

ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов,
Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецеветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16
октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых
коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

[http://www.pdmi.ras.ru /preprint/](http://www.pdmi.ras.ru/preprint/)

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПОМИ ПРЕПРИНТ — 5/2019

Собственные состояния гамильтониана свободного квантового поля

Т. А. Болохов

С.-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Ст.-Петербург, Россия

e-mail: timur@pdmi.ras.ru

10 октября 2019 г.

АННОТАЦИЯ

В работе рассматриваются решения функционального уравнения на собственные состояния квантового гамильтониана свободного поля. К искомым решениям предъявляются требования конечности нормировки и собственных значений относительно нормировки и собственного значения основного состояния свободной теории. Показывается, что в простейших случаях для гамильтонианов скалярного и векторного поля в калибровке Кулона такие решения существуют и обладают отрицательной энергией. Полученные функционалы являются бесконечномерными аналогами собственных функций из теории сингулярных возмущений конечномерных операторов и могут быть использованы для построения перенормированных состояний систем, обладающих асимптотической свободой.

Ключевые слова: оператор Гамильтона свободного поля, замкнутые расширения квадратичных форм, формула Крейна для резольвенты

ПРЕПРИНТЫ

Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В. М. Бабич, Н. А. Вавилов, А. М. Вершик, М. А. Всемирнов,
А. И. Генералов, И. А. Ибрагимов, Л. Ю. Колотилина,
Б. Б. Лурье, Ю. В. Матиясевич, Н. Ю. Неизвестный,
С. И. Репин, Г. А. Серегин

Введение

Гамильтониан свободного квантового поля является бесконечномерным аналогом гамильтониана гармонического осциллятора, его действие состоит из двух частей: кинетической – суммы вариационных производных и потенциальной – квадратичной формы лапласиана

$$\mathcal{H} = - \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \frac{\delta}{\delta B_{\mathbf{x}}^k} \frac{\delta}{\delta B_{\mathbf{x}}^k} + \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left(\frac{\partial B_{\mathbf{x}}^k}{\partial x_l} \right)^2. \quad (1)$$

Для того, чтобы задать оператор квантовой теории, необходимо также зафиксировать граничные условия или набор собственных состояний. Для оператора, описывающего свободную динамику этот набор порождается вакуумным (основным) состоянием — Гауссовым функционалом квадратичной формы корня из оператора Лапласа

$$\Omega_{\Delta}(B) = \exp\left\{-\frac{1}{2}Q_{\Delta}(B)\right\}, \quad (2)$$

где

$$Q_{\Delta}(B) = (B, \Delta^{1/2}B), \quad \Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x_l^2}.$$

Помимо свободной теории, выражение (1) появляется как результат перенормировки (стремления к нулю параметра связи) гамильтонианов, содержащих взаимодействие с другими полями и (или) самодействие. При некоторых условиях в такой системе (например, в теории поля Янга-Миллса) возникает явление асимптотической свободы, одним из проявлений которого является асимптотическое стремление состояний при высоких энергиях к состояниям свободной теории. Можно предположить, что если нам удастся построить набор собственных состояний для оператора (1), отличный от набора, порождаемого вакуумом свободного поля (2), то такая система будет являться моделью для описания некоторой асимптотически-свободной теории. Конечномерным аналогом такой конструкции являются системы из теории сингулярных взаимодействий [1], [2]. С одной стороны, эта теория описывает набор собственных состояний оператора энергии свободной частицы с нетривиальными граничными условиями. А с другой стороны этот набор может быть получен в результате стремления к нулю параметра в гамильтониане, содержащем взаимодействие, например

$$H_{\delta} = -\frac{\partial^2}{\partial x_l^2} - \varepsilon \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0), \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

или

$$H_{x^{-2}} = -\frac{\partial^2}{\partial x_l^2} - \frac{\varepsilon}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|^2}, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Заметим, что в последнем случае оператор $H_{x^{-2}}$ определен для конечных ε , в том числе разного знака (в зависимости от размерности пространства d).

В данной работе мы будем искать решения уравнения на собственные состояния для гамильтониана свободного поля

$$\mathcal{H}\Omega_{\mathcal{M}} = E\Omega_{\mathcal{M}} \tag{3}$$

в виде Гауссовых функционалов с некоторым ядром $Q_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

$$\Omega_{\mathcal{M}}(B) = \exp\left\{-\frac{1}{2}Q_{\mathcal{M}}(B)\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} B_{\mathbf{x}} Q_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) B_{\mathbf{y}} d^3x d^3y\right\}. \tag{4}$$

Мы потребуем, чтобы уравнение (3) было справедливо по крайней мере на множестве один раз дифференцируемых функций на пространстве \mathbb{R}^3 , и, кроме того, чтобы были выполнены следующие условия:

1. Конечность нормировки функционала $\Omega_{\mathcal{M}}$, выраженной методами функционального интегрирования через нормировку основного состояния Ω_{Δ} оператора свободной теории.
2. Конечность и вещественность разности собственных значений гамильтониана (1) при действии на функционал $\Omega_{\mathcal{M}}$ и на основное состояние свободной теории Ω_{Δ} . В более общем виде, для обеспечения унитарности модели необходимо потребовать вещественности действия выражения (1) на все возможные возбуждения нового вакуумного состояния.

Мы будем называть функционалы, удовлетворяющие перечисленным выше требованиям *допустимыми* функционалами.

Идея построения решений уравнения (3) с помощью расширений квадратичных форм обсуждалась в [3]. Однако здесь мы будем предполагать, что квадратичные формы $Q_{\mathcal{M}}$ будут зависеть не от одной, а от нескольких точек $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$ трехмерного пространства, а также от некоторой матрицы \mathcal{M} , устанавливающей связи между значениями функций $B_{\mathbf{x}}$ в этих точках. Точки $\{\mathbf{x}_n\}$ естественно ассоциировать с операторами рождения частиц второго (фермионного) поля, которое до перенормировки взаимодействовало с полем B . При этом естественно считать, что матрица \mathcal{M} является функцией положения, квантовых чисел фермионов и

значения их волновой функции, а ее конкретный вид определяется взаимодействием и процедурой перенормировки.

Описываемую здесь технику можно также интерпретировать как вторичное квантование 3-мерной системы с многоточечным сингулярным возмущением и граничными условиями, связывающими значения поля в разных точках пространства. Однако, далеко не все системы с сингулярными возмущениями допускают вторичное квантование в описываемом здесь виде.

Основные выкладки в работе будут проведены для гамильтониана векторного поперечного (бозонного) поля

$$B_{\mathbf{x}}^k : \quad \frac{\partial}{\partial x_k} B_{\mathbf{x}}^k = 0,$$

для более простого случая скалярного поля мы приведем ответы без вычислений.

Мы покажем, что допустимые решения функционального уравнения (3) существуют по крайней мере при $N = 2$ и в содержательных случаях имеют отрицательную энергию (относительно бесконечной энергии вакуума свободной теории). То есть такие состояния оказываются энергетически более выгодными по сравнению с состояниями свободной теории. Несмотря на то, что энергия — это размерная величина, рассматриваемые решения изначально имеют масштаб — расстояние между точками $\{\mathbf{x}_n\}$. Поэтому множество допустимых решений описывается как вещественная часть проективных пространств, то есть в безразмерных терминах. Мы покажем, что это множество имеет связные компоненты с непрерывно меняющейся энергией. Это обстоятельство позволяет использовать рассматриваемую модель для описания систем с размерной трансмутацией, так как в общем случае матрица \mathcal{M} может нетривиально (то есть не обратно-пропорционально) зависеть от масштаба расстояний между точками.

Термины и условные обозначения. В работе используются следующие обозначения. Повторяющиеся целочисленные индексы подразумевают суммирование. Скалярное произведение в круглых скобках означает либо интеграл по трехмерному пространству и суммирование по целочисленным индексам, либо только суммирование (в зависимости от объектов, к которым оно применяется)

$$(A, B) = \sum_k \int_{\mathbb{R}^3} \bar{A}_{\mathbf{x}}^k B_{\mathbf{x}}^k d^3x.$$

Мы будем называть оператором Лапласа Δ самосопряженный оператор с действием

$$\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x_l^2},$$

заданный на замыкании пространства гладких функций (скалярных или поперечных) в пространстве \mathbb{R}^3 . Мы будем считать, что разрез квадратного корня направлен вдоль положительной полуоси

$$\overline{\sqrt{\lambda}} = -\sqrt{\bar{\lambda}}, \quad 0 < \arg \lambda < 2\pi,$$

и при этом выбрана ветвь

$$\sqrt{\rho} = \sqrt{\rho + i0} > 0, \quad \rho > 0.$$

Под обозначением $i0$ мы понимаем предел соответствующего выражения со слагаемым $\pm i\varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow \pm 0$

$$\sqrt{\rho \pm i0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow \pm 0} \sqrt{\rho \pm i\varepsilon}.$$

Структура работы. Дальнейшее изложение состоит из следующих частей. Части 1–3 являются интерпретацией известных результатов теории квантовых полей и теории операторов в Гильбертовых пространствах. В части 1 мы выводим уравнения для ядра квадратичной формы гауссова функционала и записываем их решения, пользуясь теорией расширений замкнутых полуограниченных квадратичных форм. В части 2 выводятся выражения для резольвент самосопряженных расширений симметрических операторов, параметризованных с помощью матриц \mathcal{M} , связывающих граничные значения. В части 3, пользуясь функциональным исчислением операторов, условия допустимости записываются в терминах интегралов от резольвент и их производных. В части 4 сходимость вышеназванных интегралов переписывается в виде условий на матрицу \mathcal{M} . В пятой части вычисляется разность энергий для допустимых функционалов некоторого специального вида.

