- [19] Denne E. J., *Alternating Quadrisecants of Knots*, Ph.D. Thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, Champaign, IL, United States, 2004.
- [20] Denne E., Diao Y., Sullivan J. M., *Quadrisecants give new lower bounds for the ropelength of a knot*, Geom. Topol. **10** (2006), 1–26.
- [21] Denne E. *Quadrisecants and essential secants of knots. New directions in geometric and applied knot theory*, Partial Differ. Equ. Meas. Theory, De Gruyter, Berlin, 2018, pp. 138–158.
- [22] De Toffoli S., *Degrees of Essentiality for Secants of Knots* Ph.D. Thesis, Technical University of Berlin, Berlin, Germany, 2013.

- [23] Diao Y., *The additivity of crossing numbers*, J. Knot Theory Ramifications **13** (2004), № 7, 857–866.
- [24] Дынников И. А., Прасолов М. В., *Шунты для прямоугольных диаграмм. Доказательство гипотезы Джонса и связанные вопросы*, Труды Московского математического общества **74** (2013), № 1, 115–173.
- [25] Eudave-Muñoz, M. *Primeness and sums of tangles*, Trans. Amer. Math. Soc. **306** (1988), № 2, 773–790.
- [26] Futer D., Kalfagianni E., Purcell J., *Guts of Surfaces and the Colored Jones Polynomial*, Lecture Notes in Math. 2069, Springer, Heidelberg, 2013.
- [27] Futer D., Kalfagianni E., Purcell J., *Hyperbolic semi-adequate links*, Comm. Anal. Geom. **23** (2015), № 5, 993–1030.
- [28] Gordon C. McA., Luecke J., *Reducible manifolds and Dehn surgery*, Topology **35** (1996), № 2, 385–409.
- [29] Gruber H., *Estimates for the minimal crossing number*, (2003), preprint arXiv:math/0303273v3.
- [30] Hashizume Y., *On the uniqueness of the decomposition of a link*, Osaka Math. J. **10** (1958), 283–300.
- [31] Hashizume Y., *Errata: On the uniqueness of the decomposition of a link*, Osaka Math. J. **11** (1959), 249.
- [32] Hoste J., Nakanishi Y., Taniyama K., *Unknotting operations involving trivial tangles*, Osaka J. Math. **27** (1990), № 3, 555–566.
- [33] Ichihara K., Jong I. D., *Cosmetic banding on knots and links. With an appendix by Hidetoshi Masai*, Osaka J. Math. **55** (2018), № 4, 731–745.
- [34] Ishihara K., Shimokawa K., Vazquez M., *Site-specific recombination modeled as a band surgery: applications to Xer recombination*, Discrete and Topological Models in Molecular Biology, Nat. Comput. Ser., Springer, Heidelberg, 2014, pp. 387–401.
- [35] Jabuka S., Liu B., Moore A. H., *Knot graphs and Gromov hyperbolicity*, (2019), preprint arXiv:1912.03766.
- [36] Kalfagianni E., *A Jones slopes characterization of adequate knots*, Indiana Univ. Math. J. **67** (2018), № 1, 205–219.
- [37] Kalfagianni E., Lee C. R. S., *On the degree of the colored Jones polynomial*, Acta Math. Vietnam. **39** (2014), № 4, 549–560.
- [38] Kalfagianni E., Lee C. R. S., *Crosscap numbers and the Jones polynomial*, Adv. Math. **286** (2016), 308–337.

- [39] Kanenobu S., Kanenobu T., *Oriented Gordian distance of two-component links with up to seven crossings*, J. Knot Theory Ramifications **24** (2015), № 10, 1540013, 14 pp.
- [40] Kanenobu T., *Band surgery on knots and links*, J. Knot Theory Ramifications **19** (2010), № 12, 1535–1547.
- [41] Kanenobu T., *$H(2)$ -Gordian distance of knots*, J. Knot Theory Ramifications **20** (2011), № 6, 813–835.
- [42] Kanenobu T., *Band surgery on knots and links*, II, J. Knot Theory Ramifications **21** (2012), № 9, 1250086, 22 pp.
- [43] Kanenobu T., *Band surgery on knots and links*, III, J. Knot Theory Ramifications **25** (2016), № 10, 1650056, 12 pp.
- [44] Kanenobu T., Miyazawa Y., *$H(2)$ -unknotting number of a knot*, Commun. Math. Res. **25** (2009), № 5, 433–460.
- [45] Kanenobu T., Moriuchi H., *Links which are related by a band surgery or crossing change*, Bol. Soc. Mat. Mex. (3) **20** (2014), № 2, 467–483.
- [46] Kanenobu T., Moriuchi H., *Coherent band-Gordian distances between knots and links with up to seven crossings*, Topology Appl. **264** (2019), 233–250.
- [47] Kauffman L. H., *An invariant of regular isotopy*, Trans. Amer. Math. Soc. **318** (1990), № 2, 417–471.
- [48] Kim W. S., Lee J. H., Lee S., *2-Tangle replacements and adequate diagrams*, J. Knot Theory Ramifications **26** (2017), № 13, 1750083, 8 pp.
- [49] Kawauchi A., *A Survey of Knot Theory*, Birkhäuser, Basel, 1996.
- [50] Kinoshita S., *On θ_n -curves in \mathbb{R}^3 and their constituent knots*, Topology and Computer Science, Kinokuniya, Tokyo, 1987, 211–216.
- [51] Kuperberg G., *Quadriseccants of knots and links*, J. Knot Theory Ramifications **3** (1994), № 1, 41–50.
- [52] Lackenby M., *The crossing number of composite knots*, J. Topol. **2** (2009), № 4, 747–68.
- [53] Lee C. R. S., *A trivial tail homology for non-A-adequate links*, Algebr. Geom. Topol. **18** (2018), № 3, 1481–1513.
- [54] Lee C. R. S., *Stability properties of the colored Jones polynomial*, J. Knot Theory Ramifications **28** (2019), № 8, 1950050, 20 pp.
- [55] Leng X., Yang Z., Liu X., *A result on the Slope conjectures for 3-string Montesinos knots*, J. Knot Theory Ramifications **27** (2018), № 13, 1842008, 24 pp.