1 Решения уравнения для собственных состояний

Уравнения для ядра гауссова функционала. Запишем действие гамильтониана \mathcal{H} на гауссов функционал $\exp\{-\frac{1}{2}Q(B)\}$

$$\begin{aligned}\mathcal{H} \exp\{-\frac{1}{2}Q(B)\} &= \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \frac{\delta}{\delta B_x^k} \frac{\delta}{\delta B_x^k} \exp\{-\frac{1}{2}Q(B)\} + q(B) \exp\{-\frac{1}{2}Q(B)\} = \\ &= \left(- \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \frac{\delta Q(B)}{\delta B_x^k} \frac{\delta Q(B)}{\delta B_x^k} + \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \frac{\delta^2 Q(B)}{\delta B_x^k \delta B_x^k} + q(B) \right) \exp\{-\frac{1}{2}Q(B)\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $q(B)$ — это квадратичная форма оператора Лапласа

$$q(B) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left(\frac{\partial B_x^k}{\partial x_l} \right)^2.$$

Подставим вместо квадратичной формы $Q(B)$ ее выражение через ядро $Q^{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

$$Q(B) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x d^3y B_x^k Q^{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) B_y^l,$$

тогда выражение (5) перепишется в следующем виде

$$\begin{aligned}\mathcal{H} \exp\{-\frac{1}{2}Q(B)\} &= \left(-\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} B_y^l (Q^{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) Q^{kl'}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \right. \\ &\quad \left. + Q^{lk}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) Q^{kl'}(\mathbf{x}, \mathbf{z})) B_z^{l'} d^3x d^3y d^3z + q(B) + \text{Tr } Q \right) \exp\{-\frac{1}{2}Q(B)\},\end{aligned}$$

где

$$\text{Tr } Q = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x Q^{kk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}).$$

Для того, чтобы функционал $\exp\{-\frac{1}{2}Q(B)\}$ был собственным состоянием оператора \mathcal{H} с собственным значением $\text{Tr } Q$, необходимо, чтобы было выполнено условие

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} B_y^l (Q^{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) Q^{kl'}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + Q^{lk}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) Q^{kl'}(\mathbf{x}, \mathbf{z})) B_z^{l'} d^3x d^3y d^3z &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left(\frac{\partial B_x^k}{\partial x_l} \right)^2. \end{aligned} \tag{6}$$

Мы будем искать функционал $\exp\{-\frac{1}{2}Q(B)\}$ как функционал с симметричным ядром $Q^{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = Q^{lk}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, в этом случае условие (6) имеет более простой вид

$$\int_{\mathbb{R}^3} B_y^l Q^{lk}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) Q^{kl'}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) B_z^{l'} d^3x d^3y d^3z = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left(\frac{\partial B_x^k}{\partial x_l} \right)^2. \quad (7)$$

Здесь и далее мы считаем, что и поле B_x^k , и ядро $Q^{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ поперечны по переменным (\mathbf{x}, k) , (\mathbf{y}, l) и не требуют введения дополнительных проекторов.

Основное состояние свободного поля. Условие (7) очевидно выполнено, если Q является ядром положительного квадратного корня из оператора Лапласа Δ

$$Q_\Delta = \Delta^{1/2}. \quad (8)$$

Вакуумный функционал

$$\Omega_\Delta = \exp\{-\frac{1}{2}Q_\Delta(B)\} \quad (9)$$

и его возбуждения задают собственные состояния оператора Гамильтона свободного квантового поля. Энергия такого функционала пропорциональна интегралу

$$\text{Tr } Q_\Delta \sim \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \int_0^\infty \lambda d\lambda$$

и является бесконечной величиной, которую необходимо вычесть при вычислении энергии возбужденных состояний. Действительно, квантовое состояние, задаваемое произведением полиномиального функционала $a(B)$ степени M на Ω_Δ раскладывается в сумму (интеграл)

$$a(B)\Omega_\Delta = \sum_{m=0}^M \int dp_1 \dots dp_m \psi_{\sigma_1 \dots \sigma_m}^m(p_1, \dots p_m) \mathcal{B}_{\mathbf{p}_1}^{\sigma_1} \dots \mathcal{B}_{\mathbf{p}_m}^{\sigma_m} \Omega_\Delta, \quad (10)$$

где $\mathcal{B}_{\mathbf{p}}^\sigma$ – оператор рождения бозона с импульсом \mathbf{p} и поляризацией σ . Построение операторов рождения включает в себя диагонализацию ядра (8) с помощью преобразования Фурье, так, чтобы результат удовлетворял коммутационному соотношению

$$\mathcal{H}\mathcal{B}_{\mathbf{p}}^\sigma = \mathcal{B}_{\mathbf{p}}^\sigma (\mathcal{H} + |p|).$$

Отсюда следует, что

$$\mathcal{H}a(B)\Omega_\Delta = \sum_{m=0}^M \int dp_1 \dots dp_m \psi_{\sigma_1 \dots \sigma_m}^m(p_1, \dots p_m) \left(\sum_{k=1}^m |p_k| + \text{Tr } Q_\Delta \right) \Omega_\Delta,$$

то есть действие гамильтониана \mathcal{H}_B на состояние (10) сводится к умножению на $\text{Tr } Q_\Delta$ и сумме некоторого числа конечных (в зависимости от коэффициентов ψ) добавок.

Методы функционального интегрирования [4] позволяют ввести на множестве функционалов вида (10) скалярное произведение. Определим его как функциональный интеграл по всем полям $B_{\mathbf{x}}$, на которых задана квадратичная форма $Q_\Delta(B)$

$$\langle \Omega_1 | \Omega_2 \rangle = \int \bar{\Omega}_1(B) \Omega_2(B) \prod_{\mathbf{x}, k} \delta B_{\mathbf{x}}^k$$

и зафиксируем нормировку

$$\langle \Omega_\Delta | \Omega_\Delta \rangle = 1.$$

Тогда, полагая, что функциональный интеграл не меняется при сдвиге переменной интегрирования

$$\langle \Omega_\Delta | \exp\{2 \int A_{\mathbf{x}}^k B_{\mathbf{x}}^k d^3x\} | \Omega_\Delta \rangle = \exp\{\int_{\mathbb{R}^3} A_{\mathbf{x}}^k Q_{\Delta kl}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) A_{\mathbf{y}}^l d^3x d^3y\},$$

скалярное произведение состояний вида (10) вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \langle a_1(B) \Omega_\Delta | a_2(B) \Omega_\Delta \rangle &= \langle \Omega_\Delta | \bar{a}_1(B) a_2(B) | \Omega_\Delta \rangle = \\ &= \bar{a}_1\left(\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta A}\right) a_2\left(\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta A}\right) \exp\{\int_{\mathbb{R}^3} A_{\mathbf{x}}^k Q_{\Delta kl}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) A_{\mathbf{y}}^l d^3x d^3y\}. \end{aligned}$$

Здесь $Q_{\Delta kl}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ – это ядро оператора, обратного к $\Delta^{1/2}$.

Другие решения уравнения для ядра квадратичной формы. Покажем, что у уравнения (7) могут существовать другие решения, кроме ядра квадратного корня из оператора Лапласа. Мы специально записываем это уравнение не в виде равенства операторов, а в виде равенства значений квадратичных форм. Это позволяет воспользоваться возможностью существования различных квадратичных форм, принимающих одинаковые значения на общей части (пересечении) их областей определения. Обозначим как $\mathcal{D}[\Delta]$ множество гладких один раз дифференцируемых поперечных функций на пространстве \mathbb{R}^3 . Замыкание $\bar{\mathcal{D}}[\Delta]$ этого множества по норме, задаваемой положительной квадратичной формой $q(B)$, сохраняет условие поперечности. Поэтому мы будем считать, что функционалы квантовой теории изначально определены на множестве $\mathcal{D}[\Delta]$ и непрерывно продолжаются на $\bar{\mathcal{D}}[\Delta]$. Квадратичная форма

$q(B)$ оператора Лапласа на поперечном подпространстве имеет нетривиальные полуограниченные замкнутые расширения. То есть существуют квадратичные формы

$$q_{\mathcal{M}}(B) : \mathcal{D}_{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{C},$$

такие, что

$$q_{\mathcal{M}}(B) = q(B), \quad B \in \mathcal{D}[\Delta] \subset \mathcal{D}_{\mathcal{M}},$$

и при этом область определения $\mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ строго больше, чем $\mathcal{D}[\Delta]$. Далее мы будем параметризовать интересные нам расширения с помощью набора точек $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$ и симметричной матрицы \mathcal{M} размера $3N \times 3N$.

По теореме VIII.15 из [5] квадратичная форма $q_{\mathcal{M}}(B)$ может быть задана с помощью некоторого самосопряженного оператора $T_{\mathcal{M}}$

$$q_{\mathcal{M}}(B) = (B, T_{\mathcal{M}} B), \quad B \in \mathcal{D}(T_{\mathcal{M}}) \subset \mathcal{D}_{\mathcal{M}}.$$

Данное соотношение выполняется на области определения оператора $\mathcal{D}(T_{\mathcal{M}})$, и, пользуясь полуограниченностью, непрерывно продолжается до замкнутого множества $\mathcal{D}_{\mathcal{M}}$, которое в литературе также обозначается как $\mathcal{D}[T_{\mathcal{M}}]$. Зная спектральное разложение оператора $T_{\mathcal{M}}$ можно построить квадратный корень $T_{\mathcal{M}}^{1/2}$, то есть, оператор, для которого, в том числе, выполняется соотношение

$$(T_{\mathcal{M}}^{1/2} B, T_{\mathcal{M}}^{1/2} B) = q_{\mathcal{M}}(B),$$

которое при сужении на множество $\mathcal{D}[\Delta]$ дает решение уравнения (6). И, таким образом, квадратичная форма $Q_{\mathcal{M}}(B)$ оператора $T_{\mathcal{M}}^{1/2}$

$$Q_{\mathcal{M}}(B) = (B, T_{\mathcal{M}}^{1/2} B), \quad B \in \mathcal{D}(T_{\mathcal{M}}) \tag{11}$$

может быть использована для построения собственных состояний

$$\Omega_{\mathcal{M}} = \exp\left\{-\frac{1}{2} Q_{\mathcal{M}}(B)\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} B_{\mathbf{x}} T_{\mathcal{M}}^{1/2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) B_{\mathbf{y}} d^3x d^3y\right\} \tag{12}$$

оператора \mathcal{H}

$$\mathcal{H} \Omega_{\mathcal{M}} = \text{Tr } T_{\mathcal{M}}^{1/2} \Omega_{\mathcal{M}}.$$

Здесь стоит отметить, что несмотря на то, что квадратичная форма $q_{\mathcal{M}}$ на множестве $\mathcal{D}[\Delta] \subset \mathcal{D}[T_{\mathcal{M}}]$ совпадает с квадратичной формой $q(B)$ оператора Лапласа Δ , действие квадратичной формы $Q_{\mathcal{M}}(B)$ оператора $T_{\mathcal{M}}^{1/2}$ на $\mathcal{D}[\Delta]$ принципиально отличается от действия формы $Q_{\Delta}(B)$ корня из оператора Лапласа. То есть гауссов функционал $\Omega_{\mathcal{M}}$ является еще одним, отличным от свободного, решением уравнения на собственные состояния (3).

2 Резольвенты самосопряженных расширений симметрического оператора

Формула Крейна. Рассмотрим более подробно, как выглядят замкнутые расширения квадратичной формы оператора Лапласа $q(B)$. Для этого обратимся к теории Бирмана-Вишика-Крейна [6], [7], [8], описывающей структуру самосопряженных расширений полуограниченных симметрических операторов. Будем предполагать, что асимптотически свободное взаимодействие поля B с другими полями после перенормировки сводится к появлению нетривиальных граничных условий. А именно, предположим, что операторы рождения второго поля в точках $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$ приводят к возможности неограниченного роста для поля B в этих точках и расходимостям, главные члены асимптотик которых связаны между собой матрицей \mathcal{M} , зависящей от волновой функции второго поля.

Рассмотрим оператор $\Delta_{\{\mathbf{x}_n\}}$, действие которого совпадает с действием оператора Лапласа, но определенный на множестве $\mathcal{W}_{\{\mathbf{x}_n\}}$ гладких поперечных функций, исчезающих в точках $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$ вместе с первыми производными. Такой оператор является симметрическим оператором с нетривиальными индексами дефекта $(3N, 3N)$ или $(3NC, 3NC)$, $C > 1$ для теории с внутренней симметрией. Для описания самосопряженных расширений этого оператора в терминах граничных значений удобно воспользоваться теорией векторов граничных значений [9].

Теория Бирмана-Вишика-Крейна использует понятие аналитического дефектного вектора¹. Пусть функция $D_\lambda^\alpha(\mathbf{x})$, $\alpha = \{m, n\}$ является элементом дефектного подпространства оператора $\Delta_{\{\mathbf{x}_n\}}$ для точки $\lambda \in \mathbb{C}$, не лежащей на положительной полуси, то есть удовлетворяет уравнению

$$(D_\lambda^\alpha, (\Delta - \lambda)h) = 0, \quad h \in \mathcal{W}_{\{\mathbf{x}_n\}}.$$

Пусть также функция $D_\lambda^\alpha(\mathbf{x})$ аналитична по параметру λ и удовлетворяет условию

$$D_\lambda = D_\mu + (\lambda - \mu)R_\lambda D_\mu, \tag{13}$$

где R_λ – это резольвента некоторого выделенного самосопряженного расширения оператора $\Delta_{\{\mathbf{x}_n\}}$. Удобно считать, что R_λ – это резольвента

¹Здесь термин *вектор* используется в математическом смысле для обозначения элемента конечномерного дефектного подпространства. С точки зрения физики вводимый объект является тензором, так как помимо индекса m , содержащегося в α , он, как элемент пространства поперечных функций, имеет еще один векторный индекс.

оператора Лапласа

$$R_\lambda^{kk'}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \delta_{kk'},$$

которая, как несложно увидеть, оставляет поперечное пространство инвариантным. В этом случае поперечные аналитические дефектные векторы имеют следующий вид [10]

$$D_\lambda^{mn}(\mathbf{x}) = \partial \times ((\mathbf{x} - \mathbf{x}^n) \times \partial) \frac{\sqrt{2}w(\sqrt{\lambda}|\mathbf{x} - \mathbf{x}^n|)}{3\sqrt{\lambda}|\mathbf{x} - \mathbf{x}^n|} Y_{1m}\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}^n}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^n|}\right), \quad (14)$$

где

$$w(t) = \frac{3}{2} \frac{d}{dt} \frac{e^{it} - 1}{t} = \frac{3}{2t^2}(ite^{it} - e^{it} + 1), \quad (15)$$

а Y_{1m} — это сферическая функция. Аналитические дефектные векторы для скалярного оператора $\Delta_{\{\mathbf{x}_n\}}$ выглядят следующим образом

$$D_\lambda^n = \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\mathbf{x}-\mathbf{x}^n|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}^n|}. \quad (16)$$

Теория сингулярных возмущений [2] интерпретирует векторы D_λ^α как результат применения резольвенты невозмущенного оператора Δ к сингулярному потенциалу, то есть к δ -функции, взятой в одной из точек \mathbf{x}^n . Для скалярного случая (16) эта интерпретация очевидна (с точностью до коэффициента), в то время как для векторного она не очень наглядна из-за необходимости применения проекторов.

В работе Крейна [8] показано, что резольвента \tilde{R}_λ самосопряженного расширения общего вида оператора $\Delta_{\{\mathbf{x}_n\}}$ выражается через резольвенту R_μ следующим образом

$$\tilde{R}_\lambda = R_\lambda + b_{\alpha\beta}(\lambda) D_\lambda^\alpha(D_\lambda^\beta, \cdot), \quad (17)$$

при условии, что функция $b_{\alpha\beta}(\lambda)$ удовлетворяет уравнению (формуле Крейна)

$$b_{\alpha\beta}^{-1}(\lambda) - b_{\alpha\beta}^{-1}(\mu) = (\mu - \lambda)(D_\lambda^\alpha, D_\mu^\beta). \quad (18)$$

Таким образом, перебирая разные решения уравнения (18) мы будем получать резольвенты (17) разных самосопряженных расширений симметрического оператора $\Delta_{\{\mathbf{x}_n\}}$.

Решения уравнения из формулы Крейна. Для параметризации решений уравнения (18) обратимся к теории векторов граничных значений. Рассмотрим оператор $\Delta_{\{\mathbf{x}_n\}}^*$, сопряженный к $\Delta_{\{\mathbf{x}_n\}}$. Его область определения $\mathcal{W}_{\{\mathbf{x}_n\}}^*$ состоит из элементов d , таких, что выражение

$$(d, \Delta_{\mathbf{x}_n} h) = (d, \Delta h), \quad h \in \mathcal{W}_{\{\mathbf{x}_n\}}$$

является ограниченным линейным функционалом по h . Так как оператор $\Delta_{\{\mathbf{x}_n\}}$ задан на множестве функций, исчезающих в окрестностях точек \mathbf{x}_n вместе с первыми производными, то оператор $\Delta_{\{\mathbf{x}_n\}}^*$ определен на более широком множестве, включающем в себя функции, неограниченные растущие в точках \mathbf{x}_n (замыкаемость оператора $\Delta_{\{\mathbf{x}_n\}}$ и сохранение поведения области определения в точках \mathbf{x}_n должны, разумеется, проверяться отдельно). Введем на множестве $\mathcal{W}_{\{\mathbf{x}_n\}}^*$ операторы граничных значений Ξ и Γ как линейные отображения

$$\Xi : \mathcal{W}_{\{\mathbf{x}_n\}}^* \rightarrow \mathbb{C}^{3N}, \quad \Gamma : \mathcal{W}_{\{\mathbf{x}_n\}}^* \rightarrow \mathbb{C}^{3N},$$

обращающиеся в ноль на множестве $\mathcal{W}_{\{\mathbf{x}_n\}}$ и удовлетворяющие равенству

$$(\Delta_{\{\mathbf{x}_n\}}^* d, g) - (d, \Delta_{\{\mathbf{x}_n\}}^* g) = (\Gamma d, \Xi g) - (\Xi d, \Gamma g), \quad d, g \in \mathcal{W}_{\{\mathbf{x}_n\}}^*.$$

Здесь в правой части стоят скалярные произведения в конечномерном пространстве \mathbb{C}^{3N} . В упрощенном виде Ξ и Γ можно понимать как векторные линейные функционалы, сопоставляющие поперечным функциям, соответственно, вектора первых и вторых коэффициентов разложения в окрестностях точек \mathbf{x}_n .