- [56] Lickorish W. B. R., *Unknotting by adding a twisted band*, Bull. London Math. Soc. **18** (1986), № 6, 613–615.
- [57] Lickorish W. B. R., *An Introduction to Knot Theory*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [58] Lickorish W. B. R., Thistlethwaite M. B., *Some links with nontrivial polynomials and their crossing-numbers*, Comment. Math. Helv. **63** (1988), № 4, 527–539.
- [59] Lidman T., Moore A. H., Vazquez M., *Distance one lens space fillings and band surgery on the trefoil knot*, Algebr. Geom. Topol. **19** (2019), № 5, 2439–2484.
- [60] Малютин А. В., *Псевдохарактеры групп кос и простота зацеплений*, Алгебра и анализ **21** (2009), № 2, 113–135.
- [61] Malyutin A. V., *On the question of genericity of hyperbolic knots*, Internat. Math. Res. Notices **2020** (2020), № 21, 7792–7828.
- [62] McDonald C., *Band number and the double slice genus*, New York J. Math. **25** (2019), 964–974.
- [63] Moore A. H., Vazquez M., *A note on band surgery and the signature of a knot*, Bull. London Math. Soc. **52** (2020), № 6, 1191–1208.
- [64] Moore A. H., Vazquez M. H., *Recent advances on the non-coherent band surgery model for site-specific recombination*, Topology and Geometry of Biopolymers, Contemp. Math., 746, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2020, 101–125.
- [65] Ozawa M., *Essential state surfaces for knots and links*, J. Aust. Math. Soc. **91** (2011), № 3, 391–404.
- [66] Rolfsen D., *Knots and Links*, Publish or Perish Press, Berkeley, Calif., 1976.
- [67] Scharlemann M. G., *Unknotting number one knots are prime*, Invent. Math. **82** (1985), № 1, 37–55.
- [68] Scharlemann M., Thompson A., *Unknotting number, genus, and companion tori*, Math. Ann. **280** (1988), № 2, 191–205.
- [69] Schubert H., *Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knoten in Primknoten*, Sitz.ber. Heidelb. Akad. Wiss. Math.-Nat.wiss. Kl. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1949.
- [70] Schubert H., *Über eine numerische Knoteninvariante*, Math. Zeit. **61** (1954), 245–288.
- [71] Schultens J., *Additivity of bridge numbers of knots*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **135** (2003), № 3, 539–544.

- [72] Stoimenow A., *On the satellite crossing number conjecture*, J. Topol. Anal. **3** (2011), № 2, 109–143.
- [73] Stoimenow A., *Coefficients and non-triviality of the Jones polynomial*, J. Reine Angew. Math. **657** (2011), 1–55.
- [74] Stoimenow A., *On the crossing number of semiadequate links*, Forum Math. **26** (2014), № 4, 1187–1246.
- [75] Thistlethwaite M. B., *Kauffman's polynomial and alternating links*, Topology **27** (1988), № 3, 311–318.
- [76] Thistlethwaite M. B., *On the Kauffman polynomial of an adequate link*, Invent. Math. **93** (1988), № 2, 285–296.
- [77] Torisu I., *The determination of the pairs of two-bridge knots or links with Gordian distance one*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), № 5, 1565–1571.
- [78] Zhang X., *Unknotting number one knots are prime: a new proof*, Proc. Amer. Math. Soc. **113** (1991), № 2, 611–612.
- [79] Zhang K., Yang Z., *A note on the Gordian complexes of some local moves on knots*, J. Knot Theory Ramifications **27** (2018), № 9, 1842002, 6 pp.
- [80] Zhang K., Yang Z., Lei F., *The $H(n)$ -Gordian complex of knots*, J. Knot Theory Ramifications **26** (2017), № 13, 1750088, 7 pp.