Операторы Ξ и Γ , очевидно, определены с точностью до унитарного преобразования в \mathbb{C}^{3N} . Более того, их можно выбрать таким образом, чтобы для всех точек λ , в которых определена резольвента R_λ и аналитические дефектные векторы D_λ^α , выполнялось условие

$$[\Xi D_\lambda^\alpha]_\beta = \delta_{\alpha\beta},$$

(то есть коэффициенты при старших расходимостях в точках \mathbf{x}_n у 3 разных компонент аналитических дефектных векторов D_λ^{mn} равны единице). В то же время для действия оператора Γ на векторы D_λ^α мы будем предполагать выполнение условий вещественности и симметричности

$$\overline{[\Gamma D_\lambda^\alpha]}_\beta = [\Gamma D_{\bar{\lambda}}^\alpha]_\beta, \quad [\Gamma D_\lambda^\alpha]_\beta = [\Gamma D_\lambda^\beta]_\alpha.$$

Теперь можно показать, что функция $b_{\alpha\beta}(\lambda)$, определенная через соотношение

$$b_{\alpha\beta}^{-1}(\lambda) = \mathcal{M}_{\alpha\beta} - [\Gamma D_\lambda^\alpha]_\beta, \quad (19)$$

удовлетворяет уравнению (18). Действительно

$$\begin{aligned} b_{\alpha\beta}^{-1}(\lambda) - b_{\alpha\beta}^{-1}(\mu) &= [\Gamma D_\mu^\alpha]_\beta - [\Gamma D_\lambda^\alpha]_\beta = [\Gamma D_\mu^\beta]_\alpha - [\Gamma D_\lambda^\beta]_\alpha = \\ &= (\Xi D_\lambda^\alpha, \Gamma D_\mu^\beta) - (\Gamma D_\lambda^\alpha, \Xi D_\mu^\beta) = (D_\lambda^\alpha, \Delta_{\{\mathbf{x}_n\}}^* D_\mu^\beta) - (\Delta_{\{\mathbf{x}_n\}}^* D_\lambda^\alpha, D_\mu^\beta) = \\ &= (\mu - \lambda)(D_\lambda^\alpha, D_\mu^\beta). \end{aligned} \quad (20)$$

Для того, чтобы функция $R_\lambda^{\mathcal{M}}$, построенная по выражению (17) с помощью функции (19), являлась резольвентой самосопряженного оператора, необходимо, чтобы было выполнено условие

$$R_\lambda^{\mathcal{M}*} = R_{\bar{\lambda}}^{\mathcal{M}}, \quad [R_\lambda^{\mathcal{M}*}]^{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [R_{\bar{\lambda}}^{\mathcal{M}}]^{\beta\alpha}(\mathbf{y}, \mathbf{x}).$$

Из этого условия и свойства

$$\bar{D}_\lambda^\alpha = D_{\bar{\lambda}}^\alpha,$$

следует, что

$$\overline{b_{\alpha\beta}(\lambda)} = b_{\beta\alpha}(\bar{\lambda}),$$

и далее мы приходим к условию эрмитовости матрицы \mathcal{M} из (19)

$$\mathcal{M}^T = \bar{\mathcal{M}}, \quad \bar{\mathcal{M}}_{\alpha\beta} = \mathcal{M}_{\beta\alpha}.$$

Очевидно, что разным эрмитовым матрицам \mathcal{M} соответствуют ядра разных резольвент (17), то есть разные самосопряженные расширения оператора $\Delta_{\{\mathbf{x}_n\}}$. Для того, чтобы перечислить резольвенты всех возможных самосопряженных расширений оператора $\Delta_{\{\mathbf{x}_n\}}$, необходимо также принять в расчет матрицы, обращающиеся в бесконечность на каких-либо подпространствах пространства \mathbb{C}^{3N} . Или, что более точно, необходимо дополнить формулу Крейна проекторами P_α^m на все возможные подпространства размерности M , $0 \leq M \leq 3N$

$$R_\lambda^{\mathcal{M}} = R_\lambda + b_{mm'}(\lambda)P_\alpha^m D_\lambda^\alpha(\bar{P}_\beta^{m'} D_{\bar{\lambda}}^\beta, \cdot), \quad m, m' = 1, \dots, M, \quad (21)$$

где

$$b_{mm'}^{-1}(\lambda) = \mathcal{M}_{mm'} - \bar{P}_\alpha^m [\Gamma D_\lambda^\alpha]_\beta P_\beta^{m'}, \quad \bar{P}_\alpha^m P_\alpha^{m'} = \delta_{mm'}. \quad (22)$$

В частности, оператору Лапласа соответствует матрица \mathcal{M} , бесконечная на всем пространстве \mathbb{C}^{3N} , или проектор P на пустое пространство, что порождает функцию $b_{\alpha\beta}(\lambda)$, тождественно равную нулю.

Также стоит отметить, что нули определителя правой части в решениях (19) и (22) порождают полюса резольвенты (17).

Границные значения и матрица \mathcal{M} . Покажем теперь, как матрица \mathcal{M} описывает область определения самосопряженного расширения в терминах граничных значений. Утверждение состоит в том, что область определения самосопряженного расширения $T_{\mathcal{M}}$ с резольвентой $R_{\lambda}^{\mathcal{M}}$, задаваемой с помощью функции (19), имеет следующий вид

$$\mathcal{D}(T_{\mathcal{M}}) = \{d \in \mathcal{W}_{\{\mathbf{x}_n\}}^* : \mathcal{M}\Xi d = \Gamma d\}. \quad (23)$$

Действительно, из теории Бирмана-Вишика-Крейна следует, что область определения оператора $T_{\mathcal{M}}$ разлагается в прямую сумму пространства $\mathcal{W}_{\{\mathbf{x}_n\}}$ и линейной оболочки векторов $R_{\lambda}^{\mathcal{M}} D_{\mu}^{\beta}$, $\mu < 0$

$$\mathcal{D}(T_{\mathcal{M}}) = \mathcal{W}_{\{\mathbf{x}_n\}} \dot{+} \{R_{\lambda}^{\mathcal{M}} D_{\mu}^{\beta}\}, \quad \mu < 0.$$

Операторы Ξ и Γ равны нулю на пространстве $\mathcal{W}_{\{\mathbf{x}_n\}}$, поэтому достаточно проверить, что оператор $\mathcal{M}\Xi - \Gamma$ зануляется на векторах вида $R_{\lambda}^{\mathcal{M}} D_{\mu}^{\beta}$. Подействуем оператором $\mathcal{M}\Xi - \Gamma$ на элемент $R_{\lambda}^{\mathcal{M}} D_{\mu}^{\beta}$

$$\mathcal{M}_{\alpha\alpha'} [\Xi R_{\lambda}^{\mathcal{M}} D_{\mu}^{\beta}]_{\alpha'} - [\Gamma R_{\lambda}^{\mathcal{M}} D_{\mu}^{\beta}]_{\alpha} = \mathcal{M}_{\alpha\alpha'} [\Xi R_{\lambda} D_{\mu}^{\beta}]_{\alpha'} + \quad (24)$$

$$+ \mathcal{M}_{\alpha\alpha'} [\Xi D_{\lambda}^{\gamma}]_{\alpha'} b_{\gamma\gamma'}(\lambda) (D_{\lambda}^{\gamma'}, D_{\mu}^{\beta}) - [\Gamma R_{\lambda} D_{\mu}^{\beta}]_{\alpha} - [\Gamma D_{\lambda}^{\gamma}]_{\alpha} b_{\gamma\gamma'}(\lambda) (D_{\lambda}^{\gamma'}, D_{\mu}^{\beta}) = \\ = \mathcal{M}_{\alpha\alpha'} [\Xi R_{\lambda} D_{\mu}^{\beta}]_{\alpha'} + (\mathcal{M}_{\alpha\gamma} - [\Gamma D_{\lambda}^{\gamma}]_{\alpha}) b_{\gamma\gamma'}(\lambda) (D_{\lambda}^{\gamma'}, D_{\mu}^{\beta}) - [\Gamma R_{\lambda} D_{\mu}^{\beta}]_{\alpha}. \quad (25)$$

Если R_{λ} — это резольвента оператора Лапласа, то область ее значений не содержит расходящиеся функции и обнуляется оператором Ξ . Поэтому первое слагаемое в (25) содержит нулевой сомножитель

$$[\Xi R_{\lambda} D_{\mu}^{\beta}]_{\alpha'} = 0.$$

Из определения (19) следует, что

$$(\mathcal{M}_{\alpha\gamma} - [\Gamma D_{\lambda}^{\gamma}]_{\alpha}) b_{\gamma\gamma'}(\lambda) = \delta_{\alpha\gamma'},$$

и, таким образом, второе слагаемое в (25) равно $(D_{\lambda}^{\alpha}, D_{\mu}^{\beta})$. Третье слагаемое с помощью уравнения (13) преобразуется следующим образом

$$[\Gamma R_{\lambda} D_{\mu}^{\beta}]_{\alpha} = (\lambda - \mu)^{-1} [\Gamma (D_{\lambda}^{\beta} - D_{\mu}^{\beta})]_{\alpha} = \\ = (\lambda - \mu)^{-1} ((\Xi D_{\lambda}^{\alpha}, \Gamma D_{\mu}^{\beta}) - (\Gamma D_{\lambda}^{\alpha}, \Xi D_{\mu}^{\beta})) = (D_{\lambda}^{\alpha}, D_{\mu}^{\beta}),$$

и, следовательно, последние два слагаемых в (25) сокращаются.

3 Условия допустимости в терминах матрицы \mathcal{M}

Резольвента оператора $T_{\mathcal{M}}$ позволяет построить для него функциональное исчисление. Для функции f с конечным числом разрезов и особенностей от оператора $T_{\mathcal{M}}$ с непрерывным спектром лежащим на положительной полуоси и конечным числом дискретных отрицательных собственных значений ρ_m справедлива следующая формула

$$f(T_{\mathcal{M}}) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty (R_{\rho+i0}^{\mathcal{M}} - R_{\rho-i0}^{\mathcal{M}}) f(\rho) d\rho - \sum_m f(\rho_m) \operatorname{Res}[R_\lambda^{\mathcal{M}}]|_{\lambda=\rho_m}. \quad (26)$$

При этом особенности – полюса и разрезы – функции f не должны налагдываться на особенности резольвенты.

Воспользуемся выражением (26) для определения нормировки функционала (12). Формула для функционального интеграла от Гауссова функционала дает следующее соотношение

$$\frac{\langle \Omega_{\mathcal{M}} | \Omega_{\mathcal{M}} \rangle}{\langle \Omega_{\Delta} | \Omega_{\Delta} \rangle} = \frac{\operatorname{Det} \Delta^{1/4}}{\operatorname{Det} (\operatorname{Re} T_{\mathcal{M}}^{1/2})^{1/2}} = \exp\left\{\frac{1}{2} \operatorname{Tr}(\ln \Delta^{1/2} - \ln \operatorname{Re} T_{\mathcal{M}}^{1/2})\right\}. \quad (27)$$

При попытке подставить интеграл (26) в это соотношение видно, что отрицательные собственные значения дискретного спектра ρ_m дадут вклады вида

$$\exp\left\{-\frac{1}{2} \ln \operatorname{Re} \sqrt{\rho_m}\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2} \ln 0\right\},$$

то есть бесконечно большие сомножители в нормировке. Таким образом, можно сделать вывод, что расширения $T_{\mathcal{M}}$ с дискретным спектром являются недопустимыми с точки зрения условия 1 на стр. 4. По этой причине далее мы будем рассматривать только такие операторы $T_{\mathcal{M}}$, у которых отсутствует дискретный спектр.

Применим теперь формулу (26) для построения самого функционала $\Omega_{\mathcal{M}}$. Рассматривая интегралы по контуру вокруг положительной полуоси, можно показать, что если взять в качестве $f(\rho)$ квадратный корень и направить его разрез вдоль отрицательной полуоси, то для ядра

$$T_{\mathcal{M}}^{1/2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty (R_{\rho+i0}^{\mathcal{M}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - R_{\rho-i0}^{\mathcal{M}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \sqrt{\rho} d\rho,$$

будет выполнено равенство

$$T_{\mathcal{M}}^{1/2} T_{\mathcal{M}}^{1/2} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty (R_{\rho+i0}^{\mathcal{M}} - R_{\rho-i0}^{\mathcal{M}}) \rho d\rho = T_{\mathcal{M}}.$$

Для того, чтобы выполнялось уравнение (7) необходима симметричность ядра $T_{\mathcal{M}}^{1/2}$. Подстановка резольвенты из формулы Крейна (17) в (26) дает для этого ядра следующее выражение

$$T_{\mathcal{M}}^{1/2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty (R_{\rho+i0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + b_{\alpha\beta}(\rho+i0) D_{\rho+i0}^\alpha(\mathbf{x}) D_{\rho+i0}^\beta(\mathbf{y}) - R_{\rho-i0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - b_{\alpha\beta}(\rho-i0) D_{\rho-i0}^\alpha(\mathbf{x}) D_{\rho-i0}^\beta(\mathbf{y})) \sqrt{\rho} d\rho.$$

Здесь мы опустили индексы у $T_{\mathcal{M}}^{1/2}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $R_\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $D_\lambda^\alpha(\mathbf{x})$. Для того, чтобы ядро $T_{\mathcal{M}}^{1/2}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ было симметрично, необходимо, чтобы матрица $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$, которая входит в $b_{\alpha\beta}(\lambda)$, была не просто эрмитовой, а симметричной.

Теперь, воспользовавшись формулой для ядра $T_{\Delta}^{1/2}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, запишем разность следов квадратных корней расширения $T_{\mathcal{M}}$ и оператора Лапласа

$$E(\mathcal{M}) = \text{Tr } T_{\mathcal{M}}^{1/2} - \text{Tr } \Delta^{1/2} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty (b_{\alpha\beta}(\rho+i0)(D_{\rho-i0}^\alpha, D_{\rho+i0}^\beta) - b_{\alpha\beta}(\rho-i0)(D_{\rho+i0}^\alpha, D_{\rho-i0}^\beta)) \sqrt{\rho} d\rho. \quad (28)$$

Вычисление (20) позволяет преобразовать скалярные произведения $(D_{\rho-i0}^\alpha, D_{\rho+i0}^\beta)$, действительно

$$(D_{\bar{\mu}}^\alpha, D_\lambda^\beta) = \frac{[\Gamma D_\mu^\alpha]_\beta - [\Gamma D_\lambda^\alpha]_\beta}{\mu - \lambda}. \quad (29)$$

Отсюда следует, что

$$(D_\mu^\alpha, D_\mu^\beta) = \frac{d}{d\mu} [\Gamma D_\mu^\alpha]_\beta,$$

и в результате, используя (19), мы получаем следующее выражение для разности следов (28)

$$E(\mathcal{M}) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \left(\frac{d\Gamma_\mu^{\alpha\beta}}{d\mu} (\mathcal{M} - \Gamma_\mu)_{\alpha\beta}^{-1}|_{\rho+i0} - \frac{d\Gamma_\mu^{\alpha\beta}}{d\mu} (\mathcal{M} - \Gamma_\mu)_{\alpha\beta}^{-1}|_{\rho-i0} \right) \sqrt{\rho} d\rho, \quad (30)$$

где мы ввели естественное обозначение

$$\Gamma_\mu^{\alpha\beta} = [\Gamma D_\mu^\alpha]_\beta.$$

Приминительно к нормировке (27), функциональное исчисление для оператора $T_{\mathcal{M}}$ дает следующий результат

$$\begin{aligned} \frac{\langle \Omega_{\mathcal{M}} | \Omega_{\mathcal{M}} \rangle}{\langle \Omega_{\Delta} | \Omega_{\Delta} \rangle} = & \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \left(\frac{d\Gamma_\mu^{\alpha\beta}}{d\mu} (\mathcal{M} - \Gamma_\mu)_{\alpha\beta}^{-1} \Big|_{\rho+i0} - \right. \\ & \left. - \frac{d\Gamma_\mu^{\alpha\beta}}{d\mu} (\mathcal{M} - \Gamma_\mu)_{\alpha\beta}^{-1} \Big|_{\rho-i0} \right) \ln \rho d\rho. \quad (31) \end{aligned}$$

Таким образом, условие допустимости функционала $\Omega_{\mathcal{M}}$, заданного выражением (12), сводится к отсутствию дискретного спектра и конечности интегралов (30) и (31).

4 Сходимость интегралов

Посмотрим, каким условиям должна удовлетворять матрица \mathcal{M} , чтобы функционал $\Omega_{\mathcal{M}}$ был допустимым. Ключевым объектом для вычисления интегралов (30) и (31) является матрица $\Gamma_\mu^{\alpha\beta}$, изначально определенная как матрица вторых коэффициентов в разложении сингулярностей аналитических дефектных векторов в окрестностях точек $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$. Другим определением для матрицы $\Gamma_\mu^{\alpha\beta}$ может служить уравнение (29), решение которого фиксируется с точностью до матрицы, не зависящей от спектрального параметра. Таким образом вводится Q -функция, используемая в теории сингулярных возмущений [2]. В дальнейших вычислениях мы нигде не будем опираться на происхождение матрицы $\Gamma_\mu^{\alpha\beta}$, однако, нам будет удобно иметь для нее убывающую асимптотику на бесконечности для ведиагональных членов. Поэтому мы по-прежнему будем считать, что $\Gamma_\mu^{\alpha\beta}$ – это матрица векторов граничных значений.

В данной работе мы ограничимся случаем $N = 2$ взаимодействия поля B с двумя внешними частицами. В этой ситуации матрица $\Gamma_\mu^{\alpha\beta}$ диагонализуема одним преобразованием для всех значений μ и большинство вычислений можно провести без применения численных методов. Для случая взаимодействия скалярного поля с 2 точечными источниками эта матрица имеет простой вид

$$\Gamma_\mu^{nn'} = \begin{pmatrix} i\sqrt{\mu} & \frac{e^{i\sqrt{\mu}r}}{r} \\ \frac{e^{i\sqrt{\mu}r}}{r} & i\sqrt{\mu} \end{pmatrix}, \quad (32)$$

где $r = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|$ – это расстояние между точками \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 . Случай векторного поперечного поля был разобран в [10], если условиться, что

$\alpha = m, n, \beta = m', n'$, индекс n нумерует строки, а n' столбцы, то матрица $\Gamma_\mu^{\alpha\beta}$ имеет следующий блочный вид

$$\Gamma_\mu^{nm,n'm'} = \begin{pmatrix} i\sqrt{\mu}I_{mm'} & \frac{1}{r}w(\sqrt{\mu}r)(3J_{mm'} - I_{mm'}) \\ \frac{1}{r}w(\sqrt{\mu}r)(3J_{mm'} - I_{mm'}) & i\sqrt{\mu}I_{mm'} \end{pmatrix}, \quad (33)$$

где

$$I_{mm'} = \delta_{mm'}, \quad J_{mm'} = \frac{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)_m(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)_{m'}}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^2},$$

а функция w была определена ранее в (15). Так как элементы матриц Γ_μ являются скалярными произведениями, то их вид легко обобщается на произвольное значение N . Для этого достаточно увеличить число строк и столбцов в (32), (33), и заменить вне диагонали разности $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ на $\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n'}$, и $r = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|$ на $r_{nn'} = |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n'}|$.

Конечность разности собственных значений. Вычислим условия на матрицу \mathcal{M} , необходимые для того, чтобы интеграл (30) был конечен. Расходимость этого интеграла связана прежде всего с поведением подинтегральной функции на бесконечности. С учетом возможности появления проектора в формуле для резольвенты (22), будем решать более общую задачу. А именно, пусть матрицы Γ_μ^{mn} и $\Gamma_\mu'^{mn}$ имеют следующий вид

$$\Gamma_\mu^{mn} = i\sqrt{\mu}\delta_{mn} + G_{mn}, \quad \Gamma_\mu'^{mn} = \frac{i}{2\sqrt{\mu}}(\delta_{mn} + G'_{mn}), \quad m, n = 1, \dots, M, \quad (34)$$

где поведение G_{mn} и G'_{mn} на бесконечности устроено следующим образом

$$G_{mn} = \frac{C_{mn}e^{i\sqrt{\mu}r_{mn}}}{\sqrt{\mu}} + \mathcal{O}_{mn}\left(\frac{1}{\mu}\right), \quad G'_{mn} = \frac{ir_{mn}C_{mn}e^{i\sqrt{\mu}r_{mn}}}{\sqrt{\mu}} + \mathcal{O}'_{mn}\left(\frac{1}{\mu}\right). \quad (35)$$

Видно, что, допуская в правых частях G_{mn} , G'_{mn} суммирование по периодам r_{mn} , эта задача включает в себя как матрицу (33), так и все возможные действия на нее проекторов. Запишем следующие оценки

$$\text{Det}(\mathcal{M} - \Gamma) = (-i\sqrt{\mu})^M + \text{Tr}(\mathcal{M} - \Gamma)(-i\sqrt{\mu})^{M-1} + \mathcal{O}(-i\sqrt{\mu})^{M-2}, \quad (36)$$

$$(\mathcal{M} - \Gamma)^{-1}_{mn} = \text{Det}^{-1}(\mathcal{M} - \Gamma) \left[((-i\sqrt{\mu})^{M-1} + \text{Tr}(\mathcal{M} - G)(-i\sqrt{\mu})^{M-2})\delta_{mn} - (\mathcal{M} - G)_{mn}(-i\sqrt{\mu})^{M-2} + \mathcal{O}_{mn}(-i\sqrt{\mu})^{M-3} \right]. \quad (37)$$

Умножая (34) на (37) и суммируя по индексам получаем

$$\begin{aligned} \text{Tr}\left((\mathcal{M} - \Gamma)^{-1} \frac{d\Gamma}{d\mu}\right) &= \frac{i}{2\sqrt{\mu}} \text{Det}^{-1}(\mathcal{M} - \Gamma) [(M + G'_{mm})(-i\sqrt{\mu})^{M-1} + \\ &+ ((M-1) \text{Tr}(\mathcal{M} - G) + \text{Tr}(\mathcal{M} - G) \text{Tr} G' + \text{Tr}(\mathcal{M} - G)G')(-i\sqrt{\mu})^{M-2} + \\ &+ \mathcal{O}(-i\sqrt{\mu})^{M-3}]. \end{aligned} \quad (38)$$

Коэффициент при $(-i\sqrt{\mu})^{M-2}$

$$\omega(\mu) = (M-1) \text{Tr}(\mathcal{M} - G) + \text{Tr}(\mathcal{M} - G) \text{Tr} G' + \text{Tr}(\mathcal{M} - G)G'$$

имеет следующее поведение на бесконечности

$$\omega(\mu) = (M-1) \text{Tr}(\mathcal{M} - G) + \frac{C_{mn} e^{i\sqrt{\mu}r_{mn}}}{\sqrt{\mu}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\mu}\right), \quad (39)$$

где $C_{mn} e^{i\sqrt{\mu}r_{mn}}$ является суммой экспонент с различными периодами. Подставляя (38) и (36) в (30) получаем

$$\begin{aligned} E(\mathcal{M}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left[\frac{(M + G'_{mm}^+)(-i\sqrt{\rho})^{M-1} + \omega^+(-i\sqrt{\rho})^{M-2} + \mathcal{O}(-i\sqrt{\rho})^{N-3}}{(-i\sqrt{\rho})^M + \text{Tr}(\mathcal{M} - G^+)(-i\sqrt{\rho})^{M-1} + \mathcal{O}(-i\sqrt{\rho})^{M-2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(M + G'_{mm}^-)(i\sqrt{\rho})^{M-1} + \omega^-(-i\sqrt{\rho})^{M-2} + \mathcal{O}(i\sqrt{\rho})^{N-3}}{(i\sqrt{\rho})^M + \text{Tr}(\mathcal{M} - G^-)(i\sqrt{\rho})^{M-1} + \mathcal{O}(i\sqrt{\rho})^{M-2}} \right] d\rho. \end{aligned} \quad (40)$$

Здесь

$$G_{mn}^\pm = G_{mn}(\pm\sqrt{\rho}), \quad G'_{mn}^\pm = G'_{mn}(\pm\sqrt{\rho}), \quad \omega^\pm = \omega(\pm\sqrt{\rho}),$$

а знак у второго слагаемого изменился за счет соотношения

$$\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho - i0}} = \frac{\sqrt{\rho + i0}}{\sqrt{\rho - i0}} = -1.$$

Далее приведем слагаемые к общему знаменателю и получим интеграл от дроби, в числителе которой стоит выражение

$$\begin{aligned} &i \text{Tr}(G'^+ - G'^-) \rho^{M-1/2} + (2M \text{Tr} \mathcal{M} - \omega^+ - \omega^- - M \text{Tr}(G^+ + G^-) + \\ &+ \text{Tr} \mathcal{M} \text{Tr}(G'^+ + G'^-) - \text{Tr} G'^+ \text{Tr} G^- - \text{Tr} G'^- \text{Tr} G^+) \rho^{M-1} + \mathcal{O}(\rho^{M-3/2}) \end{aligned} \quad (41)$$

а в знаменателе

$$\rho^M + i \text{Tr}(G^- - G^+) \rho^{M-1/2} + \mathcal{O}(\rho^{M-1}). \quad (42)$$

Подставляя разложения (35), (39) для G_{mn} , G'_{mn} и ω можно увидеть, что интеграл от первого слагаемого в (41) сходится как интеграл вида

$$\int_0^\infty C_{mn} \sin(\sqrt{\rho}r_{mn}) \frac{d\rho}{\rho}. \quad (43)$$

В то же время, во втором слагаемом содержится логарифмическая расходимость, пропорциональная $\text{Tr } \mathcal{M}$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{2M \text{Tr } \mathcal{M} - \omega^+ - \omega^-}{\rho^M + i \text{Tr}(G^- - G^+) \rho^{M-1/2} + \mathcal{O}(\rho^{M-1})} d\rho = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{2 \text{Tr } \mathcal{M} \rho^{M-1} - \tilde{C}_{mn} \sin(\sqrt{\rho}r_{mn}) \rho^{M-3/2} + \mathcal{O}(\rho^{M-2})}{\rho^M + i \text{Tr}(G^- - G^+) \rho^{M-1/2} + \mathcal{O}(\rho^{M-1})} d\rho. \end{aligned} \quad (44)$$

Отсюда следует, что необходимым и достаточным условием конечности интеграла (40) является равнство нулю следа матрицы \mathcal{M}

$$\text{Tr } \mathcal{M} = 0. \quad (45)$$

Похожие вычисления для случая скалярного поля (32) показывают, что помимо равенства (45) для конечности соответствующей разности следов требуется также сходимость интеграла

$$\frac{i}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Tr}(G'^- - G'^+)}{\sqrt{\rho}} d\rho,$$

который уже не будет иметь вид (43).

Приведенные выше выкладки можно также использовать для оценки разности следов логарифмов (31). Вычисления остаются такими же, но в знаменателе (42) появляется дополнительный множитель $\sqrt{\rho}$, а числитель (41) домножается на $\ln \rho$. Видно, что эти изменения снимают требование (45), то есть отношение (31) остается конечным для любой матрицы \mathcal{M} , не приводящей к появлению дискретного спектра у оператора $T_{\mathcal{M}}$.

Использование неотрицательности. В предыдущей части было показано, что матрица \mathcal{M} , определяющая самосопряженные расширения оператора $\Delta_{\{\mathbf{x}_n\}}$, должна обладать нулевым следом и не должна приводить к появлению дискретных собственных значений. Посмотрим, как эти требования сочетаются друг с другом. Для начала рассмотрим предельный случай $r \rightarrow \infty$ ($r_{nn'} \rightarrow \infty$ для $N > 2$), либо случай $N = 1$. Матрица Γ_μ тогда становится пропорциональной единичной матрице

$$\Gamma_\mu = i\sqrt{\mu}I, \quad (46)$$

матрица Γ'_μ также пропорциональна единичной, а положение полюсов функции

$$b_\mu = (\mathcal{M} - i\sqrt{\mu}I)^{-1}$$

определяется отрицательными собственными значениями матрицы \mathcal{M} . Очевидно, что условия нулевого следа у \mathcal{M} и отсутствия полюсов у $b(\mu)$ могут быть удовлетворены только при нулевой матрице \mathcal{M} , что приводит к нулевому значению $E(\mathcal{M})$. Заметим, что самосопряженное расширение T_0 , соответствующее $\mathcal{M} = 0$, не является оператором Лапласа Δ .

Обратимся теперь к случаю конечного расстояния r ($r_{nn'}$ для $N > 2$). Несложно увидеть, что условие отсутствия дискретного спектра у оператора $T_{\mathcal{M}}$ влечет за собой условие неотрицательности его квадратичной формы

$$0 \leq q_{\mathcal{M}}(B), \quad B \in \mathcal{D}[T_{\mathcal{M}}].$$

Введем на множестве самосопряженных расширений $T_{\mathcal{M}}$ частичное упорядочивание. Скажем, что $T_{\mathcal{M}_1} \leq T_{\mathcal{M}_2}$, если $\mathcal{D}[T_{\mathcal{M}_2}] \subset \mathcal{D}[T_{\mathcal{M}_1}]$ и

$$q_{\mathcal{M}_1}(B) \leq q_{\mathcal{M}_2}(B), \quad B \in \mathcal{D}[T_{\mathcal{M}_2}]. \quad (47)$$

Теория Бирмана-Вишика-Крейна утверждает, что среди всех неотрицательных самосопряженных расширений замыкаемого симметрического оператора с конечными индексами дефекта существует минимальное $T_{\mathcal{M}_K}$ и максимальное $T_{\mathcal{M}_F}$ расширения. То есть для произвольного неотрицательного расширения $T_{\mathcal{M}}$ установлены отношения

$$T_{\mathcal{M}_K} \leq T_{\mathcal{M}}, \quad T_{\mathcal{M}} \leq T_{\mathcal{M}_F}.$$

Кроме того, упорядочивание (47) оказывается монотонным по \mathcal{M} в смысле упорядочивания конечномерных матриц. То есть если $T_{\mathcal{M}_1} \leq T_{\mathcal{M}_2}$, то $\mathcal{D}(\mathcal{M}_2) \subset \mathcal{D}(\mathcal{M}_1)$ и

$$(b, \mathcal{M}_1 b) \leq (b, \mathcal{M}_2 b), \quad b \in \mathcal{D}(\mathcal{M}_2),$$

где мы учтем, что матрицы \mathcal{M}_1 и \mathcal{M}_2 могут быть определены на разных подпространствах конечномерного пространства \mathbb{C}^{3N} . Отсюда, учитывая равенство нулю следов \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 и их разности, становится ясно, что если интеграл (30) сходится для какой-либо матрицы \mathcal{M}_1 и мы хотим, чтобы он сходился для матрицы \mathcal{M}_2 , то необходимо, чтобы матрицы \mathcal{M}_1 и \mathcal{M}_2 совпадали на области определения \mathcal{M}_2

$$\mathcal{M}_1 b = \mathcal{M}_2 b, \quad b \in \mathcal{D}(\mathcal{M}_2) \subset \mathcal{D}(\mathcal{M}_1).$$

В нашем случае максимальное расширение, называемое расширением Фридрихса, является оператором Лапласа Δ , определяется матрицей \mathcal{M}_F , заданной только на нулевом векторе, и соответствует основному состоянию Ω_Δ свободной квантовой теории. Минимальное расширение (расширение Крейна) задается матрицей

$$\mathcal{M}_K = \Gamma_\mu|_{\mu=0} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{4r}(3J_{mm'} - I_{mm'}) \\ -\frac{3}{4r}(3J_{mm'} - I_{mm'}) & 0 \end{pmatrix}, \quad N = 2,$$

которая является допустимой с точки зрения конечности интегралов (30), (31). Для случая скалярного поля матрица \mathcal{M}_K имеет более простой вид

$$\mathcal{M}_K = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} & 0 \end{pmatrix}, \quad N = 2$$

и также имеет нулевой след. Таким образом, можно сделать вывод, что все самосопряженные расширения, удовлетворяющие условиям для существования интеграла $E(\mathcal{M})$, порождаются расширением Крейна, суженным с помощью ортогональных проекторов P_α^m на все возможные подпространства, с сохранением равенства нулю следа

$$P_\alpha^m \mathcal{M}_K^{\alpha\beta} P_\beta^m = 0.$$

Заметим, что для случаев $r \rightarrow \infty$ или $N = 1$, описываемых матрицей (46), расширение Крейна соответствует нулевой матрице $\mathcal{M}_K = 0$. Любое ее сужение на подпространство при матрице Γ_μ , пропорциональной единичной, порождает нулевую разность следов (30). То есть для случая $N = 1$ все допустимые состояния $\Omega_\mathcal{M}$ оказываются энергетически не выгоднее, чем свободная теория.

5 Вычисление разности собственных значений

Разность следов для расширения Крейна. Вычислим интеграл $E(\mathcal{M}_K)$ для матрицы, соответствующей минимальному расширению. Введем в 3-мерном пространстве ортонормированный базис $(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1}{|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1|}, \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = 0, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{r} = 0, \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 0.$$

Такие векторы являются собственными для ячеек матрицы (33), действительно

$$(3J - I)\mathbf{r} = 2\mathbf{r}, \quad (3J - I)\mathbf{p} = -\mathbf{p}, \quad (3J - I)\mathbf{q} = -\mathbf{q}.$$

Несложно увидеть, что замена базиса

$$\mathbf{e}_{mn} \rightarrow \tilde{\mathbf{e}}_{\pm}^{\{r,p,q\}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_{m1} \pm \mathbf{e}_{m2})\{r_m, p_m, q_m\} \quad (48)$$

диагонализует матрицу $\Gamma_{\mu}^{nm, n'm'}$ при любом μ . Собственные значения при этом равны

$$\gamma_{\pm}^r(\mu) = i\sqrt{\mu} \pm \frac{2}{r}w(\sqrt{\mu}r), \quad \gamma_{\pm}^{\{p,q\}}(\mu) = i\sqrt{\mu} \mp \frac{1}{r}w(\sqrt{\mu}r),$$

где функция $w(t)$ определена в (15). Как следствие, замена (48) диагонализует также матрицу $\mathcal{M}_K = \Gamma_{\mu}|_{\mu=0}$ с собственными значениями

$$\gamma_{K\pm}^r(\mu) = \mp \frac{3}{2r}, \quad \gamma_{K\pm}^{\{p,q\}}(\mu) = \pm \frac{3}{4r},$$

и матрицу $\frac{d\Gamma_{\mu}}{d\mu}$ с собственными значениями

$$\gamma'_{\pm}^r(\mu) = \frac{i}{2\sqrt{\mu}}(1 \mp 2w'(\sqrt{\mu}r)), \quad \gamma'_{\pm}^{\{p,q\}}(\mu) = \frac{i}{2\sqrt{\mu}}(1 \pm w'(\sqrt{\mu}r)).$$

Таким образом, интеграл (30) для матрицы \mathcal{M}_K распадается на сумму 6 интегралов, только 4 из которых отличаются друг от друга. В безразмерных переменных $t = \sqrt{\rho}r$ эта сумма выглядит следующим образом

$$E(\mathcal{M}_K) = \frac{1}{r} \sum_{\substack{\xi=1,1,-2, \\ -1,-1,2}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \frac{\xi w'(t) - 1}{\frac{3}{4}\xi + it + \xi w(t)} t dt.$$

Применение численных методов дает для суммы интегралов приближенное значение -0.63 , что говорит о том, что основное состояние $\Omega_{\mathcal{M}_K}$ оказывается энергетически более выгодным, чем основное состояние Ω_{Δ} свободной теории. Подобные вычисления для взаимодействия скалярного поля с двумя источниками (внешними частицами) дают зависимость $E(\mathcal{M}_K)$ следующего вида

$$E(\mathcal{M}_K) = -0.33 \frac{1}{r}.$$

Связная компонента. Покажем, что множество допустимых матриц при $N = 2$ имеет связную компоненту. Мы будем искать ее в следующем инвариантном относительно группы вращений виде. Рассмотрим

три вектора

$$\begin{aligned} D_\mu^{r,\theta} &= r_m(\cos \theta D_\mu^{m1} + \sin \theta D_\mu^{m2}), \\ D_\mu^{p,\theta} &= p_m(\cos \theta D_\mu^{m1} + \sin \theta D_\mu^{m2}), \\ D_\mu^{q,\theta} &= q_m(\cos \theta D_\mu^{m1} + \sin \theta D_\mu^{m2}), \end{aligned}$$

где θ – безразмерная величина, параметризующая связную компоненту. Несложно увидеть, что $D_\mu^{s,\theta}$, $s = r, p, q$, являясь линейной комбинацией векторов D_μ^{mn} , также являются аналитическими дефектными векторами и могут быть использованы для построения резольвент самосопряженных расширений оператора $\Delta_{\{\mathbf{x}_n\}}$. Скалярные произведения векторов $D_\mu^{s,\theta}$ легко вычисляются

$$\begin{aligned} (\mu - \lambda)(D_{\bar{\mu}}^{r,\theta}, D_\lambda^{r,\theta}) &= i\sqrt{\mu} - i\sqrt{\lambda} + 2 \sin 2\theta \left(\frac{1}{r} w(\sqrt{\mu}r) - \frac{1}{r} w(\sqrt{\lambda}r) \right), \\ (\mu - \lambda)(D_{\bar{\mu}}^{p,\theta}, D_\lambda^{p,\theta}) &= i\sqrt{\mu} - i\sqrt{\lambda} - \sin 2\theta \left(\frac{1}{r} w(\sqrt{\mu}r) - \frac{1}{r} w(\sqrt{\lambda}r) \right), \\ (\mu - \lambda)(D_{\bar{\mu}}^{q,\theta}, D_\lambda^{q,\theta}) &= i\sqrt{\mu} - i\sqrt{\lambda} - \sin 2\theta \left(\frac{1}{r} w(\sqrt{\mu}r) - \frac{1}{r} w(\sqrt{\lambda}r) \right), \\ (D_{\bar{\mu}}^{r,\theta}, D_\lambda^{p,\theta}) &= (D_{\bar{\mu}}^{r,\theta}, D_\lambda^{q,\theta}) = (D_{\bar{\mu}}^{p,\theta}, D_\lambda^{q,\theta}) = 0 \end{aligned}$$

и позволяют ввести диагональное решение уравнения (29)

$$\Gamma_\mu^\theta = i\sqrt{\mu}I + \sin 2\theta \frac{w(\sqrt{\mu}r)}{r} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Эта матрица вполне удовлетворяет условиям (34), (35) для сходимости интеграла (30) и при этом определитель матрицы $\mathcal{M}(\theta) - \Gamma_\mu^\theta$, где

$$\mathcal{M}(\theta) = \Gamma_\mu^\theta|_{\mu=0} = \frac{3}{4r} \sin 2\theta \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

не обращается в ноль. Таким образом, резольвента

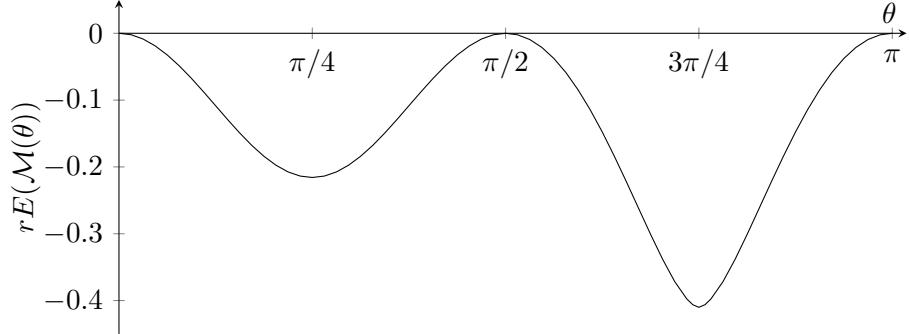
$$R_\mu^\theta = R_\mu + D_\mu^{s,\theta}(\mathcal{M}(\theta) - \Gamma_\mu^\theta)^{-1}(D_{\bar{\mu}}^{s',\theta}, \cdot), \quad s = r, p, q$$

дает самосопряженное расширение с конечным значением интеграла $E(\mathcal{M}(\theta))$. Подставляя (49) в (30) мы приходим к следующему выражению

$$\begin{aligned} E(\mathcal{M}(\theta)) &= \frac{1}{2\pi r} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{2 \sin 2\theta w'(t) - 1}{\frac{3}{2} \sin 2\theta + it + 2 \sin 2\theta w(t)} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\sin 2\theta w'(t) + 1}{\frac{3}{4} \sin 2\theta - it + \sin 2\theta w(t)} \right) t dt. \end{aligned}$$

График зависимости безразмерной величины $rE(\mathcal{M}(\theta))$ от θ , $0 \leq \theta \leq \pi$ приведен на рисунке

Зависимость $rE(\mathcal{M}(\theta))$ от θ



Значения $\theta = 0, \pi$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$ соответствуют расширению Крейна для $N = 1$, где сингулярные граничные условия сосредоточены либо в точке \mathbf{x}_1 ($\theta = 0, \pi$), либо в точке \mathbf{x}_2 ($\theta = \frac{\pi}{2}$). Как и следовало ожидать, разность энергий (30) для таких решений равна нулю $E(\mathcal{M}(\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\})) = 0$. Локальные минимумы $\theta = \frac{\pi}{4}$ и $\theta = \frac{3\pi}{4}$ соответствуют граничным условиям, при которых значения поля B в точках \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 совпадают ($\theta = \frac{\pi}{4}$), либо совпадают по модулю, но направлены в противоположные стороны ($\theta = \frac{3\pi}{4}$). Остальные точки $\theta \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ задают граничные условия, при которых значения поля в точках \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 связаны друг с другом коэффициентом $\operatorname{ctg} \theta$

$$\lim_{x \rightarrow x_1} B_x = \operatorname{ctg} \theta \lim_{x \rightarrow x_2} B_x,$$

то есть мы приходим к эффективной дальнодействующей теории.

Таким образом, мы видим, что множество допустимых матриц для гамильтониана поперечного поля имеет связную компоненту, описываемую безразмерным параметром θ . Разность энергий $E(\mathcal{M}(\theta))$ при изменении θ непрерывно меняется от нуля до некоторого отрицательного значения. Это позволяет использовать рассматриваемую модель для описания систем с размерной трансмутацией. Действительно, при построении основного состояния $\Omega_{\mathcal{M}(\theta)}$ параметр θ может быть разным для разных значений расстояния r между частицами второго (фермионного) поля. Любая его нетривиальная зависимость

$$\theta(r) \neq \text{const}$$

означает появление размерного параметра, то есть размерную трансмутацию. Конкретный вид зависимости $\theta(r)$ определяется исходным взаим-

модействием и процедурой перенормировки. Она вбирает в себя “облако” виртуальных частиц и другие непертурбативные эффекты, а на выходе дает лишь гамильтониан \mathcal{H} с набором собственных состояний и зависимость θ от r .

Заключение

Мы рассмотрели различные решения уравнения на собственные состояния свободного квантового гамильтониана скалярного поля и векторного поля в калибровке Кулона. Данные решения не являются состояниями свободного поля и, по аналогии с конечномерной теорией сингулярных возмущений, могут быть проинтерпретированы как собственные функции возмущения оператора Гамильтона свободного поля, либо как собственные функции некоторой асимптотически-свободной системы после процедуры перенормировки.

Автор выражает благодарность С. Н. Набоко за замечательные консультации по теории Бирмана-Вишика-Крейна.

Список литературы

- [1] Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев, “Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом”, Доклады АН СССР **137** вып. 5 (1961) 1011–1014.
- [2] S. Albeverio, P. Kurasov, *Singular Perturbation of Differential Operators. Solvable Schrödinger type Operators*, Cambridge University Press, 2000.
- [3] Т. А. Bolokhov, “Quantum Hamiltonian eigenstates for a free transverse field”, arXiv:1512.04121 [math-ph].
- [4] Ж. Зинн-Жюстен, *Континуальный интеграл в квантовой механике*, М. Физматлит, 2006.
- [5] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. 1. Функциональный анализ*, М. Мир, 1977.
- [6] М. Ш. Бирман, “К теории самосопряженных расширений положительно определенных операторов”, Матем. сб., **38(80)**:4 (1956), 431–450.
- [7] М. И. Вишик, “Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений”, Тр. ММО, **1**, ГИТЛ, М.Л., 1952, 187–246.

- [8] Крейн М.Г. “Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения I и II”, Математический сборник том 20(63), 1947, 431–495;
- [9] А. Н. Kochubey, “О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений”, Матем. заметки, **17**:1 (1975), 41–48.
В. М. Брук, “Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии”, Матем. сб., **100**:2 (1976), 210–216.
- [10] T. A. Bolokhov, “The Scalar Products of the Regular Analytic Vectors of the Laplace Operator in the Solenoidal Subspace”, J Math Sci, **242** N5, (2019) 642–660.